UNE QUESTION D'ANALYSE INDÉTERMINÉE

Par M. **Delannoy**.

L'une quelconque des équations

$$2t^3 \pm 1 = t'^3, \qquad 2t^3 \pm 2 = t'^3, \qquad t^3 \pm u^3 = 4t'^3,$$

est impossible en nombres entiers (P. F. Teilhet) (*).

Dans ses *Éléments d'Algèbre* (édition 1798, t. II, § **247**, p. 355), Euler a démontré que l'équation $x^3 \pm y^3 = 2z^3$ est impossible, si ce n'est dans le cas évident $y = x$.

Il est facile, en suivant le mode de démonstration d'Euler, de démontrer également l'impossibilité de

$$2x^3 \pm 2y^3 = 8z^3 \quad \text{ou} \quad x^3 \pm y^3 = 4z^3.$$

Posons

$$\frac{x+y}{2} = p, \quad \frac{x-y}{2} = q, \quad \text{d'où} \quad x = p + q, \quad y = p - q;$$

$$x^3 + y^3 = 2p(p^2 + 3q^2).$$

Il faut prouver que cette quantité ne peut être égale au quadruple d'un cube, ou que $\frac{p}{2}(p^2 + 3q^2)$, ne peut être un cube.

Il y a deux cas à considérer, suivant que p est ou n'est pas multiple de 3.

1° p n'est pas divisible par 3.

On réduira $p^2 + 3q^2$ en cube en posant

$$p = t(t^2 - 9u^2),$$
$$q = 3u(t^2 - u^2).$$

Il faut encore que $\frac{p}{2}$ ou $\frac{t}{2}(t + 3u)(t - 3u)$ soit un cube. Ces trois facteurs, étant premiers entre eux, doivent être chacun un cube.

Si $t + 3u = f^3$ et $t - 3u = g^3$, il vient

$$2t = f^3 + g^3,$$

ou

$$4\frac{t}{2} = f^3 + g^3 = 4h^3,$$

et on aurait deux cubes beaucoup plus petits, dont la somme serait le quadruple d'un cube.

2° $p = 3r$, la formule devient

$$\frac{3r}{2}(9r^2 + 3q^2) = \frac{9r}{2}(3r^2 + q^2).$$

On transforme $3r^2 + q^2$ en cube, en posant

$$q = (t^2 - 9u^2)t,$$
$$r = 3u(t^2 - u^2);$$

d'où

$$\frac{9r}{2} = 27\frac{u}{2}(t^2 - u^2).$$

Il faut que $\frac{u}{2}(t + u)(t - u)$ soit un cube. Comme ces trois facteurs sont premiers entre eux, il faut que chacun soit un cube.

Soit

$$t + u = f^3,$$
$$t - u = g^3;$$

d'où $\qquad 2u = f^3 - g^3, \quad \text{ou} \quad 4\frac{u}{2} = f^3 - g^3.$

Mais $\frac{u}{2}$ doit être un cube; nous aurions, en bien plus petits nombres, deux nombres dont la différence serait le quadruple d'un cube.

Puisqu'on ne peut assigner, en petits nombres, des cubes tels que leur somme ou leur différence soit le quadruple d'un cube, il est clair que cela n'a pas lieu non plus pour les grands nombres.

(*) Les deux premières parties de ce théorème ont été posées en question, sous le n° 749, dans l'*Intermédiaire des Mathématiciens* où cette solution n'a été que très sommairement indiquée, faute de place.