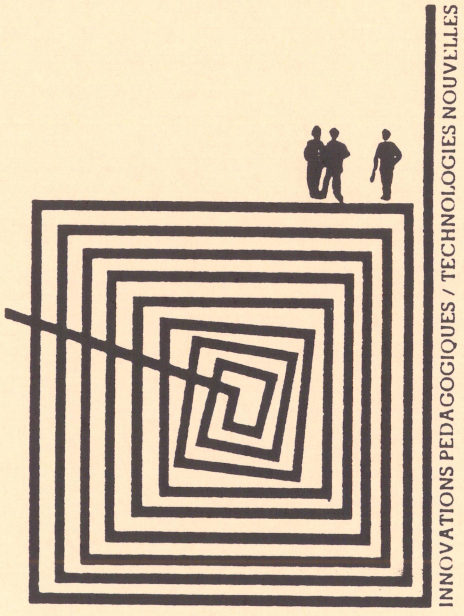
MINISTERE DE L'EDUCATION NATIONALE
DIRECTION DES LYCEES ET COLLEGES

INFORMATION ET ACTIVITES A PROPOS DES FONCTIONS DE TRANSFERT EN REGIME HARMONIQUE

Document pour les professeurs de mathématiques en section de techniciens supérieurs de la filière électronique



Groupe Inter IREM LYCEES TECHNIQUES

Brochure n°53

Université Paris-Nord.-
I.R.E.M. A Propos de
fonctions de transfert
Norbert BOY - Michel PHILBERT
Bernard VERLANT : IREM
de Paris-Nord

ISBN 2 86240 053 X

Dépôt légal : 3ème trimestre 1990

500 ex.
30 00F

AVANT PROPOS

On se propose dans ce document de présenter à l'aide d'exemples différents modes de représentation des fonctions de transfert en régime sinusoïdal permanent ainsi que les procédés utilisés en physique par les élèves de la filière électronique des Sections de Techniciens Supérieurs pour les obtenir rapidement.

On s'est donc efforcé ici de faire à ce sujet le lien entre les cours de mathématiques et de physique.

Norbert BOY

SOMMAIRE

I - DEFINITION

1°) Système linéaire page 5
2°) Exemples de fonctions de transfert en régime sinusoïdal permanent du 1er ordre page 6
3°) Unités logarithmiques, utilisation de ces fonctions de transfert, notations page 7

II - REPRESENTATIONS D'UNE TRANSMITTANCE HARMONIQUE

1°) Représentation linéaire page 8
2°) Représentation de Bode page 8
3°) Représentaiton de Nyquist page 15
4°) Exemples de fonctions de transfert du 1er ordre page 20
   a) Représentation d'un diagramme de Nyquist (activité à réaliser en mathématique) page 20
   b) Représentation de Bode
5°) Exemples de fonction de transfert du 2ième ordre page 27
   Exemple de travaux pratiques en mathématique page 33
6°) Représentations d'une transmittance harmonique et programme de mathématique en STS page 39
7°) Exemple d'activité mathématique sur les nombres complexes page 40

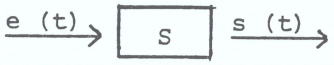
III - TRANSFORMATION CISSOIDALE $\mathcal{C}_\omega$

1°) Définition page 49
2°) Quelques propriétés de la transformation $\mathcal{C}_\omega$ page 49
3°) Application de la transformation $\mathcal{C}_\omega$. page 50

FONCTIONS DE TRANSFERT EN REGIME SINUSOIDAL (HARMONIQUE) PERMANENT

I - DEFINITION

1°) Système linéaire



$t \longmapsto e(t)$ grandeur d'entrée

$t \longmapsto s(t)$ grandeur de sortie

Ce système linéaire se traduit par une équation différentielle linéaire à coefficients constants :

$$a_0 s(t) + a_1 s'(t) + \ldots\ldots + a_n s^{(n)}(t) = b_0 e(t) + b_1 e'(t) + \ldots\ldots + B_n e^{(n)}(t)$$

$a_0, a_1, \ldots\ldots, a_n, b_0, b_1 \ldots\ldots b_n$ sont des constantes réelles.

En régime sinusoïdal permanent, ce système est caractérisé par sa fonction de transfert complexe ou transmittance (harmonique). C'est une fonction $\underline{T}$ de la pulsation ω du régime sinusoïdal $\underline{T} : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{C}$.
On montre que :

$$\underline{T}(\omega) = \frac{b_0 + b_1 j\omega + b_2 (j\omega)^2 + \ldots\ldots + b_n (j\omega)^n}{a_0 + a_1 j\omega + a_2 (j\omega)^2 + \ldots\ldots + a_n (j\omega)^n} \quad ,$$

- j est le nombre complexe de module 1, et d'argument $\pi/2$
- Ces notions sont abordées dès la classe de première F2 (ce qui est alors appelé : rapport des impédances complexes)
- $\underline{T}$ est la notation pour un nombre complexe en physique et T pour son module.
- Nous donnerons à la fin du document un cadre mathématique pour définir $\underline{T}$.

2°) Exemples de fonctions de transfert en régime sinusoïdal permanent du 1er ordre

(Equation différentielle linéaire du 1er ordre ; jω n'apparaît qu'à la puissance 1)

a) Circuit R C

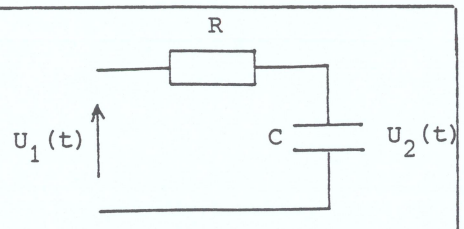


Fig. 1

$$\underline{T}(\omega) = \frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1} = \frac{\frac{1}{jC\omega}}{R+\frac{1}{jC\omega}} = \frac{1}{1 + jRC\omega} = \frac{1}{1 + j\frac{\omega}{\omega_o}}$$

avec $RC = \frac{1}{\omega_o}$; ω_o pulsation propre du circuit

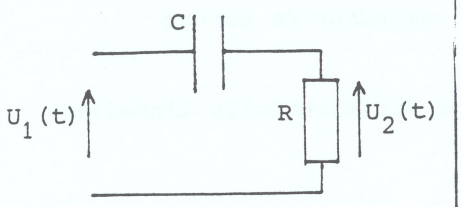


Fig. 2

$$\underline{T}(\omega) = \frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1} = \frac{R}{\frac{1}{jC\omega} + R} = \frac{jRC\omega}{1+jRC\omega} = \frac{j\frac{\omega}{\omega_o}}{1+j\frac{\omega}{\omega_o}}$$

b) Circuit RL

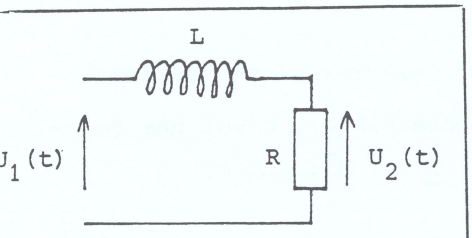


Fig. 3

$$\underline{T}(\omega) = \frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1} = \frac{R}{jL\omega+R} = \frac{1}{1+j\frac{L\omega}{R}} = \frac{1}{1+j\frac{\omega}{\omega_o}}$$

avec $\frac{L}{R} = \frac{1}{\omega_o}$

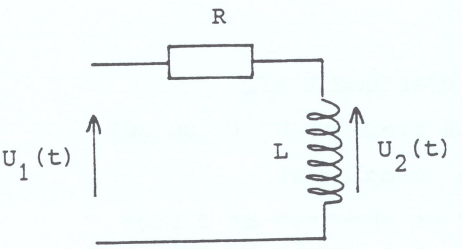


Fig. 4

$$\underline{T}(\omega) = \frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1} = \frac{jL\omega}{R+jL\omega} = \frac{j\frac{L\omega}{R}}{1+j\frac{L\omega}{R}} = \frac{j\frac{\omega}{\omega_o}}{1+j\frac{\omega}{\omega_o}}$$

. Nous verrons l'intérêt de faire apparaître un 1 au dénominateur dans la représentation de Nyquist.

3°) Unités logarithmiques, utilisation de ces fonctions de transfert, notations

Il est fréquent que l'on s'intéresse à un rapport de puissance P/P'.
Il est pratique de considérer le logarithme de ce rapport, exprimé dans une nouvelle unité :

. ln (P/P') dont l'unité est le néper
. log (P/P') dont l'unité est le bel

Dans la pratique, on utilise un sous-multiple du bel, le décibel (dB).

Par exemple, si P et P' sont dissipés dans un même dipôle résistif de résistance R :

$$10 \log\left(\frac{P}{P'}\right) = 10 \log\left(\frac{RI_e^2}{RI_e'^2}\right) = 20 \log\left(\frac{I_e}{I_e'}\right) = 20 \log\left(\frac{\frac{V_e}{R}}{\frac{V'_e}{R}}\right)$$

(notation : indice e pour efficace).

En généralisant, on exprime un rapport de valeurs efficaces de tensions (ou de courants) en décibels par :

$$20 \log\left(\frac{V_e}{V'_e}\right) \quad \text{ou} \quad 20 \log\left(\frac{I_e}{I_e'}\right) .$$

Ces expressions représentent le gain en puissance : $G = 10 \log \frac{P}{P'}$ exprimé en décibels.

Dans la pratique, de nombreuses fonctions de transfert peuvent se mettre sous forme de produit de fonctions de transfert du 1er ordre :

$$\underline{T}(\omega) = \underline{T}_1(\omega) \times \underline{T}_2(\omega) \times \ldots\ldots \underline{T}_n(\omega)$$

Nous avons $\text{Arg } \underline{T}(\omega) = \text{Arg } \underline{T}_1(\omega) + \ldots. + \text{Arg } \underline{T}_n(\omega)$

Si nous posons $G = 20 \log |\underline{T}(\omega)|$ on obtient :

$$G = G_1 + G_2 + \ldots\ldots + G_n$$

Ces propriétés sont intéressantes pour une exploitation graphique.

II - REPRESENTATIONS D'UNE TRANSMITTANCE HARMONIQUE

$\underline{T}(\omega) = T(\omega)\, e^{j\varphi(\omega)}$ $\qquad (T(\omega) = |\underline{T}_1(\omega)|)$

$\underline{T}(\omega) = T(\omega) \cos\varphi(\omega) + j\, T(\omega) \sin\varphi(\omega)$

où ω est un réel positif.

On peut ici faire aisément le lien avec les modules de programmes de S T S où nous trouvons :

> "Exemples de tracé de courbes planes définies par une représentation paramétrique $t \mapsto f(t) + i\, g(t)$, ou une représentation polaire $t \mapsto f(t) = r(t) \exp(i\varphi(t))$, ou $r(t) \geqslant 0$."

Dans un premier temps, nous évoquerons d'autres types de représentations utilisés par les physiciens, établissant ainsi d'autres liens avec les programmes de mathématiques en S T S.

1°) Représentation linéaire

On représente les fonctions $\omega \mapsto T(\omega)$; $\omega \mapsto \varphi(\omega)$

(Calculs dans $\mathbb{C}$; étude de fonctions usuelles pour φ fonctions circulaires réciproques).

Un inconvénient : comme ω peut varier de 0 à $+\infty$, il est difficile d'avoir une représentation détaillée dans tous les domaines de fréquences, d'autre part, il n'est pas aisé de tracer rapidement, lorqu'on connaît l'une de ces courbes pour une fréquence propre ω_0, celle correspondant à une fréquence propre $k\omega_0$.

2°) Représentation de Bode

a) Définition

Elle comporte deux courbes ; on représente les fonction $\omega \mapsto 20 \log T(\omega)$ et $\omega \mapsto \varphi(\omega)$, le gain $G = 20 \log T(\omega)$ et φ sont portés en échelles linéaires, la pulsation est portée en échelle logarithmique.

Cette représentation est très utilisée car :

. les différents domaines de fréquences sont représentés ;

. il est aisé dans la plupart des cas de donner un tracé approximatif, lorsque la fonction de transfert s'exprime sous forme d'un produit de fonctions de transferts élémentaires dont la représentation est connue.

b) Exemple de représentation de Bode de fonctions de transferts élémentaires

(Nous présentons la démarche utilisée par nos élèves en physique).

b1) $\underline{T}_1(\omega) = j\frac{\omega}{\omega_o}$ *(fig. 5)* ($\frac{\omega}{\omega_o}$ fréquence exprimée en Hertz).

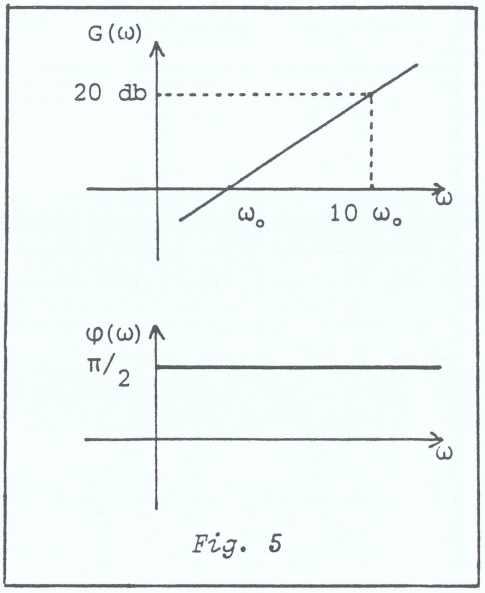


Fig. 5

$|\ T_1(\omega)\ | = T_1(\omega) = \frac{\omega}{\omega_o}$, $G_1 = 20 \log \frac{\omega}{\omega_o}$

(augmentation de 20 db/décade)

$\varphi_1(\omega) = \pi/2$

b2) $\underline{T}_2(\omega) = 1 + j\frac{\omega}{\omega_o}$ *(fig. 6)*

$|\ T_2(\omega)\ | = T_2(\omega) = \sqrt{1 + \frac{\omega^2}{\omega_o^2}}$

pour $\omega >> \omega_o$ (ω très grand devant ω_o)

$T_2(\omega) \approx T_1(\omega)$, $\varphi_2(\omega) \to \pi/2$

pour $\omega << \omega_o$ $\varphi_2(\omega) \to 0$

(ce qui détermine le diagramme asymtotique)

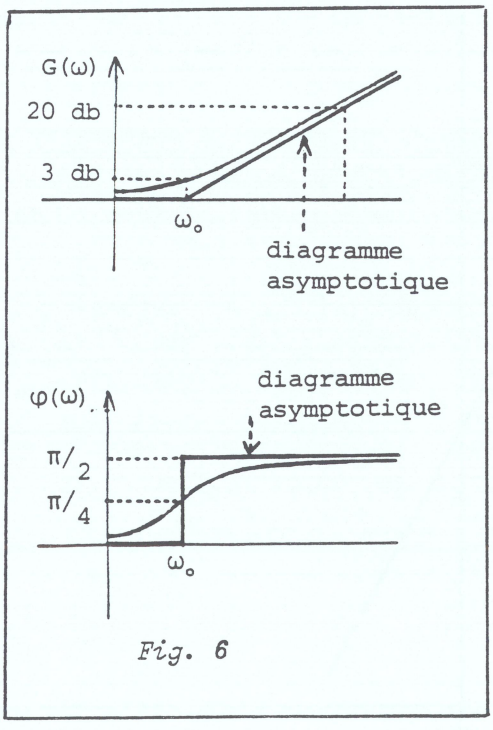


Fig. 6

Le diagramme, la valeur de ces fonctions pour quelques valeurs de ω (par exemple $G_2(\omega_o) = 20 \log \sqrt{2} \approx 3$ db ; $\varphi_2(\omega_o) = \pi/4$), les connaissances physiques permettent un tracé rapide des représentations graphiques de $\omega \mapsto 20 \log \sqrt{1 + \frac{\omega 2}{\omega_o 2}}$,

$\omega \mapsto$ Arctan $\left(\frac{\omega}{\omega_o}\right)$, sans une étude détaillée.

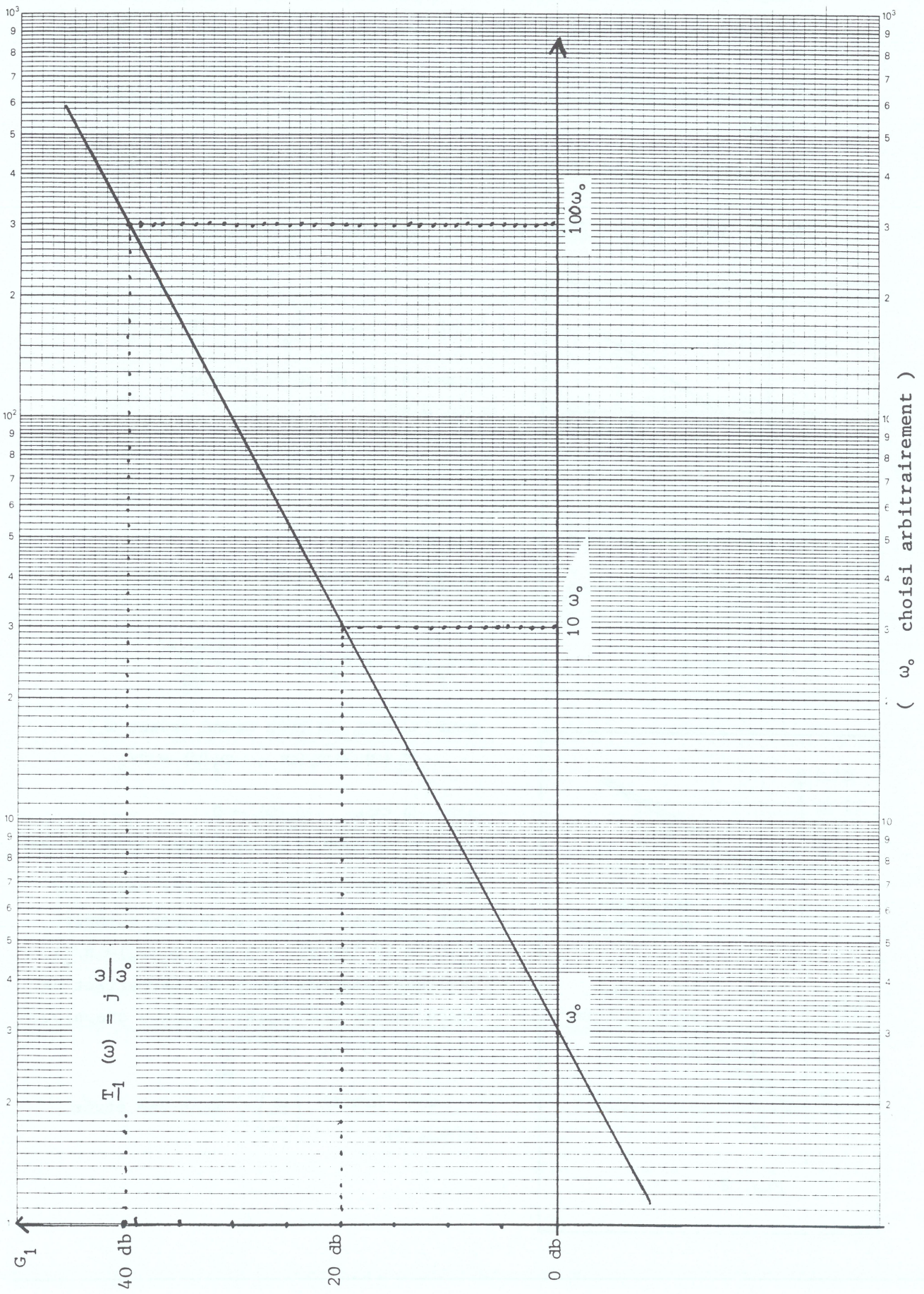


Fig. 5

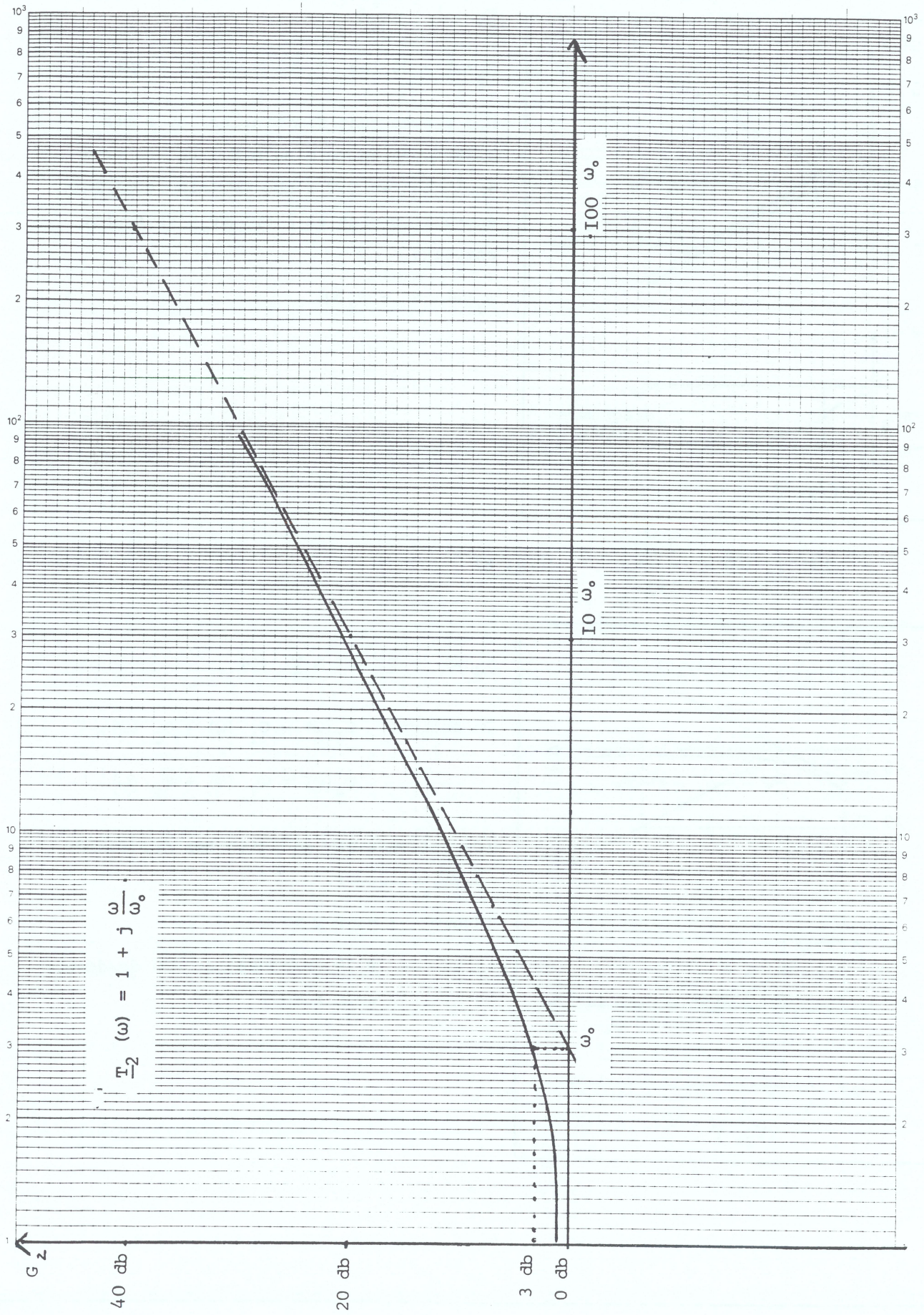


Fig. 6

b3) $\underline{T}_3(\omega) = \dfrac{1}{1 + j\dfrac{\omega}{\omega_o}}$ *(fig. 7)*

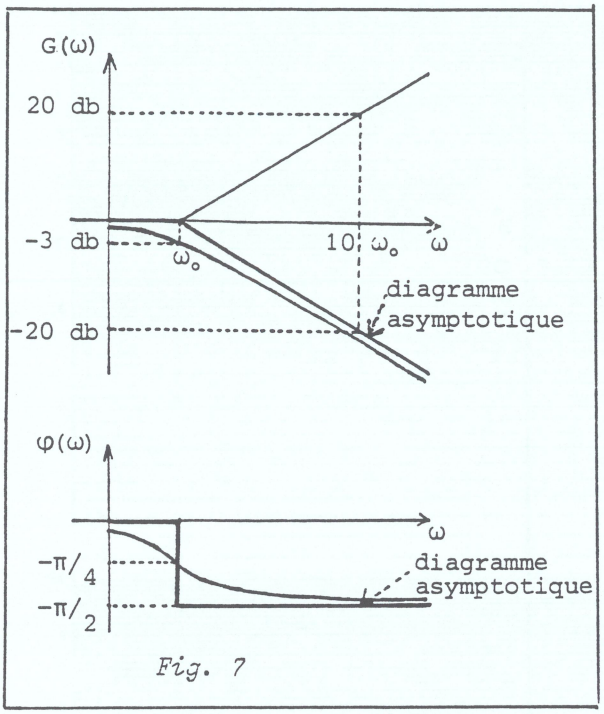


Fig. 7

$\underline{T}_3(\omega) = \dfrac{1}{T_2(\omega)}$

$G_3(\omega) = 20 \log T_3(\omega) = -20 \log T_2(\omega)$

Nos élèves sont familiarisés avec ces diagrammes en terminale F ; ce qui peut expliquer en S T S une certaine confusion entre l'inverse et l'opposé d'un nombre complexe.

$\varphi_3(\omega) = -\varphi_2(\omega)$

b4) $\underline{T}_4(\omega) = \dfrac{j\dfrac{\omega}{\omega_o}}{1+j\dfrac{\omega}{\omega_o}}$ *(fig. 8)*

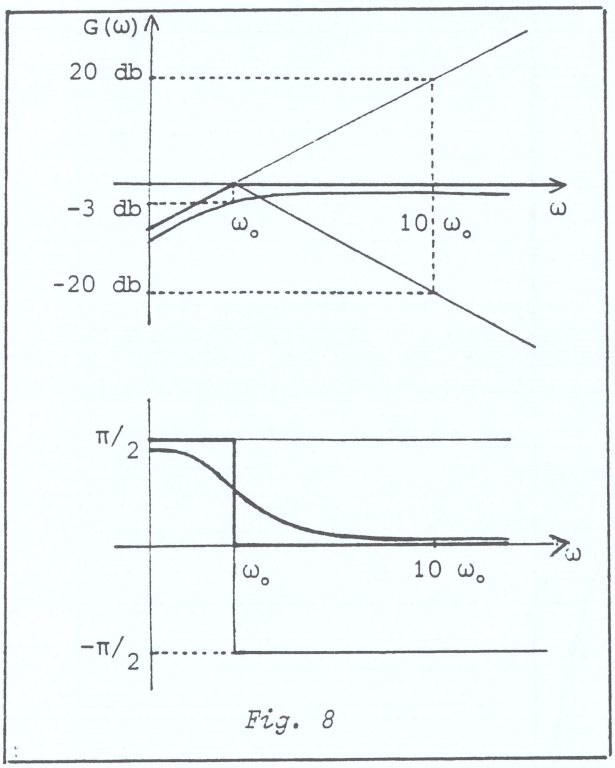


Fig. 8

$\underline{T}_4(\omega) = \underline{T}_1(\omega) \times \underline{T}_2(\omega)$

On obtient $G_4(\omega) = G_1(\omega) + G_2(\omega)$,

$\varphi_4(\omega) = \varphi_1(\omega) + \varphi_2(\omega)$.

(On raisonne par addition des diagrammes asymptotiques).

(Exemple : pour $\omega >> \omega_o$

+ 20 db/décade et -20 db/décade

soit zéro.)

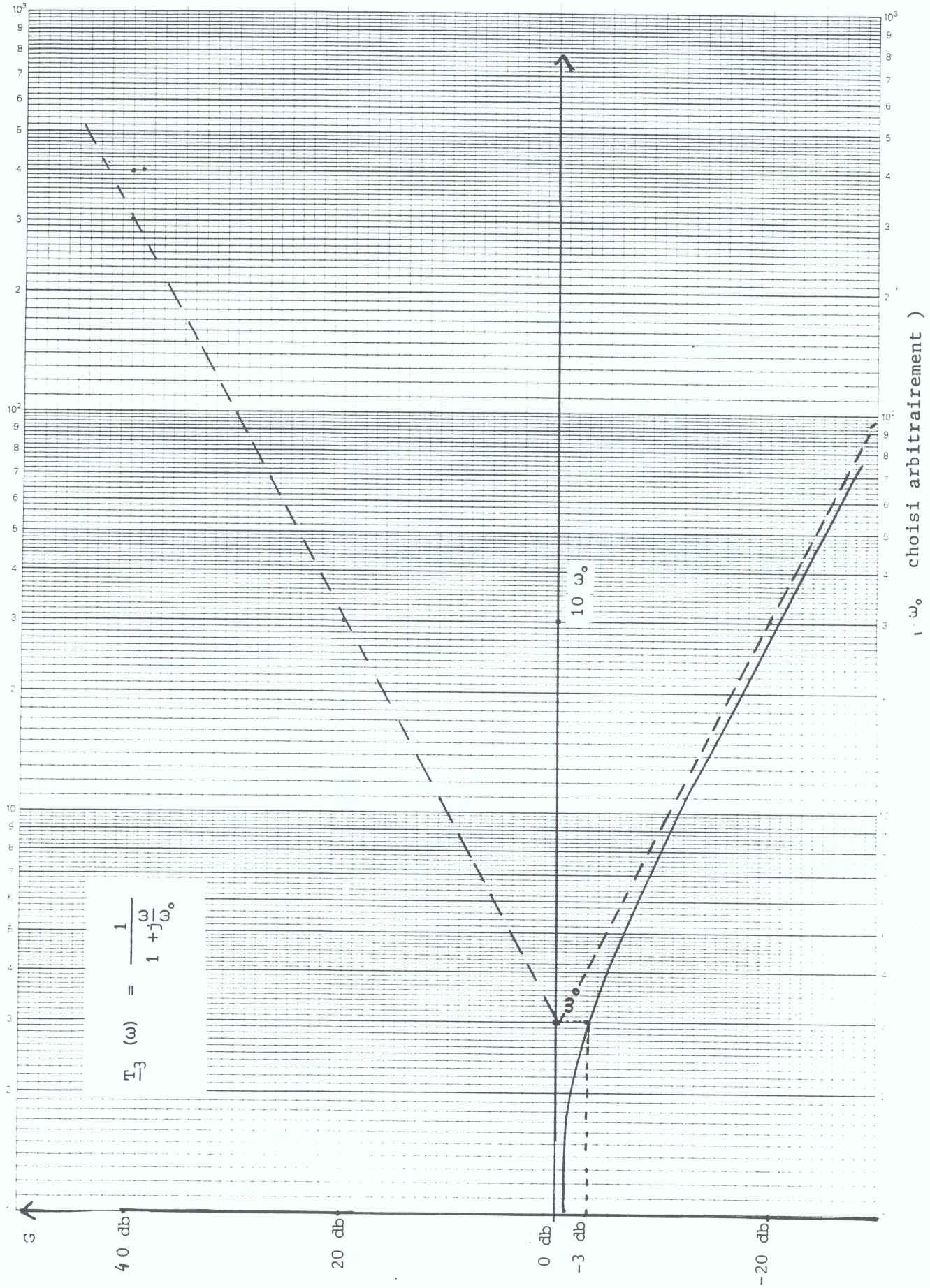

$\underline{T}_3(\omega) = \dfrac{1}{1 + j\frac{\omega}{\omega_0}}$
$10\ \omega_0$
ω_0
ω_0 choisi arbitrairement)
G
40 db
20 db
0 db
-3 db
-20 db

Fig. 7

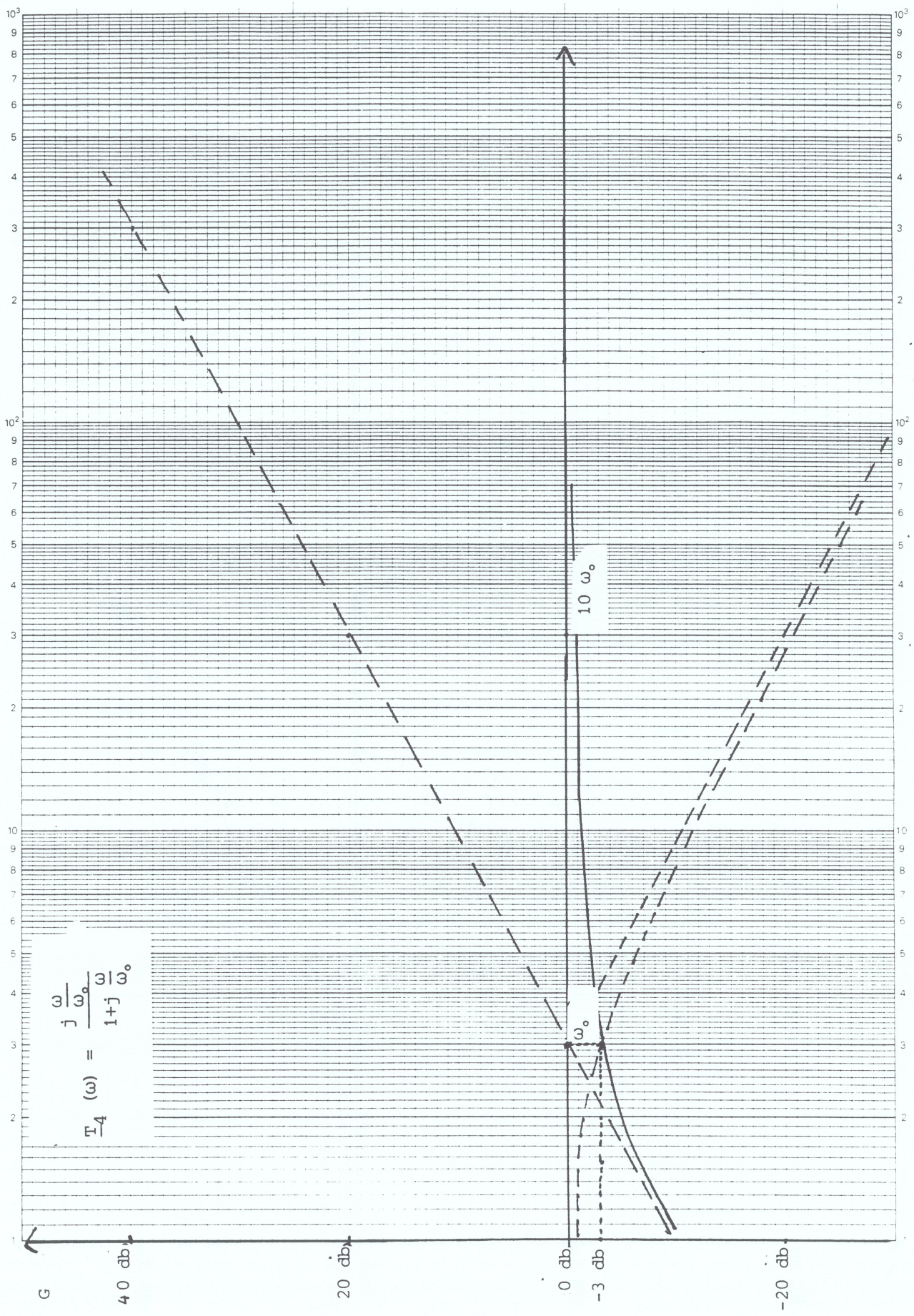

$\underline{T}_4(\omega) = \frac{j\frac{\omega}{\omega_0}}{1+j\frac{\omega}{\omega_0}}$
10 ω₀
ω₀
G
40 db
20 db
0 db
-3 db
-20 db

Fig. 8

3°) Représentation de Nyquist

$$\omega \mapsto \underline{T}(\omega)$$

Cette représentation s'effectue dans le plan complexe :

- en abscisses : la partie réelle de $\underline{T}(\omega)$
- en ordonnées : la partie imaginaire de $\underline{T}(\omega)$
  (voir introduction II)

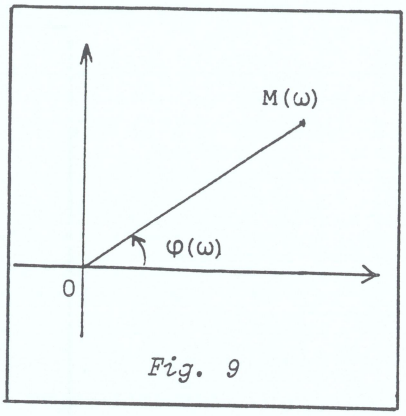


Fig. 9

Nous étudierons ici le diagramme de Nyquist des fonctions $\underline{T}_1$, $\underline{T}_2$, $\underline{T}_3$, $\underline{T}_4$ que l'on peut déterminer (pour $\underline{T}_3$ et $\underline{T}_4$) en utilisant les propriétés de l'inversion complexe.

a) $\underline{T}_1(\omega) = j\frac{\omega}{\omega_o}$

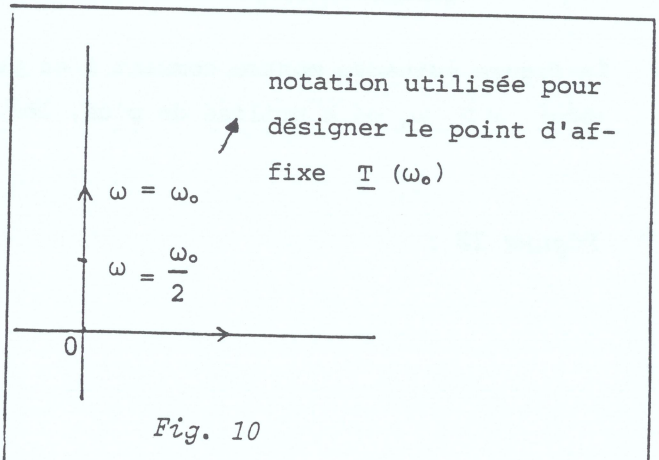


Fig. 10

b) $\underline{T}_2(\omega) = 1 + j\frac{\omega}{\omega_o}$

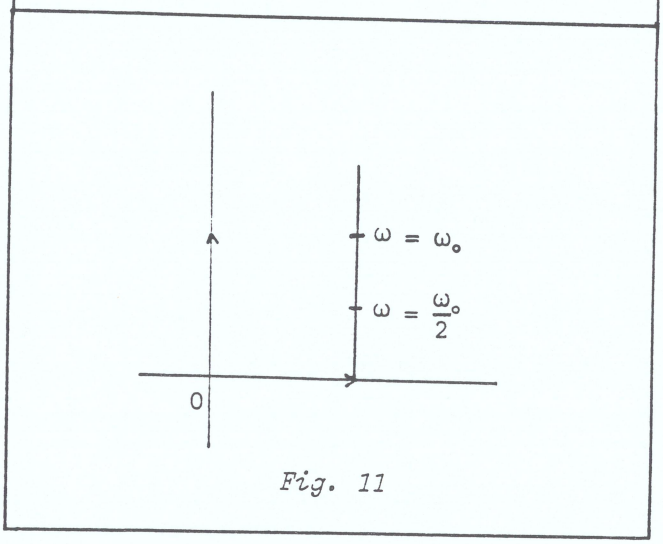


Fig. 11

c) $\underline{T}_3(\omega) = \dfrac{1}{1 + j\frac{\omega}{\omega_o}}$ (On utilise l'inverse d'une demi-droite ne passant pas par 0) ; transformation $z \mapsto \frac{1}{z}$)

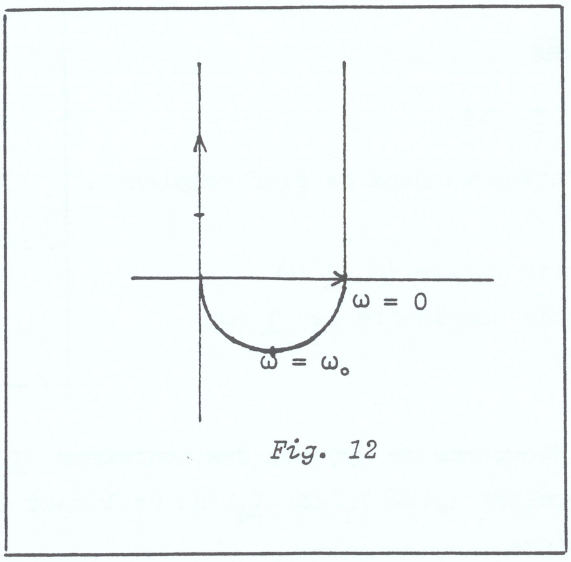


Fig. 12

La figure suivante montre comment l'on peut graduer ce diagramme (pour $\omega > \omega_0$ on a utilisé de plus, les propriétés de l'homothétie).

Figure 13 :

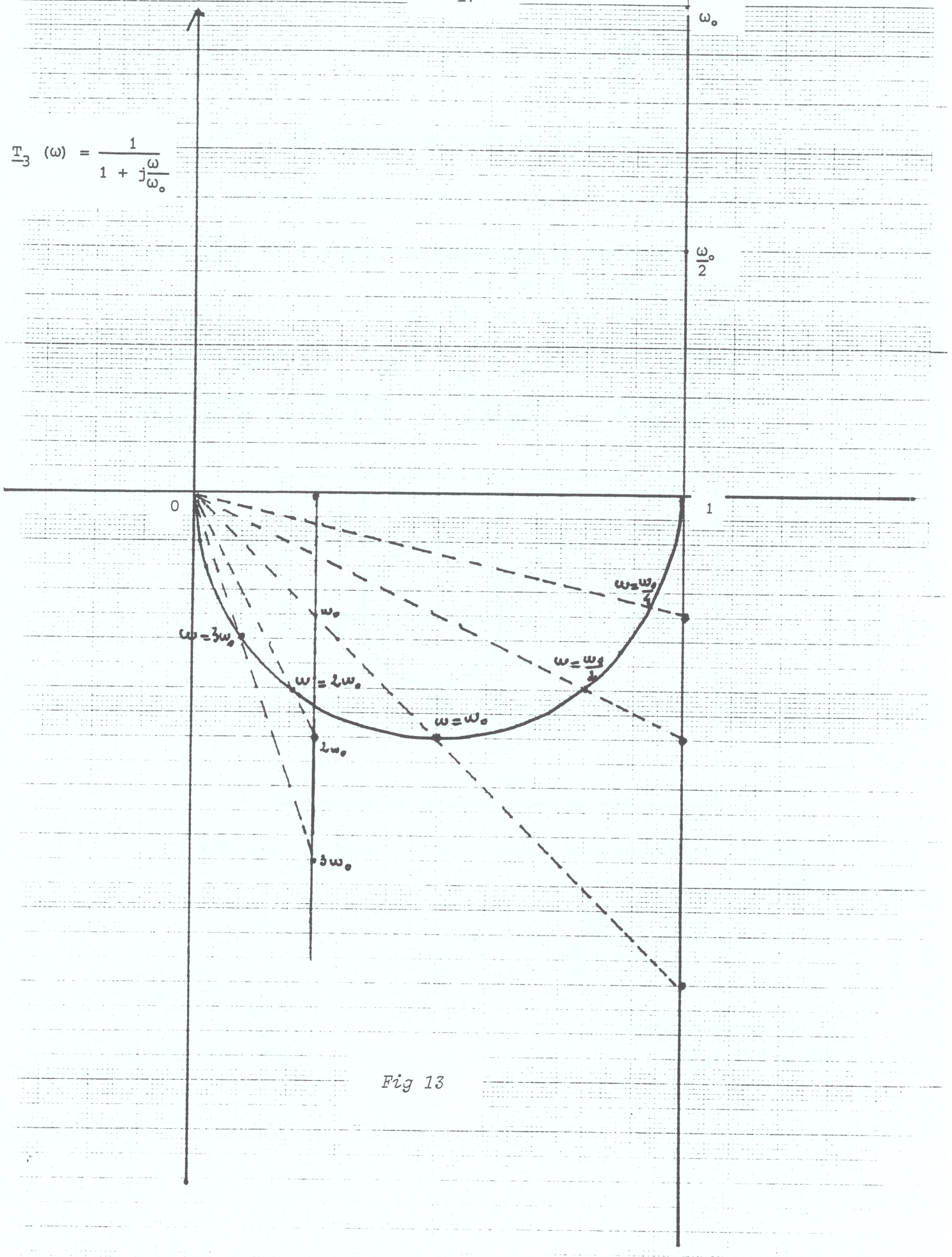


Fig 13

Graduation du diagramme de Nyquist de T_3

d) $\underline{T}_4(\omega) = \dfrac{j\frac{\omega}{\omega_o}}{1 + j\frac{\omega}{\omega_o}}$

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{u}\ \vec{v})$.

En mathématique, on emploie souvent la démarche suivante :

On recherche par la transformation complexe $z \mapsto \dfrac{z}{1+z}$ des points d'affixes iy avec $y > 0$.

On écrit $Z = \dfrac{z}{1+z} = 1 - \dfrac{1}{1+z}$,

$z \mapsto z_1 = 1 + z \mapsto z_2 = \dfrac{1}{z_1} \mapsto z_3 = -z_2 \mapsto z_4 = 1 + z_3$

translation de vecteur $\vec{u}$ — inversion complexe — symétrie de centre O — translation de vecteur $\vec{u}$

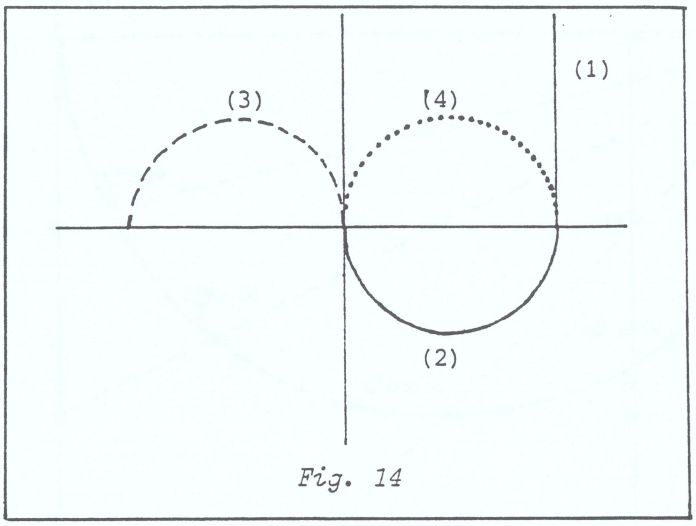


Fig. 14

En physique, on cherche à se ramener à des fonctions de transferts connues.

On écrit $\underline{T}_4(\omega) = \dfrac{j\frac{\omega}{\omega_o}}{1 + j\frac{\omega}{\omega_o}} = \dfrac{1}{1 - j\frac{\omega}{\omega_o}}$.

$\underline{T}_4(\omega)$ est le complexe conjugué de $\underline{T}_3(\omega)$

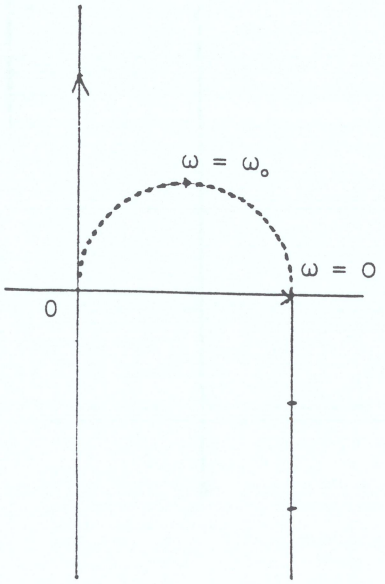


Fig. 15

$$\underline{T}_4(\omega) = \frac{j\,\frac{\omega}{\omega_0}}{1 + j\,\frac{\omega}{\omega_0}} = \frac{1}{1 - j\,\frac{\omega}{\omega_0}} \cdot$$

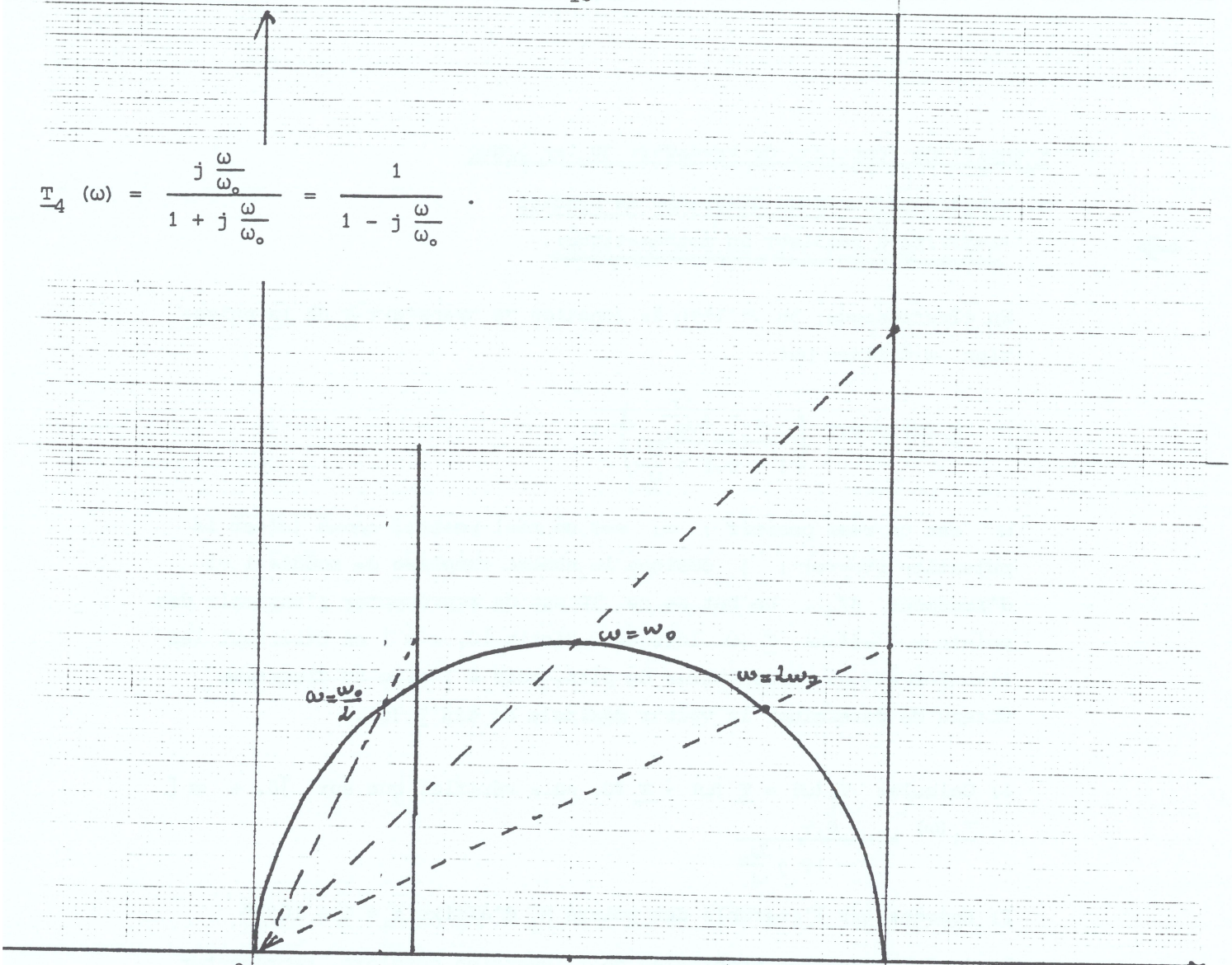
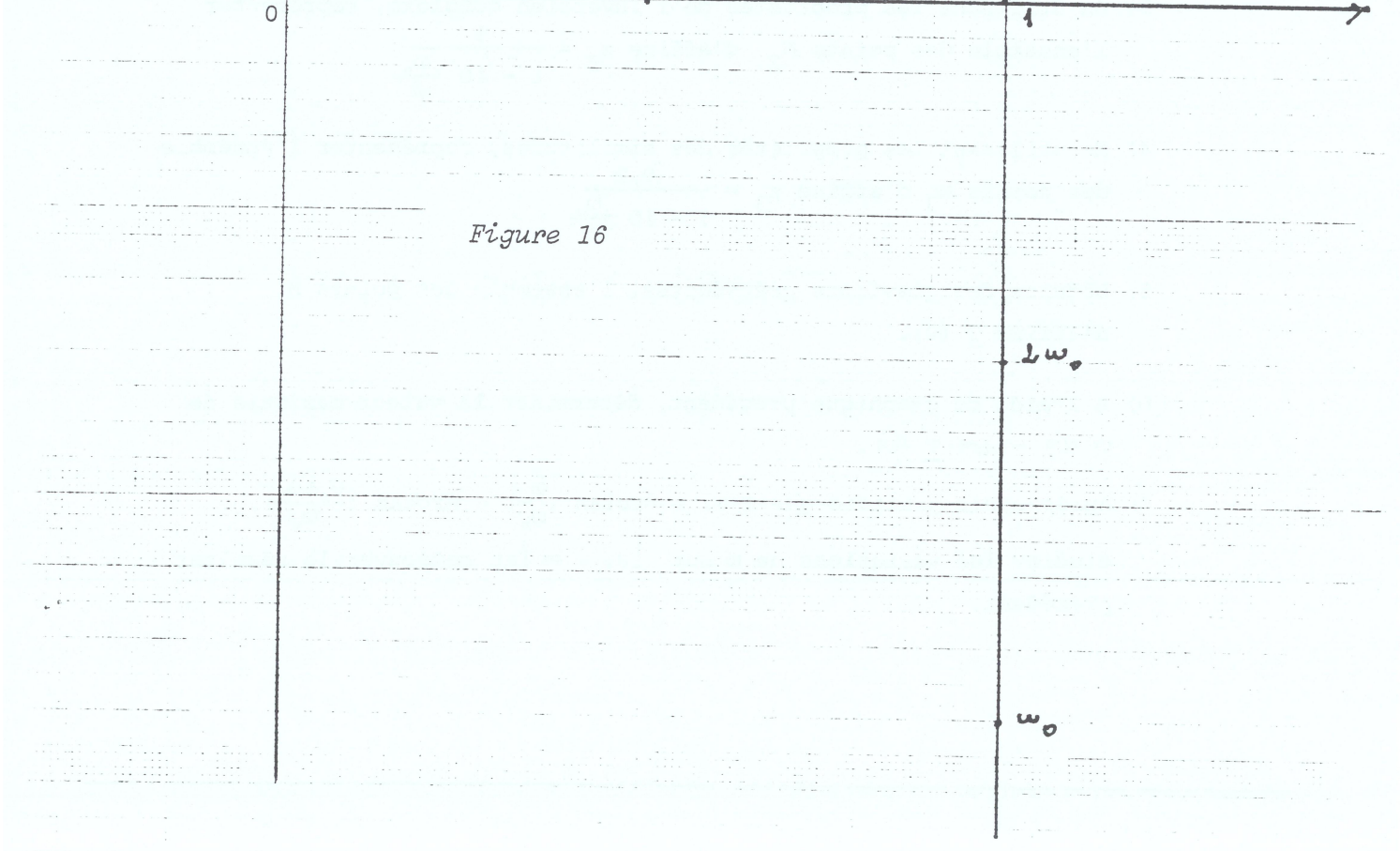


Figure 16



Graduation du diagramme de Nyquist de T_4

4°) Exemples de fonctions de transfert du 1er ordre

a) Représentation d'un diagramme de Nyquist
(activité à réaliser en mathématique).

En électronique, on utilise la fonction de transfert $\underline{T}$ de la pulsation ω définie par

$$\underline{T}(\omega) = 0{,}1 \left(\frac{1 + j\frac{\omega}{\omega_o}}{1 + 0{,}1\, j\frac{\omega}{\omega_o}} \right) ;$$

ω est un réel positif ; ω_o est un réel positif connu (c'est la pulsation propre) ; j désigne le nombre complexe de module 1 et d'argument $\pi/2$. Le but de ce TP est de représenter l'ensemble des points M d'affixe $\underline{T}(\omega)$ lorsque ω décrit $[0, +\infty[$ en utilisant les transformations élémentaires du plan, puis à l'aide du diagramme obtenu de déterminer la valeur maximale de $\arg \underline{T}(\omega)$.

1) Calculer $T_1(\omega) = \underline{T}(\omega) - \underline{T}(0)$ puis vérifier que sur $]0, +\infty[$ $\underline{T}_1(\omega) = \dfrac{0{,}9}{1 - 10\, j\frac{\omega_o}{\omega}}$

2) Représenter l'ensemble des points M_1 d'affixe $z_1 = 1 - 10j\frac{\omega_o}{\omega}$

3) En utilisant les propriétés de l'inversion complexe, représenter l'ensemble des points M_2 d'affixe $z_2 = \dfrac{1}{1 - 10\, j\frac{\omega_o}{\omega}}$

4) En utilisant les propriétés des similitudes, représenter l'ensemble des points M_3 d'affixe $z_3 = \dfrac{0{,}9}{1 - 10\, j\frac{\omega_o}{\omega}}$

5) Déduire des questions précédentes, l'ensemble des points M d'affixe $\underline{T}(\omega)$..

6) A l'aide du graphique précédent, déterminer la valeur maximale de $\varphi(\omega) = \arg \underline{T}(\omega)$.

7) Après avoir justifié que $\varphi(\omega) = \text{Arctan}\left(\frac{\omega}{\omega_o}\right) - \text{Arctan}\left(\frac{0{,}1\omega}{\omega_o}\right)$, étudier les variations de φ sur $[0, +\infty[$ et retrouver le résultat précédent.

ELEMENTS DE SOLUTIONS :

Démarche utilisée en physique pour retrouver les fonctions de transfert usuelles.

1) $T_1(\omega) = 0,1\left(\dfrac{1+j\frac{\omega}{\omega_o}}{1+0,1j\frac{\omega}{\omega_o}}\right) - 0,1 = \dfrac{0,09\ j\ \frac{\omega}{\omega_o}}{1+0,1j\frac{\omega}{\omega_o}}$

En divisant numérateur et dénominateur sur $]0, +\infty[$ par $0,1j\ \frac{\omega}{\omega_o}$, on obtient $T_1(\omega) = \dfrac{0,9}{1-10j\frac{\omega_o}{\omega}}$

Sur les figures, on note $M_i(\omega)$ le point image de $\underline{T}(\omega)$.

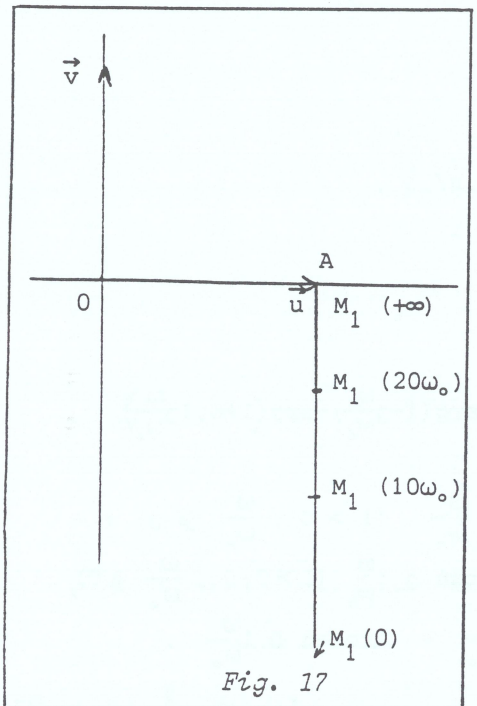


Fig. 17

2) z_1 a une partie réelle constante égale à 1 et une partie imaginaire négative lorsque ω décrit $]0, +\infty[$, donc M_1 décrit une demi-droite d'origine A d'affixe 1 (voir fig.17).

3) $z_2 = \dfrac{1}{z_1}$. Le point A d'affixe 1 a pour image par l'inversion complexe le point A' d'affixe $\frac{1}{1}$ donc lui-même.

L'ensemble des points M_2 est donc un demi-cercle ($\mathcal{C}_1$) passant par O et A (de rayon 1/2, de centre I d'affixe 1/2) (voir fig. 18)

(On utilise l'image d'une droite ne passant pas par 0 par l'inversion complexe).

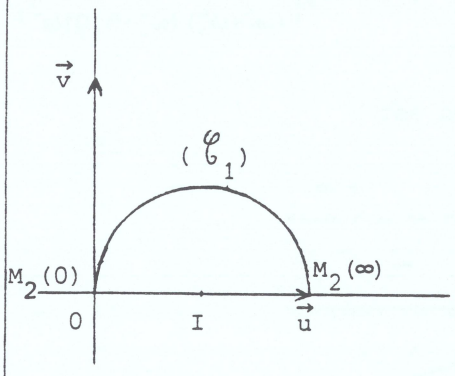


Fig. 18

4) $z_3 = 0,9\ z_2$; $|0,9| = 0,9$, $\arg 0,9 = 0$.

M_3 d'affixe z_3 est l'image de M_2 d'affixe z_2 par la similitude de centre 0, de rapport 0,9, d'angle nul (homothétie de centre O et de rapport 0,9).

L'ensemble des points M_3 est donc un demi-cercle ($\mathcal{C}_2$) de rayon $0,9 \times \frac{1}{2} = 0,45$, de centre I' d'affixe $0,9 \times \frac{1}{2} = 0,45$) (voir fig. 19)

(On utilise l'image d'un cercle par une similitude).

5) $\underline{T}(\omega) = T(u) + \underline{T}_1(\omega) = 0,1 + z_3$

L'ensemble des points M se déduit de l'ensemble des points M_3 par une translation de vecteur $0,1\ \vec{u}$. C'est donc un demi-cercle ($\mathcal{C}_3$) de rayon 0,45, de centre I" d'affixe 0,45 + 0,1 = 0,55).

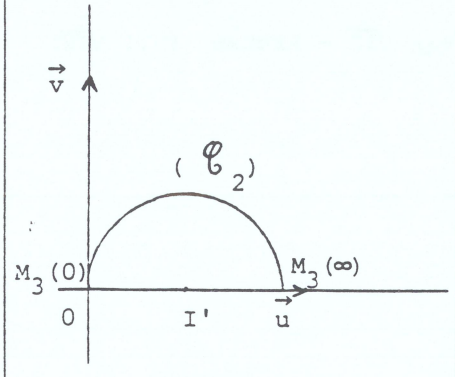


Fig.19

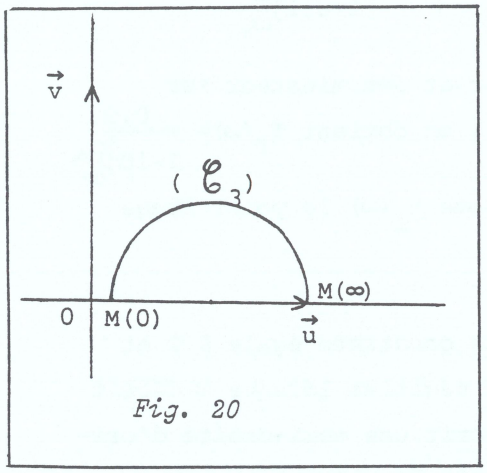


Fig. 20

6) $\varphi(\omega)$ sera maximum si la droite (OM) est tangente au demi-cercle $(\mathcal{C}_3)$.

Soit θ ce maximum,

$\sin\theta = \frac{HI''}{OI''} = \frac{0,45}{0,55}$,

$\sin\theta = \frac{9}{11}$,

θ appartient à $[0, \pi/2]$,

donc $\theta = \text{Arcsin}\ \frac{9}{11}$.

$(\theta \approx 54°,9)$.

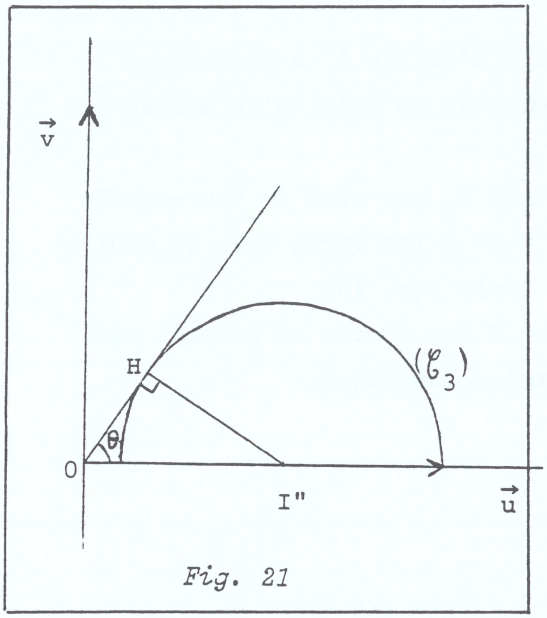


Fig. 21

7) $\varphi(\omega) = \arg(0,1) + \arg\left(1+j\frac{\omega}{\omega_0}\right) - \arg\left(1+0,1j\frac{\omega}{\omega_0}\right)$

$\arg(0,1) = 0$,

$\arg\left(1+j\frac{\omega}{\omega_0}\right) = \text{Arctan}\ \frac{\omega}{\omega_0}$ $\quad (1 > 0\ ;\ \frac{\omega}{\omega_0} \geqslant 0)$;

$\arg\left(1+0,1j\frac{\omega}{\omega_0}\right) = \text{Arctan}\ 0,1\frac{\omega}{\omega_0}$ $\quad (1 > 0 ; 0,1\ \frac{\omega}{\omega_0} \geqslant 0)$,

donc $\varphi(\omega) = \text{Arctan}\ \frac{\omega}{\omega_0} - \text{Arctan}\ 0,1\frac{\omega}{\omega_0}$.

On obtient sur $[0, +\infty]$ $\varphi'(\omega) = \omega_0\left[\frac{-0,09\ \omega^2 + 0,9\ \omega_0^2}{(\omega^2+\omega_0^2)(\omega_0^2+0,01\omega^2)}\right]$

Le tableau de variation est :

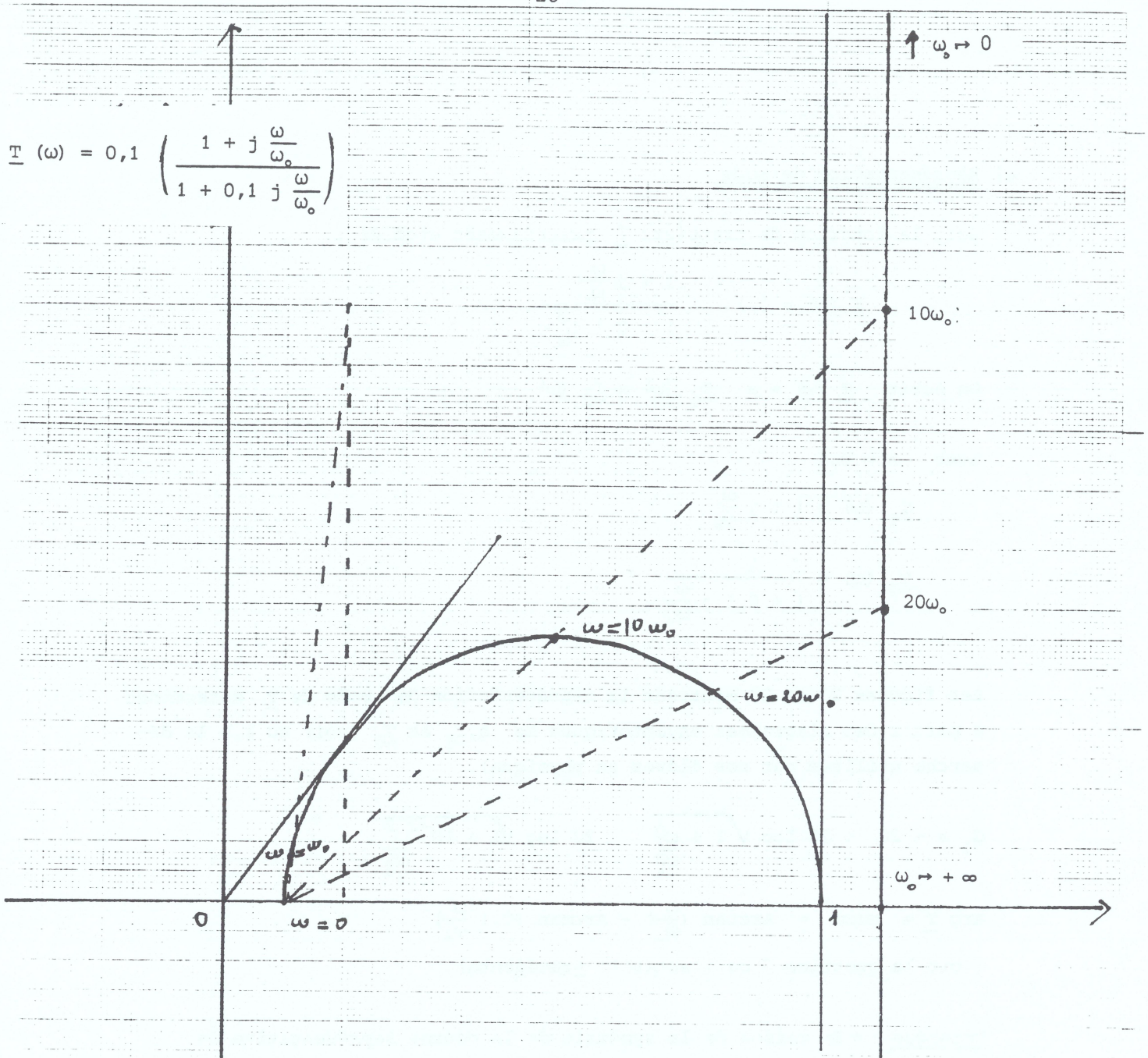
ω	0		$\sqrt{10}\ \omega_0$		$+\infty$
$\varphi'(\omega)$		+	0	−	
$\varphi(\omega)$		↗	α	↘	

$\alpha = \varphi(\sqrt{10}\ \omega_0) = \text{Arctan}\ \sqrt{10} - \text{Arctan}\ (0,1\ \sqrt{10})$

$(\alpha \approx 72°,45 - 17°,55$

$\alpha \approx 54°,9)$

$$\underline{T}(\omega) = 0{,}1 \left(\frac{1 + j \frac{\omega}{\omega_0}}{1 + 0{,}1\, j \frac{\omega}{\omega_0}} \right)$$



Pour = 0 T = 0,1 G= - 20 db .

Fig 22 Quand t tend vers t = &1 , G = 0 .

φ maximum correspond à la tangente au demi-cercle ,issue de 0; .

$20\omega_0$
$10\omega_0$

Graduation du diagramme de Nyquist de T .

b) Représentation de Bode

Soit la fonction de transfert $\underline{T}$ précédemment étudiée :

$$\underline{T}(\omega) = 0,1 \quad \frac{1 + j\frac{\omega}{\omega_o}}{1 + 0,1\, j\frac{\omega}{\omega_o}} .$$

On écrit $\underline{T}(\omega) = a \quad \underline{T}_1(\omega) \times \underline{T}_2(\omega)$

avec $a = 0,1$

$$\underline{T}_1(\omega) = 1 + j\frac{\omega}{\omega_o}$$

$$\underline{T}_2(\omega) = \frac{1}{1 + 0,1\, j\frac{\omega}{\omega_o}}$$

Les figures 23 et 24 montrent la représentation de Bode de $\underline{T}$ déterminée à partir des diagrammes asymptotiques de $a, \underline{T}_1$ et $\underline{T}_2$ (voir au 1,b la démarche utilisée par nos élèves en physique).

$$G_1 = -20 + 20 \log \sqrt{1 + \frac{\omega^2}{\omega_o^2}} - 20 \log \sqrt{1 + 10^{-2}\frac{\omega^2}{\omega_o^2}}$$

$$\text{Arg } \underline{T} = \varphi(\omega) = \text{Arctan}\left(\frac{\omega}{\omega_o}\right) - \text{Arctan}\left(0,1\,\frac{\omega}{\omega_o}\right)$$

(voir la question 7 de l'activité précédente).

Remarque : * En raison de la symétrie de la courbe représentative de $\omega \mapsto \varphi(\omega)$, ω étant portée en échelle logarithmique, $\varphi(\omega)$ est maximum pour ω tel que $\omega^2 = (\omega_o)\,(10\omega_o)$, soit $\omega = \sqrt{10}\,\omega_o$.

Remarque : * La fonction de transfert T_2 est identique à celle évoquée au (2 b)b3) avec ω_o remplacée par $10\omega_o$.

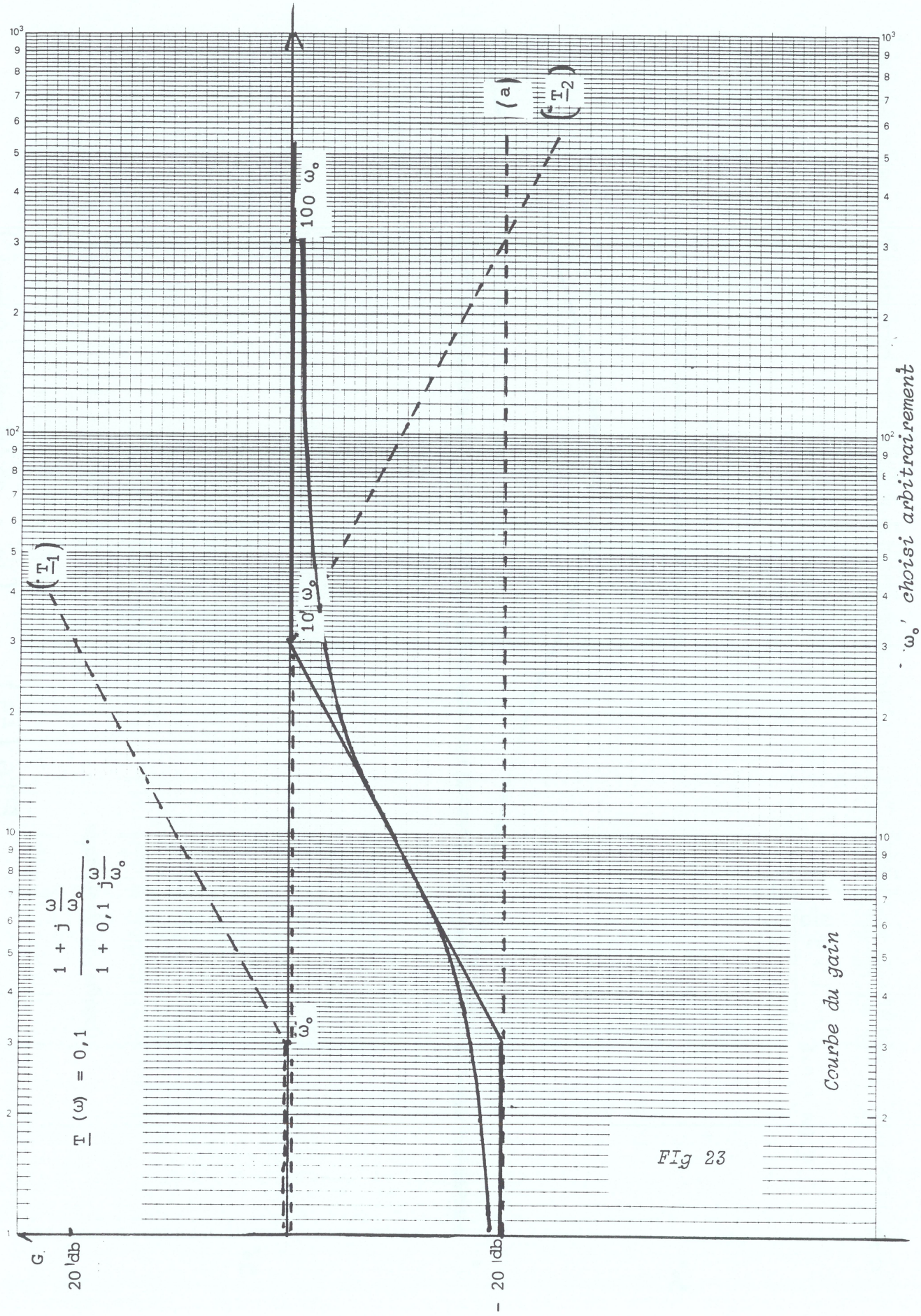

100 ω°
10 ω°
ω°
(a)
(Γ1)
(Γ2)
Γ (ω) = 0,1 (1 + j ω/ω°) / (1 + 0,1 j ω/ω°)
G
20 db
- 20 db
ω° choisi arbitrairement
Courbe du gain

FIg 23

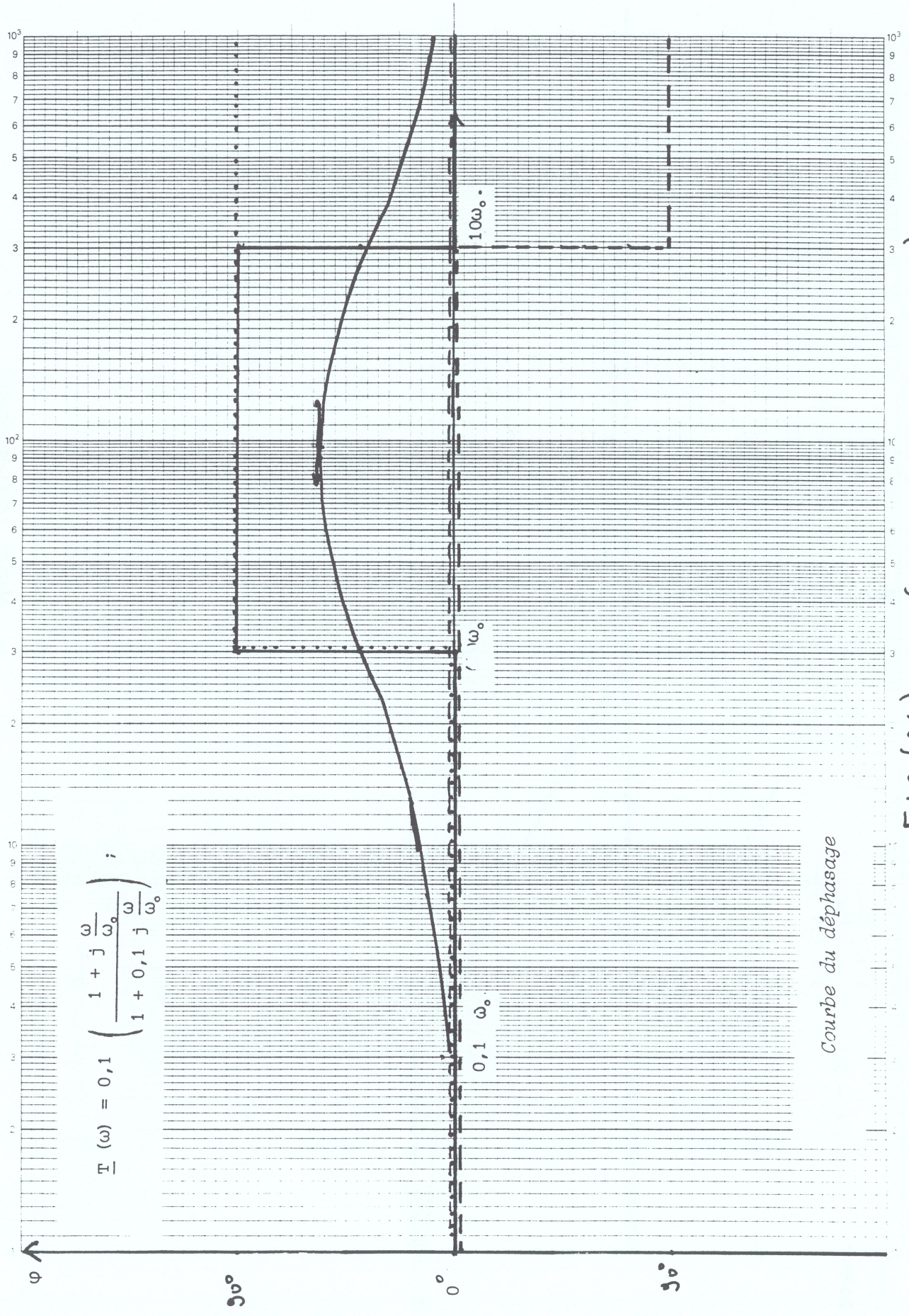


FIG (24) (ω_0 : choisi arbitrairement)

5°) Exemples de fonctions de transfert du 2ème ordre

a) Etude de $\omega \mapsto \underline{T}(\omega) = \dfrac{k}{1 + 2mj\frac{\omega}{\omega_o} + (j\frac{\omega}{\omega_o})^2}$ Fonction Passe-bas

Plaçons-nous dans le cas où $k = 1$ (c'est un pas fondamental)

en physique m s'appelle le coefficient d'amortissement,

$Q = \dfrac{1}{2m}$ s'appelle le facteur de qualité,

m est un nombre réel positif.

a1) Représentation de Bode

Cette représentation est intéressante si $\underline{T}$ est décomposable, c'est-à-dire si $\underline{T}$ peut s'écrire sous la forme :

$$\underline{T}(\omega) = \frac{1}{(1 + j\frac{\omega}{\omega_1})(1 + j\frac{\omega}{\omega_2})} = \frac{1}{1 + 2mj\frac{\omega}{\omega_o} + (j\frac{\omega}{\omega_o})^2}$$

soit si et seulement si : $\begin{cases} \dfrac{\omega}{\omega_1} + \dfrac{\omega_2}{\omega} = \dfrac{2m\omega}{\omega_o} \\ \dfrac{\omega^2}{\omega_1\omega_2} = \dfrac{\omega^2}{\omega_o^2} \end{cases}$,

$$\begin{cases} \omega_1 + \omega_2 = 2m\omega_o \\ \omega_1\ \omega_2 = \omega_o^2 \end{cases}$$

ω_1 et ω_2 seront solutions de $X^2 - 2m\omega_o X + \omega_o^2 = 0$

$\Delta' = \omega_o^2 (m^2 - 1)$

$\underline{T}$ est décomposable si et seulement si $m \geq 1$, nous obtenons alors :

(nous supposons $\omega_2 < \omega_1$ pour les représentations)

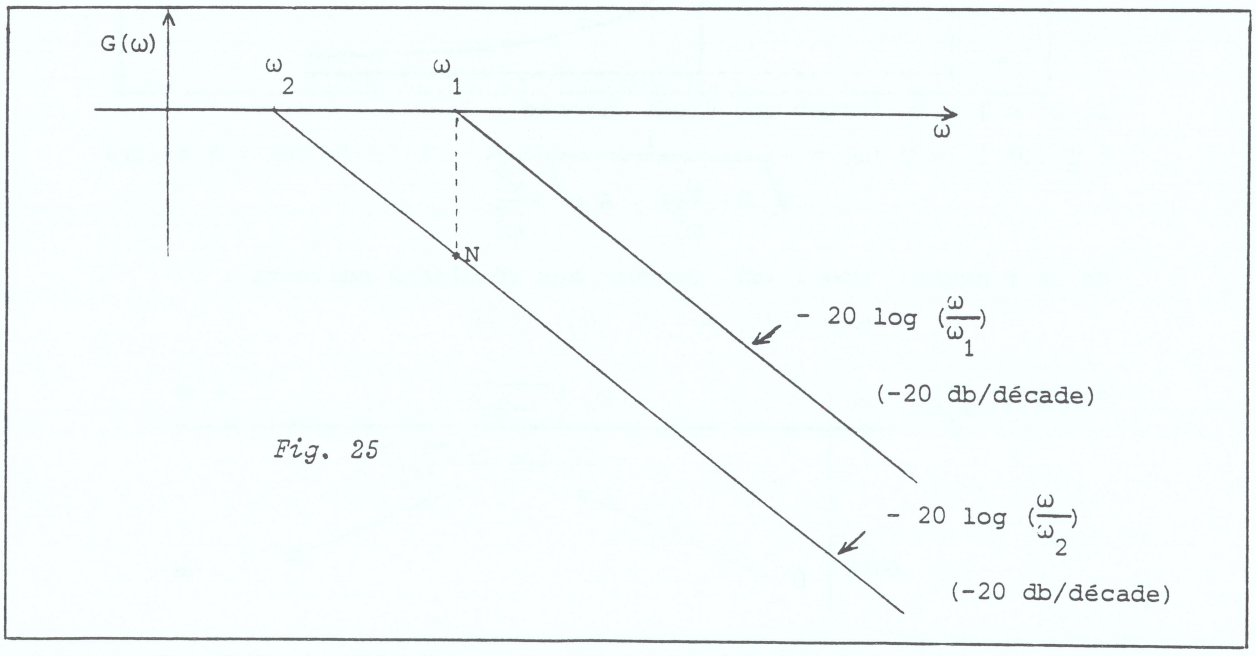


Fig. 25

Nous avons N $(\omega_1, -20 \log \frac{\omega_1}{\omega_2})$ ou N $(\omega_1, -40 \log \frac{\omega_1}{\omega'})$,

soit $-20 \log \frac{\omega_1}{\omega_2} = -40 \log \frac{\omega_1}{\omega'}$ donc $\omega_1 \omega_2 = \omega'^2$ donc $\omega' = \omega_o$

Pour tracer l'asymptote, on joint N au point $(\omega_o, 0)$ milieu du segment défini par les points de coordonnées $(\omega_2, 0), (\omega_1, 0)$.

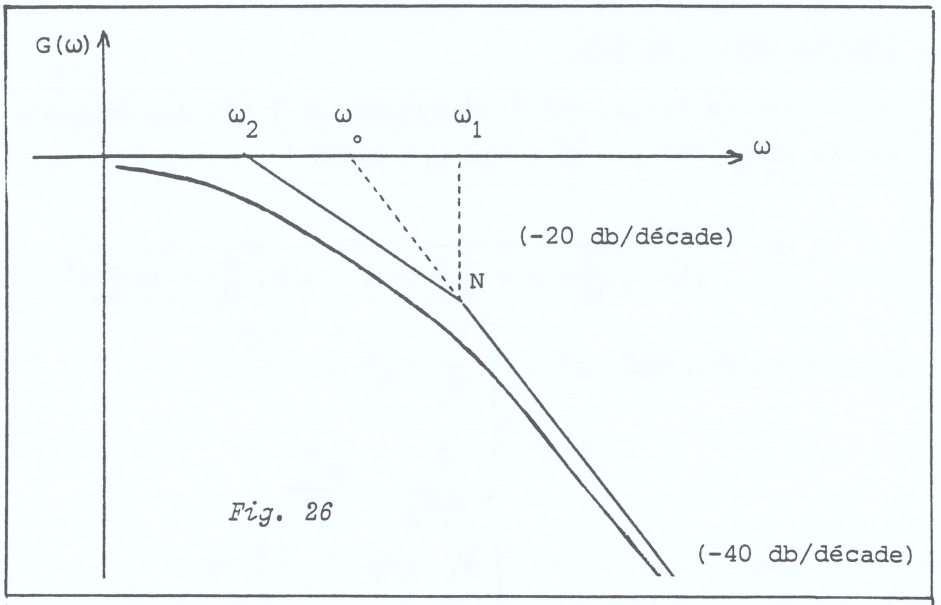


Fig. 26

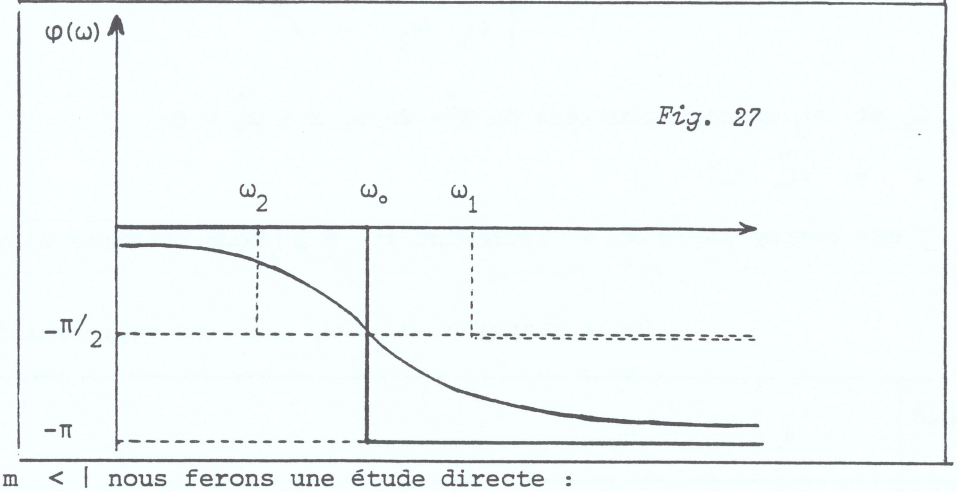


Fig. 27

Si m < | nous ferons une étude directe :

$$| \underline{T}(\omega) | = T(\omega) = \frac{1}{\sqrt{(1-\frac{\omega^2}{\omega_o^2}) + 4m^2 \frac{\omega^2}{\omega_o^2}}}$$

l'étude des variations de la fonction $\omega \mapsto T(\omega)$ conduit aux résultats suivants :

$\omega \mapsto G(\omega) = -20 \log T(\omega)$

$0 < m < \frac{\sqrt{2}}{2}$

ω	0		$\omega_o \sqrt{1-2m^2}$		$+\infty$
			$-20 \log 2m\sqrt{1-m^2}$		
$G(\omega)$	0	↗		↘	$-\infty$

Si $m \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$

ω	0		$+\infty$
	1	$\searrow$	
$G(\omega)$			$-\infty$

(on retrouve le cas $m \geq 1$).

Pour l'étude de $\omega \mapsto \varphi(\omega)$, $\underline{T}(\omega)$ étant égal à

$$\frac{1}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_o^2} + 2mj\frac{\omega}{\omega_o}}$$ on remarquera que :

$$\varphi(\omega) = -\operatorname{Arctan} \frac{2m\frac{\omega}{\omega_o}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_o^2}} \quad \text{pour} \quad \omega < \omega_o ,$$

$$\varphi(\omega) = -\left[\pi + \operatorname{Arctan} \frac{2m\frac{\omega}{\omega_o}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_o^2}}\right] \text{pour} \quad \omega > \omega_o .$$

(Un exemple d'activité est proposé sur cette représentation de Bode au c)).

a2) Représentation de Nyquist

$$\underline{T}(\omega) = T(\omega)\, e^{j\varphi(\omega)} = T(\omega)\cos\varphi(\omega) + j\, T(\omega)\sin\varphi(\omega)$$

On est ramené au tracé d'une courbe plane définie par une représentation polaire avec $T(\omega) \geq 0$, ou une représentation paramétrique.

Allure de cette représentation:

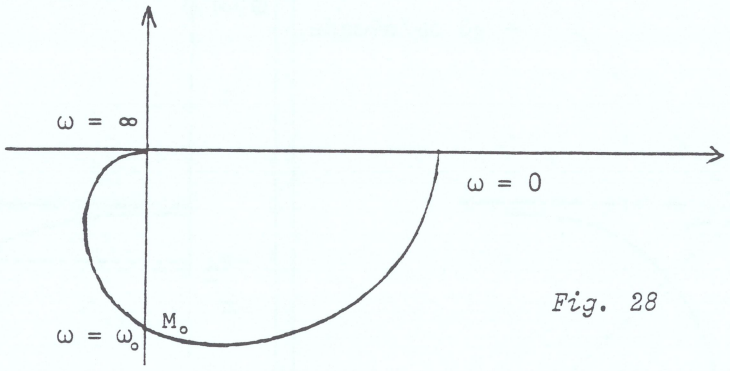


Fig. 28

M_o point d'affixe $\underline{T}(\omega_o) = \frac{1}{2mj}$

(On pourra se reporter au BTS électrotechnique session juin 1988).

b) Autres exemples

Nous ne ferons pas une étude exhaustive, mais signalerons quelques cas particuliers

b1) $\omega \mapsto \underline{T}(\omega) = \dfrac{1 + (j\frac{\omega}{\omega_o})^2}{1 + 2mj\frac{\omega}{\omega_o} + (j\frac{\omega}{\omega_o})^2}$ fonction rejecteur symétrique

Pour la représentation de Bode :

posons : $\underline{T}_1(\omega) = 1 + (j\frac{\omega}{\omega_o})^2$; $G_1(\omega) = 20 \log \left| 1 - \frac{\omega^2}{\omega_o^2} \right|$

$\varphi_1(\omega) = 0$ si $\omega < \omega_o$

$\varphi_1(\omega) = \pi$ si $\omega > \omega_o$

Quand ω tend vers $+\infty$ $G_1(\omega) \sim 40 \log \frac{\omega}{\omega_o}$

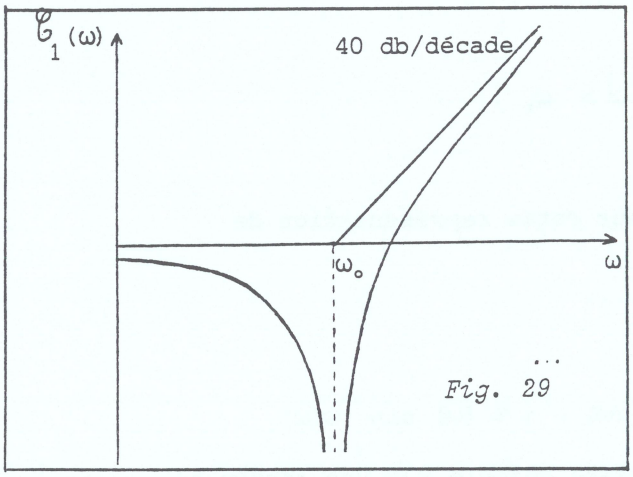


Fig. 29

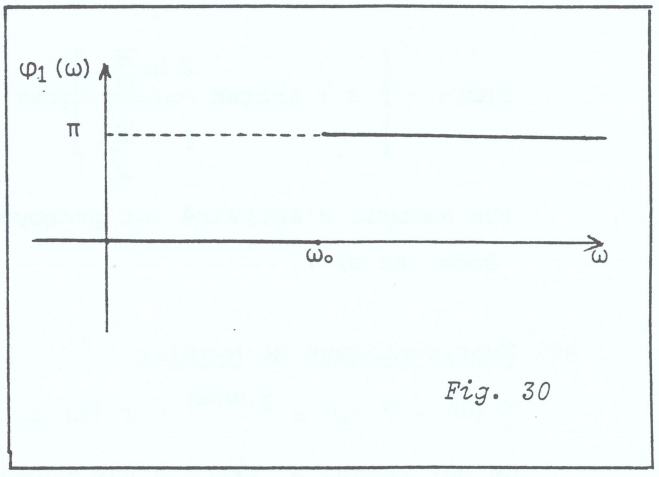


Fig. 30

On obtient, en utilisant les résultats précédents dans le cas où $m \geq 1$ les diagrammes ci-dessous (produit de fonctions de transfert).

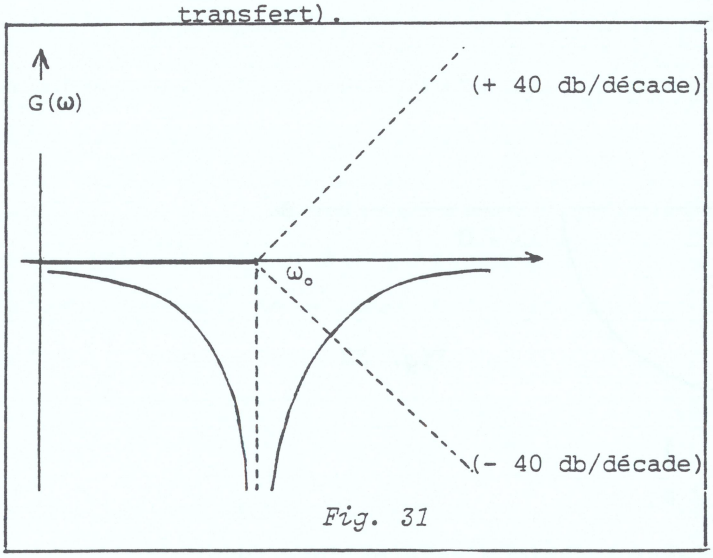


Fig. 31

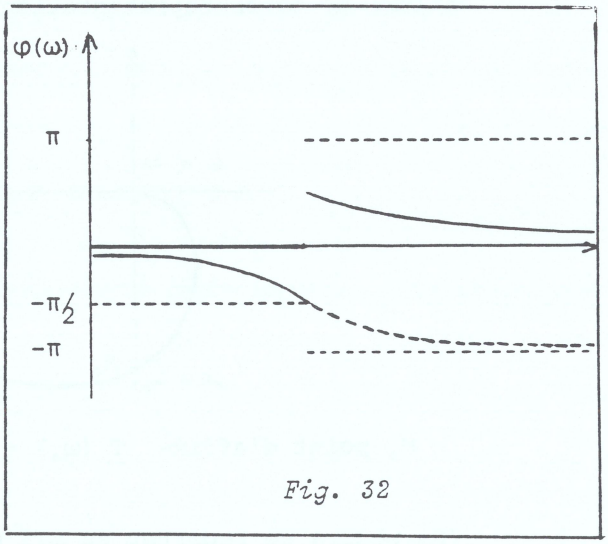


Fig. 32

Cet exemple fait apparaître une discontinuité au point d'abscisse ω_o.

b2) $\omega \longmapsto \underline{T}(\omega) = \dfrac{k\, j \dfrac{\omega}{\omega_0}}{1 + 2mj \dfrac{\omega}{\omega_0} + (j \dfrac{\omega}{\omega_0})^2}$ (fonction passe-bande)

Signalons sur cet exemple la représentation de Nyquist particulièrement intéressante :

$$\underline{T}(\omega) = \frac{\frac{k}{2m}}{1 - \frac{1}{2m} j \frac{\omega_0}{\omega} + \frac{1}{2m} j \frac{\omega}{\omega_0}} = \frac{\frac{k}{2m}}{1 + \frac{1}{2m} j \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)},$$

Lorsque ω varie de 0 à $+\infty$, $\dfrac{\omega}{\omega_0} - \dfrac{\omega_0}{\omega}$ décrit $\mathbb{R}$.

En effet pour f définie sur $]0, +\infty[$ par $f(\omega) = \dfrac{\omega}{\omega_0} - \dfrac{\omega_0}{\omega}$

nous avons :

ω	0		$+\infty$
$f'(\omega)$	‖	$+$	
$f(\omega)$	$-\infty$ ‖		$+\infty$

Le diagramme de Nyquist est alors :

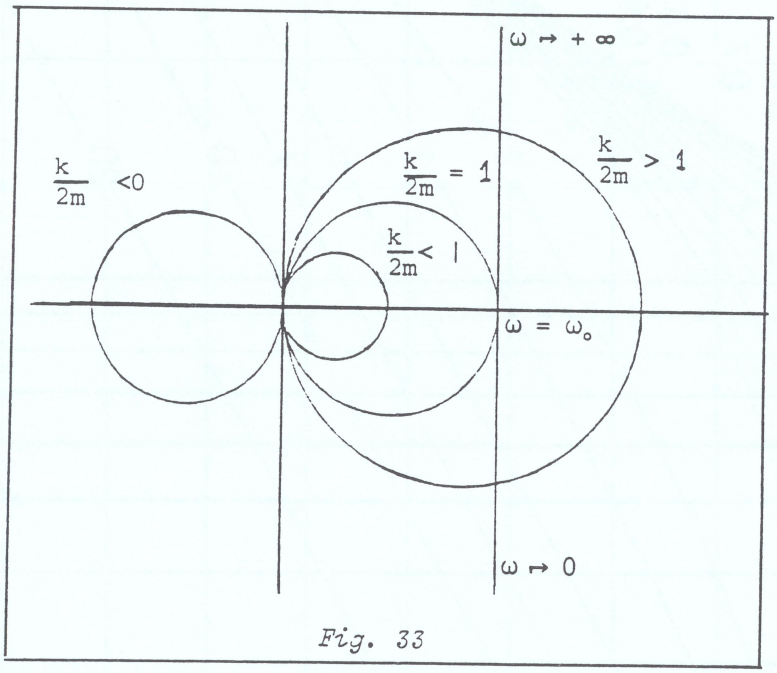
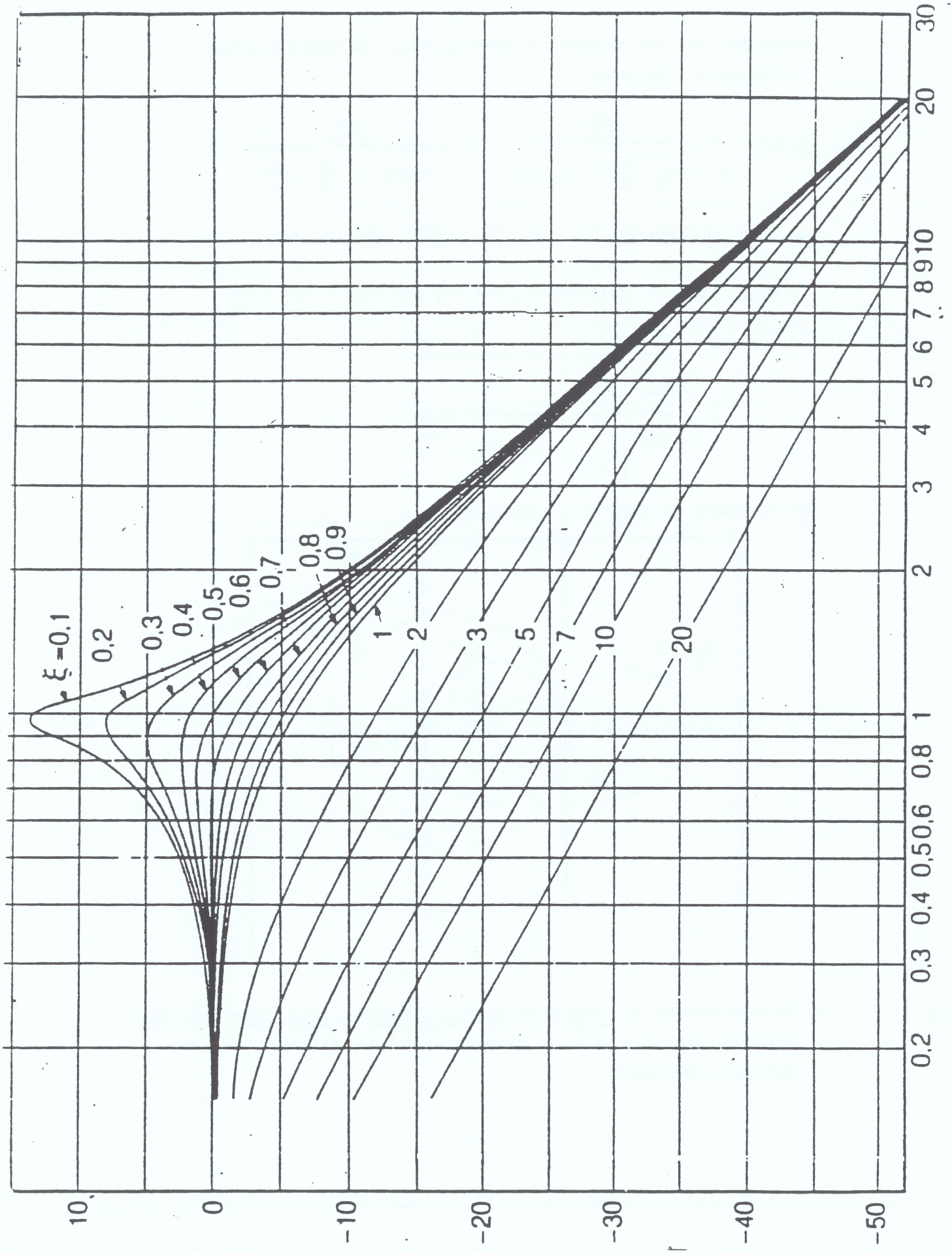


Fig. 33

c) Nous proposons un exemple de travaux pratiques réalisable en mathématique, pour justifier un diagramme utilisé couramment par les élèves en physique.

diagramme de Bode en physique



EXEMPLE DE TRAVAUX PRATIQUES

1 - LE DOCUMENT

Soit en régime sinusoïdal permanent

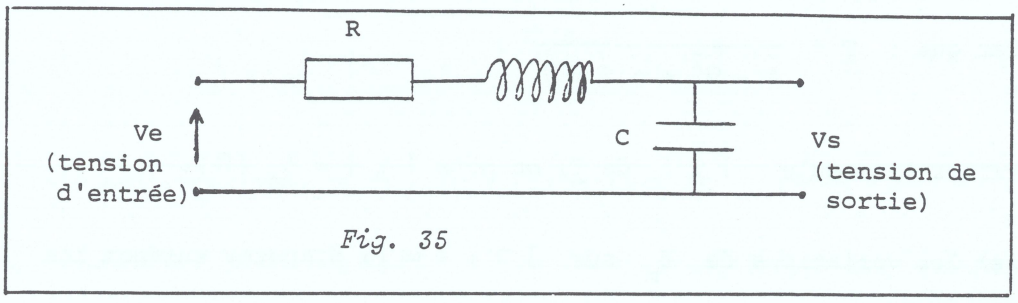


Fig. 35

. R, L, C, sont des grandeurs positives

. ω est la pulsation, f est la fréquence : $\omega = 2 \pi f$

$$\omega_o = 2 \pi f_o \text{ avec } f_o = \frac{1}{2 \pi \sqrt{LC}}$$

. La transmittance complexe $\underline{T}$ du circuit est donnée par :

$$\underline{T} = \frac{\underline{Vs}}{\underline{Ve}} = \frac{1}{1 + RC\, j\, \omega + LC\, (j\omega)^2}$$

Pour donner un caractère plus général à cette étude, on utilise :

la variable réduite $\Omega = \frac{\omega}{\omega_o} = \frac{f}{f_o}$;

le paramètre réduit est : $m = \frac{R}{2 L \omega_o} = \frac{1}{2} \frac{R}{L} \sqrt{LC} = \frac{1}{2} R \sqrt{\frac{C}{L}}$

2 - L'OBJECTIF

On se propose de représenter $|\underline{T}|$ en fonction de Ω pour diverses valeurs de m.

(Cette représentation est appelée en physique "Diagramme de Bode")

3 - L'ENONCE

a) Montrer que : $\underline{T} = \dfrac{1}{1 - \Omega^2 + j\ 2\ m\ \Omega}$.

b) Déterminer le module $|\ \underline{T}\ |$ de $\underline{T}$, on note $|\ \underline{T}\ | = f_m\ (\Omega)$.

c) Etudier les variations de f_m sur $]\ 0\ ;\ +\infty\ [$; discuter suivant les valeurs de m.

d) On note $(\ \mathcal{C}_m\ )$ les courbes représentatives de f_m dans un repère
* orthonormal ; montrer que la courbe d'équation $Y = \dfrac{1}{\Omega^2}$ est asymptote à toutes les courbes $(\ \mathcal{C}_m\ )$.

e) On note g_m la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $g_m(\Omega) = 20 \log (|\ \underline{T}\ |)$.
(logarithme décimal).
Déduire de c) les variations de g_m.

f) Construire les courbes représentatives de g_m dans le plan rapporté à un repère semi-logarithmique (échelle métrique sur Oy ; échelle logarithmique sur Ox) :
pour $m = 2$; $m = 1$; $m = 0,5$; $m = 0,25$.
* Que devient la courbe asymptote ?

* REMARQUE :

Il est nécessaire de détailler cette question, si on désire faire utiliser par les élèves un développement limité au voisinage de l'infini, et préciser la position des courbes $\mathcal{C}_m$ par rapport à cette asymptote au voisinage de l'infini.

ELEMENTS DE SOLUTION

a) $\underline{T} = \dfrac{1}{1 - LC\ \omega^2 + j\ RC\ \omega}$,

$f_o = \dfrac{1}{2\ \pi\ \sqrt{LC}}$ d'où $\sqrt{LC} = \dfrac{1}{2\ \pi\ f_o} = \dfrac{1}{\omega_o}$ donc $LC\ \omega^2 = \dfrac{1}{\omega_o^2} \times \omega^2 = \Omega^2$,

D'autre part $R\ L\ \omega = 2\ m\ L\ \omega_o\ C\ \omega$,

$= 2\ m\ \omega_o\ (L\ C\ \omega^2) \times \dfrac{1}{\omega}$,

$= 2\ m\ \Omega^2 \times \dfrac{1}{\Omega}$,

$= 2\ m\ \Omega$.

b) $|\ \underline{T}\ | = \dfrac{1}{|1 - \Omega^2 + j2m\Omega|} = \dfrac{1}{\sqrt{(1-\Omega^2)^2 + 4m^2\ \Omega^2}}$, $f_m(\Omega) = \dfrac{1}{\sqrt{(1 - \Omega^2)^2 + 4m^2\Omega^2}}$

c) <u>1er cas</u> : $m = 0$ $f_o(\Omega) = \dfrac{1}{\sqrt{(1 - \Omega^2)^2}} = \dfrac{1}{|1 - \Omega^2|}$

f_o est continue et dérivable sur chacun des intervalles $[0,1[$ et $]1, + \infty[$

Ω	0		1		$+\infty$
$f'_o(\Omega)$	0	+	‖	−	
$f_o(\Omega)$	1	↗ $+\infty$	‖	$+\infty$ ↘	0

sur $[\ 0, 1[$, $f_o(\Omega) = \dfrac{1}{1-\Omega^2}$ $f'_o(\Omega) = \dfrac{2\ \Omega}{(1-\Omega^2)^2}$

sur $]\ 1; + \infty\ [$, $f_o(\Omega) = \dfrac{1}{\Omega^2 - 1}$ $f'_o(\Omega) = \dfrac{-\ 2\ \Omega}{(\Omega^2 - 1)^2}$

<u>2ème cas</u> : $m \neq 0$

f_m est continue et dérivable sur $[0, + \infty[$

$f_m\ (0) = 1$ et $\lim\limits_{\Omega \to +\infty} f_m\ (0) = 0$

$f'_m(\Omega) = \dfrac{2\ \Omega\ (1 - \Omega^2 - 2m^2)}{[(1 - \Omega^2)^2 + 4\ m^2\ \Omega^2]^{3/2}}$

Nous avons $\Omega \geqslant 0$, $f'_m(\Omega)$ s'annule en $\Omega = 0$ de plus,

si $m \in]0 ; \frac{\sqrt{2}}{2}[$; $1 - 2m^2 > 0$, $f'_m(\Omega)$ s'annule en $\Omega = \sqrt{1 - 2m^2}$

Ω	0		$\sqrt{1-2m^2}$		$+\infty$
$f'_m(\Omega)$	0	+	0	−	
$f_m(\Omega)$	1	↗	$\frac{1}{2m\sqrt{1-m^2}}$	↘	0

si $m \geqslant \frac{\sqrt{2}}{2}$; $1 - 2m^2 \leqslant 0$

Ω	0		$+\infty$
$f'_m(\Omega)$	0	−	
$f_m(\Omega)$	1	↘	0

d) En posant $\Omega^2 = \frac{1}{u}$

on obtient $f_m\left(\frac{1}{\sqrt{u}}\right) = \frac{u}{\sqrt{1 + u(4m^2 - 2) + u^2}} = u\left[1 + u(4m^2 - 2) + u^2\right]^{-\frac{1}{2}}$

au voisinage de 0 à l'ordre 1

$$(1 + u(4m^2 - 2) + u^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}u(4m^2 - 2) + u\,\varepsilon_1(u)$$

avec $\lim_{u \to 0} \varepsilon_1(u) = 0$

d'où

$$f_m\left(\frac{1}{\sqrt{u}}\right) = u - (2m^2 - 1)u^2 + u^2\,\varepsilon_2(u) \quad \text{avec} \lim_{u \to 0} \varepsilon_2(u) = 0$$

$$= u + (1 - 2m^2)u^2 + u^2\,\varepsilon_2(u).$$

soit $f_m(\Omega) = \frac{1}{\Omega^2} + \frac{1 - 2m^2}{\Omega^4} + \frac{1}{\Omega^4}\varepsilon\left(\frac{1}{\Omega^2}\right)$ avec $\lim_{\Omega \to +\infty} \varepsilon\left(\frac{1}{\Omega^2}\right) = 0$

La courbe d'équation $y = \frac{1}{\Omega^2}$ est donc asymptote à toutes les courbes $\mathcal{C}_m$, le signe de $1 - 2m^2$ détermine la position des courbes ($\mathcal{C}_m$) par rapport à cette asymptote au voisinage de $+\infty$.

e) $|\underline{T}|$ est strictement positif et la fonction $x \mapsto \ln x$ est strictement croissante sur $]0, +\infty[$; les variations de g_m sont donc les mêmes que celles de f_m.

$m = 0$

Ω	0		1		$+\infty$
$g_0(\Omega)$	0	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	$-\infty$

$m \in]0; \frac{\sqrt{2}}{2}[$

Ω	0		$\sqrt{1-2m^2}$		$+\infty$
$g_m(\Omega)$	0	$\nearrow$	$-20 \log(2m\sqrt{1-m^2})$	$\searrow$	$-\infty$

$m \in [\frac{\sqrt{2}}{2}; +\infty[$

Ω	0		$+\infty$
$g_m(\Omega)$	1	$\searrow$	$-\infty$

$$g_m(\Omega) = 20 \log(|\underline{T}|),$$

$$= 20 \log\left(\frac{1}{\sqrt{\Omega^4 + (4m^2 - 2)\Omega^2 + 1}}\right),$$

$$= -10 \log(\Omega^4 + (4m^2 - 2)\Omega^2 + 1),$$

En posant $u = \frac{1}{\Omega^2}$

$$g_m\left(\frac{1}{\sqrt{u}}\right) = -10 \log\left(\frac{1}{u^2} + \frac{(4m^2 - 2)}{u} + 1\right)$$

$$= -10 [\log(1 + (4m^2 - 2)u + u^2) - \log u^2],$$

$$= 20 \log u - 10 \log [1 + (4m^2 - 2)u + u^2],$$

$$= 20 \log u - \frac{10}{\ln(10)} \ln [1 + (4m^2 - 2)u + u^2],$$

$$= 20 \log u - \frac{10}{\ln(10)} [(4m^2 - 2)u + u\,\varepsilon_1(u)] \quad \text{avec } \lim_{u \to 0} \varepsilon_1(u) = 0$$

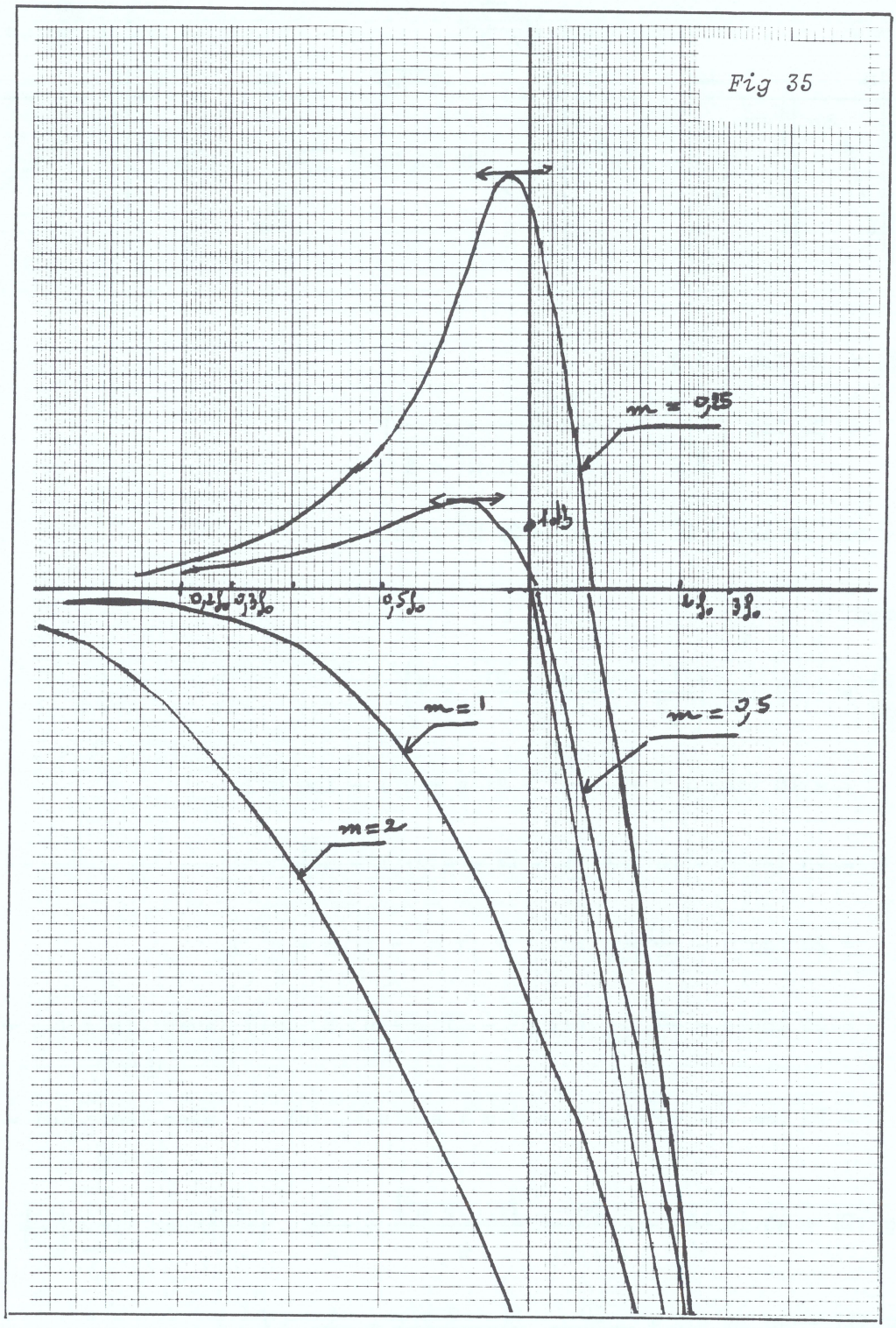
$$= 20 \log u + \frac{20}{\ln(10)} (1 - 2m^2)u + u\,\varepsilon_2(u) \quad \text{avec } \lim_{u \to 0} \varepsilon_2(u) = 0$$

d'où $g_m(\Omega) = 40 \ln \frac{1}{\Omega} + \frac{20}{\ln(10)} \frac{(1 - 2m^2)}{\Omega^2} + \frac{1}{\Omega^2} \left(\frac{1}{\Omega^2}\right)$ avec $\lim_{\Omega \to +\infty} \varepsilon\left(\frac{1}{\Omega^2}\right) = 0$

$$gm(\Omega) = -40 \ln(\Omega) + \frac{20}{\ln(10)} \frac{(1 - 2m^2)}{\Omega^2} + \frac{1}{\Omega^2} \varepsilon\left(\frac{1}{\Omega^2}\right)$$

Les courbes représentatives ont toutes pour asymptote la courbe d'équation $Y = 40 \ln(\Omega)$, celle-ci se traduisant dans un repère semi-logarithmique par la droite d'équation $Y = -40 X$.

(La position de ces courbes par rapport à cette asymptote étant donné au voisinage de l'infini par le signe de $1 - 2 m^2$).



Courbes représentatives de g_m pour $m = 2$; $m = 1$; $m = 0,5$; $m = 0,25$.

6°) Représentations d'une transmittance harmonique et programme de mathématiques en S T S

Nous n'avons pas dressé une liste exhaustive de toutes les fonctions de transferts utilisées par nos élèves, la variété de leurs représentations et les exemples traités montrent cependant que de nombreux points du programme sont abordés.

- Fonctions circulaires réciproques ;
- Emploi du calcul différentiel pour la recherche d'extremums, l'étude de la variation et de la construction des représentations graphiques de fonctions.
  (avec des exemples sur le comportement asymptotique d'une fonction).
- Exemples de tracé de courbes planes définies par une représentation paramétrique ou une représentation polaire.
- Utilisation des transformations élémentaires $z \mapsto z + b$; $z \mapsto \overline{z}$; $z \mapsto \frac{1}{z}$
  (exemples d'étude de transformation $z \longmapsto \frac{az + b}{cz + d}$).

REMARQUE :

Nos élèves utilisent ces représentations en physique dès le début de la classe de TS_1, la représentation de Bode étant vue dès la classe de TF_2.

7°) Exemple d'activité mathématique sur les nombres complexes

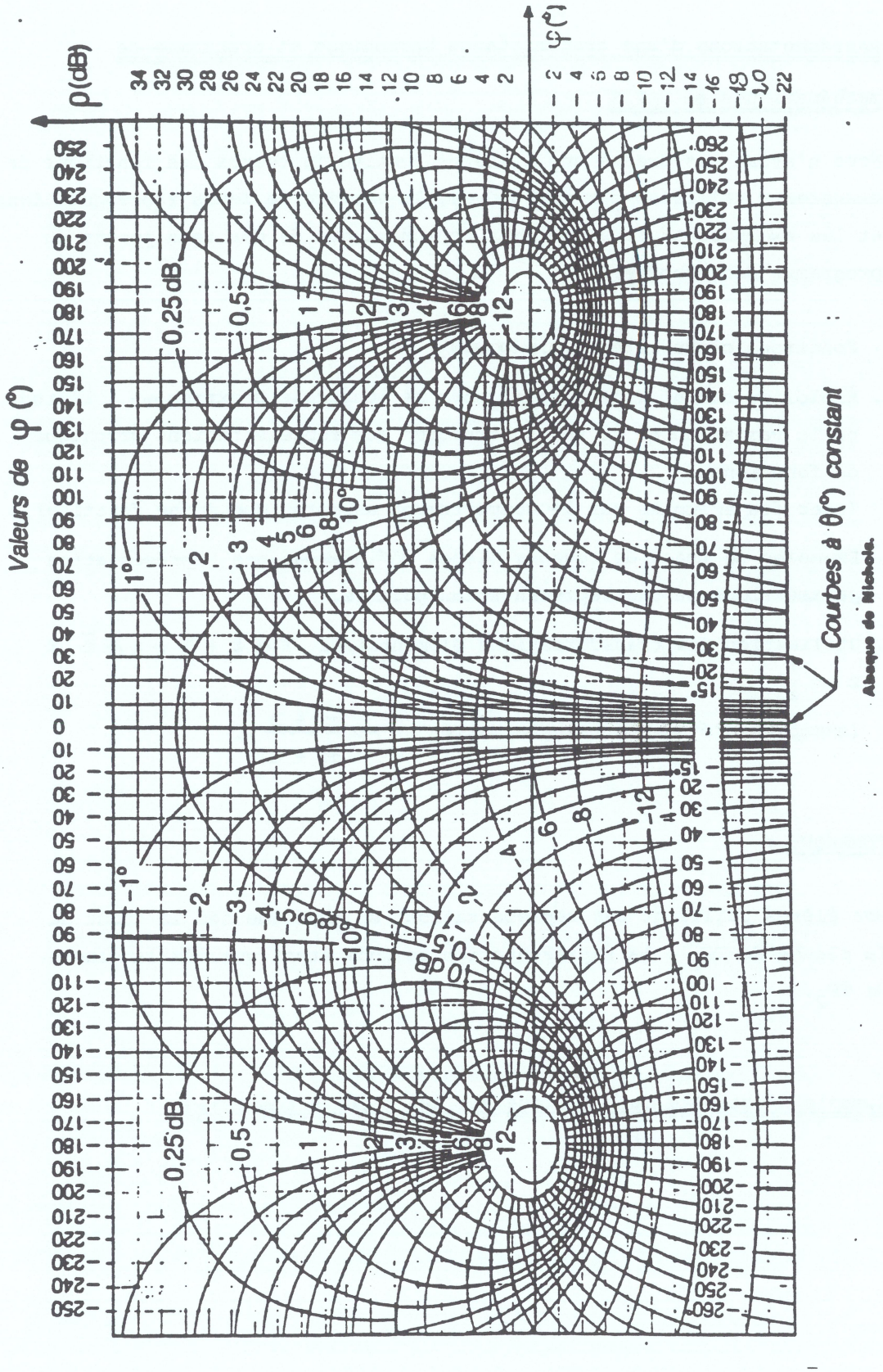


Fig 36 Abaque de Nichols

EXEMPLE D'ACTIVITE SUR LES NOMBRES COMPLEXES (T.P. DEVOIR)

LES SOURCES

Dans l'ouvrage "TECHNIQUE DE L'INGENIEUR" § Théorie des circuits électriques linéaires.

UN OBJECTIF

Faire travailler les élèves en début de TS_1 sur l'inversion complexe.

Dans l'ouvrage figure l'Abaque de Nichols (fig. 36)

Cet abaque permet d'obtenir, connaissant le nombre complexe :

$z = \rho\, e^{i\varphi}$ le nombre complexe : $Z = \dfrac{z}{1+z} = |Z|\, e^{i\theta}$ et inversement.

L'abaque est tracé dans un plan où sont portées en abscisses les valeurs de φ, exprimées en degrés, et, en ordonnées, les valeurs de ρ, exprimées en décibels (dB)

Il est constitué par l'ensemble de deux familles de courbes :

- les courbes à $|Z|$ constant et θ variable ;
- les courbes à θ constant et $|Z|$ variable ;

(Son utilité réside dans le fait que la transmittance H d'un système bouclé, peut s'écrire :

$$H = \frac{\delta\,\sigma\,\mu}{1-\mu\,\beta} = -\frac{\delta\,\sigma}{\beta}\left(\frac{-\mu\,\beta}{1-\mu\,\beta}\right) = -\frac{\delta\,\sigma}{\beta}\,\frac{C}{1+C}$$

en posant : $C = -\mu\,\beta$

(lorsque l'on connaît C, cet abaque permet de déterminer : $\dfrac{C}{1+C}$)

LE THEME D'ETUDE

Le but de cette activité est de construire un abaque en début de TS, en utilisant les connaissances du cours sur l'inversion complexe.

On désigne par i le complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$, et par P, le plan complexe rapporté à un repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

On notera : Re (z) la partie réelle de z
et Im (z) la partie imaginaire.

Soit f l'application qui à tout point m de P d'affixe z associe le point M d'affixe Z, tel que : $Z = \frac{z}{1 + z}$

(1°) Ramener l'étude de la transformation $z \mapsto \frac{z}{1 + z}$ à des transformations que vous connaissez.

(2°) Déterminer l'image par f de la droite d'équation $x = -1$
puis déterminer l'image par f d'une droite d'équation $x = a$

avec : $a \in \mathbb{R}$ et $a \neq -1$

(3°) Déterminer l'image par f de la droite d'équation $y = 0$
puis déterminer l'image par f d'une droite d'équation $y = b$

avec : $b \in \mathbb{R}^*$

(4°) Construction de l'abaque constitué par l'ensemble des deux familles de courbes :

- les courbes à Re (z) constante et Im (z) variable.
- les courbes à Im (z) constante et Re (z) variable.

(On prendra pour unité : 6 cm)

(4.1) Construire les images des droites d'équation respectives :

$x = -2$; $x = -\frac{3}{2}$; $x = -1$; $x = -\frac{1}{2}$; $x = \frac{1}{2}$; $x = 1$; $x = 2$

$y = -2$; $y = -\frac{3}{2}$; $y = -\frac{1}{2}$; $y = 0$; $y = \frac{1}{2}$; $y = \frac{3}{2}$; $y = 1$

(4.2) Complèter cet abaque de telle manière que le point de coordonnées (1,0) soit centre de symétrie.

Indiquer les antécédents des nouveaux éléments tracés.

(5°) Utilisation de cet abaque.

$$f \quad : \quad z \longmapsto Z = \frac{z}{1 + z}$$

(5.1) Déterminer Z par lecture sur cet abaque pour les valeurs suivantes de z :

$$z = -\frac{3}{2} + \frac{i}{2} \; ; \qquad z = -2 - i \; ; \qquad z = -\frac{i}{2} \; ; \qquad z = -\frac{1}{2} + \frac{2}{3} i$$

(5.2) Déterminer z par lecture sur cet abaque pour les valeurs suivantes de Z :

$$Z = 2 - i \; ; \qquad Z = -\frac{2}{3} + \frac{1}{4} i$$

Comparer les résultats lus aux résultats obtenus par le calcul.

ELEMENTS DE SOLUTION

(1°) $Z = \dfrac{z}{1+z} = 1 - \dfrac{1}{z+1}$

$z \longmapsto z_1 = z + 1$ translation de vecteur $\vec{u}$ $\mathcal{C}$,

$z_1 \longmapsto z_2 = \dfrac{1}{z_1}$ inversion complexe $\mathcal{J}$,

$z_2 \longmapsto z_3 = -z_2$ symétrie par rapport à 0 $\mathcal{S}$,

$z_3 \longmapsto Z = 1 + z_3$ translation de vecteur $\vec{u}$ $\mathcal{C}$.

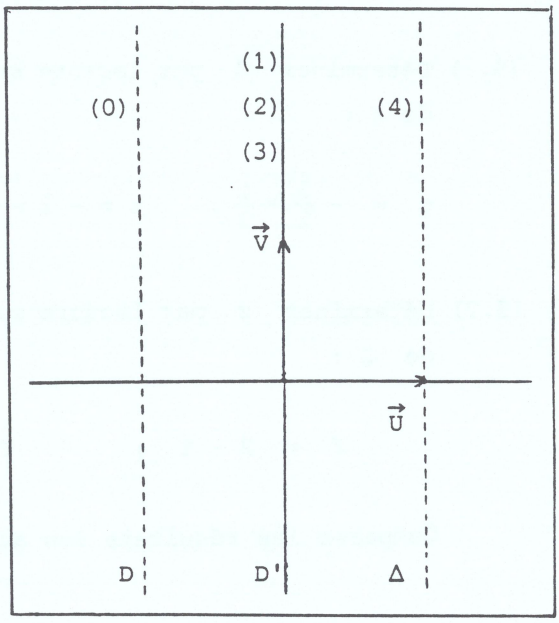


Fig. 37

(2°) D : x = 1 a pour image par $\mathcal{C}$ D' : x = 0,

D' est invariante par $\mathcal{J}$ et par $\mathcal{S}$,

D' a pour image par $\mathcal{C}$ Δ : x = 1 .

($a \neq 0$) D: x = a a pour image $\mathcal{C}$ D': x = a + 1

A a pour affixe a + 1,

l'image par $\mathcal{J}$ de A est B d'affixe $\dfrac{1}{a+1}$.

D' a pour image par $\mathcal{J}$ le cercle $\mathcal{C}$ de diamètre OB, de centre d'affixe $\dfrac{1}{2(a+1)}$; de rayon $\dfrac{1}{2|a+1|}$.

$\mathcal{C}$ a pour image par $\mathcal{S}$ le cercle $\mathcal{C}'$ de diamère OB', de centre d'affixe $-\dfrac{1}{2(a+1)}$, de rayon $\dfrac{1}{2|a+1|}$.

$\mathcal{C}'$ a pour image par $\mathcal{C}$ le cercle $\mathcal{C}''$ de centre d'affixe $-\dfrac{1}{2(a+1)} + 1 = \dfrac{2a+1}{2(a+1)}$, de rayon $\dfrac{1}{2|a+1|}$.

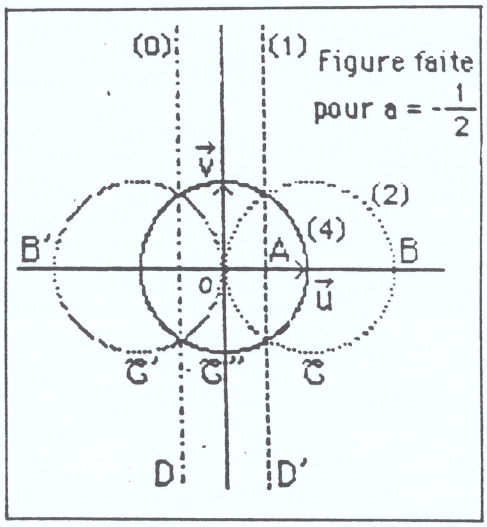


Fig. 38

(3°) La droite d'équation y = 0 est invariante par $\mathcal{C}$, $\mathcal{J}$ et $\mathcal{G}$ ($b \neq 0$) la droite Δ d'équation y = b est invariante par $\mathcal{C}$.

C a pour affixe bi ; l'image de C par $\mathcal{J}$ est D d'affixe $\frac{1}{bi} = -\frac{i}{b}$

Δ a pour image par $\mathcal{J}$ le cercle $\mathcal{C}$ de diamètre OD, de centre d'affixe $-\frac{i}{2b}$ et de rayon $\frac{1}{2|b|}$.

Ce cercle $\mathcal{C}$ a pour image par $\mathcal{G}$ le cercle $\mathcal{C}'$ de diamètre OD' de centre d'affixe $\frac{i}{2b}$ et de rayon $\frac{1}{2|b|}$.

$\mathcal{C}'$ a pour image par $\mathcal{C}$ le cercle $\mathcal{C}''$ de centre d'affixe $1 + \frac{i}{2b}$ et de rayon $\frac{1}{2|b|}$.

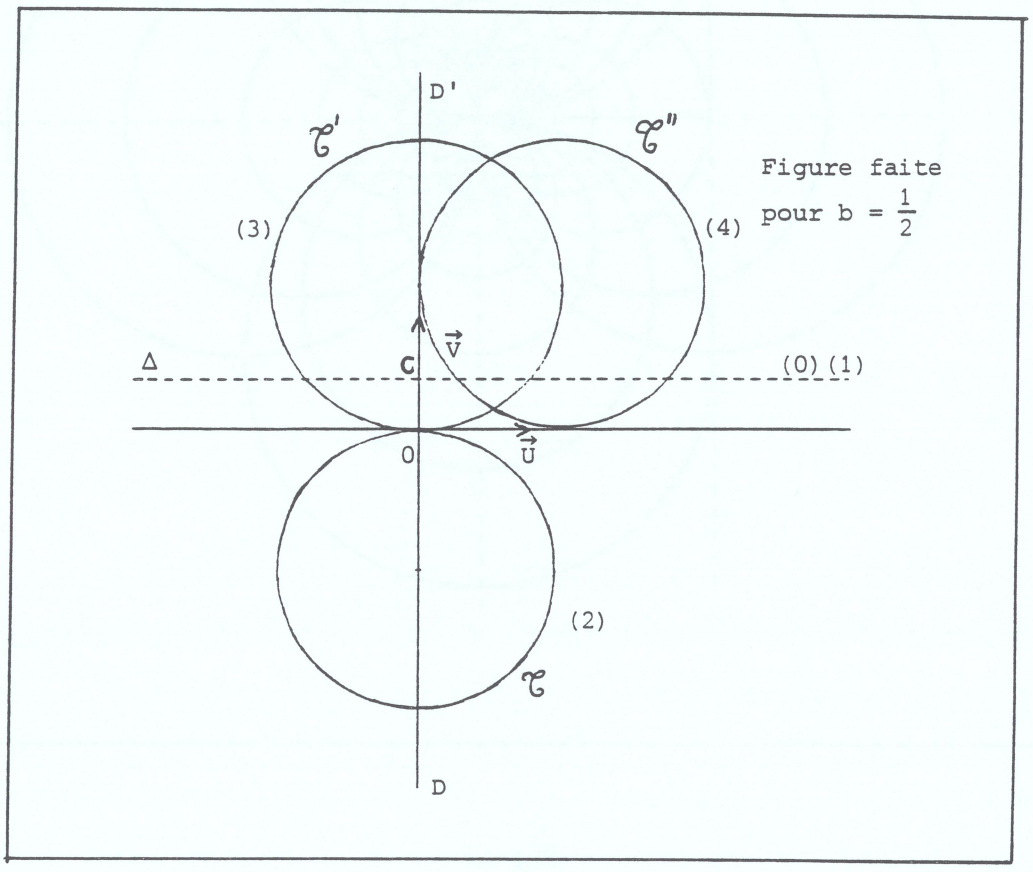


Fig. 39

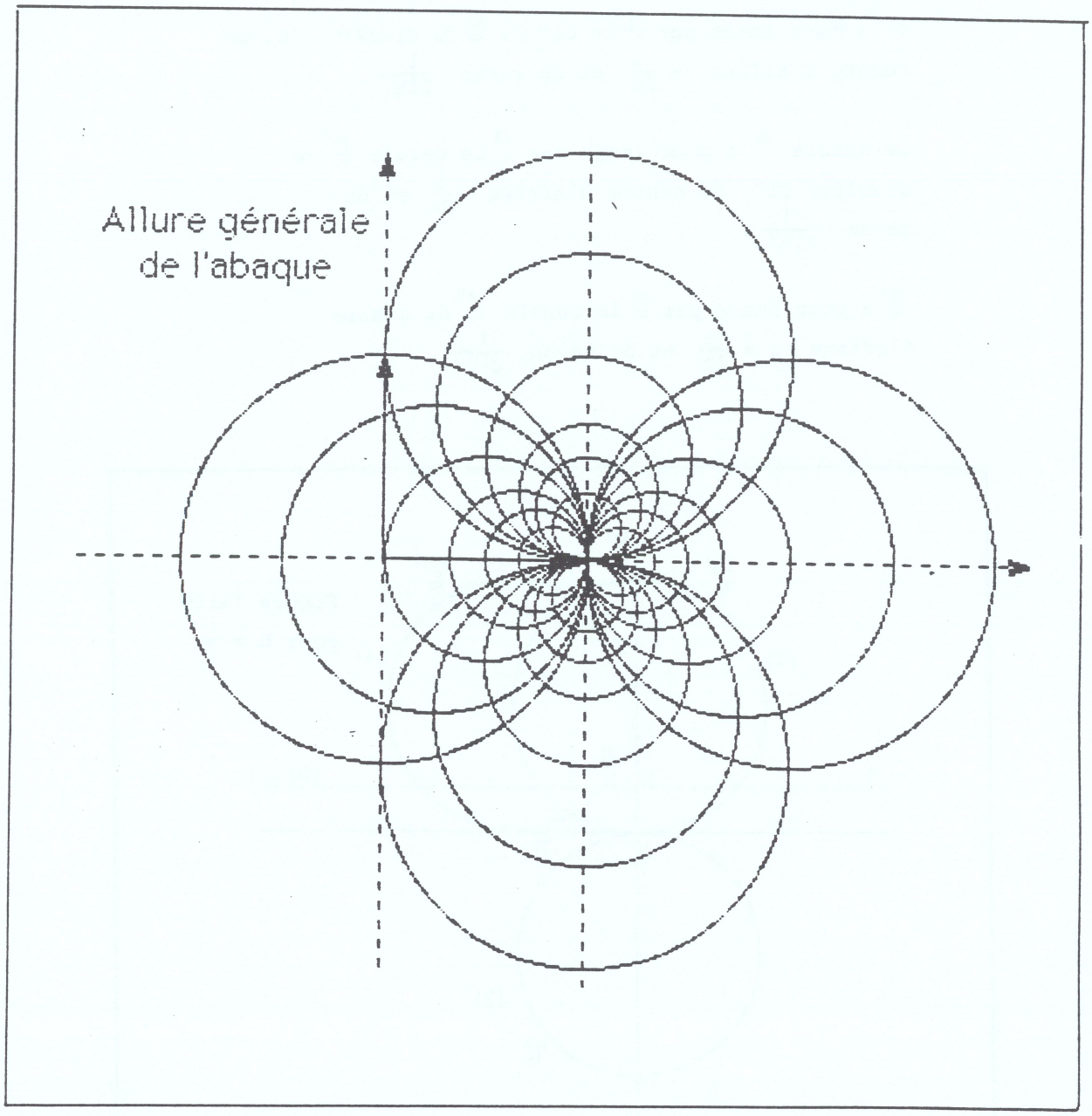


Fig 40

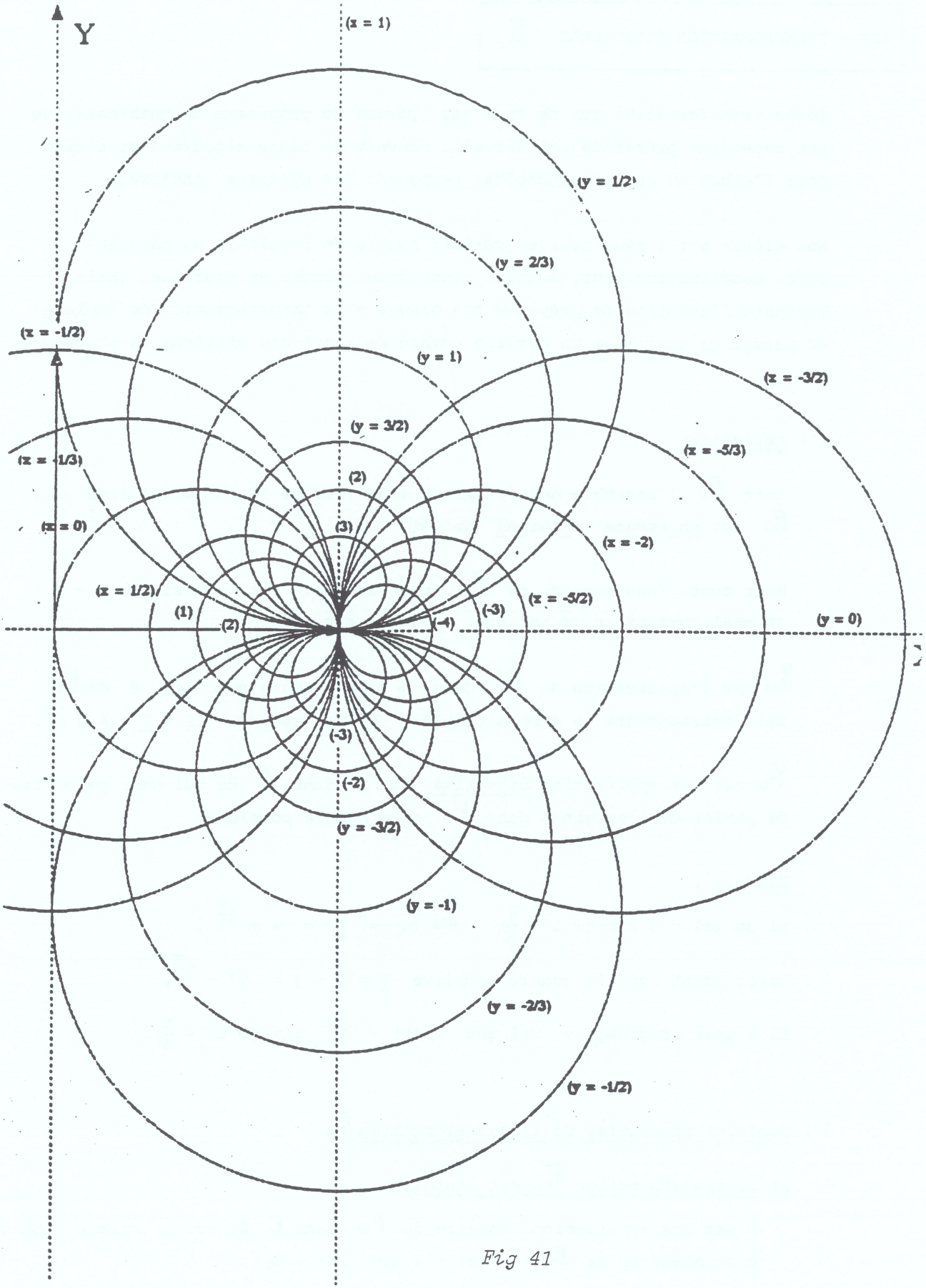

Y
(x = 1)
(y = 1/2)
(y = 2/3)
(x = -1/2)
(y = 1)
(x = -3/2)
(y = 3/2)
(x = -1/3)
(x = -5/3)
(2)
(x = 0)
(3)
(x = -2)
(x = 1/2)
(1)
(-3)
(x = -5/2)
(2)
(-4)
(y = 0)
(-3)
(-2)
(y = -3/2)
(y = -1)
(y = -2/3)
(y = -1/2)

Fig 41

III - TRANSFORMATION CISSOIDALE $\mathcal{C}_\omega$

Cette transformation qui ne fait pas partie du programme de mathématiques est cependant présentée ici car elle fournit un cadre rigoureux et simple pour l'étude du régime sinusoïdal permanent des systèmes linéaires.

Nos élèves ont à mémoriser un certain nombre de résultats en physique, cette modélisation peut, à notre avis, être abordée en exercice. (Elle présente l'avantage de préparer nos élèves à la transformation de Laplace, et permet de justifier un certain nombre de résultats utilisés en physique).

1°) Définition

Soit F_ω l'ensemble des fonctions sinusoïdales de pulsation fixe ω. F_ω est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

Pour toute fonction f de F_ω, nous avons : $f(t) = A \sin(\omega t + \varphi)$. (A réel positif et φ tel que $-\pi < \varphi \leqslant \pi$).

$\mathcal{C}_\omega$ est l'application de F_ω dans $\mathbb{C}$ qui à toute fonction f de F_ω fait correspondre le nombre complexe $\underline{F}$ tel que $\mathcal{C}_\omega(f) = \underline{F} = A\, e^{j\varphi}$.

$\mathcal{C}_\omega$ est une application bijective de F_ω dans $\mathbb{C}$ ce qui nous permettra de parler de l'original dans F_ω d'un nombre complexe.

Exemple :

Si $u(t) = 4 \sin(\omega t + \frac{\pi}{3})$ $\quad \mathcal{C}_\omega(u) = \underline{U} = 4\, e^{j\frac{\pi}{3}}$;

inversement, soit le nombre complexe $\underline{V} = 1 + j = \sqrt{2}\, e^{j\frac{\pi}{4}}$,

il a pour original, v tel que $v(t) = \sqrt{2} \sin(\omega t + \frac{\pi}{4})$.

2°) Quelques propriétés de la transformation $\mathcal{C}_\omega$.

a) La transformation $\mathcal{C}_\omega$ est linéaire

C'est une application linéaire de F_ω dans $\mathbb{C}$. En effet, soient f et g deux éléments de F_ω : $f(t) = a \sin(\omega t + \varphi_1)$,

$g(t) = b \sin(\omega t + \varphi_2)$. (a et b réels positifs)

Nous avons $\mathcal{C}_\omega(f) = \underline{F} = a\ e^{j\varphi_1}$,

$\mathcal{C}_\omega(g) = \underline{G} = b\ e^{j\varphi_2}$,

. Soit α réel $(\alpha f)(t) = \alpha\ a \sin(\omega t + \varphi_1)$,

si $\alpha > 0$ $\mathcal{C}_\omega(\alpha f) = \alpha\ a\ e^{j\varphi_1} = \alpha\, \mathcal{C}_\omega(f)$,

si $\alpha < 0$ $(\alpha f)(t) = |\alpha|\ a \sin(\omega t + \varphi_1 + \pi)$

$\mathcal{C}_\omega(\alpha f) = |\alpha|\ a\ e^{j(\varphi_1 + \pi)} = -|\alpha| a\, e^{j\varphi_1} = \alpha\, \mathcal{C}_\omega(f)$

Donc pour tout α réel et toute fonction f de F_ω .

$$\mathcal{C}_\omega(\alpha f) = \alpha\, \mathcal{C}_\omega(f)$$

. $(f + g)(t) = a \sin(\omega t + \varphi_1) + b \sin(\omega t + \varphi_2)$

$= (a \cos\varphi_1 + b \cos\varphi_2) \sin\omega t + (a \sin\varphi_1 + b \sin\varphi_2) \cos\omega t$

Posons $A = a \cos\varphi_1 + b \cos\varphi_2$ et $B = a \sin\varphi_1 + b \sin\varphi_2$,

$$(f + g)(t) = \sqrt{A^2+B^2}\left(\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}} \sin\omega t + \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}} \cos\omega t\right)$$

$$(f + g)(t) = \sqrt{A^2+B^2} \sin(\omega t + \varphi) \quad \text{avec} \begin{cases} \cos\varphi = \dfrac{A}{\sqrt{A^2+B^2}} \\ \sin\varphi = \dfrac{B}{\sqrt{A^2+B^2}} \end{cases}$$

$$\mathcal{C}_\omega(f + g) = \sqrt{A^2+B^2}\ e^{j\varphi}$$

$$= \sqrt{A^2+B^2}\ (\cos\varphi + j \sin\varphi)$$

$$= A + j B$$

$$= (a \cos\varphi_1 + b \cos\varphi_2) + j\ (a \sin\varphi_1 + b \sin\varphi_2)$$

$$= (a \cos\varphi_1 + j\ a \sin\varphi_1) + (b \cos\varphi_2 + j\ b \sin\varphi_2)$$

$$= a\ e^{j\varphi_1} + b\ e^{j\varphi_2}$$

Donc pour toutes fonctions f et g de F_ω

$$\mathcal{C}_\omega(f + g) = \mathcal{C}_\omega(f) + \mathcal{C}_\omega(g)$$

b) Transformée d'une dérivée

Soit f un élément de F_ω : $f(t) = A \sin(\omega t + \varphi)$,

nous avons $f'(t) = A\omega \cos(\omega t + \varphi)$,

soit $f'(t) = A\omega \sin(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2})$,

en conséquence $\mathcal{C}_\omega(f') = A\omega e^{j(\varphi + \frac{\pi}{2})}$,

$= A\omega e^{j\frac{\pi}{2}} e^{j\varphi}$,

$= j\omega (A e^{j\varphi})$,

quelque soit f de $\mathcal{C}_\omega$ $\mathcal{C}_\omega(f') = j\omega \mathcal{C}_\omega(f)$.

(L'opération de dérivation est interne dans F_ω, elle se traduit par une multiplication par $j\omega$ dans $\mathbf{C}$).

c) Transformée d'une fonction retardée

Conservons les mêmes notations et posons $f_1(t) = f(t - \tau)$ (τ constante réelle).

$f_1(t) = A \sin(\omega t + \varphi - \omega\tau)$ donc si f appartient F_ω : f_1 est élément de F_ω.

$$\mathcal{C}_\omega(f_1) = A e^{j(\varphi - \omega\tau)}$$

$$= e^{-j\omega\tau} (A e^{j\varphi})$$

$$= e^{-j\omega\tau} \mathcal{C}_\omega(f)$$

Le lecteur aura observé les analogies avec la transformation de Laplace.

3°) Application de la transformation $\mathcal{C}_\omega$

a) Exemple introductif

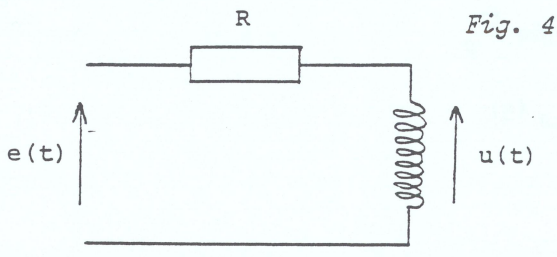


Fig. 42

$$\underline{T}(\omega) = \frac{jL\omega}{R + jL\omega}$$

(voir I 2°))

Cherchons la réponse de ce circuit à une excitation sinusoïdale $t \mapsto e(t)$ avec $e(t) = E_m \sin \omega t$.

Les équations qui régissent ce circuit sont :

$$\begin{cases} e(t) = R\, i\,(t) + u\,(t) \\ u(t) = L \dfrac{di(t)}{dt} \end{cases}$$

Nous avons à résoudre l'équation différentielle :

$$L \frac{di(t)}{dt} + R\, i(t) = e(t) \qquad (I)$$

Résolvons cette équation sur $[\, 0, + \infty \,]$

$L \dfrac{di(t)}{dt} + R\, i(t) = 0$ a pour solution générale i définie par

$i(t) = K\, e^{-\frac{R}{L} t}$ (K constante réelle quelconque)

En recherchant une solution particulière de (I) de la forme

$i(t) = A \sin \omega t + B \cos \omega t$, on trouve $A = \dfrac{E_m R}{R^2 + L^2 \omega^2}$ et

$B = \dfrac{-L \omega E_m}{R^2 + L^2 \omega^2}$

D'où la solution générale de (I)

$$i(t) = K\, e^{-\frac{R}{L} t} + \frac{E_m}{R^2 + L^2 \omega^2} (R \sin \omega t - L\omega \cos \omega t).$$

Nous pouvons écrire :

$$i(t) = K\, e^{-\frac{R}{L} t} + \frac{E_m}{\sqrt{R^2 + L^2 \omega^2}} \left(\frac{R}{\sqrt{R^2 + L^2 \omega^2}} \sin \omega t - \frac{L\omega}{\sqrt{R^2 + L^2 \omega^2}} \cos \omega t \right)$$

En posant $\begin{cases} \cos\varphi = \dfrac{R}{\sqrt{R^2+L^2\omega^2}} \\ \sin\varphi = \dfrac{-L\omega}{\sqrt{R^2+L^2\omega^2}} \end{cases}$,

$$i(t) = K\, e^{-\frac{R}{L}t} + \frac{Em}{\sqrt{R^2+L^2\omega^2}} \sin(\omega t + \varphi) \text{ avec } \varphi = \text{Arctan}\left(-\frac{L\omega}{R}\right)$$

Finalement $u(t) = L\dfrac{di(t)}{dt}$

soit $u(t) = -K R\, e^{-\frac{R}{L}t} + \dfrac{E_m L\omega}{\sqrt{R^2+L^2\omega^2}} \cos(\omega t + \varphi)$

$$u(t) = -K R\, e^{-\frac{R}{L}t} + \frac{E_m L\omega}{\sqrt{R^2+L^2\omega^2}} \sin(\omega t + \varphi + \pi/2)$$

(K constante réelle à déterminer avec la condition initiale)

$t \mapsto -K R\, e^{-\frac{R}{L}t}$ représente le régime <u>transitoire</u>

$(\lim_{t\to+\infty} e^{-\frac{R}{L}t} = 0)$

$t \mapsto \dfrac{E_m L\omega}{\sqrt{R^2+L^2\omega^2}} \sin(\omega t + \varphi + \pi/2)$ représente le régime <u>permanent</u>

recherché par le physicien (avec $\varphi = -\text{Arctan}\dfrac{L\omega}{R}$)

b) <u>Fonctions de transfert en régime sinusoïdal permanent</u>

Utilisons l'équation différentielle linéaire à coefficients constants du (I 1) :

$$a_0 s(t) + a_1 s'(t) + \ldots + a_n s^{(n)}(t) = b_0 e(t) + b_1 e'(t) + \ldots + b_n e^{(n)}(t).$$

Supposons e sinusoïdale de pulsation ω et recherchons la réponse s en régime <u>permanent</u> (elle sera sinusoïdale et de pulsation ω ; voir l'exemple précédent).

Posons $\mathcal{C}_\omega(s) = \underline{S}$ et $\mathcal{C}_\omega(e) = \underline{E}$.

Appliquons la transformation $\mathcal{C}\omega$ aux deux membres de l'équation différentielle en utilisant les propriétés de la transformation $\mathcal{C}\omega$ évoquées précédemment.

On obtient :

$$a_o \underline{S} + a_1 j\omega \underline{S} + \ldots\ldots + a_n (j\omega)^n \underline{S} = b_o \underline{E} + b_1 j\omega \underline{E} + \ldots\ldots + b_n (j\omega)^n \underline{E}$$

$$\text{d'où : } \frac{\underline{S}}{\underline{E}} = \frac{b_o + b_1 j\omega + \cdots\cdots\cdots + b_n (j\omega)^n}{a_o + a_1 j\omega + \cdots\cdots\cdots + a_n (j\omega)^n} \quad ,$$

(ce qui justifie l'expression de $\underline{T}(\omega)$ donnée au I 1)

c) Utilisation de la transformation $\mathcal{C}\omega$ sur l'exemple introductif

$$\begin{cases} e(t) = R\, i(t) + L \dfrac{di(t)}{dt} \\ \\ u(t) = L \dfrac{di(t)}{dt} \end{cases} \qquad \text{et} \quad e(t) = E_m \sin \omega t.$$

Appliquons $\mathcal{C}\omega$. Nous obtenons : $\underline{E} = R\, \underline{I} + L\, j\omega\, \underline{I}$,

$$\underline{U} = L\, j\omega\, \underline{I}$$

$$\text{d'où } \frac{\underline{U}}{\underline{E}} = \frac{L\, j\omega\, \underline{I}}{R\, \underline{I} + L\, j\omega \underline{I}} = \frac{L\, j\omega}{R + j L\omega} \quad ;$$

$$\text{ici } \underline{E} = E_m \text{ , soit } \underline{U} = \frac{E_m\, L j\omega}{R + j L\omega}$$

Pour trouver l'original, remarquons que $|\underline{U}| = \dfrac{E_m L\omega}{\sqrt{R^2 + L^2\omega^2}}$

$$\text{et } \operatorname{Arg}(\underline{U}) = \pi/2 - \operatorname{Arctan} \frac{L\omega}{R}$$

d'où le régime permanent recherché défini par :

$$u(t) = \frac{E_m L\omega}{\sqrt{R^2 + L^2\omega^2}} \sin\left(\omega t + \pi/2 - \operatorname{Arctan} \frac{L\omega}{R}\right) .$$