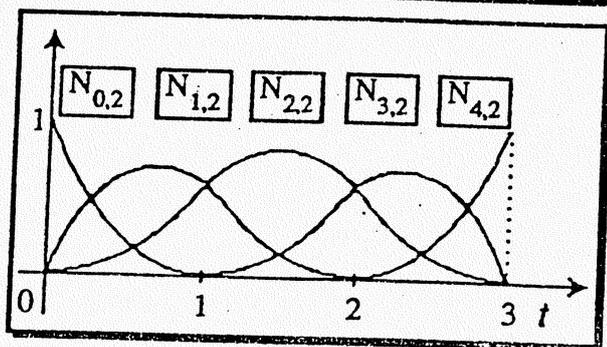
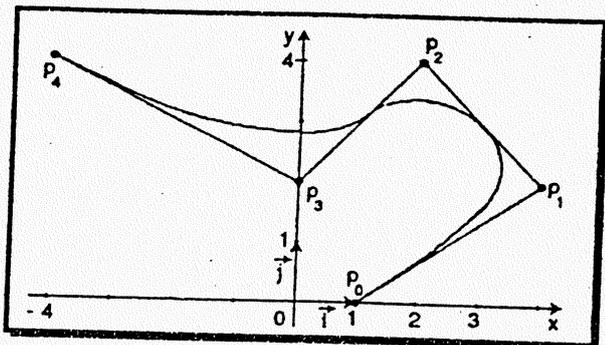


Une introduction à la MODELISATION GEOMETRIQUE :
cas des modèles de courbes pour la C.A.O.



COURBES
de
BEZIER
et
B. SPLINES

Préface de Pierre BEZIER

UNIVERSITE PARIS-NORD
Institut Galilée - I.R.E.M.

99, Avenue Jean-Baptiste Clément

93430 VILLETANEUSE

**UNIVERSITE PARIS XIII. -IREM PARIS-NORD
MODELISATION GEOMETRIQUE/J.P. POUGET.
Novembre 1992.- 131 pages**

ISBN 2 86240 047 5

Dépot légal : 4ème trimestre 1992

**500 exemplaires
40 francs**

À l'occasion de la deuxième édition revue et corrigée de ce document, je voudrai remercier Pierre Bézier, qui a accepté d'en assurer la préface, et a fourni quelques remarques (notées « Remarques P.B. ») intégrées dans la présente édition.

Cette attention témoigne de sa part un soutien pour les efforts entrepris pour transférer la connaissance de ces modèles, auprès des professeurs de mathématiques.

Après quelques années d'expérimentation de ce transfert, il est clair que cette démarche initiative a suscité un vif intérêt de la part de nos collègues, conséquence naturelle de la richesse des modélisations rencontrées dans le domaine de la modélisation géométrique.

Un champ infini d'applications de tous niveaux, l'occasion rêvée de jonctions entre différentes parties des mathématiques, et interdisciplinaires en informatique, mécanique, mathématiques ... , donnent de plus en plus de motivations pour avancer dans la connaissance de ce domaine.

Faisons le pari que, travailler sur ces modèles, fédère à la fois technologie et mathématiques, application et théorie, analyse et géométrie, autant de disciplines qui ne sont là que pour nous servir et nous aider à progresser.

J.P. POUGET.

PRÉFACE

L'homme a toujours eu besoin de s'exprimer par le dessin, langage international s'il en est.

Il l'a fait parfois avec gaucherie, englué qu'il était dans des conventions dont il n'osait se défaire, souvent avec talent, les tracés préhistoriques pariétaux en témoignent, ou avec génie ; l'histoire du dessin, de la peinture, du bas-relief ou de la ronde-bosse est pleine d'œuvres dont on ne sait ce qu'il faut admirer le plus, du coup d'œil de l'artiste ou de la sûreté de sa main.

Le dessin a probablement été, à son origine, un art incantatoire et magique, prenant ensuite une forme plus désintéressée, source d'un plaisir esthétique.

Dès que la technique eût fait sentir son importance au sein d'une civilisation où les tâches se différençaient il fallut confier au dessin la charge de communiquer au tailleur de pierre les instructions de l'architecte, et au charpentier de marine celles du maître du chantier naval.

La rigueur d'un tracé ne pouvait se fonder que sur l'usage d'instruments simples, la règle et le compas ; passant de l'artisanat à la science, les géomètres de l'antiquité ont créé un savoir au sein duquel la droite et le cercle jouaient le premier rôle. D'autres courbes étaient obtenues à l'aide de liens flexibles et de tiges articulées combinant parfois le mouvement de roues ; c'étaient, par exemple, les ellipses, les cycloïdes ou la cissoïde, mais les mathématiciens les traitaient avec condescendance de " courbes mécaniques ", et l'on voit transparaître, dans cette épithète, la considération très mitigée que les théoriciens accordent aux mathématiques appliquées, plus ou moins considérées comme impures et marquées d'une tare de mercantilisme.

Les jardiniers ont su, bien vite, tracer au cordeau le contour des massifs elliptiques ; les mathématiciens-ingénieurs de la Renaissance ont inventé le parabolographe et l'hyperbolographe mais, jusqu'au milieu de notre siècle, tout ce qui n'était pas droite ou cercle ne pouvait se tracer qu'avec un pistolet ou une latte, ce qui ne garantissait pas une excellente reproductibilité ; il faut signaler cependant l'exception constituée par la développante de cercle, mais pour laquelle il a fallu créer spécialement les machines à tailler les pignons.

Vers 1955 l'ordinateur, libéré de l'obligation de fonctionner en milieu climatisé strictement, a pu s'appliquer à la conduite des machines à commande numérique ; il devenait alors possible, au moins de façon théorique, de résoudre un problème dont les industries aéronautiques, automobiles et navales cherchaient depuis longtemps la solution car elles ne pouvaient se contenter de la droite et du cercle pour représenter les formes exigées par la dynamique des fluides ou demandées par l'esthétique.

Il a donc fallu développer la théorie des espaces paramétriques, dont les applications étaient jusque-là demeurées très peu nombreuses aussi longtemps que l'ordinateur n'avait pas multiplié par un coefficient énorme la vitesse de calcul des machines mécaniques ou électriques.

Depuis longtemps, notre civilisation occidentale a oublié l'usage des tables à compter, du boulier, des réglettes de Neper et des logarithmes ; la vue d'une règle à calcul ne suscite qu'une surprise polie ou une curiosité d'archéologue de la part de qui n'est pas au moins âgé d'un demi-siècle.

Dans notre ère, il faut en prendre conscience, l'écran cathodique est en voie de remplacer la planche à dessin, et la calculette résout toute seule les problèmes de trigonométrie ; les polynomiales, les splines et les NURBS - que l'on me pardonne ces anglicismes inévitables - sont devenues irremplaçables, et l'on ne peut même plus fabriquer sans leur secours une forme à chaussures ou un veston prêt-à-porter.

Il est donc parfaitement indispensable que, très tôt, les élèves soient initiés à cette branche des mathématiques et il est souhaitable que cet enseignement soit homogène ; c'est à quoi vise le présent manuel.

On a observé que, depuis un demi-siècle, ou presque, la part de la géométrie s'est fort rétrécie dans les programmes alors que la valeur pédagogique d'un diagramme - ne citons pas, une fois de plus, la préférence exprimée par Napoléon - est souvent supérieure à celle de plusieurs pages de calculs. Que l'on veuille bien penser que cette géométrie des espaces paramétriques est destinée, en particulier, à des corps de métiers, dessinateurs, projeteurs, agents de maîtrise, pour qui la vision d'une courbe ou d'une surface relève intuitivement de la géométrie plus que de l'algèbre. Sans doute alors serait-il bon que la démonstration analytique, qu'elle ait lieu pendant le cours ou l'exercice dirigé, soit complétée, et peut-être éclairée, par un commentaire sur les courbes représentatives des fonctions ou sur la cinématique élémentaire des combinaisons de vitesses.

Si Platon a dit " TOUT EST NOMBRE ", n'avait-il pas aussi fait inscrire à la porte de son Académie : " QUE NUL N'ENTRE ICI S'IL N'EST GÉOMÈTRE ".

Pierre BÉZIER.

TABLE DES MATIÈRES

- *AVANT-PROPOS*

- **Chapitre 1 :**

MODÉLISATION

MODÉLISATION GÉOMÉTRIQUE

1. *À propos d'une modélisation*
 2. *Multi-influence*
 3. *Réalisation informatique*
 - 3.1. *Modèle informatique*
 - 3.2. *Choix*
 4. *Modélisation géométrique*
 5. *Modélisation des formes*
 6. *Modèles polynomiaux*
 7. *Module de programme associé*
 - 7.1. *Texte du module*
 - 7.2. *Présentation du module*
 8. *Bibliographie*
 - 8.1. *Modélisation géométrique*
 - 8.1. *Modèles de courbes pour la C.A.O.*
-

• Chapitre 2 :

MODÈLE DES COURBES DE BÉZIER

I. Exposé de référence

0. Introduction

1. Présentation "pantin vectoriel"

- 1.1. Mise en place
- 1.2. Influence sur la forme
 - 1.2.1. Choix des vecteurs
 - 1.2.2. Position du point $M(t)$
 - 1.2.3. Contrainte d'indépendance
 - 1.2.4. Récapitulation sur les contraintes imposées
- 1.3. Détermination des fonctions polynomiales f_i
- 1.4. Croissance des fonctions f_i sur $[0,1]$
- 1.5. Un exemple
- 1.6. Algorithme associé
- 1.7. Jeu sur la forme
 - 1.7.1. Raccordement
 - 1.7.2. Courbes fermées

2. Présentation "points de contrôle"

- 2.0. Autre présentation
- 2.1. Lien entre le pantin vectoriel et les points de contrôle
- 2.2. Deux points de vue: barycentrique et probabiliste
 - 2.2.1. Probabilité
 - 2.2.2. Barycentre
- 2.3. Étude des fonctions poids binomiaux ou polynômes de Bernstein
 - 2.3.1. Étude de chaque polynôme
 - 2.3.2. Étude conjointe des polynômes
 - 2.3.2.1. Groupement
 - 2.3.2.2. Intégration
 - 2.3.2.3. Relation interpolynôme de Bernstein
 - 2.3.3. Propriétés
 - 2.3.3.1. Calcul de $B_{i,n}(1-t)$
 - 2.3.3.2. Équation différentielle
- 2.4. Aspect nombres complexes
- 2.5. Aspect matrice-base de polynômes
- 2.6. Aspect suites
 - 2.6.1. Définition d'une suite vectorielle
 - 2.6.2. Un exemple
 - 2.6.3. Généralisation
 - 2.6.4. Exploitation de l'aspect suites
 - 2.6.4.1. Un algorithme de détermination
 - 2.6.4.2. Cahier de charges d'un programme associé
 - 2.6.4.3. Construction géométrique

II. Présentation des activités sur le modèle de Bézier

• Chapitre 3 :

MODÈLE DES B-SPLINES

0. Préliminaire

I. Une première approche

1. *Un cas particulier*

- 1.1. Mise en place
- 1.2. Définition des contraintes
- 1.3. Expression des contraintes
- 1.4. Détermination des polynômes de Riesenfeld
- 1.5. Un exemple
- 1.6. Propriétés géométriques

2. *Généralisation*

- 2.1. Définition
- 2.2. Quelques propriétés
- 2.3. Autre formulation du modèle
 - 2.3.1. Autre expression générale des polynômes de Riesenfeld
 - 2.3.2. Exemple de présentation de type activité

II. Exposé de référence

1. *Introduction*

2. *Présentation récursive des fonctions polynomiales B-Splines*

- 2.1. Définition récursive
- 2.2. Exploration de la définition
 - 2.2.1. Exemples
 - 2.2.2. Expression générale des fonctions B-Splines de degré 1 et 2
- 2.3. Quelques propriétés générales des fonctions B-Splines

3. *Approximation d'un ensemble de points par une courbe B-Spline*

- 3.1. Lien avec les polynômes de Riesenfeld
- 3.2. Choix du vecteur nœud

4. *Algorithme associé à la définition récursive des fonctions B-Splines*

- 4.0. Rappel de la définition récursive
- 4.1. Exemple simple ($m=2$)
- 4.2. Algorithme général de construction d'un point
- 4.3. Algorithme général du tracé d'une courbe B-Spline

III. Présentation des activités sur le modèle B-Spline

• *CONCLUSION*

AVANT-PROPOS

Cette brochure a été rédigée par un groupe de recherche sur les activités mathématiques, au niveau Technicien Supérieur, créé à l'initiative du bureau DLC 15 du Ministère de l'Éducation Nationale, associé aux groupes de recherches BTS de l'IREM PARIS-NORD et du groupe inter-IREM " Lycées Techniques ". On se propose ici de donner une introduction, des références, des idées de présentation, et des exemples de travaux pratiques ou de thèmes, sur la modélisation géométrique, en particulier sur les modèles de courbes utilisées en C.A.O. (Conception Assistée par Ordinateur) pour la représentation des formes.

Ces modèles, à base de polynômes, fournissent des exemples d'outils mathématiques servant dans des situations variées, dans différents domaines: automobile, aéronautique, design industriel, robotique ...

*Ce thème - **modélisation géométrique** - a été introduit dans le programme des Techniciens Supérieurs en Informatique Industrielle. Il est susceptible d'intéresser d'autres spécialités comme C.P.I., Productique ... ; pour d'autres sections de T.S., il peut donner un exemple d'applications des modèles polynomiaux et des courbes en coordonnées paramétriques.*

*Ce document débute par une introduction sur la modélisation en général, puis la modélisation géométrique et sur les modèles de courbes pour la C.A.O. À ce niveau, une introduction peut être faite, à l'aide des **modèles de BÉZIER**, des **B.Splines** et des modèles utilisés pour la commande des robots manipulateurs. Le champ de l'étude, les buts de ces modèles, les restrictions envisagées pour l'étude au niveau T.S. sont précisés.*

On propose, ensuite, une introduction au modèle de BÉZIER. L'exposé, débute par une présentation vectorielle, et conduit à des liaisons avec différentes parties du programme de Mathématiques grâce à l'exploitation de points de vue d'étude différents. Il est complété par des propositions d'exemples d'activités.

Les modèles B.Splines, modèles locaux par opposition au modèle global de BÉZIER, sont présentés avec la même ligne directrice; on s'est efforcé aussi de faire comprendre, de manière physique, le modèle de B.Spline.

Les exposés de référence utilisent de nombreuses notions: barycentre, probabilité, fonction, intégration, matrice, suite, algorithme... Les propositions d'exemples d'activités offrent des thèmes de recherche, ou de travaux pratiques.

Le modèle de Bézier et le modèle B. Splines sont d'abord introduits sous une forme géométrique qui paraît bien adaptée à une étude progressive de ces modèles. Cette approche préliminaire (pantin vectoriel pour Bézier- modèle de Riesenfeld pour B.Spline) permet des activités, sans théorie excessive, accessibles au niveau T.S. On peut ensuite faire une étude plus complète. De nombreux algorithmes et programmes peuvent accompagner l'étude et l'exploitation de ces modèles. Ce domaine a donné lieu à de nombreuses recherches et publications (voir **bibliographie**).

Pour la présentation des courbes de BÉZIER comme pour celle des courbes B-Splines, nous avons adopté le même plan:

- une première approche,
- un exposé de référence,
- une proposition d'activités associées.

Cette brochure traite des modèles de courbes pour la C.A.O. Elle sera complétée ultérieurement par un document spécifique pour la Robotique.

Ce document sert de support à la formation organisée par l'IREM de Paris Nord dans le cadre des MAFPEN de la Région Parisienne.

Toutes les remarques des lecteurs seront les bienvenues. Elles peuvent être adressées à :

B. VERLANT
IREM de Paris Nord
CSP
Avenue J.B. Clément
93430 Villetaneuse

qui transmettra aux auteurs.

Chapitre 1

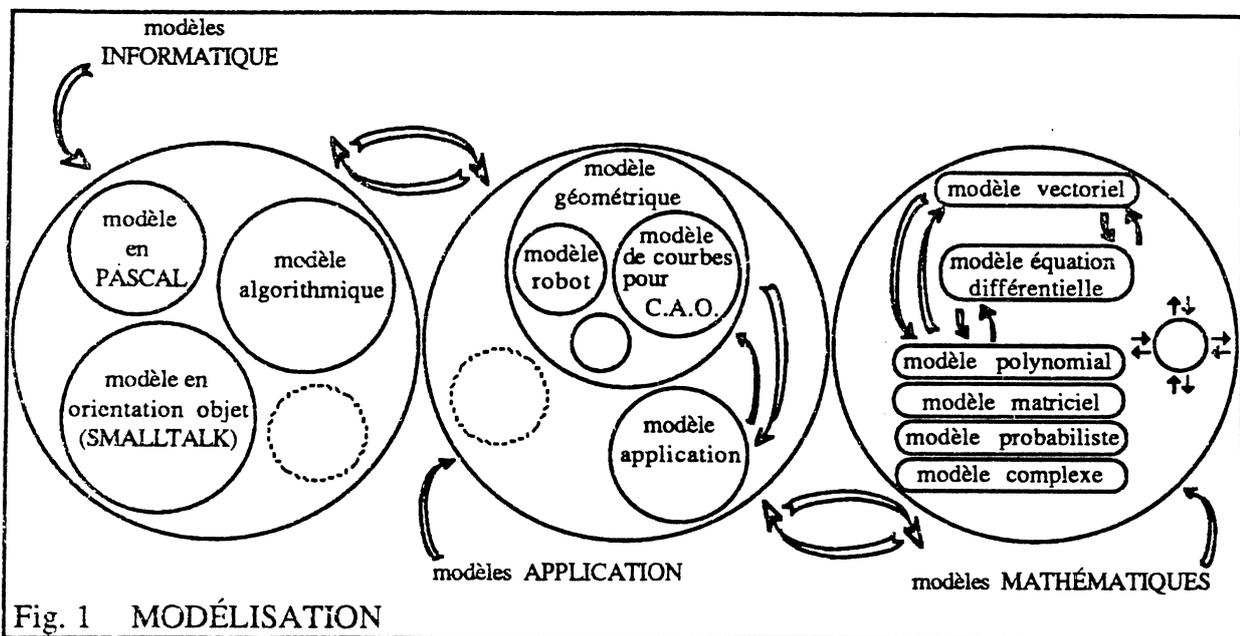
MODÉLISATION

MODÉLISATION
GÉOMÉTRIQUE

1. À PROPOS D'UNE MODÉLISATION:

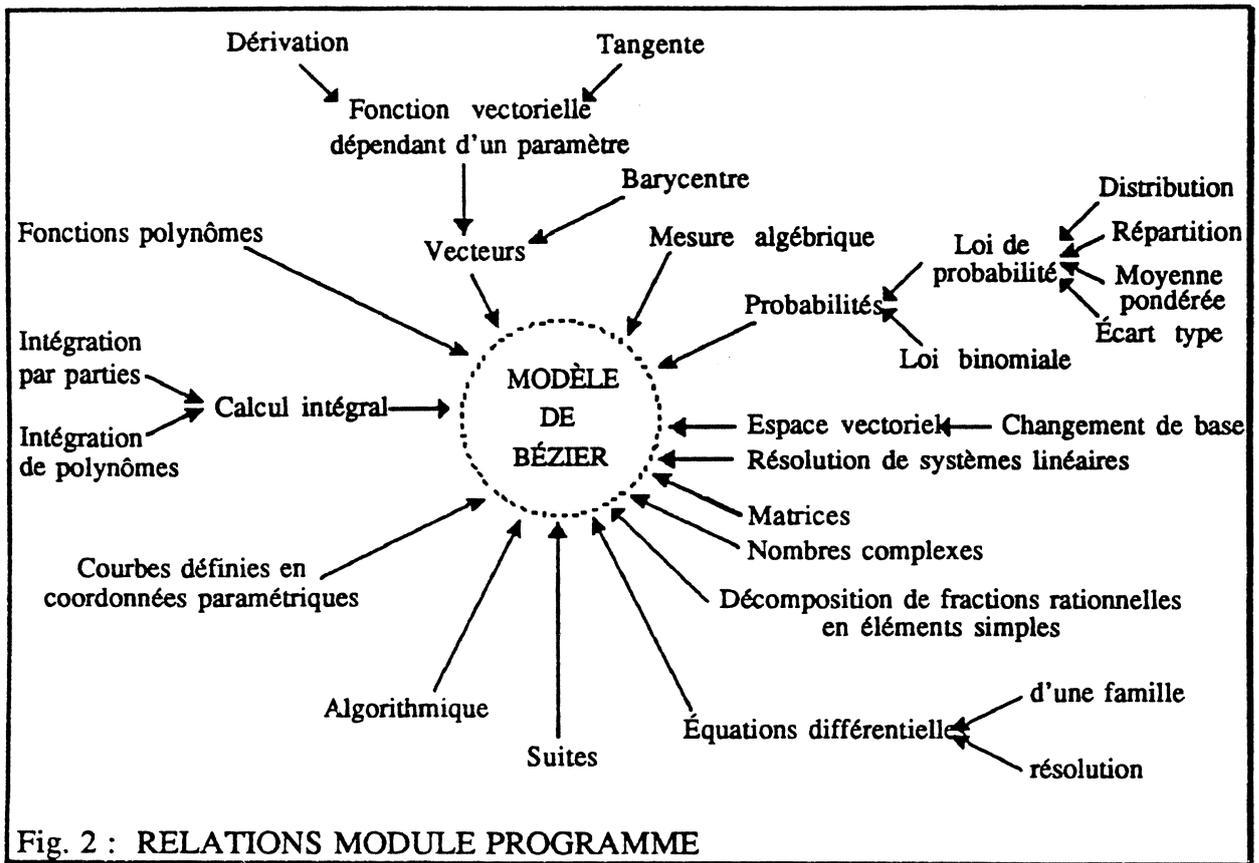
En modélisation géométrique, en particulier sur les modèles de courbes utilisées en C.A.O., on met en œuvre de nombreux modèles mathématiques et informatiques.

Dans ce document sont présentés notamment des modèles algorithmiques (barycentration) permettant l'obtention des courbes de Bézier et des courbes B-Splines; on se propose aussi d'illustrer l'interaction entre des modèles d'origines différentes, (voir le schéma ci-dessous).



2. MULTI-INFLUENCE:

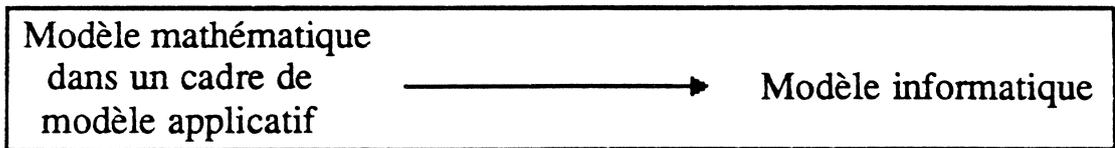
Le modèle des courbes de Bézier, et celui des courbes B-Splines utilisent des concepts mathématiques provenant de la plupart des modules du programme de Mathématiques des Sections de Techniciens Supérieurs, (voir le schéma ci-après).



3. RÉALISATION INFORMATIQUE:

3.1. *Modèle informatique:*

La *réalisation* informatique peut donner lieu à un travail appliqué intéressant en liaison avec la formation informatique associée. Une fois le modèle mathématique mis en place, il est possible de l'utiliser à l'aide d'un modèle informatique. De nombreux programmes peuvent être tirés de cette activité. Parmi ceux-ci, on pourra privilégier des programmes montrant la finalité de ces courbes, pour choisir la forme désirée et réaliser la meilleure approximation possible au sens de la *maîtrise de la forme*.



3.2. *Choix:*

• Choix classique:

Le *choix* des langages peut être varié:

Ainsi DE BOOR illustre-t-il son livre sur les SPLINES, [BOOR 78], par de nombreux programmes en FORTAN,

DONY propose des programmes en BASIC pour l'application des deux chapitres de son livre sur BÉZIER et sur les B-Splines [DON 86],

BORLAND propose dans une extension graphique de TURBO-PASCAL, des routines en PASCAL relatives aux courbes de BÉZIER.

Donc, une fois les algorithmes élaborés, divers langages informatiques peuvent être utilisés pour la réalisation effective des programmes. Ce travail peut être effectué en liaison avec les enseignements technologiques.

• Orientation objet:

Pour donner une ouverture supplémentaire, différente des langages classiques (FORTRAN, PASCAL, BASIC...), la réalisation informatique peut être réalisée aussi dans des *langages orienté-objet* (SMALLTALK ou autre). Ces systèmes orienté-objet se prêtent à la création d'un ensemble de classes relatives à la modélisation géométrique dans un univers d'objets adaptés, souple et évolutif.

Remarque:

De nombreux logiciels orientés utilisation sont actuellement disponibles, comme par exemple Personal Designer (Computervision).

4. MODÉLISATION GÉOMÉTRIQUE:

Ce modèle applicatif fournit les modèles mathématiques destinés à des applications GÉOMÉTRIQUES . Le champ des applications géométriques est varié, MORTENSON en dresse un panorama très large [MORT 85]. La modélisation polynomiale qui fournit des solutions pour les courbes pour la C.A.O. n'est qu'une partie de la modélisation géométrique.

Voici une liste non exhaustive de différents sujets appartenant à ce domaine :

- Modélisation des formes par des modèles mathématiques,
- Représentation planaire d'objets tridimensionnels,
- Modélisation des robots,
- Étude des transformations,
- Modélisation des surfaces, des volumes,
- Intersections,
- ...

Restriction:

Dans le champ large de la modélisation géométrique, pour le module de programme " MODÉLISATION GÉOMÉTRIQUE " destiné aux classes de Techniciens Supérieurs, on a choisi deux éléments pour lesquels on peut fournir une introduction:

1°. Les modèles de courbes pour la C.A.O. (Représentation et modélisation de formes) avec une restriction dans le plan.

2°. Les modèles pour la robotique, avec une restriction au modèle géométrique direct.

Les modèles (1) font surtout appel aux modèles polynomiaux (Bézier, B-Splines).

Les modèles (2) font surtout appel au modèle linéaire (matrice).

5. MODÉLISATION DES FORMES:

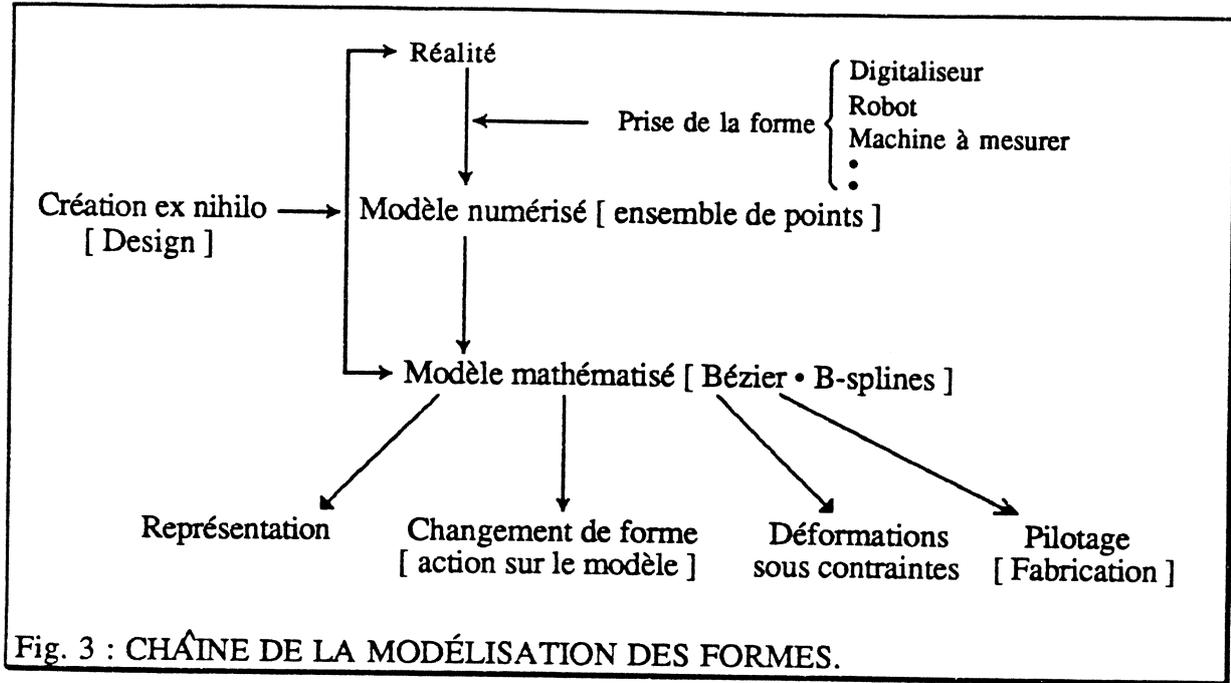
Autrefois la représentation des formes, en respectant un certain nombre de contraintes, était le problème des seuls peintres et architectes. La réussite artistique et technique des Maîtres de la Renaissance est la conséquence des progrès importants réalisés à propos de la représentation dans un plan d'objets en relief (Léonard de Vinci est un des premiers à avoir dessiné en perspective). Après les peintres et les architectes, les mathématiciens se sont intéressés à la représentation des objets de l'espace. MONGE, par exemple, a introduit la géométrie descriptive.

Puis, avec l'ère industrielle est apparu le dessin industriel avec les vues sur plusieurs plans, les coupes éventuelles, la représentation en perspective s'appuyant sur la géométrie et la géométrie descriptive.

Avec l'existence de l'outil informatique, les besoins en modèles mathématiques évoluent. Un des objectifs est de numériser sous la forme d'un modèle mathématique, une forme issue de l'atelier ou du bureau de conception, d'un bureau d'études de pièces mécaniques, d'un laboratoire d'essais en aérodynamique, d'un bureau d'études en " design industriel ", etc ..., dans des domaines d'application variés, automobile, aéronautique, constructions navales, mécanique, architecture, robotique, etc ...

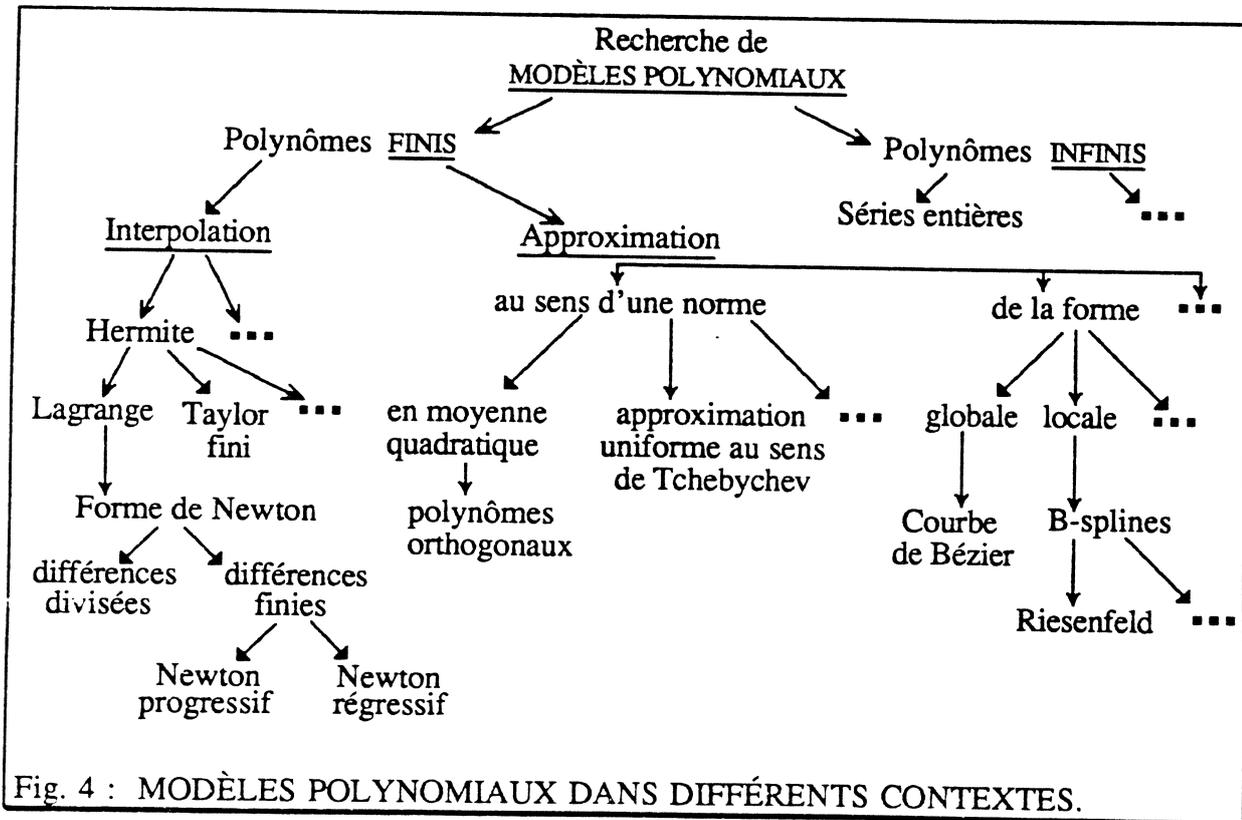
Il s'agit d'élaborer des logiciels de C.F.A.O. (Conception et Fabrication Assistées par Ordinateur) destinés à aider la conception et la fabrication de produits variés. Les modèles mathématiques auront des usages multiples : ils serviront à *mémoriser* une forme, mais aussi à *élaborer* cette forme. Puis ils seront utilisés pour la *représentation* de cette forme. De plus ils seront utilisés pour l'étude des *modifications* de cette forme sous différentes contraintes modélisées, elles-aussi, sur le plan informatique: modifications dues à la chaleur, à la résistance des matériaux, à l'écoulement de fluide ... En dernier lieu, ils serviront pour le *pilotage* de la fabrication, par exemple pour le pilotage de robots, ou de machines à commande numérique.

Dans cette problématique, la recherche de modèles de courbes mathématiques approchant au mieux une forme, ou modélisant une forme créée *ex nihilo* est un élément déterminant à côté de nombreux autres problèmes : commande de robots, asservissement, etc ... On peut noter aussi que, dans un contexte indépendant de celui abordé dans ce document, d'autres problèmes relatifs aux formes sont traités de manière différente avec d'autres modèles : notamment pour le traitement numérique des images, pour la reconnaissance des formes. Le développement de ces modèles mathématiques est dû aux travaux d'ingénieurs de l'automobile, ou de l'aéronautique (Renault, Citroën, Général Motors, Boeing ...). Ils ont bien sûr profité des théories mathématiques existantes concernant par exemple l'étude des polynômes d'interpolation ou d'approximation (Lagrange, Newton, Tchebyshev, Bernstein, ...), mais compte-tenu du besoin précis en modélisation de formes, ils ont dégagé une vision nouvelle pour des objectifs nouveaux et ont inventé des modèles nouveaux.



6. MODÈLES POLYNOMIAUX:

Les modèles polynomiaux de Bézier ou des B-Splines sont un exemple d'application des polynômes dans le domaine de la modélisation des formes. Sur le plan mathématique, ils interviennent dans un contexte large, où l'on peut distinguer les polynômes finis des polynômes infinis, l'aspect interpolation de l'aspect approximation.



7. LE MODULE DE PROGRAMME DE MATHÉMATIQUES DU BTS INFORMATIQUE INDUSTRIELLE:

7.1. Texte du module:

MODÉLISATION GÉOMÉTRIQUE

L'objectif est d'introduire quelques notions mathématiques permettant de dégager des modèles géométriques dans les deux contextes suivants :

- une étude élémentaire des courbes planes de Bézier et des fonctions splines qui constituent des outils pour la modélisation des formes planes. On précisera le problème posé : trouver un modèle permettant d'obtenir une forme satisfaisant à certaines contraintes ; puis on donnera les définitions des courbes de Bézier (modèle global) et des fonctions splines (modèle local).
- une étude de transformations géométriques (translation, rotation) représentées sous forme matricielle qui constituent un outil pour la modélisation des robots.

Dans les deux cas toute ambition théorique et toute technicité sont exclues.

a) Notion sur les courbes de Bézier (dans le plan) et sur les fonctions splines :

Courbes de Bézier :

définition algébrique (polynôme de Bernstein); propriétés géométriques. Algorithme d'obtention d'une courbe de Bézier par barycentration et construction géométrique associée.

Fonctions splines: définition des fonctions splines (on se limitera à des polynômes de degré inférieur ou égal à 3).

Algorithme d'obtention des fonctions B-splines.

b) Translations et rotations du plan et de l'espace : définition, éléments caractéristiques; composition de translations et de rotations ; transformations réciproques.

Écriture matricielle de translations et de rotations.

(coordonnées

On s'attachera à dégager les propriétés relatives à la forme ; on fera le lien avec la conception et le dessin assistés par ordinateur.

Dans la présentation de ces notions comme dans leur mise en œuvre à travers des exercices, on se limitera à des degrés peu élevés.

Dans l'espace on s'intéressera plus particulièrement aux rotations dont l'axe est un axe de coordonnées, dites élémentaires.

On cherchera à faire le lien avec les modèles matriciels utilisés en robotique homogènes).

TRAVAUX PRATIQUES

1. Exemples d'obtention et d'emploi de courbes de Bézier.

2. Exemples d'emploi de fonctions B-splines pour l'obtention de courbes B-splines.

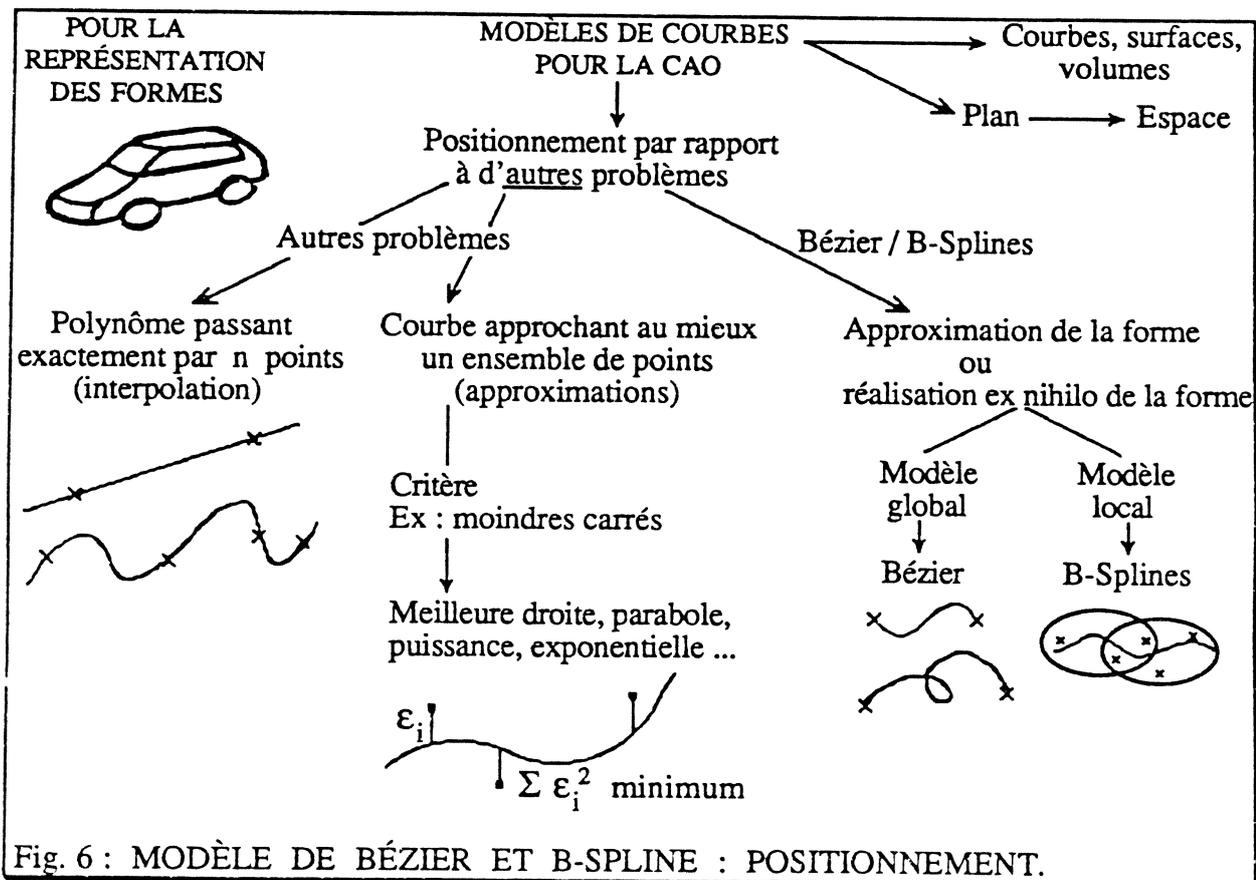
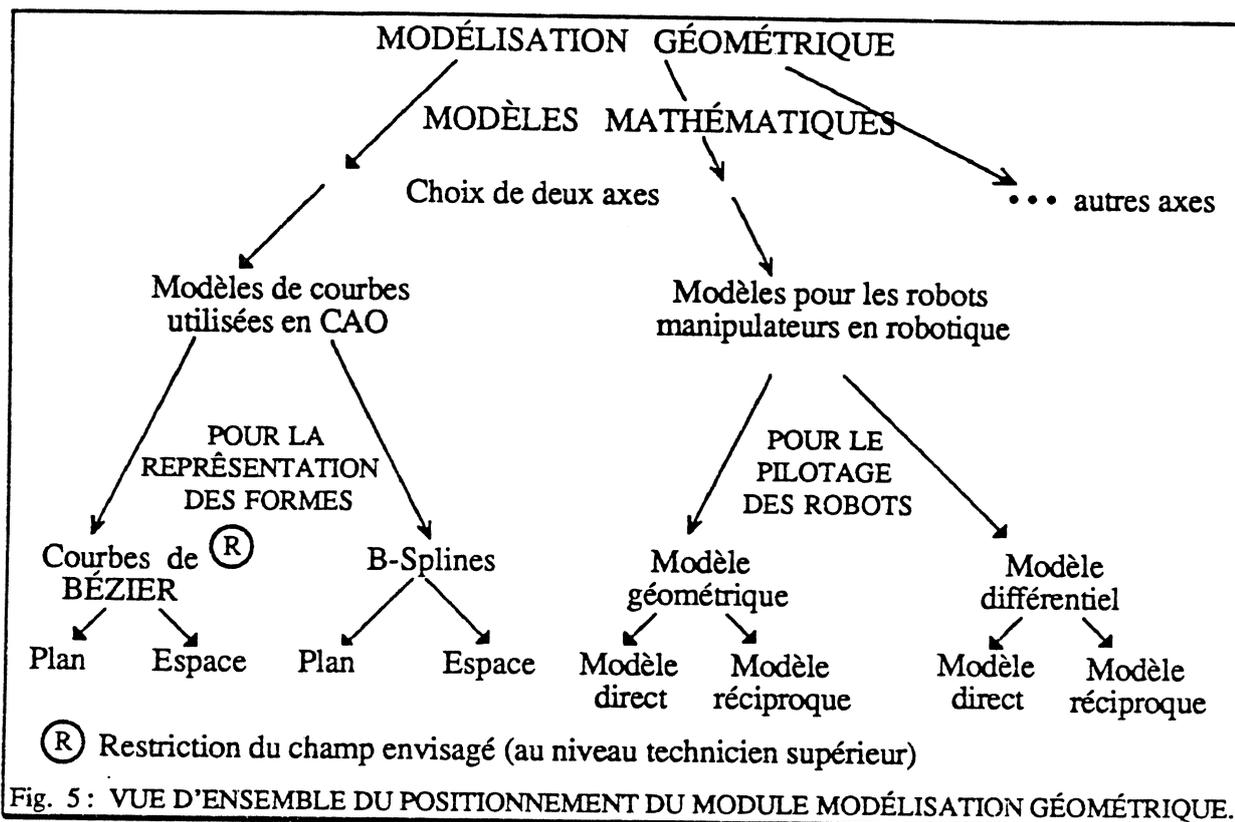
3. Exemples d'écriture matricielle de composées de translations et de rotations.

Exemples de décomposition en produit de translations et de rotations élémentaires d'une transformation géométrique donnée sous forme matricielle.

Pour de telles décompositions des indications sur la méthode à suivre doivent être données.

7.2. Présentation du module de programme : MODÉLISATION GÉOMÉTRIQUE

Deux figures (5 et 6) pour présenter le module.



8. BIBLIOGRAPHIE:

Voici une bibliographie *commentée* assez exhaustive : elle regroupe les premiers documents publiés à ce sujet (1973) et ceux publiés ces deux dernières décennies.

8.1. Modélisation géométrique:

- [GAR 83] Y. GARDAN - M. LUCAS
Techniques graphiques interactives et C.A.O.
HERMES (1983)
→ Une vision d'ensemble avec notamment la modélisation géométrique.
- [LIE 88] T. LIEBLING - H. ROCHLISBERGER
Infographies et applications
MASSON (1988)
→ Tous les problèmes relatifs à l'informatique pour les représentations graphiques.
- [MORT 85] Michaël E. MORTENSON
Géométrie Modeling
John WILEY - T. SONS (1985)
→ Un ouvrage très complet et très bien fait sur l'ensemble des problèmes relatifs à la modélisation géométrique: mise en place, courbes, surfaces, solides, propriétés analytiques, propriétés relationnelles (distance), intersections, transformations, modélisation des solides, construction du modèle des solides, propriétés globales des modèles pour solides, graphiques par ordinateur, C.F.A.O.
Les 753 pages contiennent les modèles mathématiques et les applications de ces modèles.
- [PLAS 87] Infographie (série SCHAUM)
R.A. PLASTOCK - C. KALLEY
MC. GRAW HILL (1987)
→ Une vision d'ensemble pour l'infographie.
- [WOO 88] Calcul des formes par ordinateur
J. WOODWARK
MASSON (1988)
→ Une vision d'ensemble sur le calcul des formes.

8.1. Modèles de courbes pour la C.A.O.:

- [BEZ 77] BÉZIER PIERRE
Essai de définition numérique des courbes et surfaces expérimentales
Thèse de doctorat - Université de Paris VI (1977)
→ Une thèse soutenue par l'un des pionniers en ce domaine.

- [BEZ 88] BÉZIER PIERRE
L'utilisation des courbes et surfaces en C.A.O.
HERMÈS (1988)
→ Une synthèse sur les courbes et surfaces, destinée à un premier contact avec le domaine.
- [BOH 84] BÖHN W. - FARIN G. - KAHLMANN J.
A survey of curve and surface methods in CAGD
Computer Aided Geometric Design 1 (1980) 1-60
NORTH-HOLLAND
→ Un numéro spécial de la revue CAGD centré sur les courbes et les surfaces: un très bon exposé sur l'ensemble du sujet, notamment avec les courbes de Bézier, les Splines, les courbes rationnelles, les " patch " Surfaces...
- [BOOR 78] DE BOOR Carl
Practical guide to spline
SPRINGER - VERLAG (1978)
→ Une très bonne présentation théorique et appliquée des Splines, assorties de programmes en FORTRAN.
Cet ouvrage est une référence de base sur le sujet.
- [CAD 73] Computer Aided Design
R.E. BARNHILL - R.F. RIESENFELD
ACADEMIE PRESS (1973)
• Surfaces Patches and B.Splines Curves
S.A. COONS
• Mathematical and practical possibilities of UNISURF
P. BÉZIER
- [RIE 73] • B.SPLINE CURVES AND SURFACES
W.J. GORDON - R. RIESENFELD
→ Ce document contient les actes d'une première conférence internationale à laquelle participèrent les "précurseurs". Il est intéressant de débiter par cet ouvrage, en utilisant les références associées (notamment la thèse de Riesenfeld), pour connaître les débuts et aborder plus facilement le sujet. On retiendra essentiellement les communications de Coons, Riesenfeld et Bézier et aussi:
- Constrained interpolation using Bézier Curves as a new tool in computer aided geometric design
R.F. WIELINGA

- [CAO 87] Mathématiques et C.A.O. HERMÈS
- Volume 1 : Méthodes de base. Y. GARDAN
 - Calculs en 2D, transformations, courbes et surfaces, résolutions d'équations différentielles, éléments finis
Le chapitre 2 traite des courbes et surfaces.
 - Volume 2 : Formes à pôles. P. de CASTELJAU
 - Une présentation originale d'un modèle mis au point par P. de CASTELJAU (Citroën).
 - Volume 3 : Calcul scientifique. P. GERMAIN LACOUR
 - Un apport sur les maillages.
 - Volume 4 : Courbes et surfaces. P. BÉZIER
 - Un ouvrage de référence sur le modèle de Bézier.
 - Volume 5 : Méthode matricielle. S. COONS
 - Le modèle matriciel (1967) de Coons, présenté par P. Bézier.
 - Volume 6 : B-Splines. R.H. BARTELS - J.C. BEATY- B.A. BARSKY (1988)
 - Cet ouvrage constitue une bonne référence sur les B-Splines avec notamment le lien avec le modèle de Bézier, et l'exposé de l'algorithme d'OSLO sur les B-Splines.
 - Volume 7 : Bêta-Splines. R.H. BARTELS - J.C. BEATY - B.A. BARSKY (1989)
 - Une extension : un nouveau modèle, les bêta-Splines.
 - ⇒ Dans cette collection, pour une première approche, on pourra sélectionner les volumes 1, 4 et 6.
- [CADE 87,00] Computer Aided Design BUTTERWORTH
- Une revue spécialisée avec souvent des articles sur les modèles de Bézier et les B-Splines.
On pourra sélectionner: Curve and surface constructions using rational B-Splines. L. PIEGL - W. TILLER
Volume 19 : (Nov. 87) pages 25, 77, 305, 485.
- [DON 86] Calcul des parties cachées. Approximation des courbes par la méthode de Bézier et des B-Splines.
R.DONY
MASSON (1986)
- Deux chapitres concernent une introduction aux courbes de Bézier et aux B-Splines avec les programmes d'illustration des méthodes en BASIC.
- [IR 88-92] PANNIER - POUGET
Modélisation, courbes de Bézier et B-Spline
IREM Paris Nord
- Une introduction aux modèles de courbes de la CAO, pour faciliter le transfert de ces modèles dans l'enseignement.

- [LAN 86] LANCASTER PETER - ŠALKAUSKAS KESTUKIS
Curve and surface fitting. An introduction.
ACADEMIE PRESS (1986)
→ Chapitre 4 : Curve fitting with cubic-Splines.
L'introduction est une bonne présentation sur l'ensemble des Splines.
- [LEO 91] LÉON J.C.
Modélisation et construction de surfaces pour la CFAO
HERMÈS (1991).
- [MAR 87] MARION Jean
Introduction à quelques méthodes mathématiques de
modélisation des courbes et des surfaces .
IREM AIX-MARSEILLE (1987)
→ On trouvera un exposé donnant une vision mathématique globale sur les
modèles de Bézier, B.Splines, Lagrange, Newton et Hermite.
- [PAH 80] PAHVILIDIS
Algorithms for graphics and images processing
SPRINGER - VERLAG (1980)
→ Un livre d'appui convenant bien pour un premier contact avec
les courbes de Bézier et les B.Splines.
- [PLAS 87] Infographie série SCHAUM
R.A. PLASTOCK - C. KALLEY
Chapitre 9
→ Un chapitre " formes géométriques et modèles " (chap. 9) traite
des courbes de Bézier et d'un modèle de B.Spline.
- [RIES 73] RIESENFELD Richard
Applications of B-Spline Approximation to geometric problems
of computer aided design
Ph. D. THESIS Syracuse (1973).
- [TS II 85, 88, 90, 92] Sujets de mathématiques appliquées à l'informatique industrielle : BTS II
→ 1985: approche des courbes de Bézier par " pantin vectoriel ".
1988: approche des courbes de Bézier par les suites.
1990: un exemple de tracé d'une forme.
(points de contrôle - transformation dans le plan complexe).
1992: un exemple de courbe B-spline.
- [VER 73] VERON Michel
Contribution à l'étude des surfaces numériques UNISURF.
Conditions de raccordement.
Thèse de Doctorat - Université de NANCY (1973).
- [VER 85] VERON Michel
Cours DEA production automatisée (1985)
LACN - Université de NANCY I.
→ Une présentation des courbes de Bézier et B.Splines.

Chapitre 2

MODÈLE DES COURBES DE BÉZIER

I. EXPOSÉ DE RÉFÉRENCE

0. INTRODUCTION:

Le modèle de courbes proposé par Pierre BÉZIER permet de modifier une forme d'une manière *globale* en agissant sur un certain nombre de paramètres d'entrée jusqu'à l'obtention de la forme désirée.

Par opposition aux B.splines qui réalisent d'une manière *localisée* la forme désirée, le modèle de BÉZIER apparaît comme un outil générateur de l'ensemble de la forme.

Diverses présentations peuvent être faites.

L'exposé sera illustré par des exemples simples, utilisant par exemple des polynômes de degré inférieur ou égal à trois. On fera en particulier les remarques "physiques" destinées à faire le lien avec le jeu sur la forme.

1. PRÉSENTATION "PANTIN VECTORIEL":

Cette présentation s'inspire de celle faite par M. VERON [VER 85].

Un sujet d'examen de T.S. Informatique Industrielle aborde cette présentation [TS II 85].

1.1 *Mise en place:*

La position d'un point M d'un plan muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$ est défini par un "pantin vectoriel" dépendant d'un paramètre t variant dans \mathbb{R} entre 0 et 1, vérifiant un ensemble de contraintes (C_1) .

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OM}(t) &= f_0(t) \cdot \vec{V}_0 + f_1(t) \cdot \vec{V}_1 + f_2(t) \cdot \vec{V}_2 + f_3(t) \cdot \vec{V}_3 \quad (C_0) \\ &= \sum_{i=0}^3 f_i(t) \cdot \vec{V}_i. \end{aligned}$$

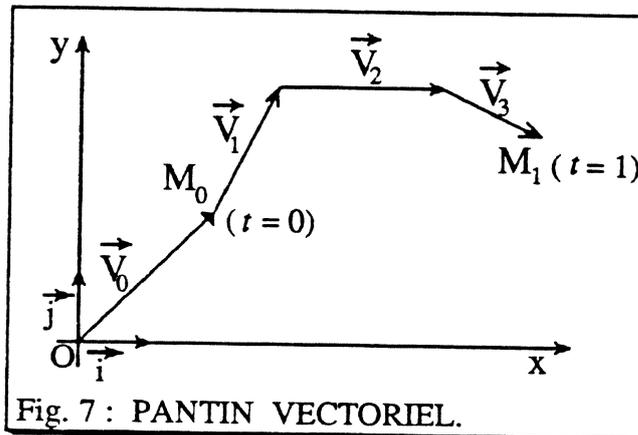


Fig. 7 : PANTIN VECTORIEL.

• *Remarque :*

L'expression imagée "pantin vectoriel" a été inventé dans ce document pour les besoins de la cause, à des fins d'illustration pédagogique du modèle.

• *Remarque (P.B.) :*

L'expression *pantin vectoriel* est à mettre en association avec le mot *polygone* qui traduit aussi cette modélisation.

La jonction entre deux points fixés M_0 et M_1 du plan est faite suivant une courbe définie paramétriquement.

Les vecteurs $(\vec{V}_0, \vec{V}_1, \vec{V}_2, \vec{V}_3)$ sont appelés vecteurs de référence.

Ils sont choisis de telle façon que :

$$\vec{OM}_{(0)} = \vec{V}_0 \quad (C_1)$$

et que:
$$\vec{OM}_{(1)} = \vec{V}_0 + \vec{V}_1 + \vec{V}_2 + \vec{V}_3 \quad (C_2)$$

• Les fonctions f_i sont des fonctions polynômes de degré 3, pour $t=0$, le point M est en M_0 ; pour $t=1$, le point M est en M_1 .

D'autres contraintes sont imposées, en plus des trois contraintes de trajectoires (C_0) , (C_1) et (C_2) .

a) Elles imposent des conditions de tangence : on lie la dérivée première en M_0 au vecteur le plus proche: \vec{V}_1 , et de même la dérivée première en M_1 au vecteur le plus proche: \vec{V}_3 .

La courbe de jonction est tangente au départ en M_0 à \vec{V}_1 .

$$\vec{OM}'_{(0)} = f'_1(0) \cdot \vec{V}_1 \quad (C_3) \text{ (voir remarque (R}_1\text{) à la fin du 1.2).}$$

Elle est aussi tangente à l'arrivée en M_1 à \vec{V}_3 .

$$\vec{OM}'_{(1)} = f'_3(1) \cdot \vec{V}_3 \quad (C_4)$$

b) Elles imposent aussi des conditions "touchant à la concavité".

On lie la dérivée seconde en M_0 , et respectivement en M_1 , aux deux vecteurs les plus proches de M_0 , soit \vec{V}_1 et \vec{V}_2 , et respectivement en M_1 , aux deux vecteurs les plus proches de M_1 , soit \vec{V}_2 et \vec{V}_3 .

$$\vec{OM}''_{(0)} = f''_1(0) \cdot \vec{V}_1 + f''_2(0) \cdot \vec{V}_2 \quad (C_5)$$

$$\vec{OM}''_{(1)} = f''_2(1) \cdot \vec{V}_2 + f''_3(1) \cdot \vec{V}_3 \quad (C_6)$$

1.2. Influence sur la forme:

1.2.1. Choix des vecteurs:

En choisissant les vecteurs \vec{V}_1 , \vec{V}_2 et \vec{V}_3 il est possible d'agir sur la *forme* de la jonction, au niveau de la trajectoire et des tangentes.

\vec{V}_0 est fixé par la position du point M_0 : $\vec{OM}_{(0)} = \vec{V}_0$ (C_1) ; ensuite le degré de liberté est égal à 2 pour le choix des vecteurs:

• Par exemple, \vec{V}_1 et \vec{V}_2 , peuvent être choisis arbitrairement, mais alors \vec{V}_3 est fixé par la contrainte (C_2) qui le détermine.

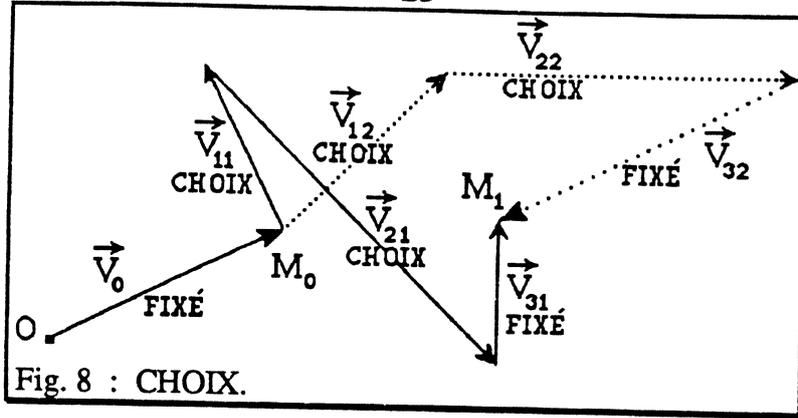


Fig. 8 : CHOIX.

• Cependant il est plus intéressant puisqu'il y a des contraintes jouant sur les vecteurs les plus proches de M_0 et M_1 c'est-à-dire \vec{V}_1 et \vec{V}_3 de choisir \vec{V}_1 et \vec{V}_3 les vecteurs "de départ" et "d'arrivée", \vec{V}_2 est alors fixé.

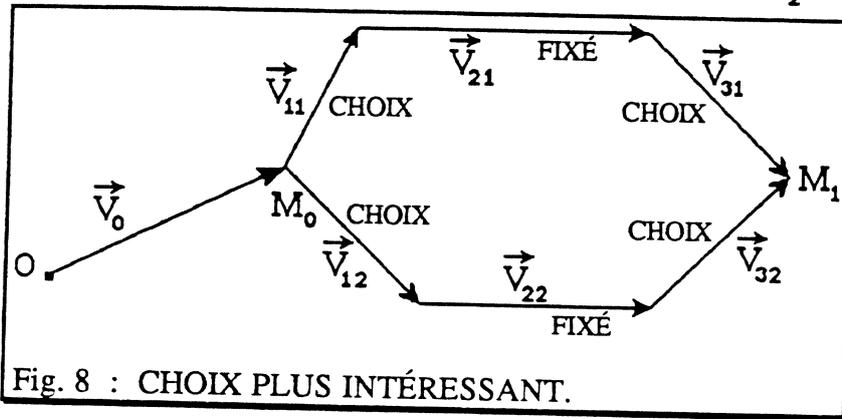


Fig. 8 : CHOIX PLUS INTÉRESSANT.

1.2.2. Position du point $M(t)$:

Vu la contrainte (C_0) de définition de la trajectoire le pantin vectoriel suit le moule du pantin de référence $\vec{V}_0 + \vec{V}_1 + \vec{V}_2 + \vec{V}_3$ avec les colinéarités induites comme l'indique la figure suivante représentant deux positions intermédiaires M' et M'' pour t' et t'' ($0 < t' < t'' < 1$).

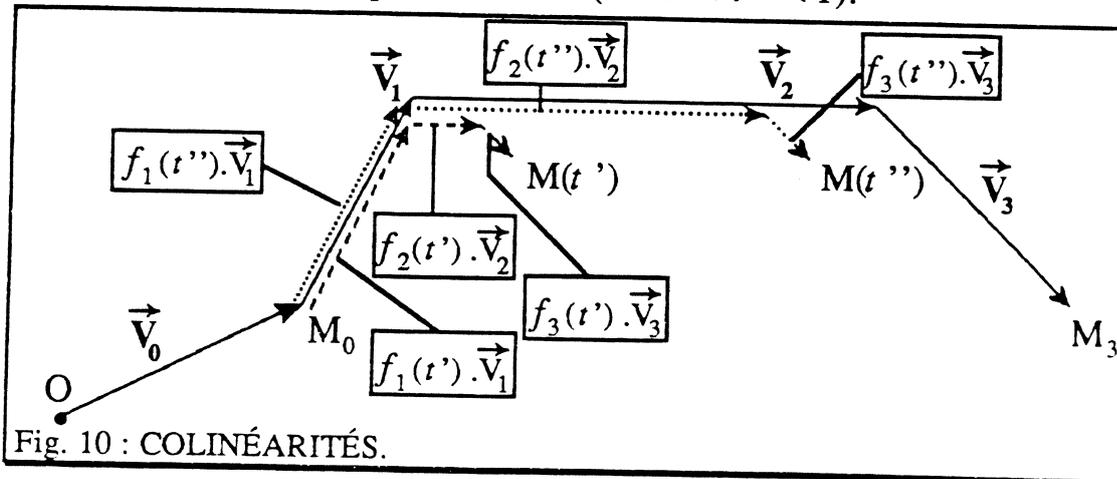
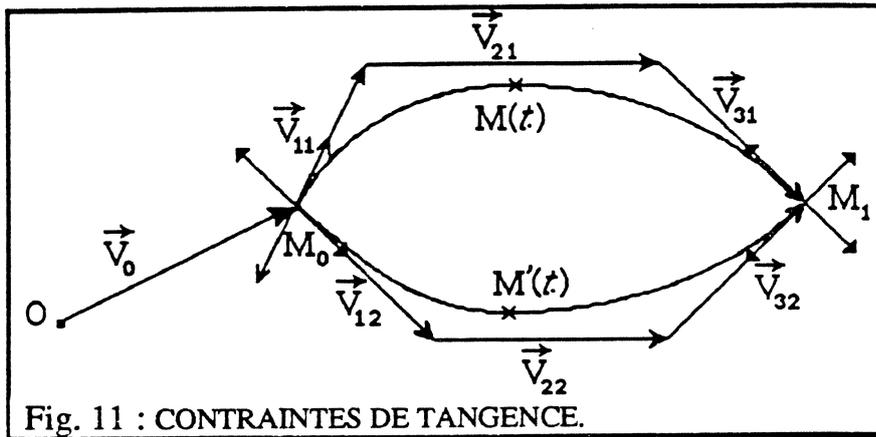


Fig. 10 : COLINÉARITÉS.

$$\begin{aligned} f_1(t') \cdot \vec{V}_1 \text{ et } f_1(t'') \cdot \vec{V}_1 &\text{ sont colinéaires à } \vec{V}_1, \\ f_2(t') \cdot \vec{V}_2 \text{ et } f_2(t'') \cdot \vec{V}_2 &\text{ sont colinéaires à } \vec{V}_2, \\ f_3(t') \cdot \vec{V}_3 \text{ et } f_3(t'') \cdot \vec{V}_3 &\text{ sont colinéaires à } \vec{V}_3. \end{aligned}$$

Comme le laisse supposer le schéma, les fonctions f_1 , f_2 et f_3 sont effectivement croissantes sur $[0,1]$: il sera facile de le vérifier lorsque ces fonctions auront été déterminées (voir paragraphe 1.4. suivant). Cette croissance montrera la variation du "pantin" déterminant la position de M en fonction de t . Sans avoir fait une étude plus avancée, on peut se douter des formes des courbes de jonction, compte tenu des contraintes de tangence.



Remarque (R_1):

Compléments sur les fonctions vectorielles dépendant d'un paramètre.

$$\left\{ \begin{array}{l} \bullet \vec{V}(t) = \sum_i f_i(t) \cdot \vec{V}_i \text{ implique } \vec{V}'(t) = \sum_i f_i'(t) \cdot \vec{V}_i \\ \bullet \vec{V}(t) \left| \begin{array}{l} x(t) \\ y(t) \end{array} \right. \quad \vec{V}'(t) \left| \begin{array}{l} x'(t) \\ y'(t) \end{array} \right. \quad \vec{V}''(t) \left| \begin{array}{l} x''(t) \\ y''(t) \end{array} \right. \\ \bullet \text{ La tangente est portée par le premier vecteur dérivé non nul.} \end{array} \right.$$

1.2.3. Contrainte d'indépendance: (CI)

Les fonctions polynomiales f_i sont choisies pour qu'elles soient *indépendantes* du système de vecteurs de référence $\vec{V}_0, \vec{V}_1, \vec{V}_2, \vec{V}_3$. Toutes les contraintes précédentes sont imposées quel que soit le système de référence choisi.

Remarque (R_2): Compléments.

Quels que soient les vecteurs $\vec{V}_0, \vec{V}_1, \vec{V}_2, \dots, \vec{V}_n$, et les nombres réels $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ et $\beta_0, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$,

$$\text{l'égalité : } \sum_{i=0}^n \alpha_i \vec{V}_i = \sum_{i=0}^n \beta_i \vec{V}_i,$$

est équivalente à : quel que soit l'indice i de $\{0, 1, 2, \dots, n\}$, $\alpha_i = \beta_i$.

Dans cet exemple:

quels que soient les vecteurs $\vec{V}_0, \vec{V}_1, \vec{V}_2, \vec{V}_3$ et les nombres réels $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ et $\beta_0, \beta_1, \beta_2, \beta_3$, l'égalité : $\alpha_0 \vec{V}_0 + \alpha_1 \vec{V}_1 + \alpha_2 \vec{V}_2 + \alpha_3 \vec{V}_3 = \beta_0 \vec{V}_0 + \beta_1 \vec{V}_1 + \beta_2 \vec{V}_2 + \beta_3 \vec{V}_3$ équivaut à : $\alpha_0 = \beta_0, \alpha_1 = \beta_1, \alpha_2 = \beta_2, \alpha_3 = \beta_3$.

1.2.4. Récapitulation sur les contraintes imposées:

Quel que soit le système de référence $\vec{V}_0, \vec{V}_1, \vec{V}_2, \vec{V}_3$, (C I)

$$\left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{OM}_{(0)} = \vec{V}_0 = f_0(0) \cdot \vec{V}_0 + f_1(0) \cdot \vec{V}_1 + f_2(0) \cdot \vec{V}_2 + f_3(0) \cdot \vec{V}_3 \end{array} \right. \quad (C_1)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{OM}_{(1)} = \vec{V}_0 + \vec{V}_1 + \vec{V}_2 + \vec{V}_3 = f_0(1) \cdot \vec{V}_0 + f_1(1) \cdot \vec{V}_1 + f_2(1) \cdot \vec{V}_2 + f_3(1) \cdot \vec{V}_3 \end{array} \right. \quad (C_2)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{OM}'_{(0)} = f_1'(0) \cdot \vec{V}_1 = f_0'(0) \cdot \vec{V}_0 + f_1'(0) \cdot \vec{V}_1 + f_2'(0) \cdot \vec{V}_2 + f_3'(0) \cdot \vec{V}_3 \end{array} \right. \quad (C_3)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{OM}'_{(1)} = f_3'(1) \cdot \vec{V}_3 = f_0'(1) \cdot \vec{V}_0 + f_1'(1) \cdot \vec{V}_1 + f_2'(1) \cdot \vec{V}_2 + f_3'(1) \cdot \vec{V}_3 \end{array} \right. \quad (C_4)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{OM}''_{(0)} = f_1''(0) \cdot \vec{V}_1 + f_2''(0) \cdot \vec{V}_2 = f_0''(0) \cdot \vec{V}_0 + f_1''(0) \cdot \vec{V}_1 + f_2''(0) \cdot \vec{V}_2 + f_3''(0) \cdot \vec{V}_3 \end{array} \right. \quad (C_5)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{OM}''_{(1)} = f_2''(1) \cdot \vec{V}_2 + f_3''(1) \cdot \vec{V}_3 = f_0''(1) \cdot \vec{V}_0 + f_1''(1) \cdot \vec{V}_1 + f_2''(1) \cdot \vec{V}_2 + f_3''(1) \cdot \vec{V}_3 \end{array} \right. \quad (C_6)$$

1.3. Détermination des fonctions polynomiales f_i :

En utilisant la contrainte d'indépendance et la remarque R_2 , on obtient les contraintes sur les fonctions f_i :

$$\left\{ \begin{array}{l} f_0(0) = 1 \\ f_0(1) = 1 \\ f_0'(0) = 0 \\ f_0'(1) = 0 \\ f_0''(0) = 0 \\ f_0''(1) = 0 \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} f_1(0) = 0 \\ f_1(1) = 1 \\ [f_1'(0) = f_1'(0)] \\ f_1(1) = 0 \\ [f_1''(0) = f_1''(0)] \\ f_1''(1) = 0 \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} f_2(0) = 0 \\ f_2(1) = 1 \\ f_2'(0) = 0 \\ f_2'(1) = 0 \\ [f_2''(0) = f_2''(0)] \\ [f_2''(1) = f_2''(1)] \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} f_3(0) = 0 \\ f_3(1) = 1 \\ f_3'(0) = 0 \\ [f_3'(1) = f_3'(1)] \\ f_3''(0) = 0 \\ [f_3''(1) = f_3''(1)] \end{array} \right.$$

* Détermination des f_i :

• Les f_i sont des polynômes de degré 3.

$$f_0(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3$$

$$f_1(t) = b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + b_3 t^3$$

$$f_2(t) = c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + c_3 t^3$$

$$f_3(t) = d_0 + d_1 t + d_2 t^2 + d_3 t^3.$$

Donc:

$$f'_0(t) = a_1 + 2a_2t + 3a_3t^2$$

$$f''_0(t) = 2a_2 + 6a_3t$$

$$f'_1(t) = b_1 + 2b_2t + 3b_3t^2$$

$$f''_1(t) = 2b_2 + 6b_3t$$

$$f'_2(t) = c_1 + 2c_2t + 3c_3t^2$$

$$f''_2(t) = 2c_2 + 6c_3t$$

$$f'_3(t) = d_1 + 2d_2t + 3d_3t^2$$

$$f''_3(t) = 2d_2 + 6d_3t$$

• Les contraintes se traduisent par:

$$\left\{ \begin{array}{l} a_0 = 1 \\ a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 1 \\ a_1 = 0 \\ a_1 + 2a_2 + 3a_3 = 0 \\ 2a_2 = 0 \\ 2a_2 + 6a_3 = 0 \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} b_0 = 0 \\ b_0 + b_1 + b_2 + b_3 = 1 \\ b_1 + 2b_2 + 3b_3 = 0 \\ 2b_2 + 6b_3 = 0 \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} c_0 = 0 \\ c_0 + c_1 + c_2 + c_3 = 1 \\ c_1 = 0 \\ c_1 + 2c_2 + 3c_3 = 0 \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} d_0 = 0 \\ d_0 + d_1 + d_2 + d_3 = 1 \\ d_1 = 0 \\ 2d_2 = 0 \end{array} \right.$$

on obtient:

$$\left\{ \begin{array}{l} a_0 = 1 \\ a_1 = 0 \\ a_2 = 0 \\ a_3 = 0 \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} b_0 = 0 \\ b_1 = 3 \\ b_2 = -3 \\ b_3 = 1 \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} c_0 = 0 \\ c_1 = 0 \\ c_2 = 3 \\ c_3 = -2 \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} d_0 = 0 \\ d_1 = 0 \\ d_2 = 0 \\ d_3 = 1 \end{array} \right.$$

donc

$$f_0(t) = 1$$

$$f_1(t) = 3t - 3t^2 + t^3$$

$$f_2(t) = 3t^2 - 2t^3$$

$$f_3(t) = t^3,$$

et par conséquent, $\overrightarrow{OM}(t) = \overrightarrow{V}_0 + (3t - 3t^2 + t^3)\overrightarrow{V}_1 + (3t^2 - 2t^3)\overrightarrow{V}_2 + t^3\overrightarrow{V}_3$.

1.4. Croissance des fonctions f_i sur $[0,1]$:

La figure (10) permet de conjecturer que f_1 , f_2 et f_3 sont croissantes ; on peut le démontrer à partir des contraintes initiales, sans utiliser l'expression polynomiale de ces fonctions.

a) Pour f_1 :

$$\left\{ \begin{array}{l} f_1(0) = 0 \\ f'_1 \text{ polynôme de degré 2} \\ f''_1 \text{ polynôme de degré 1} \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} f_1(1) = 1 \\ f'_1(1) = 0 \\ f''_1(1) = 0 \end{array} \right. \quad f_1 \text{ polynôme de degré 3,}$$

donc f''_1 est de signe constant sur $[0,1]$, par suite f'_1 est monotone sur $[0,1]$.

Mais puisque $f'_1(1) = 0$, f'_1 a un signe constant sur $[0,1]$. Donc f_1 est monotone sur $[0,1]$. Comme de plus $f_1(0) = 0$ et $f_1(1) = 1$, f_1 est croissante sur $[0,1]$.

t	0	1
$f_1''(t)$	signe constant	
$f_1'(t)$	monotone	signe constant
$f_1(t)$	0	1

monotone \rightarrow

b) Pour f_2 : comme f_2' est une fonction polynôme de degré 2, et que $f_2'(0)=0$ et $f_2'(1)=0$, f_2' a un signe constant sur $[0,1]$. f_2 est donc monotone sur $[0,1]$. Comme $f_2(0)=0$, $f_2(1)=1$, f_2 est croissante sur $[0,1]$.

t	0	1
$f_2'(t)$	signe constant	
$f_2(t)$	0	1

monotone \rightarrow

c) Pour f_3 , d'une manière analogue à f_1 :

$$\left\{ \begin{array}{l} f_3(0)=0 \\ f_3'(0)=0 \\ f_3''(0)=0 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} f_3(1)=1 \\ f_3' \text{ est une fonction polynôme de degré 2,} \\ f_3'' \text{ est une fonction polynôme de degré 1.} \end{array} \right. \quad f_3 \text{ est une fonction polynôme de degré 3,}$$

Donc le signe de f_3'' est constant sur $[0,1]$. Donc f_3' est monotone sur $[0,1]$; comme $f_3'(0)=0$, f_3' est de signe constant sur $[0,1]$. Donc f_3 est monotone sur $[0,1]$.

Comme $f_3(0)=0$ et $f_3(1)=1$, f_3 est croissante sur $[0,1]$.

t	0	1
$f_3''(t)$	signe constant	
$f_3'(t)$	monotone	signe constant
$f_3(t)$	0	1

monotone \rightarrow

1.5. Un exemple:

Soient $M_0 \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \end{vmatrix}$ $M_1 \begin{vmatrix} 4 \\ 3 \end{vmatrix}$.

\vec{V}_0 est fixé : $\vec{V}_0 \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \end{vmatrix}$; on peut choisir $\vec{V}_1 \begin{vmatrix} 0 \\ 3 \end{vmatrix}$ et $\vec{V}_3 \begin{vmatrix} 1 \\ -1 \end{vmatrix}$ alors \vec{V}_2 est fixé : $\vec{V}_2 \begin{vmatrix} 2 \\ 0 \end{vmatrix}$.

$$\overrightarrow{OM}(t) \begin{cases} x(t)=1+(3t-3t^2+t^3)\times 0+(3t^2-2t^3)\times 2+t^3\times 1 \\ y(t)=1+(3t-3t^2+t^3)\times 3+(3t^2-2t^3)\times 0+t^3\times (-1) \end{cases}$$

$$\overrightarrow{OM}(t) \begin{cases} x(t)=-3t^3+6t^2+1 \\ y(t)=2t^3-9t^2+9t+1. \end{cases}$$

L'étude de la courbe définie en coordonnées paramétriques pour t appartenant à $[0,1]$ donne:

$x'(t) = -9t^2 + 12t = 3t(-3t + 4)$ dans $[0,1]$, $x'(t)$ s'annule pour $t = 0$.

$y'(t) = 6t^2 - 18t + 9 = 3(2t^2 - 6t + 3)$ dans $[0,1]$, $y'(t)$ s'annule pour $t = \frac{3-\sqrt{3}}{2}$.

t	0	$\frac{3-\sqrt{3}}{2}$	1
$x'(t)$	0	+	3
$x(t)$	1		
$y(t)$	1		
$y'(t)$		+	0 - -3

Détermination de tangentes:

• en M_0 $\vec{V}'(0) \begin{vmatrix} 0 \\ 9 \end{vmatrix}$
la tangente en M_0 est verticale.

• en M_1 $\vec{V}'(1) \begin{vmatrix} 3 \\ -3 \end{vmatrix}$
coefficient angulaire de la tangente égal à -1.

• en $M(\frac{3-\sqrt{3}}{2})$ $\vec{V}'(\frac{3-\sqrt{3}}{2}) \begin{vmatrix} x'(\frac{3-\sqrt{3}}{2}) \neq 0 \\ 0 \end{vmatrix}$
la tangente en ce point est horizontale.

Remarque:

On retrouve naturellement le fait que la tangente en M_0 est portée par \vec{V}_1 , et que la tangente en M_1 est portée par \vec{V}_3 , dont le coefficient angulaire est: $-\frac{1}{1} = -1$;

$$\vec{OM}'_{(0)} = f'_1(0) \cdot \vec{V}_1, \quad \vec{OM}'_{(1)} = f'_3(1) \cdot \vec{V}_3.$$

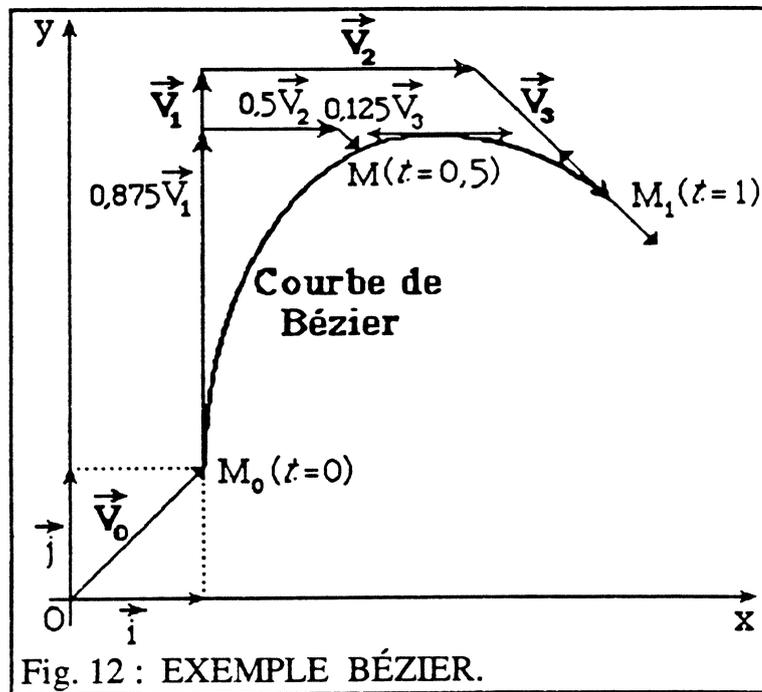


Fig. 12 : EXEMPLE BÉZIER.

Interprétation vectorielle:

Pour $t = 0,5$ on construit le " pantin vectoriel " associé:

$$\vec{OM}_{(0,5)} = \vec{V}_0 + 0,875 \vec{V}_1 + 0,5 \vec{V}_2 + 0,125 \vec{V}_3.$$

1.6. Algorithme associé:

Début programme

•Entrée des données

Entrée des coordonnées de M_0 : M_0X, M_0Y

Entrée des coordonnées de M_1 : M_1X, M_1Y

Entrée des coordonnées de \vec{V}_1 : V_1X, V_1Y < choix tangente en M_0

Entrée des coordonnées de \vec{V}_3 : V_3X, V_3Y < choix tangente en M_1

Entrée du pas p : p < $t = 0, p, 2p, \dots, 1$

•Calculs initiaux

Coordonnées de \vec{V}_2 : $V_2X \leftarrow (M_1X - M_0X) - (V_1X + V_3X)$

$V_2Y \leftarrow (M_1Y - M_0Y) - (V_1Y + V_3Y)$ < $\vec{V}_2 = \overrightarrow{M_0M_1} - (\vec{V}_1 + \vec{V}_3)$

Coordonnées de \vec{V}_0 : $V_0X \leftarrow M_0X$

$V_0Y \leftarrow M_0Y$

Coefficients intervenant dans la représentation paramétrique

$\langle \overrightarrow{OM}(t) = t^3(\vec{V}_1 - 2\vec{V}_2 + \vec{V}_3) + t^2(-3\vec{V}_1 + 3\vec{V}_2) + t(3\vec{V}_1) + \vec{V}_0$

< $C_3X, C_3Y ; C_2X, C_2Y ; C_1X, C_1Y ; C_0X, C_0Y$

$C_3X \leftarrow V_1X - 2V_2X + V_3X$

$C_3Y \leftarrow V_1Y - 2V_2Y + V_3Y$

$C_2X \leftarrow -3V_1X + 3V_2X$

$C_2Y \leftarrow -3V_1Y + 3V_2Y$

$C_1X \leftarrow 3V_1X$

$C_1Y \leftarrow 3V_1Y$

$C_0X \leftarrow V_0X$

$C_0Y \leftarrow V_0Y$

•Boucle de sortie des points

Faire pour $t = 0$, pas p , tant que $t \leq 1$

Calcul

$XT \leftarrow C_3Xt^3 + C_2Xt^2 + C_1Xt + C_0X$

$YT \leftarrow C_3Yt^3 + C_2Yt^2 + C_1Yt + C_0Y$

Sortie

Envoi de (XT, YT) sur terminal graphique

Fin boucle

Fin programme

Note:

On peut donner à cet algorithme, une structure de sous-programme de manière à faire appel à ce sous-programme pour des utilisations successives de plusieurs courbes de BÉZIER.

1.7. " Jeu sur la forme " :

1.7.1. Raccordement de deux courbes de BÉZIER:

En choisissant le vecteur d'arrivée au point de raccord correspondant à une première courbe de Bézier colinéaire au vecteur de départ d'une deuxième courbe de Bézier, on obtient un raccord "parfait" entre les deux courbes de Bézier.

Exemples:

• Soit $M_0(1,1)$, $M_1(3,4)$, $M_2(5,2)$, réalisation d'une jonction entre deux courbes de Bézier, avec un raccord respectant la tangente.

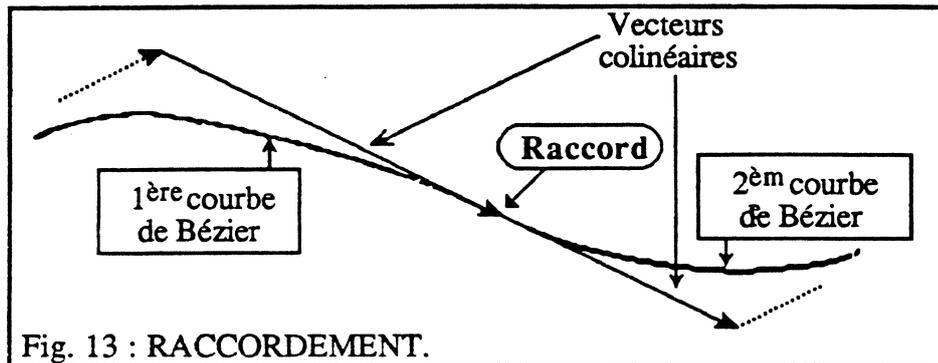


Fig. 13 : RACCORDEMENT.

• On peut par exemple faire une jonction telle que la tangente en M_1 soit parallèle à xx' .

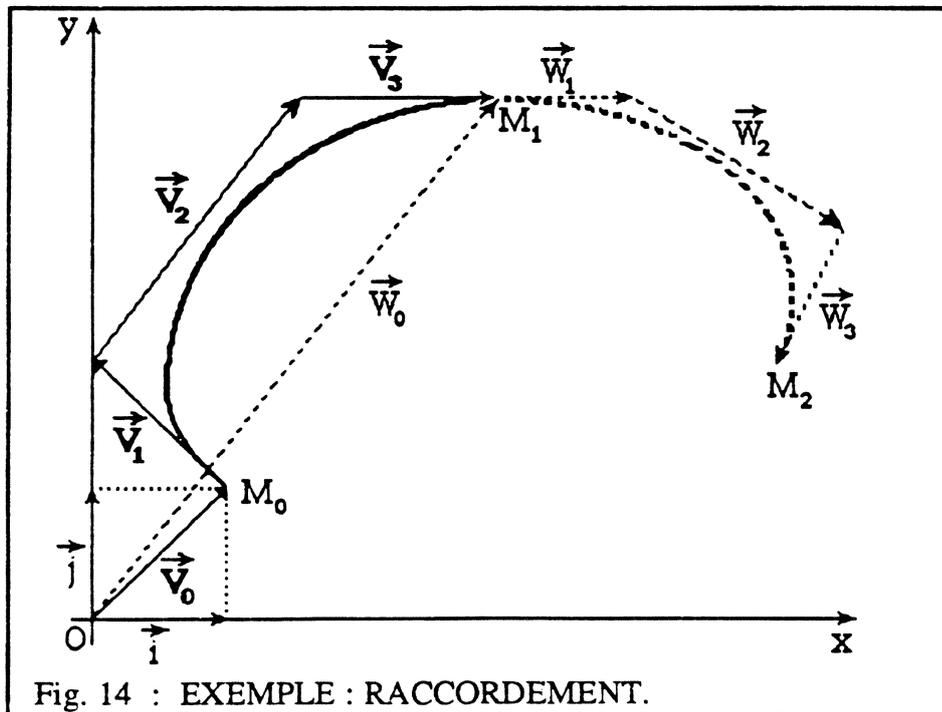


Fig. 14 : EXEMPLE : RACCORDEMENT.

Pour la jonction de M_0 à M_1 : $\vec{V}_0 = \overrightarrow{OM_0} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$,

$\vec{V}_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\vec{V}_3 \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ alors $\vec{V}_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

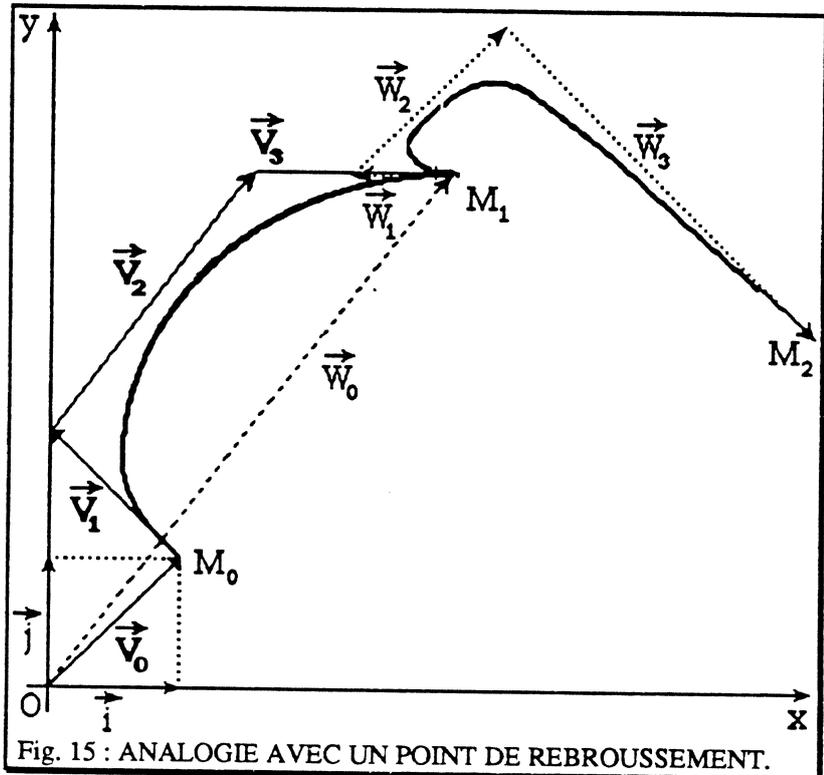
Pour la jonction de M_1 à M_2 : $\vec{W}_0 = \overrightarrow{OM_1} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$,

$\vec{W}_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ colinéaire à \vec{V}_3 et de même sens que \vec{V}_3

$\vec{W}_3 \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ alors $\vec{W}_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

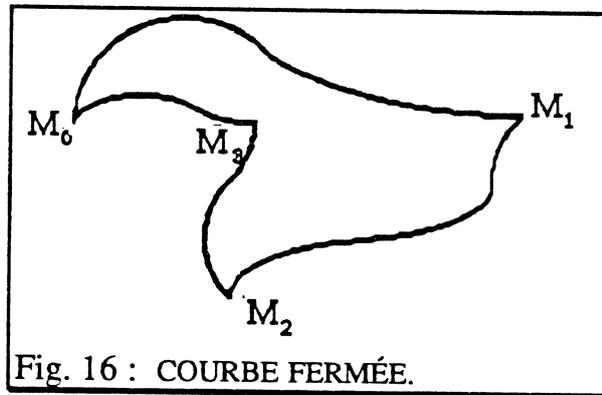
• *Remarque* :

Si on choisit \vec{V}_3 et \vec{W}_1 colinéaires de sens contraires, en M_1 on a un point qui présente des analogies de forme avec un point de rebroussement. Ce n'est pas un point de rebroussement au sens des courbes définies en coordonnées paramétriques. Il s'agit ici du raccordement de deux courbes distinctes et non d'une seule.



1.7.2. Courbes fermées :

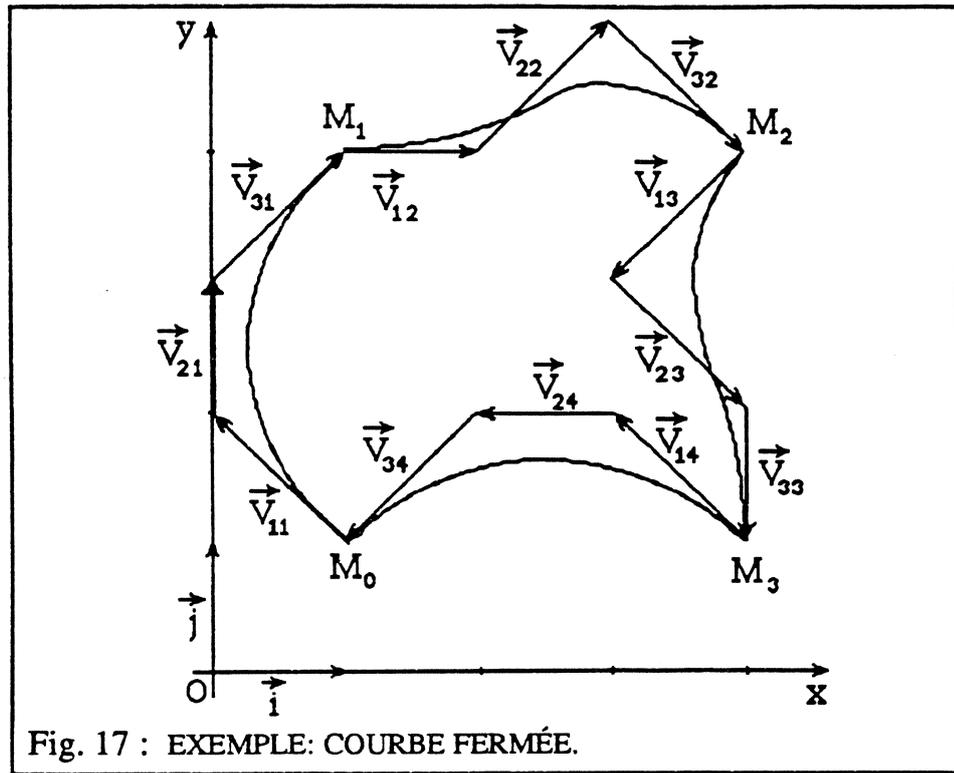
En jouant sur les points d'arrivée et de départ, avec des choix de vecteurs appropriés, il est possible de réaliser des courbes fermées, à base de courbes de Bézier, en revenant au point de départ.



Exemple 1 :

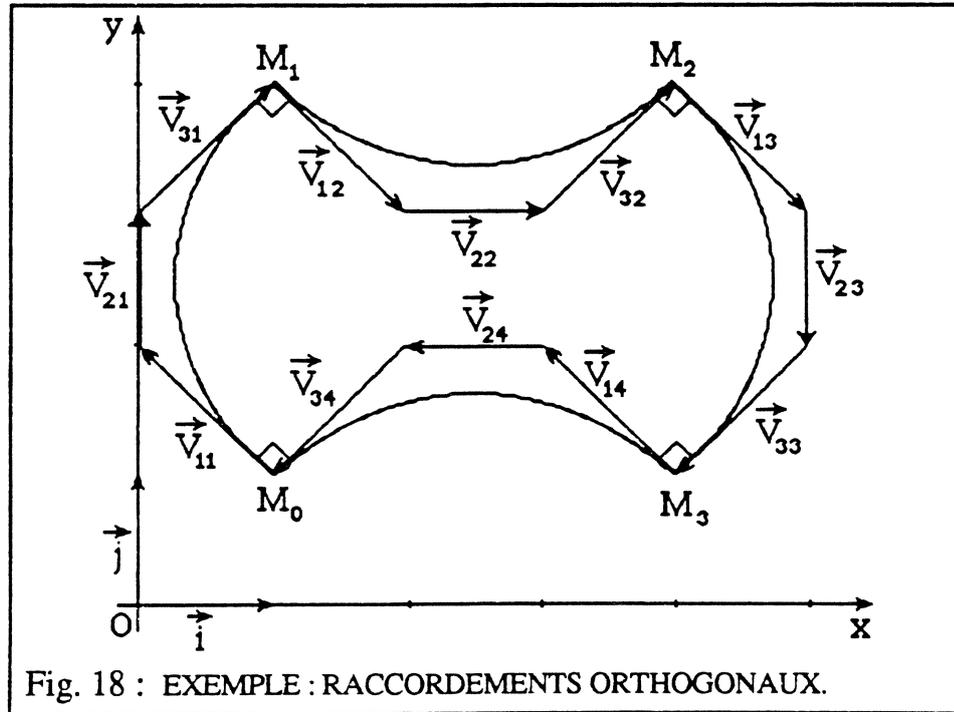
On souhaite dessiner une forme avec les contraintes suivantes:

- Chemin de $M_0(1,1)$ à $M_1(1,4)$: $\vec{V}_{11}(-1,1)$, $\vec{V}_{31}(1,1)$
- Chemin de M_1 à $M_2(4,4)$: $\vec{V}_{12}(1,0)$, $\vec{V}_{32}(1,-1)$
- Chemin de M_2 à $M_3(4,1)$: $\vec{V}_{13}(-1,-1)$, $\vec{V}_{33}(0,-1)$
- Chemin de M_3 à M_0 : $\vec{V}_{14}(-1,1)$, $\vec{V}_{34}(-1,-1)$.



Exemple 2:

Dessin d'une forme entre $M_0(1,1)$; $M_1(1,4)$; $M_2(4,4)$; $M_3(4,1)$ à raccords orthogonaux .



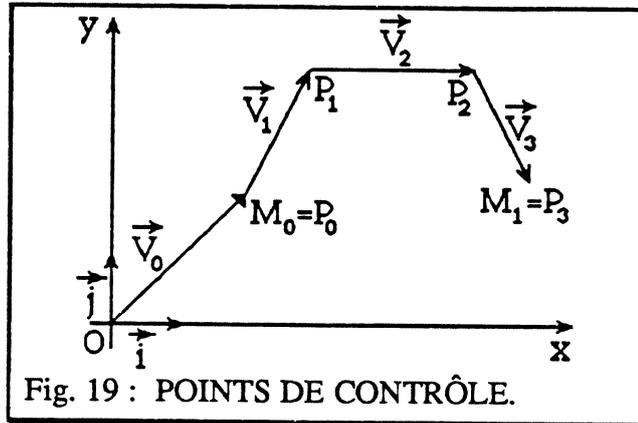
On observe qu'on réalise une forme telle qu'aux points de raccordement M_i les demi-tangentes aux courbes ont deux directions différentes (points anguleux).

2. PRÉSENTATION " POINTS DE CONTRÔLE " :

2.0. Autre présentation:

Une autre présentation, où les points remplaceront les vecteurs, où les fonctions " de colinéarité " f_i , relatives aux vecteurs \vec{V}_i , sont remplacées par des fonctions " poids " B_i relatives aux points.

Vecteurs \longleftrightarrow Points
Fonctions de colinéarité \longleftrightarrow Fonctions poids



a) Un exemple:

Soit t une variable réelle appartenant à $[0,1]$. À un ensemble de quatre points de référence (ou de contrôle, car ils vont permettre de contrôler la forme) $\{P_0=M_0, P_1, P_2, P_3=M_1\}$, allant du point de départ $M_0(P_0)$ au point d'arrivée $M_1(P_3)$ vont être associées des fonctions polynomiales poids B_0, B_1, B_2, B_3 , définies par :

$$B_i(t) = C_3^i(t)^i(1-t)^{3-i}$$

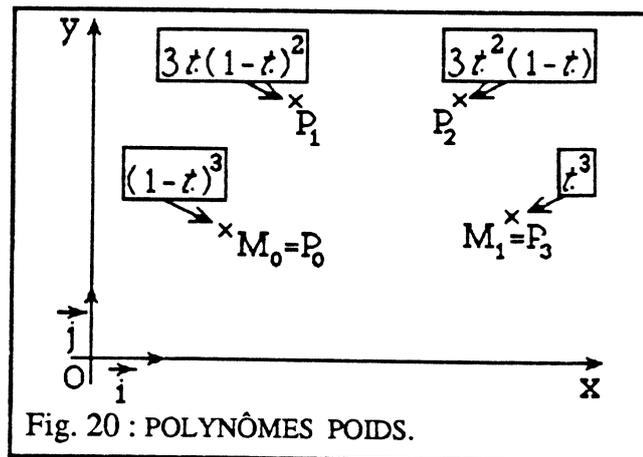
ce qui donne :

$$B_0(t) = C_3^0(t)^0(1-t)^3 = (1-t)^3$$

$$B_1(t) = C_3^1(t)^1(1-t)^2 = 3t(1-t)^2$$

$$B_2(t) = C_3^2(t)^2(1-t) = 3t^2(1-t)$$

$$B_3(t) = C_3^3(t)^3(1-t)^0 = t^3$$



Le point $M(t)$ est défini par:

$$\vec{OM}(t) = \sum_{i=0}^3 B_i(t) \vec{OP}_i = B_0(t) \vec{OP}_0 + B_1(t) \vec{OP}_1 + B_2(t) \vec{OP}_2 + B_3(t) \vec{OP}_3.$$

b) Cas général :

Soit t une variable réelle appartenant à $[0,1]$.

À partir d'un ensemble de $n+1$ points de contrôle P_0, P_1, \dots, P_n , et d'un ensemble de $n+1$ polynômes $B_{0,n}(t), B_{1,n}(t), \dots, B_{n,n}(t)$ on définit le point $M(t)$ par :

$$\overrightarrow{OM}(t) = \sum_{i=0}^n B_{i,n}(t) \cdot \overrightarrow{OP}_i$$

Les polynômes $B_{i,n}(t)$ sont les polynômes de *Bernstein* définis par :

$$B_{i,n}(t) = C_n^i(t) t^i (1-t)^{n-i}$$

• *Remarque 1* :

Ces polynômes ont été utilisés par Bernstein, antérieurement à leur emploi dans le modèle de Bézier, pour l'approximation de fonctions.

• *Remarque 2* :

Le cas précédent, pris en exemple, correspond à $n=3$, et utilise une notation simplifiée :

$$B_{i,3}(t) = B_i(t).$$

2.1. Lien entre le pantin vectoriel et les points de contrôle :

Nous allons vérifier, sur un exemple seulement ($n=3$), que les deux présentations précédentes définissent le *même* modèle. En effet, en utilisant les deux définitions du point M_p (points) et M_v (vecteurs) :

$$\overrightarrow{OM}_p(t) = B_0(t)\overrightarrow{OP}_0 + B_1(t)\overrightarrow{OP}_1 + B_2(t)\overrightarrow{OP}_2 + B_3(t)\overrightarrow{OP}_3.$$

$$\overrightarrow{OM}_v(t) = f_0(t) \cdot \vec{V}_0 + f_1(t) \cdot \vec{V}_1 + f_2(t) \cdot \vec{V}_2 + f_3(t) \cdot \vec{V}_3$$

$$\text{et } \vec{V}_0 = \overrightarrow{OP}_0, \vec{V}_1 = \overrightarrow{P_0P_1}, \vec{V}_2 = \overrightarrow{P_1P_2}, \vec{V}_3 = \overrightarrow{P_2P_3}.$$

$$\overrightarrow{OM}_v(t) = (1 - f_1(t))\overrightarrow{OP}_0 + (f_1(t) - f_2(t))\overrightarrow{OP}_1 + (f_2(t) - f_3(t))\overrightarrow{OP}_2 + f_3(t)\overrightarrow{OP}_3$$

$$1 - f_1(t) = 1 - (t^3 - 3t^2 + 3t) = 1 - 3t + 3t^2 - t^3 = (1-t)^3 = B_0(t)$$

$$f_1(t) - f_2(t) = (t^3 - 3t^2 + 3t) - (-2t^3 + 3t^2) = 3t^3 - 6t^2 + 3t = 3t(t^2 - 2t + 1) = 3t(1-t)^2 = B_1(t)$$

$$f_2(t) - f_3(t) = (-2t^3 + 3t^2) - t^3 = 3t^2(1-t) = B_2(t)$$

$$f_3(t) = t^3 = B_3(t).$$

Donc $M_v = M_p$: il s'agit bien du même modèle.

Note : noms des points.

Les points P_0, P_1, \dots, P_n peuvent être nommés différemment en fonction de leur usage.

On les nommera :

• **Points de référence** ou de **base**, car ils servent de référence pour bâtir la forme.

• **Points de contrôle**, car ils permettent de contrôler la forme.

Remarque (P.B.) : Cette remarque est d'ordre purement linguistique : le mot " contrôle " est maintenant utilisé en Français pour traduire un mot Anglais qui implique une idée de commandement, alors que dans notre langue il signifie vérification = une courbe étant supposée contenir un point, on contrôle (on vérifie) qu'il en est bien ainsi ; pour ma part, je préfère utiliser le terme *point de définition*, qui me semble bien correspondre au rôle des points qui sont, en réalité, des coefficients vectoriels.

2.2. Deux points de vue: probabiliste et barycentrique.

La présentation précédente peut être faite en utilisant le barycentre ou les probabilités. Chaque point de vue a des conséquences intéressantes au niveau du lien avec la forme désirée.

2.2.1. On utilise les probabilités:

- Chaque point de contrôle est muni d'un poids probabiliste, en fait d'un poids binomial (la loi de probabilité associée est la loi binomiale) qui lui confère un poids dans sa force de contrôle sur la forme de la courbe. Bien entendu, la forme de la courbe dépend aussi de la position des points de contrôle.

- La loi de probabilité binomiale donne la probabilité d'avoir i fois l'événement A de probabilité p , et $n-i$ fois l'événement contraire \bar{A} de probabilité $q=1-p$, au cours de n essais indépendants.

$$P_{i,n} = C_n^i p^i q^{n-i} = C_n^i p^i (1-p)^{n-i}.$$

Le lien probabilité avec les polynômes de Bernstein est immédiat:

$$p=t, q=1-t, \text{ avec } t \text{ appartenant à } [0,1], \quad B_{i,n}(t) = P_{i,n}(t).$$

• *Conséquence :*

On peut donc assimiler les polynômes de Bernstein à des " poids binomiaux " et en déduire quelques conséquences (toujours dans l'exemple $n=3$) :

$$\sum_{i=0}^n B_{i,n}(t) = \sum_{i=0}^3 B_{i,3}(t) = B_0(t) + B_1(t) + B_2(t) + B_3(t) = P_0 + P_1 + P_2 + P_3 = 1$$

(probabilité de l'événement certain),

ce qui est vérifiable, par la formule du binôme :

$$(1-t)^3 + 3t(1-t)^2 + 3t^2(1-t) + t^3 = [t + (1-t)]^3 = 1,$$

et s'intéresser à la moyenne pondérée, à la variance, etc ...

• *Extension possible : autres lois de probabilité .*

On peut quitter le modèle de Bézier, tout en s'inspirant de ce modèle, en choisissant d'autres lois de probabilité:

$$\vec{OM}(t) = \sum_{i=0}^n P_{i,n}(t) \vec{OP}_i$$

↑
choix.

L'étude des fonctions, pour mieux voir leur influence en fonction de t , sera faite ensuite (§ 2.3.).

2.2.1. On utilise le barycentre :

- Nous allons revenir sur une interprétation vectorielle, mais basée sur les points de contrôle.

- $M(t)$ est le barycentre des points de référence P_0, P_1, P_2, P_3 , affectés des coefficients $B_0(t), B_1(t), B_2(t), B_3(t)$ (ou le centre de gravité des points P_i affectés des poids $B_i(t)$).

Par définition le barycentre G de $n+1$ points P_0, P_1, \dots, P_n , affectés des coefficients $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n$ est défini par:

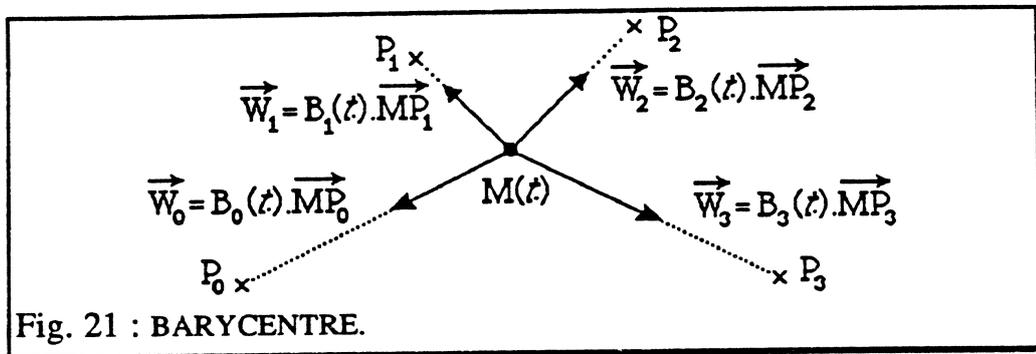
$$\left(\text{avec } \sum_{i=0}^n \alpha_i \neq 0\right) \quad \sum_{i=0}^n \alpha_i \overrightarrow{GP_i} = \vec{0}.$$

O étant un point quelconque :

$$\sum_{i=0}^n \alpha_i (\overrightarrow{GO} + \overrightarrow{OP_i}) = \vec{0} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{OG} = \frac{\sum_{i=0}^n \alpha_i \overrightarrow{OP_i}}{\sum_{i=0}^n \alpha_i}.$$

$$\text{Or } \overrightarrow{OM}(t) = \sum_{i=0}^3 B_i(t) \overrightarrow{OP_i} = \frac{\sum_{i=0}^3 B_i(t) \overrightarrow{OP_i}}{\sum_{i=0}^3 B_i(t)} \quad \text{car } \sum_{i=0}^3 B_i(t) = 1,$$

donc $M(t)$ est bien le barycentre des points P_i affectés des coefficients $B_i(t)$,



$$\text{donc } \sum_{i=0}^3 B_i(t) \overrightarrow{MP_i} = \vec{0} : \quad \overrightarrow{W_0} + \overrightarrow{W_1} + \overrightarrow{W_2} + \overrightarrow{W_3} = \vec{0}.$$

• *Considérations sur la forme:*

* Le point M est attiré par les points de contrôle P_0, P_1, P_2, P_3 avec une force d'attraction $\overrightarrow{W_i}$ de la forme $B_i(t) \overrightarrow{MP_i}$.

* Sur cette présentation, on met en évidence l'aspect *modèle global* du modèle de Bézier. La forme est maîtrisée globalement par la position des points de contrôle et les poids qui leur sont affectés. En jouant sur l'ensemble des points de contrôle, on joue sur l'ensemble de la forme.

* On pourra ensuite étudier les fonctions poids en fonction de t pour bien voir leurs influences respectives (§2.3.).

• *Indépendance de l'origine du repère:*

Les points P_i étant fixés, pour tout t dans $[0,1]$: $\overrightarrow{OM}(t) = \sum_{i=0}^3 B_i(t) \overrightarrow{OP_i}$.

Est-ce que $M(t)$ dépend de O ?

Prenons une nouvelle origine O' et soit $N(t)$ défini de la même manière par :

$$\overrightarrow{O'N}(t) = \sum_{i=0}^3 B_i(t) \overrightarrow{O'P_i}.$$

On a : $\vec{OM}(t) = \sum_{i=0}^3 B_i(t) (\vec{OO'} + \vec{OP}_i) = (\sum_{i=0}^3 B_i(t)) \vec{OO'} + \sum_{i=0}^3 B_i(t) \vec{OP}_i$.

Comme $\sum_{i=0}^3 B_i(t) = 1$, on obtient: $\vec{OM}(t) = \vec{OO'} + \vec{ON}(t) = \vec{ON}(t)$.

Donc, pour tout t de $[0,1]$, $M(t) = N(t)$.

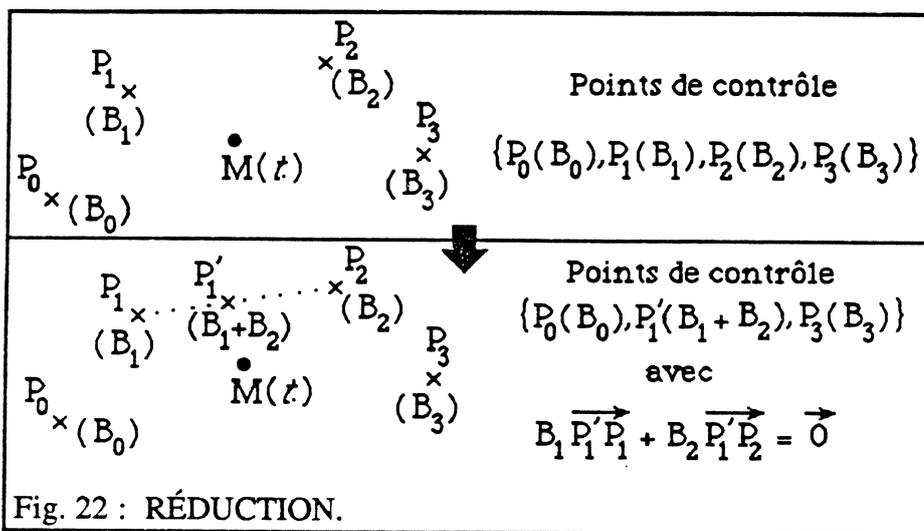
La définition du point M est donc indépendante de l'origine choisie. Il aurait été particulièrement "gênant" d'avoir des courbes différentes, en fonction du choix de O .

• *Exploitation du point de vue barycentrique :*

On peut utiliser quelques propriétés classiques du barycentre.

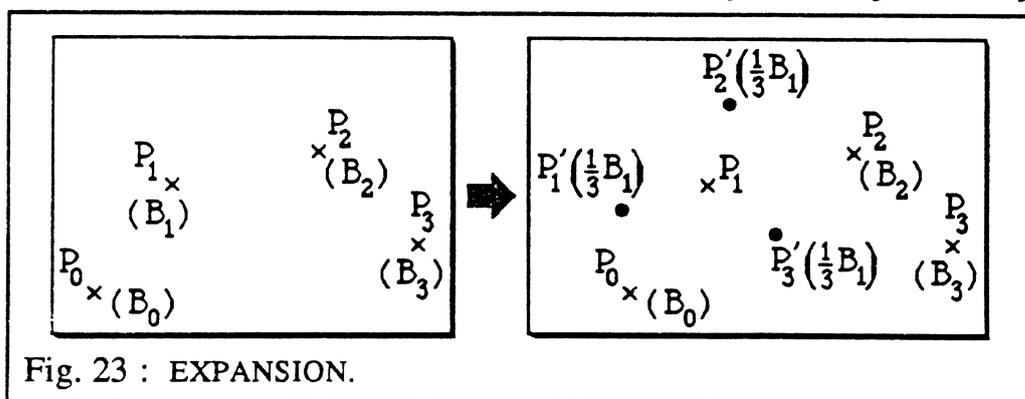
* Aspect réduction :

On peut, par exemple, remplacer deux points de contrôle par leur barycentre affecté de la somme des coefficients.



* Aspect expansion :

On peut, au lieu de réduire, augmenter le nombre de points, en remplaçant un point, par exemple P_1 , par deux ou plusieurs points tels que P_1 soit le barycentre de ces nouveaux points, par exemple $P'_1(\frac{1}{3}B_1)$, $P'_2(\frac{1}{3}B_1)$, $P'_3(\frac{1}{3}B_1)$.



Remarque :

On pourra constater que les nouveaux polynômes obtenus après réduction ou expansion donnent la même courbe, mais ne sont pas des polynômes de Bernstein.

2.3. Étude des fonctions poids binomiaux, ou polynômes de Bernstein:

L'étude se poursuit toujours sur l'exemple ($n=3$) (la généralisation ne pose aucun problème supplémentaire). Elle va consister à l'étude de la variation des courbes et à quelques considérations sur le calcul intégral associé. On notera plus simplement $B_i(t)$, le polynôme $B_{i,3}(t)$.

2.3.1. Étude de chaque fonction polynôme:

Pour chacune des fonctions B_0, B_1, B_2 et B_3 , on étudiera les variations sur $[0,1]$, on tracera la courbe représentative dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$, et on calculera l'aire de la portion de plan comprise entre la courbe, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x=0$ et $x=1$.

• Étude de B_0 :

$$B_0(t) = (1-t)^3, \quad B_0'(t) = -3(1-t)^2.$$

t	0	1
$B_0'(t)$	-3	0
$B_0(t)$	1	0

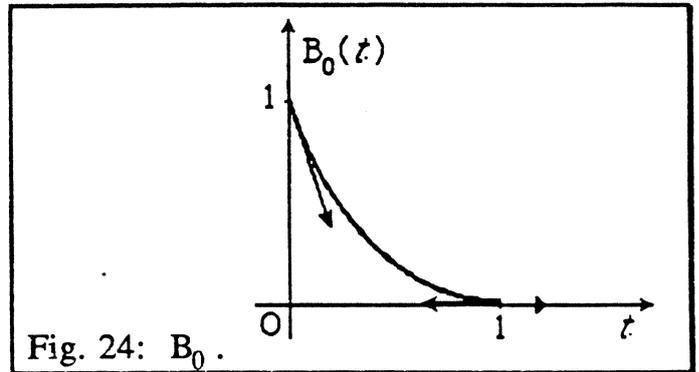


Fig. 24: B_0 .

$$A_0 = \int_0^1 B_0(t) dt = \int_0^1 (1-t)^3 dt = -\left[\frac{1}{4}(1-t)^4\right]_0^1 = \frac{1}{4} \quad (\text{unité d'aire}).$$

• Étude de B_1 :

$$B_1(t) = 3t(1-t)^2,$$

$$B_1'(t) = 3(1-t)^2 - 6t(1-t) \\ = 3(1-t)(1-3t).$$

t	0	$\frac{1}{3}$	1
$B_1'(t)$	3	0	-0
$B_1(t)$	0	$\frac{4}{9}$	0

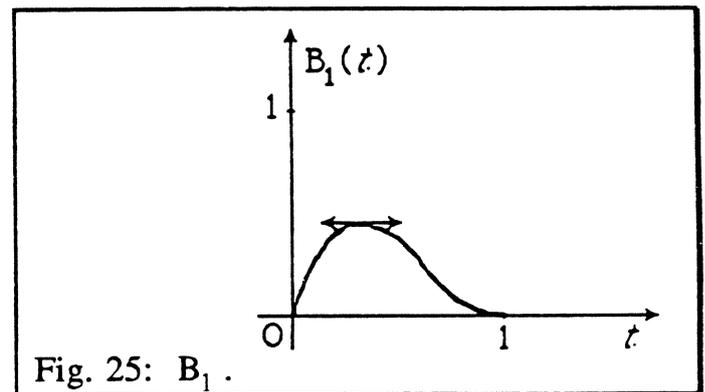


Fig. 25: B_1 .

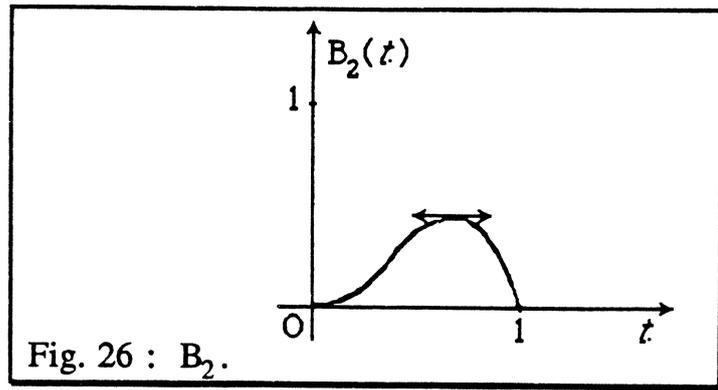
$$A_1 = \int_0^1 B_1(t) dt = \int_0^1 (3t - 6t^2 + 3t^3) dt = \left[\frac{3}{2}t^2 - \frac{6}{3}t^3 + \frac{3}{4}t^4\right]_0^1 = \frac{1}{4} \quad (\text{unité d'aire}).$$

• Étude de B_2 :

$$B_2(t) = 3t^2(1-t),$$

$$B_1'(t) = 6t(1-t) - 3t^2 \\ = 3t(2-3t).$$

t	0	$\frac{2}{3}$	1
$B_2'(t)$	0	+	0
$B_2(t)$	0	$\frac{9}{4}$	0

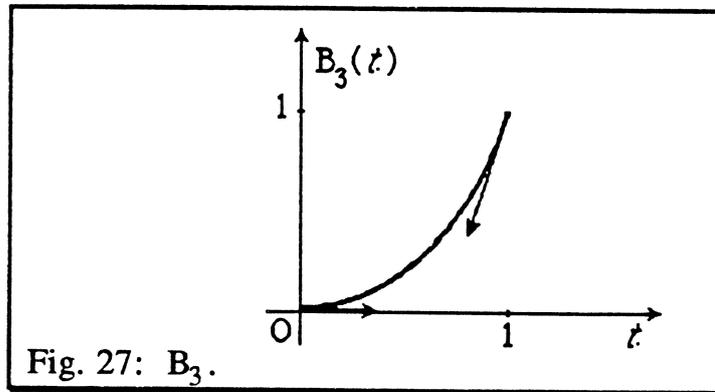
Fig. 26 : B_2 .

$$A_2 = \int_0^1 B_2(t) dt = \int_0^1 (3t^2 - 3t^3) dt = \left[t^3 - \frac{3}{4} t^4 \right]_0^1 = \frac{1}{4} \text{ (unité d'aire).}$$

• Étude de B_3 :

$$B_3(t) = t^3, \\ B_3'(t) = 3t^2.$$

t	0	1
$B_3'(t)$	0	+
$B_3(t)$	0	1

Fig. 27: B_3 .

$$A_3 = \int_0^1 B_3(t) dt = \int_0^1 t^3 dt = \left[\frac{1}{4} t^4 \right]_0^1 = \frac{1}{4} \text{ (unité d'aire).}$$

• *Remarque:*

La valeur constante de l'aire permet de conjecturer qu'il existe une formule générale (que nous trouverons ultérieurement).

2.3.2. Étude conjointe des fonctions polynômes :

2.3.2.1. *Groupement :*

On maîtrise l'influence des *poïds* $B_i(t)$ en examinant, pour une valeur de t fixée, la "coupe" des différentes courbes regroupées dans un même repère (on rappelle que l'autre influence sur la forme est la position des points eux-mêmes).

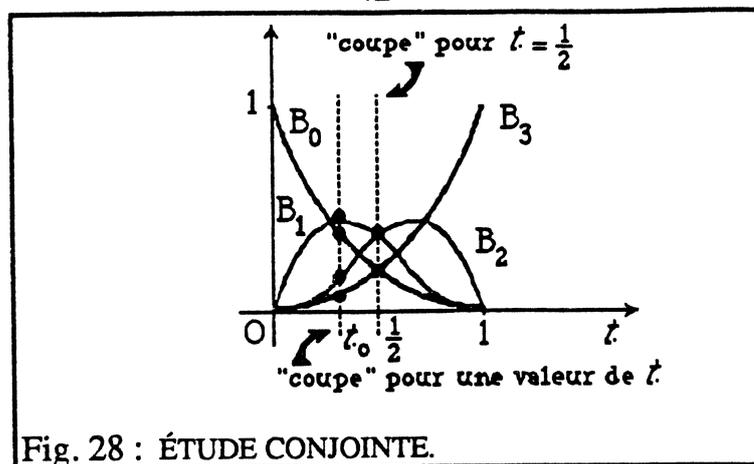


Fig. 28 : ÉTUDE CONJOINTE.

Par exemple pour $t=0$ seule B_0 intervient, donc P_0 intervient seulement, pour $t=1$ seule B_3 intervient, donc P_3 intervient seulement.

L'influence de B_0 diminue, décroît au fur et à mesure que le point M s'éloigne de P_0 . En revanche, l'influence de B_3 , c'est-à-dire du point de contrôle P_3 , augmente, croît au fur et à mesure que le point M se rapproche de P_3 .

Les influences des points P_1 et P_2 sont respectivement maximales pour $t = \frac{1}{3}$ et $t = \frac{2}{3}$. Ces influences croissent jusqu'à leur maximum respectif, puis décroissent ensuite. Par ailleurs, on constate que, dans une symétrie par rapport à la droite ($t = \frac{1}{2}$) B_0 et B_3 sont échangés, B_1 et B_2 sont échangés. Ceci correspond à un échange entre $p = t$ et $q = 1-t$ dans la loi binomiale (voir § 2.2.1.).

2.3.2.2. Intégration

On constate que, lorsque $n=3$, les aires des domaines limités par les courbes représentatives des polynômes de Bernstein, l'axe Ox , et les droites d'équations $x=0$ et $x=1$, sont égales :

$$\int_0^1 B_{0,3}(t) dt = \int_0^1 B_{1,3}(t) dt = \int_0^1 B_{2,3}(t) dt = \int_0^1 B_{3,3}(t) dt = \frac{1}{4} \text{ unité d'aire.}$$

Nous allons démontrer que cette propriété est générale. Pour le

polynôme $B_{i,n}$, cette aire est égale à : $A_{i,n} = \int_0^1 B_{i,n}(t) dt = \int_0^1 C_n^i t^i (1-t)^{n-i} dt$.

En utilisant une intégration par parties, cherchons une relation entre $A_{i,n}$ et $A_{i+1,n}$ (pour $i < n$).

$$\begin{cases} u = (1-t)^{n-i} \\ dv = t^i dt \end{cases} \quad \begin{cases} du = -(n-i)(1-t)^{n-i-1} dt \\ v = \frac{t^{i+1}}{i+1} \end{cases}$$

$$\text{donc: } A_{i,n} = C_n^i \left[\left. \frac{(1-t)^{n-i} t^{i+1}}{i+1} \right|_0^1 + \int_0^1 \frac{n-i}{i+1} (1-t)^{n-i-1} t^{i+1} dt \right].$$

Pour $i < n$, on a: $\left[\frac{(1-t)^{n-i} t^{i+1}}{i+1} \right]_0^1 = 0$, d'où $A_{i,n} = \int_0^1 \frac{n-i}{i+1} (1-t)^{n-i-1} t^{i+1} dt$.

$$\text{Or } C_n^i \frac{n-i}{i+1} = \frac{n!}{i! (n-i)!} \frac{n-i}{i+1} = \frac{n!}{(i+1)! (n-i-1)!} = C_n^{i+1}.$$

$$\text{On obtient: } A_{i,n} = \int_0^1 C_n^{i+1} (1-t)^{n-(i+1)} t^{i+1} dt = \int_0^1 B_{i+1,n}(t) dt = A_{i+1,n},$$

donc $A_{i,n} = A_{i+1,n}$, pour $i < n$, on a donc ($i = n-1$) $A_{i,n} = A_{n,n}$,

$$\text{et } A_{n,n} = \int_0^1 B_{n,n}(t) dt = \int_0^1 C_n^n t^n dt = \left[\frac{t^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 = \frac{1}{n+1}.$$

Propriété :

Les aires des domaines limités par les courbes représentatives des polynômes de Bernstein, l'axe Ox, et les droites d'équations $x=0$ et $x=1$, sont égales pour un degré n fixé. Elles ont pour valeur $\frac{1}{n+1}$ unité d'aire.

2.3.2.3. Relation interpolômes de Bernstein :

Plusieurs relations dans l'ensemble des polynômes de Bernstein peuvent être trouvées suivant que l'on focalise sur i ou sur n .

a. Focalisation sur i :

Relation entre polynômes de Bernstein relatifs à deux points de contrôle consécutifs d'indices i et $i+1$:

Soit n fixé, $n \geq 1$ et t fixé dans $[0,1]$, en notant $B_{i,n}(t)$, $B(i)$ on a :

$$B(i) = C_n^i t^i (1-t)^{n-i} \quad \text{et} \quad B(i+1) = C_n^{i+1} t^{i+1} (1-t)^{n-i-1}.$$

$$\text{On en déduit : } (1-t)B(i+1) = \frac{n-i}{i+1} \cdot t \cdot B(i).$$

À partir de $B(0) = (1-t)^n$, on peut déduire $B(1)$, $B(2)$, etc ...

Exemple :

$$\text{Pour } n=3, B(0) = (1-t)^3,$$

$$(1-t) \cdot B(1) = \frac{3-0}{0+1} \cdot t \cdot B(0), \text{ d'où: } B(1) = 3t(1-t)^2,$$

$$(1-t) \cdot B(2) = \frac{3-1}{1+1} \cdot t \cdot B(1), \text{ d'où: } B(2) = 3t^2(1-t),$$

$$(1-t) \cdot B(3) = \frac{3-2}{2+1} \cdot t \cdot B(2), \text{ d'où: } B(3) = t^3.$$

b. Focalisation sur n :

Relation entre $B_{i,n}(t)$ et $B_{i,n-1}(t)$, notés dans ce paragraphe $B(n)$ et $B(n-1)$ pour i et t fixés ($i < n$) :

$$\text{On a } B(n) = C_n^i t^i (1-t)^{n-i} \quad \text{et} \quad B(n-1) = C_{n-1}^i t^i (1-t)^{n-1-i}.$$

$$B(n) = \frac{n!}{i! (n-i)!} t^i (1-t)^{n-i} = \frac{(n-1)! n}{i! (n-1-i)! (n-i)} t^i (1-t)^{n-1-i} (1-t),$$

donc $B(n) = \frac{n}{n-i} (1-t) \frac{(n-1)!}{i! (n-1-i)!} t^i (1-t)^{n-1-i} = \frac{n}{n-i} (1-t) C_{n-1}^i t^i (1-t)^{n-1-i}$,
donc

$$B(n) = \frac{n}{n-i} (1-t) B(n-1).$$

2.3.3. Propriétés:

2.3.3.1. Calcul de $B_{i,n}(1-t)$:

$B_{i,n}(t) = C_n^i t^i (1-t)^{n-i}$, $B_{i,n}(1-t) = C_n^i (1-t)^i t^{n-i}$, comme $C_n^i = C_n^{n-i}$, on a:

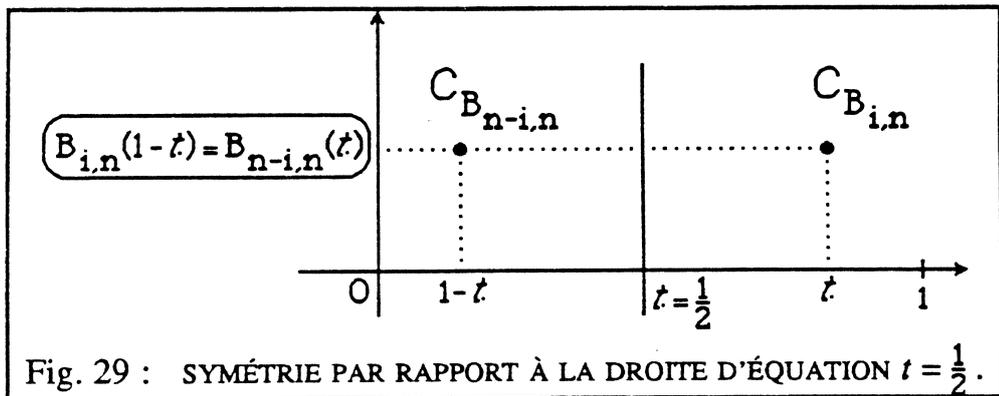
$$B_{i,n}(1-t) = C_n^{n-i} t^{n-i} (1-t)^i,$$

or $B_{n-i,n}(t) = C_n^{n-i} t^{n-i} (1-t)^{n-(n-i)} = C_n^{n-i} t^{n-i} (1-t)^i$, donc:

$$B_{i,n}(1-t) = B_{n-i,n}(t).$$

Conséquence graphique :

Les courbes représentatives de $B_{i,n}$ et de $B_{n-i,n}$ sont symétriques par rapport à la droite d'équation $t = \frac{1}{2}$ (voir § 2.3.2.1.).



2.3.3.2. Équation différentielle :

a. Relation entre $B_{i,n}(t)$ et sa dérivée :

t étant une variable réelle de l'intervalle $[0,1]$, cherchons la relation entre $B_{i,n}(t)$ et sa dérivée; dans ce paragraphe $B_{i,n}(t)$ sera noté plus simplement $B(t)$.

$$B(t) = C_n^i t^i (1-t)^{n-i}, B'(t) = C_n^i i t^{i-1} (1-t)^{n-i} - C_n^i t^i (n-i) (1-t)^{n-i-1}.$$

On fait apparaître $B(t)$ dans le second membre, en formant $t(1-t)B'(t)$:

$$t(1-t)B'(t) = (i-nt)B(t).$$

b. Résolution d'une équation différentielle :

On se propose de résoudre l'équation différentielle linéaire (E) :

$$t(1-t)B'(t) + (nt-i)B(t) = 0, t \text{ appartenant à }]0,1[.$$

Cette résolution est possible car, $t \mapsto t(1-t)$ et $t \mapsto (nt-i)$ sont continues sur $]0,1[$, (voir tome 1 : Analyse, P. et R. BENICHO, N. BOY, J.P. POUGET, Collection Demengel BTS, Éditeur Dunod).

Si on cherche une solution de la forme $B(t) = e^{u(t)}$ où u est une fonction dérivable sur $]0,1[$:

$$B'(t) = u'(t) \cdot e^{u(t)},$$

$$t(1-t)u'(t) + (nt-i) = 0.$$

Sur $]0,1[$, en décomposant une fraction rationnelle en éléments simples :

$$u'(t) = \frac{i-nt}{t(1-t)} = \frac{i}{t} + \frac{i-n}{1-t}.$$

$t \mapsto u_0(t) = i \ln t - (i-n) \ln(1-t)$ est une primitive de $t \mapsto \frac{i-nt}{t(1-t)}$ sur $]0,1[$.

Donc $t \mapsto e^{u_0(t)}$ est une solution de (E).

En multipliant les deux membres de l'équation (E) par $e^{-u_0(t)}$, non nul, on obtient l'équation différentielle équivalente (E') :

$$t(1-t)B'(t) e^{-u_0(t)} + (nt-i)B(t) e^{-u_0(t)} = 0 \quad (E')$$

$$\text{Comme } t(1-t) \neq 0 : B'(t) e^{-u_0(t)} + \frac{nt-i}{t(1-t)} B(t) e^{-u_0(t)} = 0.$$

$$\text{Or, } u_0'(t) = \frac{i-nt}{t(1-t)}, \text{ donc : } B'(t) e^{-u_0(t)} - u_0'(t) e^{-u_0(t)} B(t) = 0,$$

$$\frac{d}{dt}(B(t) e^{-u_0(t)}) = 0.$$

k étant une constante arbitraire dans \mathbb{R} , on a donc : $B(t) e^{-u_0(t)} = k$.

Donc :

$$B(t) = k e^{u_0(t)} = k e^{i \ln t - (i-n) \ln(1-t)} = k t^i (1-t)^{n-i}.$$

Parmi l'infinité de solutions, les polynômes de Bernstein utilisés dans le modèle de Bézier correspondent à $k = C_n^i$.

Exemples :

• Pour $n=3$ et $i=1$ avec la condition initiale $B(\frac{1}{3}) = \frac{4}{9}$, on obtient :

$k=3$ et $B(t) = 3t(1-t)^2$, polynôme de Bernstein $B_{1,3}$.

• Pour $n=3$ et $i=2$ avec la condition initiale $B(\frac{2}{3}) = \frac{4}{9}$, on obtient :

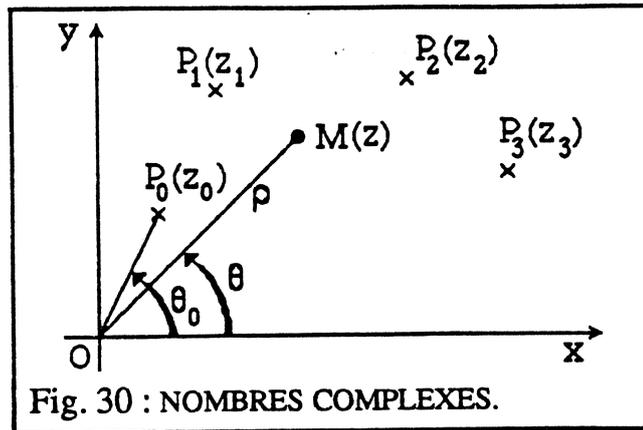
$k=3$ et $B(t) = 3t^2(1-t)$, polynôme de Bernstein $B_{2,3}$.

2.4. Aspect " nombres complexes " :

• À chaque point on associe son affixe dans l'ensemble des nombres complexes.

Si z est l'affixe de M , et z_i celle de P_i , puisque $\overrightarrow{OM}(t) = \sum_{i=0}^n B_{i,n}(t) \overrightarrow{OP_i}$, on a

$$z(t) = \sum_{i=0}^n B_{i,n}(t) z_i.$$

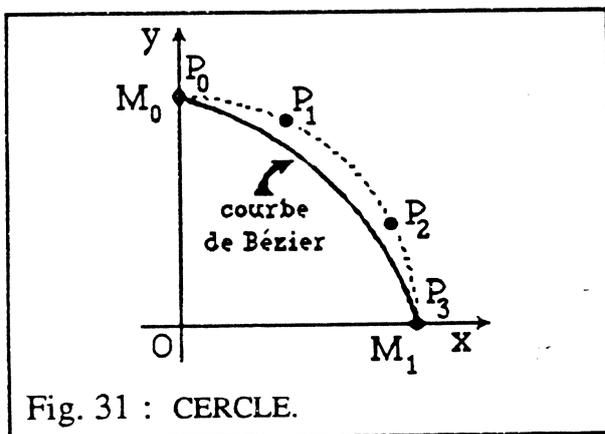


Pour l'exemple $n=3$:

- Avec un point de vue trigonométrique, avec module et argument, $z_{(t)} = \rho e^{i\theta} = (1-t)^3 \rho_0 e^{i\theta_0} + 3t(1-t)^2 \rho_1 e^{i\theta_1} + 3t^2(1-t) \rho_2 e^{i\theta_2} + t^3 \rho_3 e^{i\theta_3}$.
- Avec un point de vue algébrique, avec parties réelles et imaginaires, $z_{(t)} = x+iy = (1-t)^3(x_0+iy_0) + 3t(1-t)^2(x_1+iy_1) + 3t^2(1-t)(x_2+iy_2) + t^3(x_3+iy_3)$.

• *Conséquence : exploitation pour le contrôle de la forme.*

On peut contrôler de manière différente la position des points de contrôle en agissant sur leur position par exemple en jouant sur les modules et les arguments au lieu de jouer sur les coordonnées cartésiennes (choix d'un repérage polaire plutôt que choix d'un repérage cartésien). Voici un exemple (on peut en imaginer de nombreux autres : voir le sujet BTS II 90 avec le dessin d'un motif obtenu par des similitudes successives.).



$$P_0 : z_0 = 1e^{i\frac{\pi}{2}} = i.$$

$$P_1 : z_1 = e^{i\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$P_2 : z_2 = e^{i\frac{\pi}{6}} = \frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}.$$

$$P_3 : z_3 = e^{i0} = 1.$$

On obtient une courbe de Bézier " pilotée " par un cercle.

2.5. Aspect matrice - base de polynôme :

Soit un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$. L'égalité vectorielle $\vec{OM}_{(t)} = \sum_{i=0}^3 B_i(t) \vec{OP}_i$ peut être écrite sous forme matricielle:

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & x_3 \\ y_0 & y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_0(t) \\ B_1(t) \\ B_2(t) \\ B_3(t) \end{pmatrix}.$$

Au lieu de choisir une expression de $\overrightarrow{OM}(t)$ avec le système de polynômes $\{B_0(t), B_1(t), B_2(t), B_3(t)\}$, on peut choisir le système de polynômes plus simples suivant: $\{C_0(t), C_1(t), C_2(t), C_3(t)\} = \{1, t, t^2, t^3\}$.

Tout polynôme de degré inférieur ou égal à 3 s'écrit de manière unique sous la forme : $a_0 + a_1t + a_2t^2 + a_3t^3$.

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0B_0(t) + x_1B_1(t) + x_2B_2(t) + x_3B_3(t) \\ &= x_0(1-t)^3 + x_13t(1-t)^2 + x_23t^2(1-t) + x_3t^3 \\ &= x_0 + (-3x_0+3x_1)t + (3x_0-6x_1+3x_2)t^2 + (-x_0+3x_1-3x_2+x_3)t^3 \\ &= X_0 + X_1t + X_2t^2 + X_3t^3. \end{aligned}$$

De même,

$$\begin{aligned} y(t) &= y_0 + (-3y_0+3y_1)t + (3y_0-6y_1+3y_2)t^2 + (-y_0+3y_1-3y_2+y_3)t^3 \\ &= Y_0 + Y_1t + Y_2t^2 + Y_3t^3, \end{aligned}$$

et on peut écrire:

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_0 & X_1 & X_2 & X_3 \\ Y_0 & Y_1 & Y_2 & Y_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ t^2 \\ t^3 \end{pmatrix}.$$

Soit P_i' le nouveau point de référence de coordonnées (X_i, Y_i) associé au poids $C_i(t)$,

$$\overrightarrow{OM}(t) = \sum_{i=0}^3 C_i(t) \overrightarrow{OP_i'}.$$

Les formules de passage sont:

$$\begin{cases} X_0 = x_0 \\ X_1 = -3x_0 + 3x_1 \\ X_2 = 3x_0 - 6x_1 + 3x_2 \\ X_3 = -x_0 + 3x_1 - 3x_2 + x_3 \end{cases} \quad \begin{cases} Y_0 = y_0 \\ Y_1 = -3y_0 + 3y_1 \\ Y_2 = 3y_0 - 6y_1 + 3y_2 \\ Y_3 = -y_0 + 3y_1 - 3y_2 + y_3 \end{cases}.$$

Sous forme matricielle:

$$\begin{pmatrix} X_0 \\ X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} Y_0 \\ Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}.$$

Conséquence:

Dans la définition du point $M(t)$ appartenant à une courbe de Bézier, les points de contrôle de Bézier P_i sont munis des poids binomiaux $B_i(t)$. D'une manière analogue, pour la définition de la *même* courbe de Bézier les nouveaux points de référence P_i' sont munis des poids polynomiaux plus simples $C_i(t)$.

Exemple:

Si $P_0 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $P_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$, $P_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ et $P_3 \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ sont les points de contrôle de Bézier associés aux polynômes de Bézier, les coordonnées des nouveaux points de référence P_i' sont obtenus de la manière suivante:

$$\begin{pmatrix} X_0 \\ X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} Y_0 \\ Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 12 \\ -12 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Les nouveaux points de référence sont définis par :

$$P_0' \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, P_1' \begin{pmatrix} 0 \\ 12 \end{pmatrix},$$

$$P_2' \begin{pmatrix} 6 \\ -12 \end{pmatrix} \text{ et } P_3' \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

On pourra constater que l'on perd avec ces nouveaux polynômes et ces nouveaux points, la maîtrise de la forme qui était particulièrement intéressante dans le modèle de Bézier, représenté dans la base des polynômes de Bézier. Un des avantages de la présentation de Bézier est que la courbe de Bézier passe par le point de départ P_0 et par le point d'arrivée P_3 , et que la forme est attirée par les points de contrôle. Cet avantage est *perdu* dans le nouveau système de référence.

Remarque :

On peut *aussi tester d'autres systèmes de polynômes* ;

(ceci revient à changer de base dans l'espace vectoriel des polynômes de degré trois, dans l'exemple choisi).

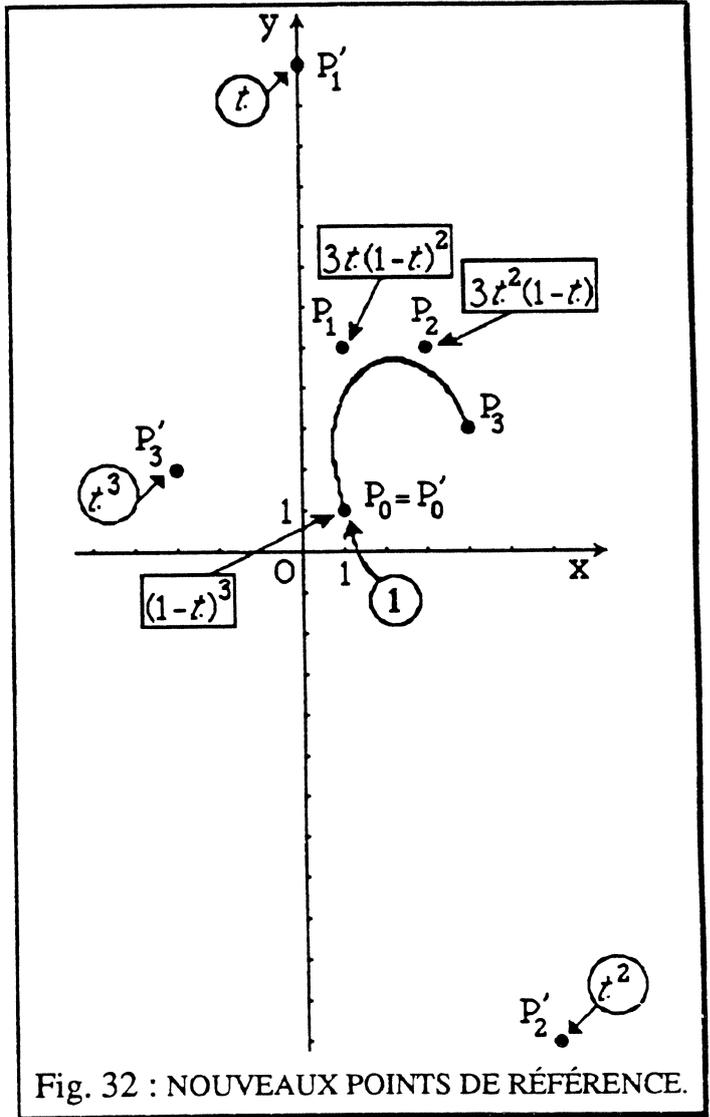


Fig. 32 : NOUVEAUX POINTS DE RÉFÉRENCE.

Le système $\{C_0(t), C_1(t), C_2(t), C_3(t)\}$ a été le premier à être utilisé par Ferguson [RIE 73]. Mais le manque de lien maîtrisable avec la forme de la courbe a conduit à élaborer d'autres systèmes, mieux maîtrisables, comme celui de Bézier, ou celui des B-splines. Le champ des polynômes est large, on peut donc essayer d'autres polynômes ...

• *Remarque (P.B.)* : Cette forme $\sum_{i=0}^n t^i \overrightarrow{OP_i}$ (Ferguson) a beaucoup d'avantages pour traiter rapidement les calculs sur ordinateur, mais le polygone des vecteurs n'a aucune relation visible avec la forme de la courbe associée. Il est donc très difficile de prévoir cette forme.

2.6. Aspect suites :

2.6.1. Définition d'une suite vectorielle :

Soit t appartenant à $[0,1]$. Le point $M(t)$ peut être aussi défini à partir d'une suite vectorielle dépendant de deux indices entiers positifs ou nuls p et n tels que : $p \leq n$.

$$\overrightarrow{OM}_{(p,n,t)} = (1-t)\overrightarrow{OM}_{(p-1,n-1,t)} + t\overrightarrow{OM}_{(p-1,n,t)}$$

pour des raisons de commodité d'écriture et de manipulation, on peut choisir une notation analogue à celle utilisée pour noter les C_n^p ; en ce cas, p n'est pas un exposant, mais un indice comme n .

$$\overrightarrow{OM}_n^p(t) = (1-t)\overrightarrow{OM}_{n-1}^{p-1}(t) + t\overrightarrow{OM}_n^{p-1}(t)$$

2.6.2. Un exemple :

Nous nous plaçons dans le cas où $n=3$.

Soit le point $M_3^3(t)$, où t appartient à $[0,1]$, défini à partir de quatre points de base $M_0^0, M_1^0, M_2^0, M_3^0$, indépendants de t , par la suite vectorielle précédente :

$$\overrightarrow{OM}_n^p(t) = (1-t)\overrightarrow{OM}_{n-1}^{p-1}(t) + t\overrightarrow{OM}_n^{p-1}(t)$$

• Pour $n=3$ et $p=3$:

$$\overrightarrow{OM}_3^3(t) = (1-t)\overrightarrow{OM}_2^2(t) + t\overrightarrow{OM}_3^2(t)$$

Cette relation peut être représentée par le graphe ci-contre :

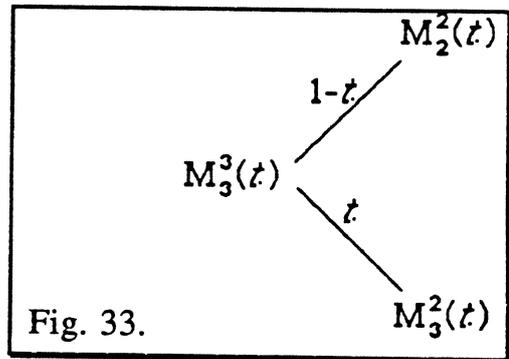


Fig. 33.

• Itérons ce processus pour $n=2$ et $p=2$:

$$\overrightarrow{OM}_2^2(t) = (1-t)\overrightarrow{OM}_1^1(t) + t\overrightarrow{OM}_2^1(t)$$

Le graphe se poursuit donc :

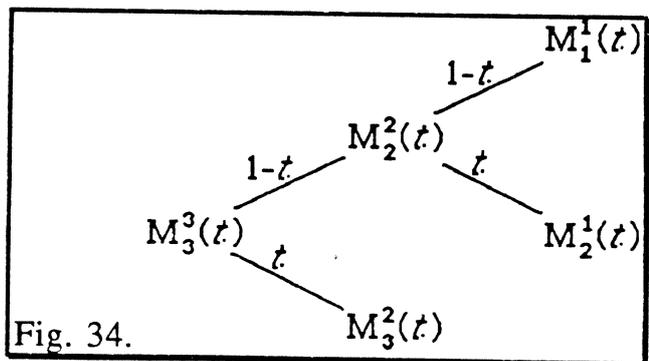
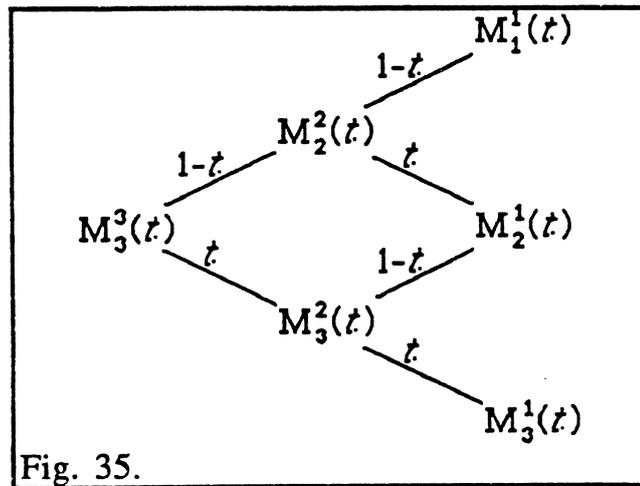


Fig. 34.

- En itérant pour $n=3$ et $p=2$:

$$\overrightarrow{OM}_3^2(t) = (1-t)\overrightarrow{OM}_2^1(t) + t\overrightarrow{OM}_3^1(t).$$



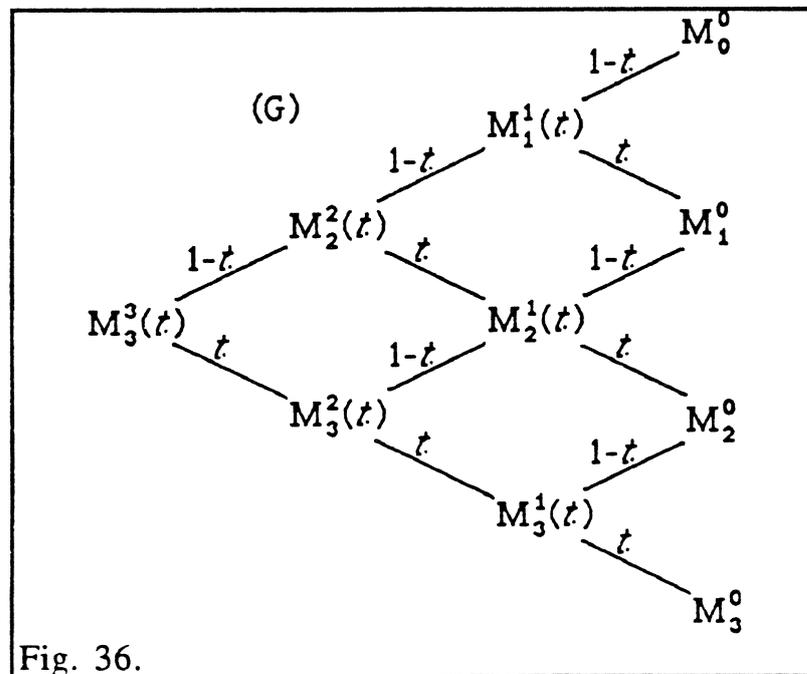
- Finalement avec les trois dernières itérations, utilisant les quatre points de base indépendants de t , $M_0^0, M_1^0, M_2^0, M_3^0$:

$$\overrightarrow{OM}_1^1(t) = (1-t)\overrightarrow{OM}_0^0 + t\overrightarrow{OM}_1^0$$

$$\overrightarrow{OM}_2^1(t) = (1-t)\overrightarrow{OM}_1^0 + t\overrightarrow{OM}_2^0$$

$$\overrightarrow{OM}_3^1(t) = (1-t)\overrightarrow{OM}_2^0 + t\overrightarrow{OM}_3^0.$$

On obtient le graphe (G) suivant :



Ce graphe définit un algorithme de calcul ou de détermination du point $M_3^3(t)$ à partir des quatre points de base $M_0^0, M_1^0, M_2^0, M_3^0$. Il permet aussi de calculer l'expression de $M_3^3(t)$ à partir de ces quatre points.

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OM}_3^3(t) = & (1-t) \left[(1-t) \left[(1-t) \overrightarrow{OM}_0^0 + t \overrightarrow{OM}_1^0 \right] + t \left[(1-t) \overrightarrow{OM}_1^0 + t \overrightarrow{OM}_2^0 \right] \right] \\ & + t \left[(1-t) \left[(1-t) \overrightarrow{OM}_1^0 + t \overrightarrow{OM}_2^0 \right] + t \left[(1-t) \overrightarrow{OM}_2^0 + t \overrightarrow{OM}_3^0 \right] \right] \end{aligned}$$

$$\overrightarrow{OM}_3^3(t) = (1-t)^3 \overrightarrow{OM}_0^0 + 3t(1-t)^2 \overrightarrow{OM}_1^0 + 3t^2(1-t) \overrightarrow{OM}_2^0 + t^3 \overrightarrow{OM}_3^0.$$

$$\uparrow C_3^0 = 1$$

$$\uparrow C_3^1 = 3$$

$$\uparrow C_3^2 = 3$$

$$\uparrow C_3^3 = 1$$

On note que l'on retrouve la définition connue du modèle de Bézier où $M_0^0, M_1^0, M_2^0, M_3^0$ sont les *points de contrôle*. Par ailleurs, compte tenu du problème de dénombrement posé par la recherche des coefficients de $\overrightarrow{OM}_0^0, \overrightarrow{OM}_1^0, \overrightarrow{OM}_2^0, \overrightarrow{OM}_3^0$, les nombres C_n^p s'introduisent naturellement soit à partir des combinaisons, soit à l'aide de la propriété

$$C_n^p = C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^p.$$

Donc $\overrightarrow{OM}_3^3(t) = \sum_{i=0}^3 B_{i,3}(t) \overrightarrow{OM}_i^0$ avec $B_{i,3}(t) = C_3^i t^i (1-t)^{3-i}$ polynôme de Bernstein.

2.6.3. Généralisation:

• Définition:

On procède comme dans l'exemple précédent:

Un point $M_n^n(t)$, où t appartient à $[0,1]$ est défini à partir de $n+1$ points de base $M_0^0, M_1^0, \dots, M_n^0$, indépendants de t par la suite vectorielle:

$$\overrightarrow{OM}_n^p(t) = (1-t) \overrightarrow{OM}_{n-1}^{p-1}(t) + t \overrightarrow{OM}_n^{p-1}(t).$$

• *Propriété* : On admettra que l'on retrouve le modèle de Bézier:

$$\overrightarrow{OM}_n^n(t) = \sum_{i=0}^n B_{i,n}(t) \overrightarrow{OM}_i^0.$$

Les polynômes $B_{i,n}(t)$ sont les polynômes de Bernstein, et les points $M_0^0, M_1^0, \dots, M_n^0$ sont les points de contrôle.

• Coordonnées:

La suite vectorielle précédente s'exploite, au niveau d'une représentation paramétrique dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$, par l'expression de cette suite sur les coordonnées de $M_n^n(t)$:

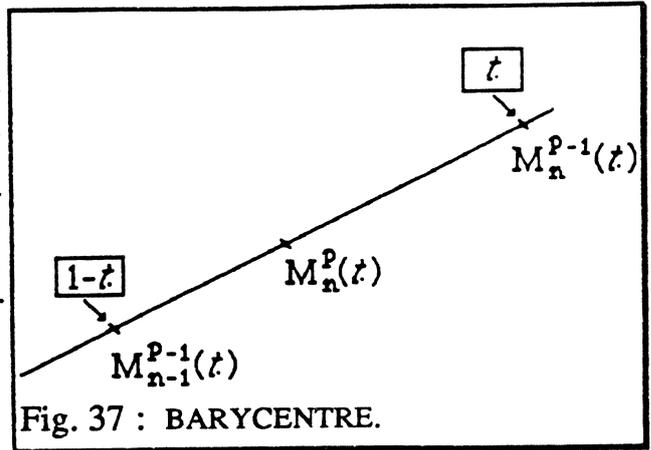
$$\begin{cases} x_n^p(t) = (1-t)x_{n-1}^{p-1}(t) + t x_n^{p-1}(t) \\ y_n^p(t) = (1-t)y_{n-1}^{p-1}(t) + t y_n^{p-1}(t). \end{cases}$$

• *Aspect barycentre:*

Le point $M_n^P(t)$ est le barycentre du point $M_{n-1}^P(t)$ affecté du coefficient $(1-t)$ et du point $M_n^{P-1}(t)$, puisque la somme des coefficients vaut 1

$$((1-t)+t=1).$$

Ceci sera exploité ultérieurement pour en tirer une construction géométrique.



2.6.4. Exploitation de l'aspect suite:

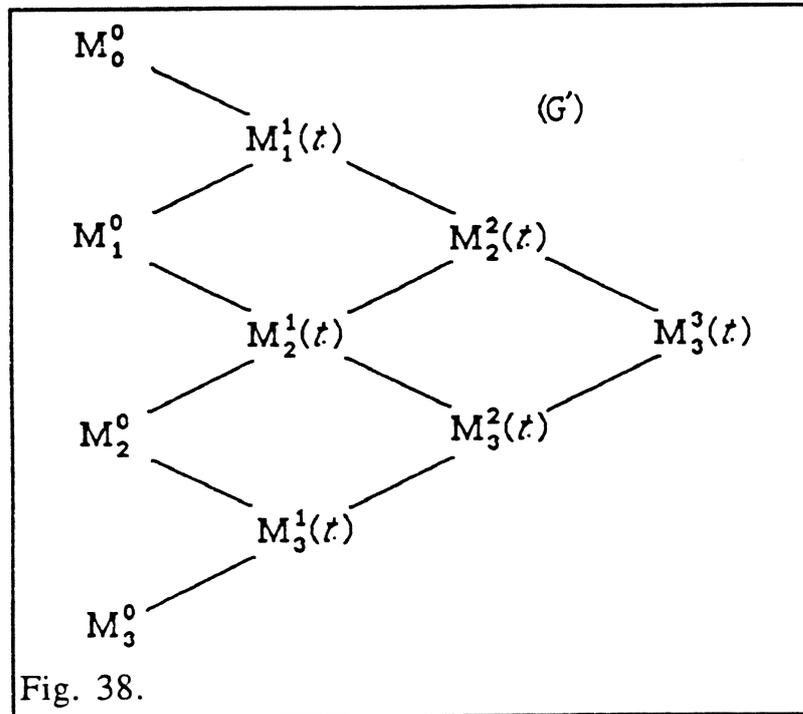
Deux exploitations, algorithmique et géométrique, vont permettre de déterminer le point $M(i)$.

2.6.4.1. Un algorithme de détermination:

On peut déduire de la présentation précédente un algorithme de détermination d'un point $M(t)$ appartenant à une courbe de Bézier.

a. *Exemple:*

Nous nous appuyons sur l'exemple: au lieu de bâtir un algorithme récursif correspondant à une exploitation du graphe (G) de la gauche vers la droite, on propose un autre algorithme itératif correspondant à une exploitation du graphe (G) de la droite vers la gauche. Les points de contrôle $M_0^0, M_1^0, M_2^0, M_3^0$ sont les points initiaux. On obtient alors un graphe (G'), qui sera lu de la gauche vers la droite.



ALGORITHME

Entrée des coordonnées des points de contrôle

(détermination de $\overrightarrow{OM}_0^0, \overrightarrow{OM}_1^0, \overrightarrow{OM}_2^0, \overrightarrow{OM}_3^0$)

Choix de la précision du tracé

(nombre de points de la courbe, choix d'un pas $p : 0,1 ; 0,01 ?$)

Faire pour $t = 0$ pas p tant que $t \leq 1$

Faire pour $I=1$ pas 1 jusqu'à 3

Faire pour $J=1$ pas 1 tant que $J \leq I$

$$\overrightarrow{OM}_I^J = (1-t)\overrightarrow{OM}_{I-1}^{J-1} + t\overrightarrow{OM}_I^{J-1}$$

(sur les coordonnées)

Fin boucle J

Fin boucle I

Tracé de $M(t)$

Fin boucle t

Remarque:

On peut analyser cet algorithme pour prouver (à titre d'exercice), qu'il réalise le graphe souhaité.

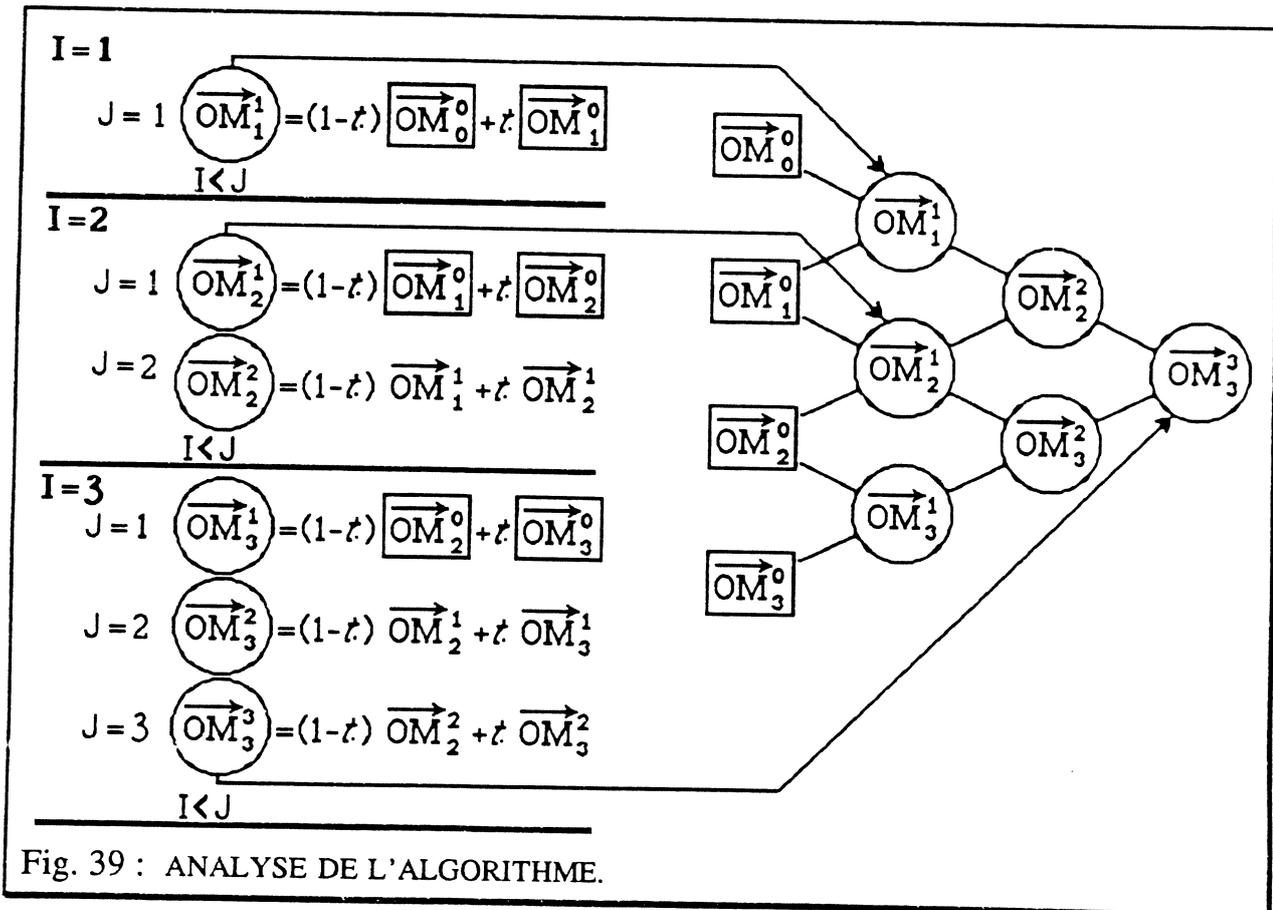


Fig. 39 : ANALYSE DE L'ALGORITHME.

b. Généralisation :

On généralise cet algorithme:

Entrée du nombre de points de contrôle N+1

(choix de N)

Entrée de la position des N+1 points de contrôle

Entrée du pas p de tracé

Faire pour $t = 0$ pas p tant que $t \leq 1$

 Faire pour I=1 pas 1 jusqu'à N

 Faire pour J=1 pas 1 tant que $J \leq I$

$$\overrightarrow{OM}_I^J = (1-t)\overrightarrow{OM}_{I-1}^{J-1} + t\overrightarrow{OM}_I^{J-1}$$

(sur les coordonnées)

 Fin boucle J

 Fin boucle I

 Tracé de $M(t)$

Fin boucle t

Cet algorithme réalise le tracé point par point de la courbe de Bézier.

Remarque:

On peut aussi en déduire un algorithme récursif.

2.6.4.2. Cahier de charge d'un programme associé :

On peut exploiter l'aspect algorithmique en associant un programme de construction d'une courbe de Bézier.

Ce programme doit permettre le choix du nombre de points de contrôle et le choix de leur positionnement.

Il sera très intéressant si en plus de tracer la courbe de Bézier, il permet par déplacement du curseur de l'écran à partir du clavier ou à partir d'une souris de modifier la position des points de contrôle et de voir aussitôt l'effet sur la forme de la courbe.

Il peut être élaboré au choix à partir d'un algorithme itératif, ou récursif ou, si l'on veut accélérer le tracé à partir d'un algorithme issu de l'exploitation de la forme développée avec les polynômes de Bernstein et les points de contrôle (F.D).

Le tracé du contour polygonal formé par les points de contrôle assure aussi un effet visuel qui permet de mieux comprendre la maîtrise de la forme.

2.6.4.3. Construction géométrique:

On déduit immédiatement la construction géométrique en suivant la définition sous forme de suite, et en construisant le barycentre associé aux deux points avec les coefficients $1-t$ et t .

On s'appuie initialement sur les points de contrôle. La construction géométrique suit l'algorithme itératif.

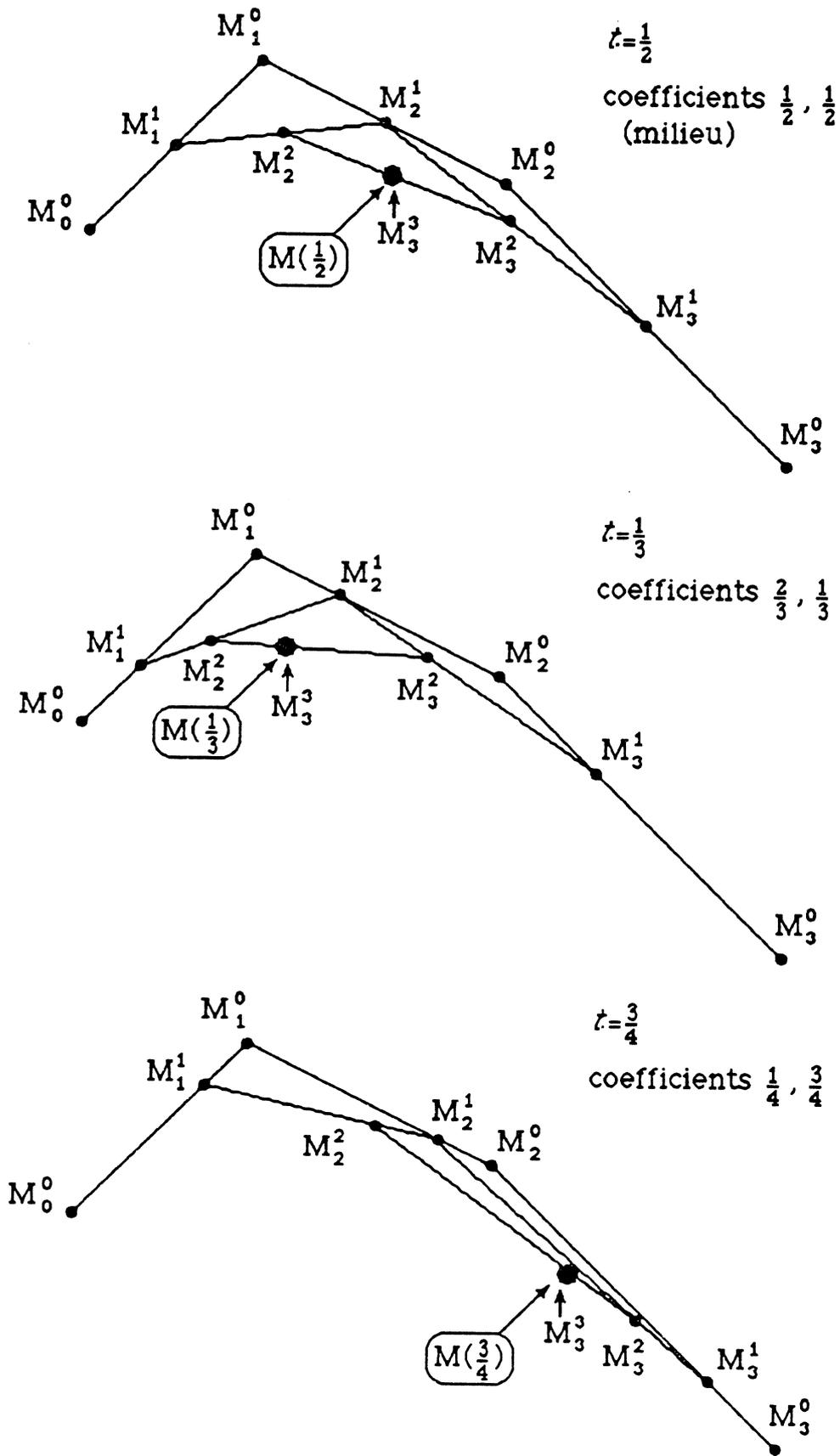


Fig. 40 : CONSTRUCTION GÉOMETRIQUE.

II. PRÉSENTATION DES ACTIVITÉS SUR LE MODÈLE DE BÉZIER

A. Sur les polynômes de BERNSTEIN:

Les courbes de BÉZIER sont définies à partir des *polynômes de Bernstein*. Les polynômes de Bernstein de degré n sont des polynômes définis pour t appartenant à $[0,1]$ et k élément de $\{0, 1, 2, \dots, n\}$ par:

$$B_{k,n}(t) = C_n^k t^k (1-t)^{n-k}.$$

1) Développer et ordonner les polynômes de Bernstein dans les trois cas particuliers: $n=1$, $n=2$ et $n=3$.

n=1:	$B_{0,1}(t) = 1-t$	$B_{1,1}(t) = t$.
n=2:	$B_{0,2}(t) = (1-t)^2 = t^2 - 2t + 1$	
	$B_{1,2}(t) = 2t(1-t) = -2t^2 + t$	
	$B_{2,2}(t) = t^2$.	
n=3:	$B_{0,3}(t) = (1-t)^3 = t^3 - 3t^2 + 3t - 1$	
	$B_{1,3}(t) = 3t(1-t)^2 = 3t^3 - 6t^2 + 3t$	
	$B_{2,3}(t) = 3t^2(1-t) = -3t^3 + 3t^2$	
	$B_{3,3}(t) = t^3$.	

2) Démontrer que pour tout n de \mathbb{N}^* .

a) Pour tout t de $[0,1]$ $\sum_{k=0}^n B_{k,n}(t) = 1$.

b) Quels que soient k appartenant à $\{0, 1, 2, \dots, n\}$ et t appartenant à $[0,1]$ $B_{k,n}(t) \geq 0$.

a) $\sum_{k=0}^n C_n^k t^k (1-t)^{n-k} = (t + (1-t))^n = 1^n = 1$ (binôme de Newton).

b) Quel que soit t appartenant à $[0,1]$, $t \geq 0$ et $1-t \geq 0$ donc $C_n^k t^k (1-t)^{n-k} \geq 0$.

3) Démontrer qu'on a les relations de récurrence, quel que soit t appartenant à $[0,1]$ et pour tout n de \mathbb{N}^* .

• $B_{0,n}(t) = (1-t) B_{0,n-1}(t)$

• $B_{n,n}(t) = t B_{n-1,n-1}(t)$

• Quel que soit k appartenant à $\{1, 2, \dots, n-1\}$,

$$B_{k,n}(t) = (1-t)B_{k,n-1}(t) + t B_{k-1,n-1}(t)$$

$$B_{0,n}(t) = C_n^0 t^0 (1-t)^n = (1-t)^n = (1-t) B_{0,n-1}(t).$$

$$B_{n,n}(t) = C_n^n t^n (1-t)^0 = t^n = t B_{n-1,n-1}(t)$$

$$\begin{aligned} B_{k,n}(t) &= C_n^k t^k (1-t)^{n-k} = (C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}) t^k (1-t)^{n-k} \\ &= (1-t) [C_{n-1}^k t^k (1-t)^{n-k-1}] + t [C_{n-1}^{k-1} t^{k-1} (1-t)^{n-k}] \\ &= (1-t) B_{k,n-1}(t) + t B_{k-1,n-1}(t). \end{aligned}$$

B. Sur les courbes de BÉZIER:

La courbe de Bézier associée aux points M_0, M_1, \dots, M_n est définie paramétriquement par:

$$\text{Pour tout } t \text{ de } [0,1] \quad \overrightarrow{OM}(t) = \sum_{k=0}^n B_{k,n}(t) \overrightarrow{OM}_k = \sum_{k=0}^n C_n^k t^k (1-t)^{n-k} \overrightarrow{OM}_k.$$

Les points M_0, M_1, \dots, M_n sont appelés points de contrôle.

1) Montrer que pour t appartenant à $[0,1]$ donné, le point $M(t)$ défini précédemment est le barycentre du système de points M_0, M_1, \dots, M_n affectés de coefficients que l'on précisera.

$$\overrightarrow{OM}(t) = \sum_{k=0}^n B_{k,n}(t) \overrightarrow{OM}_k \quad \text{et d'après A. 2) } \sum_{k=0}^n B_{k,n}(t) = 1,$$

$M(t)$ est le barycentre du système de points $\{(M_k, B_{k,n}(t))\}$.

2) a) Démontrer que la courbe obtenue passe toujours par les points M_0 et M_n .

b) Démontrer que $\frac{d\overrightarrow{M}}{dt}(0) = n \overrightarrow{M_0 M_1}$ et $\frac{d\overrightarrow{M}}{dt}(1) = n \overrightarrow{M_{n-1} M_n}$.

Interpréter graphiquement le résultat.

a) $\overrightarrow{OM}(t) = \sum_{k=0}^n C_n^k t^k (1-t)^{n-k} \overrightarrow{OM}_k.$

• Si $t=0$ tous les termes sont nuls sauf pour $k=0$ on a $\overrightarrow{OM}(0) = \overrightarrow{OM}_0.$

• Si $t=1$ tous les termes sont nuls sauf pour $k=n$ on a $\overrightarrow{OM}(1) = \overrightarrow{OM}_n.$
 $M_0 = M(0)$, $M_n = M(1)$, M_0 et M_n appartiennent à la courbe.

b) $\frac{d\overrightarrow{M}}{dt} = \sum_{k=0}^n \frac{dB_{k,n}(t)}{dt} \overrightarrow{OM}_k.$

• Si k appartient à $\{1, 2, \dots, n-1\}$,

$$\frac{dB_{k,n}(t)}{dt} = C_n^k [k t^{k-1} (1-t)^{n-k} - (n-k) t^k (1-t)^{n-k-1}].$$

• Si $k=0$ $\frac{dB_{0,n}(t)}{dt} = -n(1-t)^{n-1}.$

• Si $k=n$ $\frac{dB_{n,n}(t)}{dt} = n t^{n-1}.$

• Pour $t=0$ et k élément de $\{2, 3, \dots, n\}$, $\frac{dB_{k,n}}{dt}(0)$ est nulle,

$$\frac{dB_{0,n}}{dt}(0) = -n, \quad \frac{dB_{1,n}}{dt}(0) = C_n^1 = n.$$

$$\text{D'où } \frac{d\vec{M}}{dt}(0) = -n\vec{OM}_0 + n\vec{OM}_1 = n\vec{M}_0M_1.$$

La tangente en M_0 à la courbe admet pour vecteur directeur \vec{M}_0M_1 (si $M_0 \neq M_1$).

• Pour $t=1$ et k élément de $\{0, 1, \dots, n-2\}$, $\frac{dB_{k,n}}{dt}(1)$ est nulle,

$$\frac{dB_{n-1,n}}{dt}(1) = -C_n^{n-1} = -n, \quad \frac{dB_{n,n}}{dt}(1) = n.$$

$$\text{D'où } \frac{d\vec{M}}{dt}(1) = -n\vec{OM}_{n-1} + n\vec{OM}_n = n\vec{M}_{n-1}M_n.$$

Si $M_{n-1} \neq M_n$, alors $\vec{M}_{n-1}M_n$ est un vecteur directeur de la tangente à la courbe en M_n .

3) Quelle est la courbe obtenue pour $n=1$?

Si $n=1$ on a deux points M_0 et M_1 et $\vec{OM}(t) = (1-t)\vec{OM}_0 + t\vec{OM}_1$
 t appartenant à $[0,1]$, $M(t)$ décrit le segment de droite $[M_0M_1]$.

4) On suppose maintenant que $n=2$; on a donc trois points M_0, M_1, M_2 .

Le plan est muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$, on connaît les coordonnées de $M_0: (x_0, y_0)$, de $M_1: (x_1, y_1)$, de $M_2: (x_2, y_2)$.

a) Calculer les coordonnées $x(t), y(t)$ de $M(t)$ en fonction de t et de $x_0, x_1, x_2, y_0, y_1, y_2$.

b) Démontrer que la tangente à la courbe au point de paramètre $\frac{1}{2}$ est parallèle à (M_0M_2) (on suppose $M_0 \neq M_2$).

c) Construire la courbe dans les deux cas particuliers :

$$M_0 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad M_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad M_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$M_0 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad M_1 \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix} \quad M_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

d) À partir de ces exemples expliquer comment on peut "jouer" sur la forme de la courbe en modifiant les points de contrôle.

$$\text{a) } x(t) = x_0(1-t)^2 + x_1(2t(1-t)) + x_2t^2$$

$$y(t) = y_0(1-t)^2 + y_1(2t(1-t)) + y_2t^2$$

d'où

$$x(t) = t^2(x_0 - 2x_1 + x_2) + 2t(x_1 - x_0) + x_0$$

$$y(t) = t^2(y_0 - 2y_1 + y_2) + 2t(y_1 - y_0) + y_0.$$

b) $x'(t) = 2t(x_0 - 2x_1 + x_2) + 2(x_1 - x_0)$
 $y'(t) = 2t(y_0 - 2y_1 + y_2) + 2(y_1 - y_0)$.
 On retrouve les résultats déjà établis
 $x(0) = x_0, y(0) = y_0, x(1) = x_2, y(1) = y_2$
 $\begin{cases} x'(0) = 2(x_1 - x_0) \\ x'(1) = 2(x_2 - x_1) \end{cases}$
 $\begin{cases} y'(0) = 2(y_1 - y_0) \\ y'(1) = 2(y_2 - y_1) \end{cases}$
 on a de plus $x'(\frac{1}{2}) = x_2 - x_0, y'(\frac{1}{2}) = y_2 - y_0$,
 $\frac{d\vec{M}}{dt}(\frac{1}{2}) = \overrightarrow{M_0 M_2}$, donc si $M_0 \neq M_2$ la
 tangente en $M(\frac{1}{2})$ est parallèle à $(M_0 M_2)$.

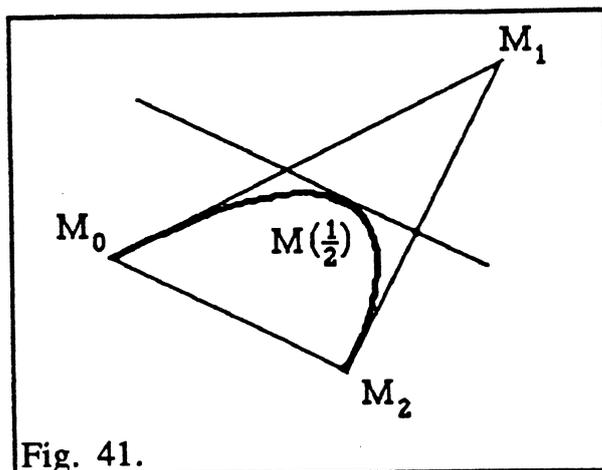


Fig. 41.

c) $M_0 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} M_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} M_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ et pour tout t de $[0,1]$, on a:

$$\begin{cases} x(t) = -2t^2 - 2t + 2 \\ y(t) = -6t^2 + 6t \end{cases} \quad \begin{cases} x'(t) = -4t - 2 \\ y'(t) = -12t + 6 \end{cases}$$

t	0	$\frac{1}{2}$	1
$x'(t)$	-2	-4	-6
$x(t)$	2	$\frac{1}{2}$	-2
$y(t)$	0	$\frac{3}{2}$	0
$y'(t)$	6	0	-6

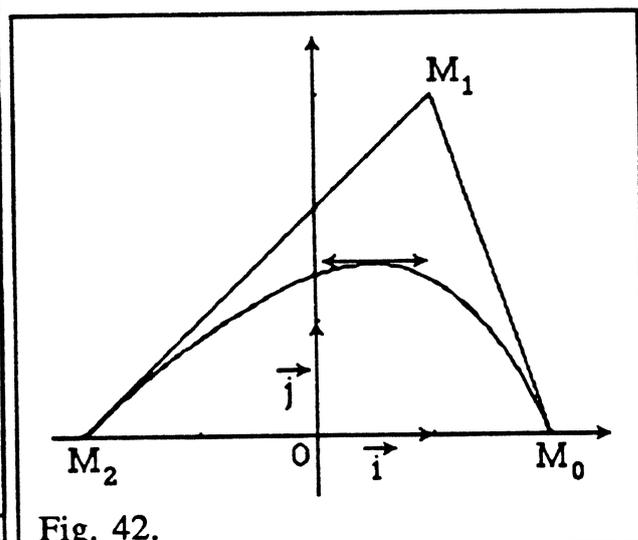


Fig. 42.

$M_0 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} M_1 \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix} M_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}$
 Seul M_1 est modifié.

$$\begin{cases} x(t) = -12t^2 + 8t + 2 \\ y(t) = -6t^2 + 6t \end{cases}$$

$$\begin{cases} x'(t) = -24t + 8 = 8(-3t + 1) \\ y'(t) = -12t + 6 = 6(-2t + 1) \end{cases}$$

t	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	1
$x'(t)$	8	0	-4	-16
$x(t)$	2	$\frac{10}{3}$	3	-2
$y(t)$	0	$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{2}$	0
$y'(t)$	6	0	-6	-6

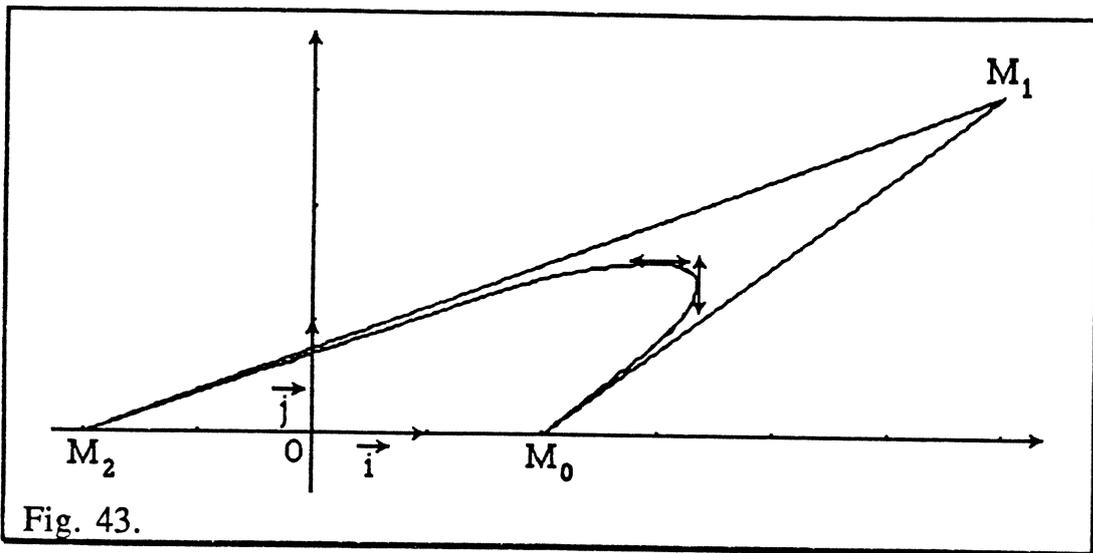


Fig. 43.

d) Le point M_1 "attire" la courbe. Les directions (M_0M_1) et (M_2M_1) influent également sur la forme (direction des tangentes aux points extrêmes de la jonction).

5) On suppose que $n=3$, on a donc quatre points de contrôle M_0, M_1, M_2, M_3 .

Le plan est muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

Les coordonnées de M_0, M_1, M_2, M_3 sont données :

$$M_0 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, M_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, M_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, M_3 \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Déterminer les coordonnées de $M(t)$ en fonction de t .

En déduire une équation de la courbe de Bézier associée à ces points sous la forme $y=f(x)$. Construire la courbe.

$$\begin{cases} x(t) = 0 \times (1-t)^3 + 1 \times 3t(1-t)^2 + 2 \times 3t^2(1-t) + 3 \times t^3 \\ y(t) = 0 \times (1-t)^3 + 0 \times 3t(1-t)^2 + 1 \times 3t^2(1-t) + 0 \times t^3 \end{cases} \quad \begin{cases} x(t) = 3t \\ y(t) = 3t^2(1-t) \end{cases}$$

Pour tout t appartenant à $[0,1]$, posons $t = \frac{x}{3}$.

On obtient pour tout élément x de $[0,3]$:

$$y = 3 \times \frac{x^2}{9} \left(1 - \frac{x}{3}\right) = \frac{x^2}{3} \left(1 - \frac{x}{3}\right) = \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{9}.$$

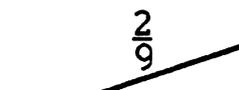
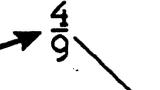
Une équation cartésienne de la courbe est donc :

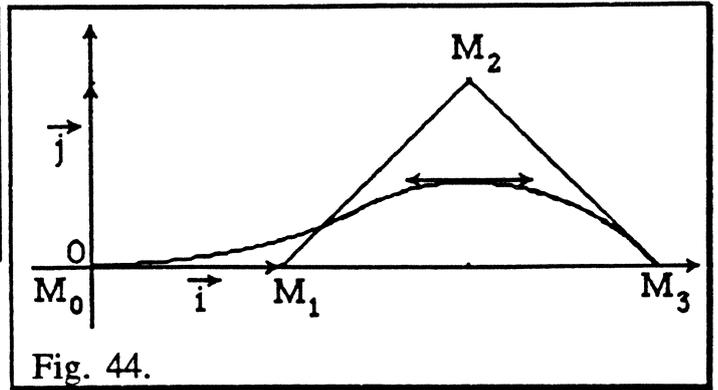
$$y = f(x) = \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{9}, \quad x \text{ appartenant à } [0,3].$$

Étude de la fonction f et construction de la courbe.

$$f(x) = \frac{2}{3}x - \frac{x^2}{3} = \frac{x}{3}(2-x); \quad f''(x) = \frac{2}{3}(x-1), \quad f'' \text{ s'annule et change de signe}$$

en $x=1$, il y a un point d'inflexion de coordonnées $\left(1, \frac{2}{9}\right)$.

x	0	1	2	3
f'(x)	0	+ $\frac{1}{3}$	+ 0	- -1
f(x)	0	$\frac{2}{9}$ 		$\frac{4}{9}$ 
	0			0



6) On suppose que $n=3$, on a donc quatre points M_0, M_1, M_2, M_3 et pour t décrivant $[0,1]$, $\vec{OM}(t) = B_{0,3}(t)\vec{OM}_0 + B_{1,3}(t)\vec{OM}_1 + B_{2,3}(t)\vec{OM}_2 + B_{3,3}(t)\vec{OM}_3$ définit la courbe de Bézier de degré 3 associée à M_0, M_1, M_2, M_3 .

a) En utilisant les relations de récurrence trouvées au A.3), démontrer que:

$$\vec{OM}(t) = B_{0,2}(t)((1-t)\vec{OM}_0 + t\vec{OM}_1) + B_{1,2}(t)((1-t)\vec{OM}_1 + t\vec{OM}_2) + B_{2,2}(t)((1-t)\vec{OM}_2 + t\vec{OM}_3)$$

b) On définit les points M_0', M_1' et M_2' par:

$$\vec{OM}_0' = (1-t)\vec{OM}_0 + t\vec{OM}_1; \vec{OM}_1' = (1-t)\vec{OM}_1 + t\vec{OM}_2; \vec{OM}_2' = (1-t)\vec{OM}_2 + t\vec{OM}_3.$$

Quelle interprétation géométrique peut-on faire des points M_0', M_1', M_2' ?

Montrer que $M(t)$ peut être aussi considéré comme un point d'une courbe de Bézier de degré 2 associée à un ensemble de points que l'on précisera.

c) On itère le procédé précédent en posant:

$$\vec{OM}_0'' = (1-t)\vec{OM}_0' + t\vec{OM}_1' \text{ et } \vec{OM}_1'' = (1-t)\vec{OM}_1' + t\vec{OM}_2'.$$

Ecrire $\vec{OM}(t)$ en fonction de $B_{0,1}(t)$ et $B_{1,1}(t)$.

Que représente $M(t)$ pour les points M_0'' et M_1'' ?

d) M_0, M_1, M_2, M_3 étant quatre points du plan (distincts et non alignés), faire la construction de M_0', M_1', M_2' puis de M_0'', M_1'' et enfin du point $M(t)$ pour $t = \frac{1}{2}$ et $t = \frac{3}{4}$ (on fera deux figures distinctes).

a) D'après A. 3) on a : $B_{0,3}(t) = (1-t)B_{0,2}(t)$; $B_{1,3}(t) = (1-t)B_{1,2}(t) + t B_{0,2}(t)$;
 $B_{2,3}(t) = (1-t)B_{2,2}(t) + t B_{1,2}(t)$; $B_{3,3}(t) = t B_{2,2}(t)$

d'où :

$$\vec{OM}(t) = B_{0,2}(t)[(1-t)\vec{OM}_0 + t\vec{OM}_1] + B_{1,2}(t)[(1-t)\vec{OM}_1 + t\vec{OM}_2] + B_{2,2}(t)[(1-t)\vec{OM}_2 + t\vec{OM}_3]$$

b) M_0' barycentre de $\{(M_0, 1-t); (M_1, t)\}$, M_0' appartient à $[M_0M_1]$,
 M_1' barycentre de $\{(M_1, 1-t); (M_2, t)\}$, M_1' appartient à $[M_1M_2]$,
 M_2' barycentre de $\{(M_2, 1-t); (M_3, t)\}$, M_2' appartient à $[M_2M_3]$,
on a $\vec{OM}(t) = B_{0,2}(t)\vec{OM}_0' + B_{1,2}(t)\vec{OM}_1' + B_{2,2}(t)\vec{OM}_2'$, $M(t)$ est donc un point de
la courbe de Bézier de degré 2 associée aux points M_0', M_1', M_2' .

c) D'après les relations de récurrence du A. 3),

$$B_{0,2}(t) = (1-t)B_{0,1}(t)$$

$$B_{1,2}(t) = (1-t)B_{1,1}(t) + tB_{0,1}(t)$$

$$B_{2,2}(t) = tB_{1,1}(t)$$

d'où :

$$\vec{OM}(t) = B_{0,1}(t)[(1-t)\vec{OM}_0' + t\vec{OM}_1'] + B_{1,1}(t)[(1-t)\vec{OM}_1' + t\vec{OM}_2']$$

$$\vec{OM}(t) = B_{0,1}(t)\vec{OM}_0'' + B_{1,1}(t)\vec{OM}_1'' = (1-t)\vec{OM}_0'' + t\vec{OM}_1''$$

$M(t)$ est le barycentre des points M_0'' et M_1'' affectés respectivement des
coefficients $1-t$ et t , $M(t)$ appartient au segment $[M_0''M_1'']$.

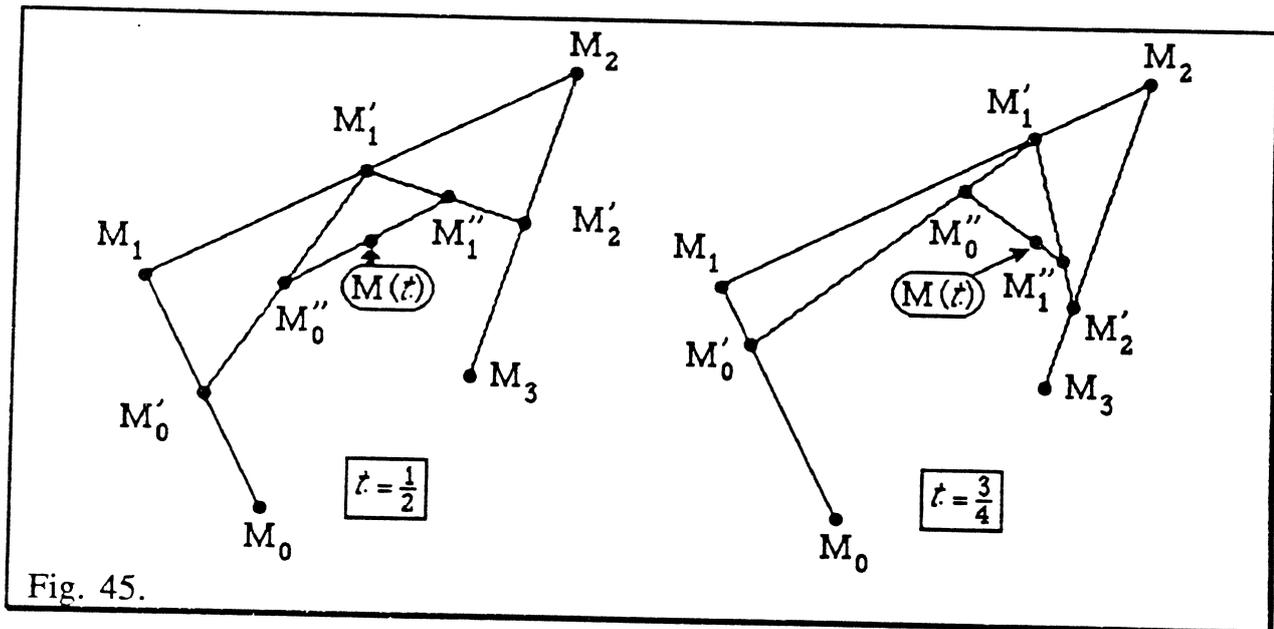


Fig. 45.

7) *Élaboration d'un algorithme (algorithme de DE CASTELJAU) à partir de la méthode utilisée dans la question précédente.*

La méthode développée à la question 5) peut être généralisée à un nombre quelconque de points M_0, M_1, \dots, M_n .

On suppose que ces points de contrôle sont donnés par leurs coordonnées qui seront stockées dans deux tableaux CX et CY indicés de 0 à n.

(CX[I] et CY[I] sont respectivement l'abscisse et l'ordonnée du point M_I).

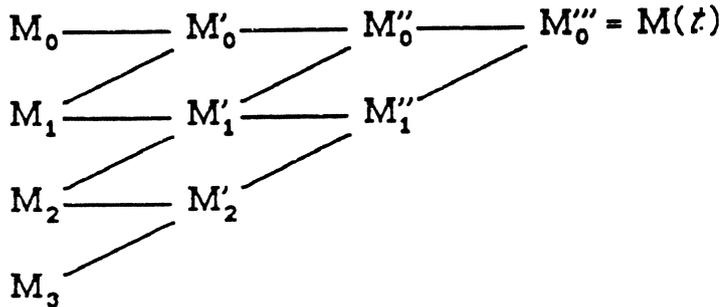
a) Écrire un algorithme de calcul des coordonnées du point $M(t)$, la valeur de t étant donnée dans l'intervalle $[0,1]$.

b) On suppose que l'on dispose des fonctions graphiques :

Pos-curs (x,y) qui positionne le curseur au point de coordonnées (x,y) ,
Trace (x,y) qui trace un segment de la position courante du curseur au point de coordonnées (x,y) .

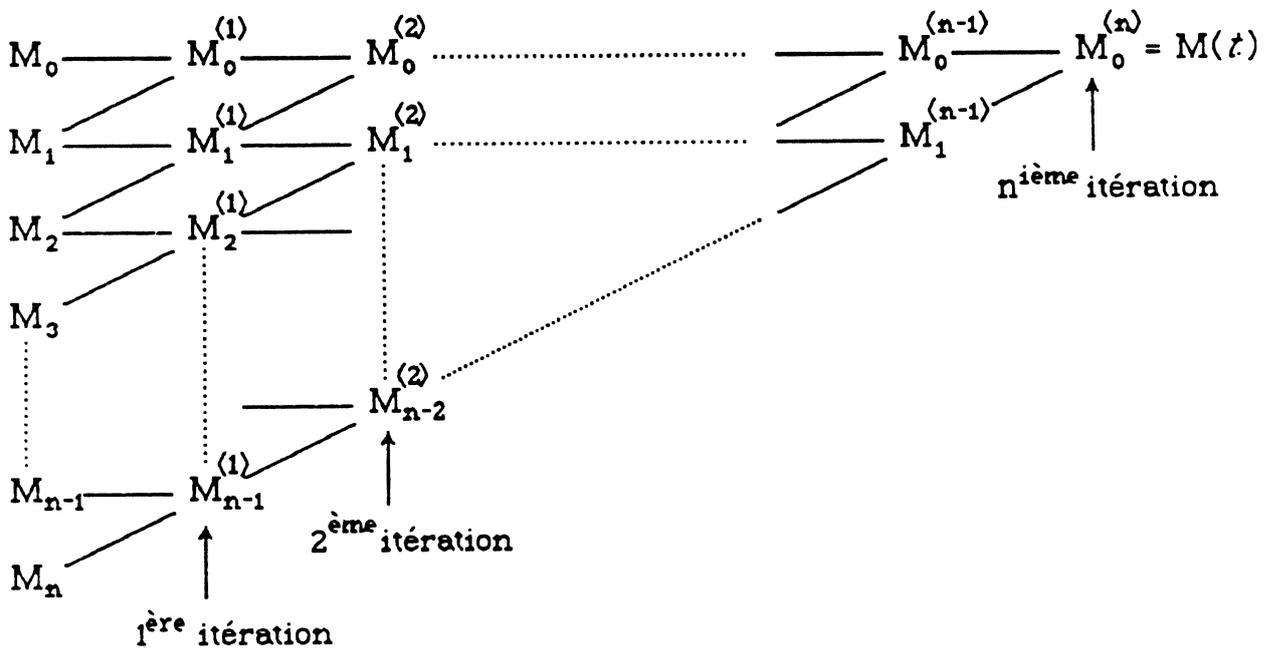
Écrire un algorithme qui permet de tracer la courbe de Bézier associée aux points de contrôle M_0, M_1, \dots, M_n .

a) Dans la question 5) pour $n=3$ on avait :



On part de quatre points initiaux (les points de contrôle); à la première itération on a trois points, à la seconde deux points, à la troisième un seul qui est le point cherché.

Dans le cas général on a :



A la k ^{ème} itération, le point $M_I^{(k)}$ est obtenu par la relation:

$$\vec{OM}_I^{(k)} = (1-t) \vec{OM}_I^{(k-1)} + t \vec{OM}_{I+1}^{(k-1)}.$$

Les coordonnées successives des points intermédiaires sont stockées dans deux tableaux : X pour les abscisses, Y pour les ordonnées. Pour chaque itération on aura donc :

$$X[I] \longleftarrow (1-t)*X[I] + t * X[I+1]$$

$$Y[I] \longleftarrow (1-t)*Y[I] + t * Y[I+1]$$

Au départ il y a n points, à la K^{ième} itération il y a n+1-K points à calculer. À la n^{ième}, il n'y a plus qu'un point d'indice 0, c'est le point M(t), donc le résultat est la valeur finale de X[0], Y[0].

début

(* données n, CX, CY *)

Pour I=0 à n faire

début

$$X[I] \longleftarrow CX[I]$$

(* initialisation de X et Y *)

$$Y[I] \longleftarrow CY[I]$$

fin

Pour K=1 à n faire

début

Pour J=0 à N-K faire

début

$$X[J] \longleftarrow (1-t)*X[J] + t * X[J+1]$$

$$Y[J] \longleftarrow (1-t)*Y[J] + t * Y[J+1]$$

fin

fin

(* résultat X[0], Y[0] *)

fin

b) Tracé de la courbe : on positionne le curseur en M₀.

On fait varier t de 0 à 1 avec un pas de h, on trace le segment [M(t)M(t+h)], h suffisamment petit pour que le tracé soit régulier.

ALGORITHME :

début

Pos-curs (CX[0],CY[0])

t ← 0

Tant que t < 1 faire

début

t ← t + h

Pour I=0 à n faire

début

$$X[I] \longleftarrow CX[I]$$

$$Y[I] \longleftarrow CY[I]$$

fin

Pour K=1 à N faire

début

Pour J=0 à N-K faire

début

$$X[J] \longleftarrow (1-t)*X[J] + t * X[J+1]$$

$$Y[J] \longleftarrow (1-t)*Y[J] + t * Y[J+1]$$

fin

fin

fin Trace (X[0], Y[0])

fin

} Détermination
du nouveau
point M(t)

8) Courbe fermée .

C'est le cas où les points de contrôle M_0, M_1, \dots, M_n sont tels que $M_0 = M_n$.

Exemple :

Construire la courbe de Bézier associée aux points de contrôle:

$$M_0 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, M_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}, M_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}, M_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

On est donc dans le cas $n=3$.

$$\overrightarrow{OM}(t) = \sum_{k=0}^3 B_{k,3}(t) \overrightarrow{OM}_k$$

$$\begin{cases} x(t) = (1-t)^3 \times 0 + 3t(1-t)^2 \times (-1) + 3t^2(1-t) \times 3 + t^3 \times 0 \\ y(t) = (1-t)^3 \times 0 + 3t(1-t)^2 \times 3 + 3t^2(1-t) \times 3 + t^3 \times 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(t) = 3t(1-t)(4t-1) = -3(4t^3 - 5t^2 + t) \\ y(t) = 9t(1-t) = 9(t-t^2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x'(t) = -3(12t^2 - 10t + 1) & \text{s'annule pour } t = \frac{5 - \sqrt{13}}{12} \text{ et } t = \frac{5 + \sqrt{13}}{12} \\ y'(t) = 9(1 - 2t) & \text{s'annule pour } t = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

t	0	$\frac{5-\sqrt{13}}{12}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{5+\sqrt{13}}{12}$	1
$x'(t)$	-	0	+	0	-
$x(t)$	0	-0,2	$\frac{3}{4}$	1,1	0
$y(t)$	0	1	$\frac{9}{4}$	1,8	0
$y'(t)$		+	0	-	

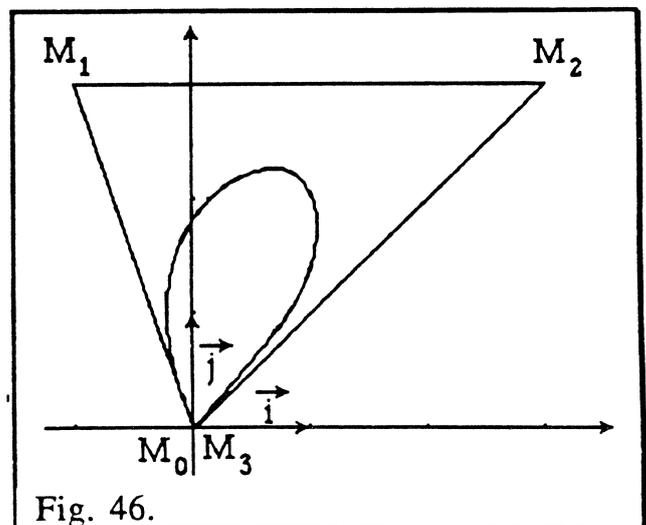


Fig. 46.

9) *Changement de l'ordre de multiplicité du point de contrôle.*

Dans tous les exemples précédents on a des points de contrôle simples. On étudie dans l'exemple suivant, l'influence de l'augmentation de l'ordre de multiplicité d'un des points de contrôle sur la forme de la courbe (le degré de la courbe est augmenté).

Comparer la courbe de Bézier \mathcal{C} de degré 2 associée à

$$M_0 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad M_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad M_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

avec la courbe de Bézier \mathcal{C}' de degré 3 associée à

$$M_0 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad M_1=M_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad M_3 \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Le point de contrôle de coordonnées $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ a un ordre de multiplicité égal à 2. (La courbe \mathcal{C} a été étudiée à l'activité 4) c)).

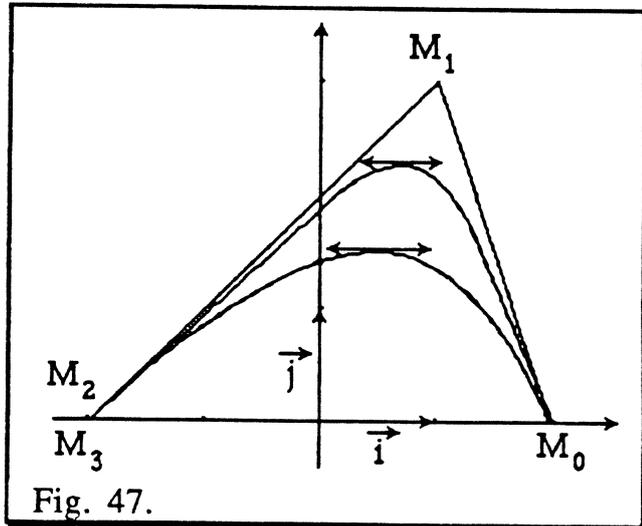
Étude de \mathcal{C}' :

$$M(t) \begin{cases} x(t) = (1-t)^3 \times 2 + 3t(1-t)^2 \times 1 + 3t^2(1-t) \times 1 + t^3 \times (-2) \\ y(t) = (1-t)^3 \times 0 + 3t(1-t)^2 \times 3 + 3t^2(1-t) \times 3 + t^3 \times 0 \end{cases}$$

$$M(t) \begin{cases} x(t) = -4t^3 + 3t^2 - 3t + 2 \\ y(t) = 9t(1-t) = 9(t-t^2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x'(t) = -12t^2 + 6t - 3 = -3(4t^2 - 2t + 1) < 0 \\ y'(t) = 9(1-2t) \end{cases}$$

t	0	$\frac{1}{2}$	1
$x'(t)$		-	
$x(t)$	2	$\frac{3}{4}$	-2
$y(t)$	0	$\frac{9}{4}$	0
$y'(t)$	+	0	-



La courbe est "attirée" plus fortement par $M_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ dans le cas où son ordre de multiplicité est égal à 2 (cas de la courbe \mathcal{C}').

La courbe entière est modifiée.

En conclusion :

Pour terminer ces propositions d'activités sur le modèle des courbes de BÉZIER, voici le texte de l'épreuve de Mathématiques du Brevet de Techniciens Supérieurs en Informatique Industrielle de la session 1988.

Ce sujet, à partir d'un exemple de courbe de BÉZIER, conduit à l'exploitation algorithmique (sur la base d'une approche " suites ") et barycentrique du modèle de BÉZIER.

On se propose d'étudier une courbe définie paramétriquement (cf. partie 1) appartenant à un modèle de courbes utilisé pour la modélisation des formes en C.F.A.O. (Conception et Fabrication Assistées par Ordinateur), (cf. parties 2 et 3).

1^{ère} partie:Étude d'un exemple de courbe définie par une représentation paramétrique.

Soient $A_0(0,0)$, $A_1(1,-1)$, $A_2(3,2)$ et $A_3(4,1)$ quatre points du plan P muni d'un repère orthonormal $\mathcal{R} = (O; \vec{i}, \vec{j})$, d'unité graphique 4 cm et \mathcal{C} la courbe définie, pour tout t de $[0,1]$ par:

$$\begin{cases} x(t) = -2t^3 + 3t^2 + 3t \\ y(t) = -8t^3 + 12t^2 - 3t \end{cases}$$

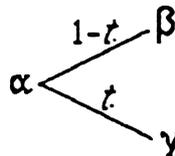
1.1. Étudier et construire la représentation graphique de la courbe \mathcal{C} dans le repère \mathcal{R} .

1.2. Montrer que la courbe \mathcal{C} est tangente respectivement en A_0 et A_3 aux droites (A_0A_1) et (A_3A_2) .

2^{ème} partie:Étude d'une suite de nombres réels définie à l'aide d'un graphe.

La notation b_n^p représente un nombre réel dépendant de deux entiers naturels n et p , tels que p soit inférieur ou égal à n (Dans cette notation, l'indice p n'a pas la signification de puissance).

On considère le graphe suivant :

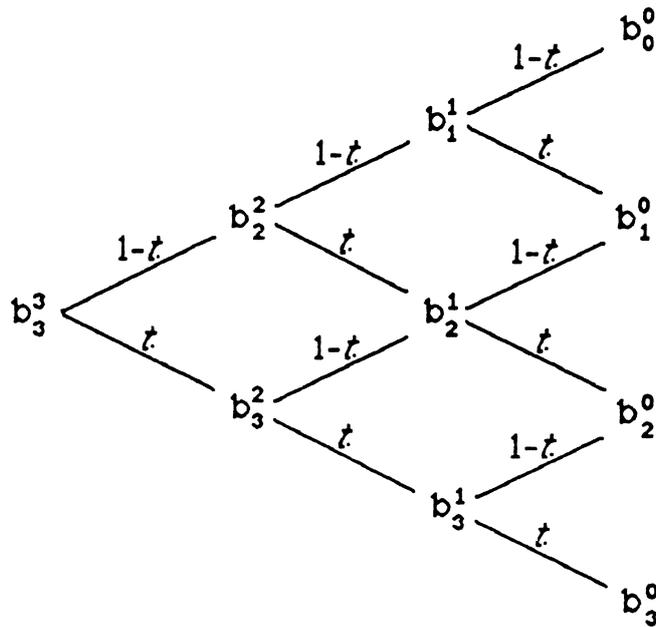


La signification de ce graphe est: $\alpha = (1-t)\beta + t\gamma$.

2.1. Exprimer à l'aide de ce graphe la relation:

$$(1) \quad b_n^p = (1-t)b_{n-1}^{p-1} + tb_{n-1}^p, \text{ où } 1 \leq p \leq n.$$

2.2. A l'aide du graphe ci-dessous,



montrer que b_3^3 s'exprime en fonction de b_0^0 , b_1^0 , b_2^0 , et b_3^0 sous la forme :
 $b_3^3 = (1-t)^3 b_0^0 + 3t(1-t)^2 b_1^0 + 3t^2(1-t) b_2^0 + t^3 b_3^0$.

2.3. En utilisant le paragraphe précédent, expliciter l'algorithme permettant de calculer b_n^n en fonction de $b_0^0, b_1^0, \dots, b_{i-1}^0, \dots, b_n^0$.

3^{ème} partie:

Description du modèle de courbes.

On donne quatre points A_0^0, A_1^0, A_2^0 et A_3^0 du plan de coordonnées respectives $(x_0^0, y_0^0), (x_1^0, y_1^0), (x_2^0, y_2^0)$ et (x_3^0, y_3^0) .

Pour $1 \leq p \leq n \leq 3$, on considère le point A_n^p de coordonnées (x_n^p, y_n^p) définies par les relations :

$$(2) \begin{cases} x_n^p = (1-t)x_{n-1}^{p-1} + t x_n^{p-1} \\ y_n^p = (1-t)y_{n-1}^{p-1} + t y_n^{p-1} \end{cases} \quad \text{où } t \text{ appartient à } [0, 1].$$

Enfin, on note plus simplement (x, y) les coordonnées du point $M = A_3^3$.

3.1. Calculer x en fonction de $t, x_0^0, x_1^0, x_2^0, x_3^0$
 et y en fonction de $t, y_0^0, y_1^0, y_2^0, y_3^0$.

3.2. Établir que l'on obtient la représentation paramétrique de la courbe \mathcal{C} de la première partie si:

$$\begin{cases} x_0^0 = 0 \\ y_0^0 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1^0 = 1 \\ y_1^0 = -1 \end{cases} \quad \begin{cases} x_2^0 = 3 \\ y_2^0 = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} x_3^0 = 4 \\ y_3^0 = 1 \end{cases} .$$

3.3. Cette interprétation est exploitée pour donner une construction géométrique d'un point de la courbe \mathcal{C} .

Sur une deuxième figure placer les points :

$A_0(0,0)$, $A_1(1,-1)$, $A_2(3,2)$ et $A_3(4,1)$.

a) En utilisant le système (2), montrer que, pour $t = \frac{1}{2}$, le point $A_1^1(x_1^1, y_1^1)$ est le milieu de $[A_0A_1]$, et que le point A_2^1 est le milieu de $[A_2A_3]$.

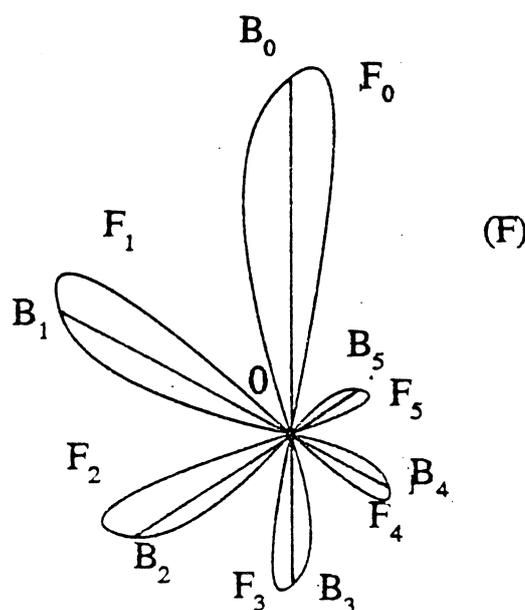
En déduire la construction géométrique du point A_3^2 pour $t = \frac{1}{2}$, noté E.

b) En utilisant la méthode expliquée dans la question précédente, construire le point A_3^3 pour $t = \frac{1}{3}$, noté F.

Le sujet du B.T.S. Informatique Industrielle 90 (Problème n° II) contient aussi un exemple intéressant de construction d'une forme construite à l'aide de deux courbes de Bézier et de l'utilisation d'une succession de similitudes.

On se propose de déterminer une modélisation d'une forme graphique plane (F) obtenue à partir de transformations successives d'un motif de base.

N.B. La représentation de (F) ci-dessous n'est pas à l'échelle.



Le plan complexe (P) est muni d'un repère orthonormal $(O ; \vec{u}, \vec{v})$, l'unité graphique étant le centimètre.

Une courbe de Bézier est définie à partir de $n+1$ points de contrôle successifs $M_0, M_1, \dots, M_k, \dots, M_n$ d'affixes respectives $z_0, z_1, \dots, z_k, \dots, z_n$ comme étant l'ensemble des points M d'affixe z telle que :

$$z = \sum_{i=1}^n C_n^k t^k (1-t)^{n-k}, t \text{ étant une variable réelle de l'intervalle } [0,1].$$

A • RÉALISATION DU MOTIF DE BASE

1 • Soit (Γ_0) la courbe de Bézier définie à partir des trois points de contrôle successifs $O(0,0)$, $A_0(3,12)$ et $B_0(0,9)$.

a) Montrer qu'une représentation paramétrique de (Γ_0) est, pour t appartenant à l'intervalle $[0,1]$:

$$\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}$$

avec $f(t) = 6t - 6t^2$ et $g(t) = 24t - 15t^2$.

b) Étudier les variations des fonctions f et g pour t appartenant à $[0,1]$.

Montrer que la droite (OA_0) est tangente en O à (Γ_0) et que la droite (B_0A_0) est tangente en B_0 à (Γ_0) .

Représenter (Γ_0) .

2 • Soit (Γ_0') la courbe de Bézier définie à partir des trois points de contrôle successifs O , $A_0'(a,b)$ et B_0 , où a et b appartiennent à \mathbb{R} .

a) Déterminer a et b pour que :

- (Γ_0') admette une tangente parallèle à l'axe des ordonnées au point d'abscisse -1 .

- (Γ_0') admette (B_0A_0) comme tangente en B_0 .

b) Ces conditions étant réalisées, en déduire que (Γ_0') admet, pour t appartenant à $[0,1]$, une représentation paramétrique de la forme :

$$\begin{cases} x = -4t + 4t^2 \\ y = 14t - 5t^2 \end{cases}$$

Montrer que la droite (OA_0') est tangente en O à (Γ_0') .

Montrer que les points A_0' , B_0 , A_0 sont alignés et que la droite $(A_0'A_0)$ est tangente en B_0 aux deux courbes (Γ_0) et (Γ_0') .

Représenter (Γ_0') .

On appelle " feuille " F_0 le motif obtenu par la réunion des deux courbes (Γ_0) et (Γ_0') .

B • RÉALISATION DE LA FORME

La forme graphique que l'on veut réaliser est composée de six feuilles F_0, F_1, \dots, F_5 , la feuille F_0 étant le motif de base défini dans la partie A.

Pour k entier, tel que $1 \leq k \leq 5$, la feuille F_k est la transformée de la feuille F_{k-1} par la similitude S de centre O , de rapport R , d'angle α où R est un réel strictement positif et α un réel de l'intervalle $]0, \pi[$

1 • Détermination de la similitude S .

a) Calculer R et α sachant que, dans le repère précédent, le point B_3 a pour coordonnées $(0, -\frac{243}{64})$.

b) Vérifier que S est l'application qui, à tout point M d'affixe z associe le point d'affixe z' telle que :

$$z' = \frac{3}{8}(1 + i\sqrt{3})z.$$

c) En déduire les coordonnées (x', y') du point M' en fonction des coordonnées (x, y) du point M .

2 • Réalisation

On se propose de représenter la forme (F) sur un écran graphique. On dispose, à cet effet, de la procédure $BZ(x_0, y_0, x_1, y_1, x_2, y_2)$ permettant de tracer la courbe de Bézier admettant comme points de contrôle, les points M_0, M_1, M_2 de coordonnées respectives $(x_0, y_0), (x_1, y_1)$ et (x_2, y_2) .

a) Proposer un algorithme relatif à la procédure $TR(x, y, x', y')$ permettant de calculer les coordonnées (x', y') du point M' transformé du point $M(x, y)$ par la similitude S .

b) Proposer un algorithme permettant de réaliser la forme (F) en partant de la feuille F_0 et en utilisant les procédures BZ et TR précédentes.

Chapitre 3

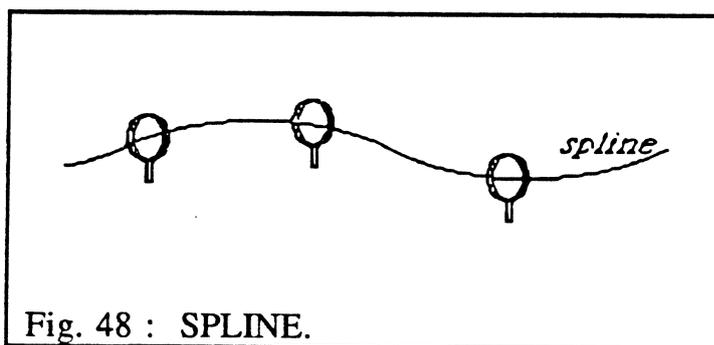
MODÈLES DES B-SPLINES

O. PRÉLIMINAIRE

Dans le modèle de BÉZIER, la forme de la courbe est modifiée globalement si l'on déplace un point de contrôle. Cette modification *globale* conduit à la recherche de modèles dans lesquels les modifications peuvent être *locales*. Les modèles B-splines possèdent cette propriété.

Une première approche s'appuyant sur le modèle de B-spline de Riesenfeld, de présentation voisine de celle du " pantin vectoriel " proposée dans le modèle de Bézier [VER 85], favorise la compréhension de la structure du modèle. Un exposé de référence complète cette première approche des B-splines, par différentes méthodes d'étude. On propose ensuite des activités de recherche.

Le mot anglais *spline* signifie baguette ou languette souple, flexible. On peut imaginer des anneaux dans lesquels on cherche à faire passer cette baguette flexible.



Les courbes B-splines construites à l'aide des fonctions B-splines constituent un modèle dans l'ensemble des modèles des courbes Splines [BOOR 78]. Elles ont été choisies parce qu'elles sont fréquemment utilisées en représentation des formes.

L'exposé est limité à une introduction aux B-splines et n'aborde qu'une partie du champ des B-splines (voir CAD). Pour une vision de synthèse et l'extension à l'espace [BOH 84] est une bonne référence.

I. UNE PREMIÈRE APPROCHE DES B-SPLINES

Cette présentation est inspirée de celle du professeur Michel VERON [VER 85] sur le modèle B-spline proposé par Richard RIESENFELD.

Un cas particulier est élaboré avant de passer à une présentation générale.

1. UN CAS PARTICULIER :

1.1. Mise en place :

Soit un ensemble de $n+1$ points de référence ($n \geq 2$) $P_i : P_0, P_1, \dots, P_n$.

On définit une succession de $n-1$ arcs de courbes $(C_k), (C_0), (C_1), \dots, (C_{n-2})$ par :

$\overrightarrow{OM}_k(t) = \sum_{i=0}^2 R_{i,2}(t) \overrightarrow{OP}_{k+i}$, où k est un entier naturel, $0 \leq k \leq n-2$, les fonctions $t \longmapsto R_{i,2}(t)$ sont des polynômes de degré $m=2$ définis pour tout t de $[0,1]$ et appelés polynômes de Riesenfeld.

• P_0, P_1, P_2 permettent de définir l'arc (C_0) :

$$\overrightarrow{OM}_0(t) = R_{0,2}(t) \overrightarrow{OP}_0 + R_{1,2}(t) \overrightarrow{OP}_1 + R_{2,2}(t) \overrightarrow{OP}_2$$

• P_1, P_2, P_3 permettent de définir l'arc (C_1) :

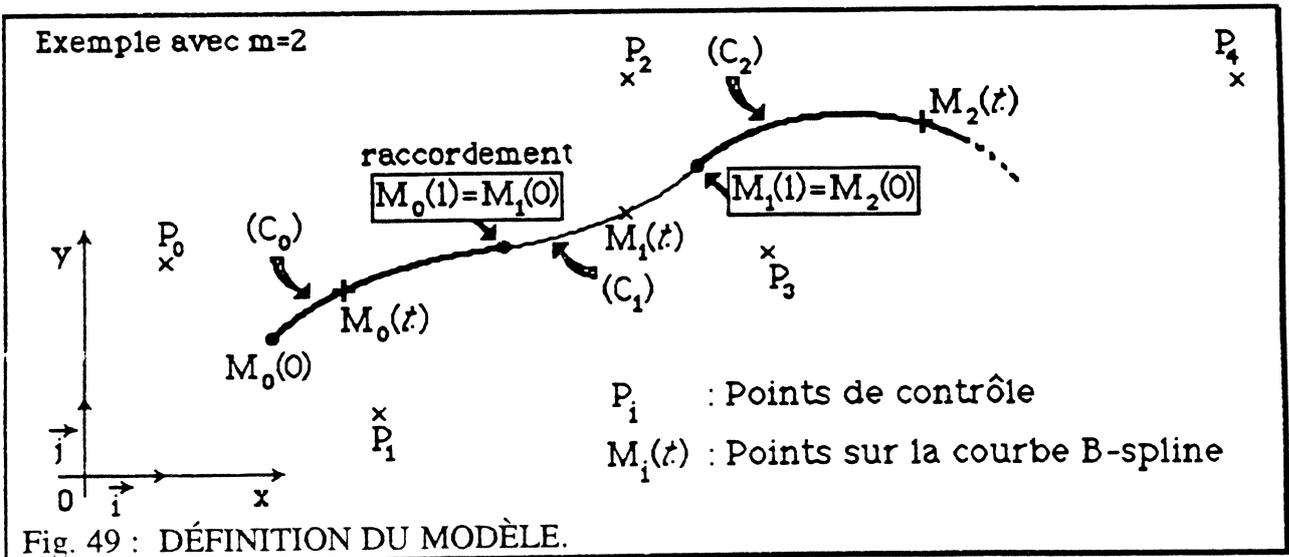
$$\overrightarrow{OM}_1(t) = R_{0,2}(t) \overrightarrow{OP}_1 + R_{1,2}(t) \overrightarrow{OP}_2 + R_{2,2}(t) \overrightarrow{OP}_3$$

• P_k, P_{k+1}, P_{k+2} permettent de définir l'arc (C_k) :

$$\overrightarrow{OM}_k(t) = R_{0,2}(t) \overrightarrow{OP}_k + R_{1,2}(t) \overrightarrow{OP}_{k+1} + R_{2,2}(t) \overrightarrow{OP}_{k+2}$$

Ces polynômes sont choisis de manière à satisfaire à un ensemble de contraintes, en particulier portant sur le raccordement de l'arc (C_k) au

suisvant (C_{k+1}) . Ainsi par exemple, la contrainte $\overrightarrow{OM}_k(1) = \overrightarrow{OM}_{k+1}(0)$ assure une jonction *continue* entre les arcs (C_k) et (C_{k+1}) .



1.2. Définition des contraintes:

Les polynômes $R_{i,2}(t)$ sont de degré 2 et tels que:

- ① $\sum_{i=0}^2 R_{i,2}(t)=1$, pour tout t appartenant à $[0,1]$.
- Quels que soient les points de base P_i :

$$\textcircled{2} \overrightarrow{OM}_k(1)=\overrightarrow{OM}_{k+1}(0)$$

$$\textcircled{3} \overrightarrow{OM}_k'(1)=\overrightarrow{OM}_{k+1}'(0).$$

La contrainte ① assure, comme dans le modèle de Bézier, l'indépendance de la courbe par rapport au repère choisi (la B-spline ne dépend pas de l'origine choisie).

La contrainte ② assure un raccord continu entre deux arcs successifs.

La contrainte ③ assure la conservation de la tangente au point de raccordement entre deux arcs successifs.

1.3. Expression des contraintes:

- La contrainte ① donne :

$$R_{0,2}(t) + R_{1,2}(t) + R_{2,2}(t) = 1 \text{ , pour tout } t \text{ appartenant à } [0,1].$$

- La contrainte ② donne :

$$R_{0,2}(1)\overrightarrow{OP}_k + R_{1,2}(1)\overrightarrow{OP}_{k+1} + R_{2,2}(1)\overrightarrow{OP}_{k+2} = R_{0,2}(0)\overrightarrow{OP}_{k+1} + R_{1,2}(0)\overrightarrow{OP}_{k+2} + R_{2,2}(0)\overrightarrow{OP}_{k+3}$$

quels que soient \overrightarrow{OP}_k , $\overrightarrow{OP}_{k+1}$, $\overrightarrow{OP}_{k+2}$ et $\overrightarrow{OP}_{k+3}$.

$$\text{Donc : } R_{0,2}(1) = 0 \text{ , } R_{1,2}(1) = R_{0,2}(0) \text{ , } R_{2,2}(1) = R_{1,2}(0) \text{ , } R_{2,2}(0) = 0.$$

- La contrainte ③ donne:

$$R'_{0,2}(1)\overrightarrow{OP}_k + R'_{1,2}(1)\overrightarrow{OP}_{k+1} + R'_{2,2}(1)\overrightarrow{OP}_{k+2} = R'_{0,2}(0)\overrightarrow{OP}_{k+1} + R'_{1,2}(0)\overrightarrow{OP}_{k+2} + R'_{2,2}(0)\overrightarrow{OP}_{k+3}$$

quels que soient \overrightarrow{OP}_k , $\overrightarrow{OP}_{k+1}$, $\overrightarrow{OP}_{k+2}$ et $\overrightarrow{OP}_{k+3}$.

$$\text{Donc: } R'_{0,2}(1)=0 \text{ , } R'_{1,2}(1) = R'_{0,2}(0) \text{ , } R'_{2,2}(1) = R'_{1,2}(0) \text{ , } R'_{2,2}(0) = 0.$$

1.4. Détermination des polynômes de Riesenfeld:

$$\begin{cases} R_{0,2}(t)=a_2t^2+a_1t+a_0 \\ R_{1,2}(t)=b_2t^2+b_1t+b_0 \\ R_{2,2}(t)=c_2t^2+c_1t+c_0 \end{cases}$$

L'expression des contraintes donne le système :

$$\begin{cases} a_0+b_0+c_0=1 & ; & a_1+b_1+c_1=0 & ; & a_2+b_2+c_2=0 \\ a_0+a_1+a_2=0 & ; & b_0+b_1+b_2=a_0 & ; & c_0+c_1+c_2=b_0 & ; & c_0=0 \\ a_1+2a_2=0 & ; & b_1+2b_2=a_1 & ; & c_1+2c_2=b_1 & ; & c_1=0 \end{cases}$$

En résolvant le système on obtient:

$$\begin{cases} R_{0,2}(t) = \frac{1}{2} - t + \frac{t^2}{2} \\ R_{1,2}(t) = \frac{1}{2} + t - t^2 \\ R_{2,2}(t) = \frac{t^2}{2} \end{cases}$$

donc :

$$\overrightarrow{OM}_k(t) = \left(\frac{1}{2} - t + \frac{t^2}{2}\right) \overrightarrow{OP}_k + \left(\frac{1}{2} + t - t^2\right) \overrightarrow{OP}_{k+1} + \frac{t^2}{2} \overrightarrow{OP}_{k+2}.$$

1.5. Un exemple:

À partir de points de référence $P_0(1,1)$, $P_1(2,3)$, $P_2(3,2)$ et $P_3(4,3)$, on a la situation suivante :

$n=3$, $n+1 = 4$ points de référence, $n-1$ arcs (C_k) soient (C_0) et (C_1) .

Le premier arc (C_0) est défini par :

$$M_0(t) \begin{cases} x_0(t) = \frac{3}{2} + t \\ y_0(t) = 2 + 2t - \frac{3}{2}t^2 \end{cases}$$

à partir des points P_0 , P_1 et P_2 .

t	0	$\frac{2}{3}$	1
$x'(t)$		+	
$x(t)$	$\frac{3}{2}$	$\frac{13}{6}$	$\frac{5}{2}$
$y(t)$	2	3	$\frac{5}{2}$
$y'(t)$		+	0

Le deuxième arc (C_1) est défini par:

$$M_1(t) \begin{cases} x_1(t) = \frac{5}{2} + t \\ y_1(t) = \frac{5}{2} - t + t^2 \end{cases}$$

à partir des points P_1 , P_2 et P_3 .

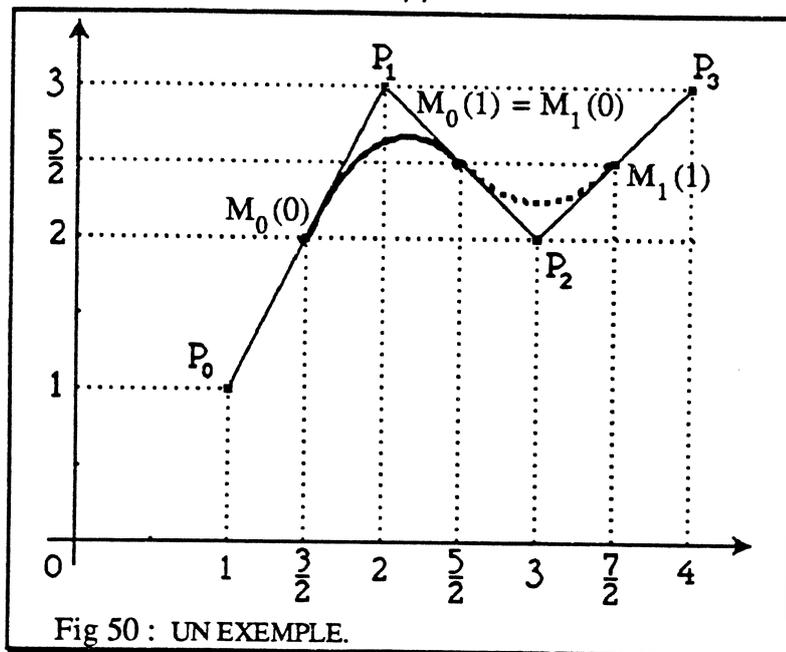
t	0	$\frac{1}{2}$	1
$x'(t)$		+	
$x(t)$	$\frac{5}{2}$	3	$\frac{7}{2}$
$y(t)$	$\frac{5}{2}$	$\frac{7}{4}$	$\frac{5}{2}$
$y'(t)$		-	0

Ces deux arcs de paraboles se raccordent " parfaitement ", on a :

$$M_0(1) \left(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right) = M_1(0) \left(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right),$$

et les tangentes aux deux arcs à leur point de jonction sont communes

$$\overrightarrow{OM}'_0(1) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{OM}'_1(0) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$



1.6. Propriétés géométriques:

Il est facile de démontrer les propriétés géométriques suivantes qui permettent un tracé rapide de la B-spline à partir des points de référence, dans l'exemple $m=2$.

* $M_0(0)$ est le milieu du segment $[P_0P_1]$: point initial.

$M_0(1)=M_1(0)$ est le milieu du segment $[P_1P_2]$: point de raccord.

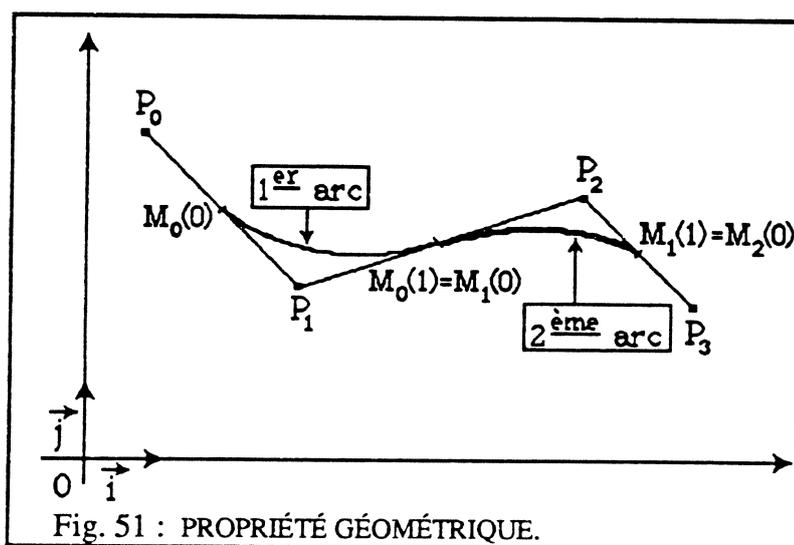
⋮
etc

* P_0P_1 est tangente à la B-spline en $M_0(0)$.

P_1P_2 est tangente à la B-spline en $M_0(1)=M_1(0)$.

⋮
etc

Il est donc très facile de tracer de proche en proche les arcs de paraboles formant ce modèle de B-spline de degré 2.



• Remarque (P.B.) :

Ces propriétés géométriques remarquables ne sont valables que sur le modèle de degré 2. Elles ne se généralisent pas.

2. GÉNÉRALISATION :

2.1. Définition :

On procède comme dans l'exemple précédent pour généraliser ce modèle.

Soit un ensemble de $n+1$ points de référence ($n \geq 2$) P_i (P_0, P_1, \dots, P_n).

On définit une succession d'arcs de courbes (C_k) : $(C_0), (C_1), \dots, (C_{n-m})$ par :

$\overrightarrow{OM}_k(t) = \sum_{i=0}^m R_{i,m}(t) \overrightarrow{OP}_{k+i}$, où m et k sont des entiers naturels tels que $m \leq n$ et $0 \leq k \leq n-m$, les fonctions $t \longmapsto R_{i,m}(t)$ sont des polynômes de degré m définis pour tout t de $[0,1]$ et appelés polynômes de Riesenfeld. Les points $P_k, P_{k+1}, \dots, P_{k+m}$ permettent de définir l'arc (C_k) .

Contraintes:

Les polynômes $R_{i,m}(t)$ vérifient les contraintes suivantes:

- Pour tout t appartenant à $[0,1]$: $\sum_{i=0}^m R_{i,m}(t) = 1$.
- Quels que soient les $n+1$ points de référence P_i et pour tout entier naturel ℓ , $0 \leq \ell \leq m-1$, on a $\overrightarrow{OM}_k^{(\ell)}(1) = \overrightarrow{OM}_{k+1}^{(\ell)}(0)$,

où $\overrightarrow{OM}_k^{(\ell)}(1)$ désigne la dérivée d'ordre ℓ de $t \longmapsto \overrightarrow{OM}_k(t)$.

La fonction vectorielle et les dérivées vectorielles successives jusqu'au rang $m-1$ prennent respectivement la même valeur à l'extrémité de l'arc d'indice k pour $t=1$ et à l'origine de l'arc suivant d'indice $k+1$ pour $t=0$, pour tous les arcs successifs C_k, C_{k+1} .

2.2. Quelques propriétés:

•Propriété 1:

La succession d'arcs " glisse ", guidée par la suite des $n+1$ points de référence.

Dans l'exemple précédent ($m=2$), les trois premiers points P_0, P_1, P_2 définissent l'arc (C_0) , puis en glissant d'un rang sur les points de référence, P_1, P_2, P_3 définissent l'arc (C_1) , en itérant le procédé, les points P_2, P_3, P_4 définissent l'arc (C_2) , etc ...

•Propriété 2:

En augmentant le degré des polynômes, l'influence locale peut être élargie. Par exemple avec le degré trois, le glissement est effectué sur des ensembles de quatre points de référence, par décalage d'un rang à chaque pas pour définir de proche en proche les arcs successifs. On augmente l'influence globale en améliorant le raccord. Ceci montre l'antagonisme d'une localisation maximale et d'un raccord optimal.

•Propriété 3:

Les contraintes imposées assurent un raccord d'autant plus " parfait " à chaque point de jonction des arcs que le degré des polynômes augmente (la fonction vectorielle et les dérivées vectorielles successives conservant respectivement la même valeur à gauche et à droite de chaque point de jonction). Pour $m=2$, les contraintes portent sur la fonction vectorielle et sur la dérivée première, pour $m=3$, on a des contraintes jusqu'à la dérivée seconde, pour $m=4$ on a des contraintes jusqu'à la dérivée d'ordre trois.

•Propriété 4:

Le modèle proposé est celui d'une B-spline ne passant pas par le point de départ P_0 ou par d'autres points de référence fixés. Il existe d'autres modèles possédant cette propriété supplémentaire.

•Propriété 5:

Le modèle proposé " bouge " localement et non globalement si l'on modifie la position d'un point de référence.

•Propriété 6:

Les polynômes $R_{i,m}(t)$ jouent le rôle de fonctions " poids " associées aux points de référence, et confèrent à ces points leur influence sur la forme de la B-spline. La contrainte : pour tout t appartenant à $[0,1]$, $\sum_{i=0}^m R_{i,m}(t)=1$, assure l'indépendance de la forme de la courbe par rapport à l'origine O du repère.

2.3. Autre formulation du modèle:

2.3.1. Autre expression générale des polynômes de Riesenfeld:

On admettra que la formule générale de l'expression des polynômes de Riesenfeld est donnée par:

$$R_{i,m}(t) = (m+1) \sum_{j=0}^{m-i} (-1)^j \frac{(t+m-i-j)^m}{j! (m-j+1)!}.$$

•Exemple $m=2$:

On retrouve les résultats précédents. En effet:

$$\text{Pour } i=0, R_{0,2}(t) = 3 \sum_{j=0}^2 (-1)^j \frac{(t+2-j)^2}{j! (2-j+1)!} = \frac{t^2}{2} - t + \frac{1}{2}$$

$$\text{Pour } i=1, R_{1,2}(t) = 3 \sum_{j=0}^1 (-1)^j \frac{(t+1-j)^2}{j! (3-j)!} = -t^2 + t + \frac{1}{2}$$

$$\text{Pour } i=2, R_{2,2}(t) = 3 \sum_{j=0}^0 (-1)^j \frac{(t-j)^2}{j! (3-j)!} = \frac{t^2}{2}.$$

•Exemple $m=3$, on obtient de même :

$$\text{Pour } i=0, \quad R_{0,3}(t) = -\frac{t^3}{6} + \frac{t^2}{2} - \frac{t}{2} + \frac{1}{6}$$

$$\text{Pour } i=1, \quad R_{1,3}(t) = \frac{t^3}{2} - t^2 + \frac{2}{3}$$

$$\text{Pour } i=2, \quad R_{2,3}(t) = -\frac{t^3}{2} + \frac{t^2}{2} + \frac{t}{2} + \frac{1}{6}$$

$$\text{Pour } i=3, \quad R_{3,3}(t) = \frac{t^3}{6}.$$

Dans ces deux cas particuliers ($m=2$ et $m=3$) on peut, en application, réaliser le programme pour tracer la B-spline de Riesenfeld à partir des points de référence donnés.

2.3.2. Exemple de présentation d'activité :

Cette première approche peut être présentée sous la forme d'un thème de recherche de la façon suivante (d'après un sujet de DEA-PA [VER. 85]):

L'approximation d'un ensemble de $n+1$ points P_i est réalisée à l'aide de courbes (C_k) décrites par le point M_k défini pour tout t de $[0,1]$ et quel

que soit l'entier naturel k , $0 \leq k \leq n-m$, par $\overrightarrow{OM}_k(t) = \sum_{i=0}^m R_{i,m}(t) \overrightarrow{OP}_{k+i}$, où $R_{i,m}(t)$ est un polynôme de degré m , $m \leq n$, vérifiant pour tout entier naturel ℓ , $0 \leq \ell \leq m-1$,

$$\overrightarrow{OM}_k^{(\ell)}(1) = \overrightarrow{OM}_{k+1}^{(\ell)}(0), \text{ et pour tout } t \text{ appartenant à } [0,1], \quad \sum_{i=0}^m R_{i,m}(t) = 1.$$

1° Dans le cas particulier $m=2$, écrire les conditions sur les $R_{i,m}(t)$.

2° En déduire les polynômes $R_{i,2}(t)$.

3° Montrer que l'on peut aussi obtenir ces polynômes par ($m=2$) :

$$(G) \quad R_{i,m}(t) = (m+1) \sum_{j=0}^{m-i} (-1)^j \frac{(t+m-i-j)^m}{j! (m-j+1)!}.$$

4° Construire un exemple avec des points fixés ($m=2$).

5° Quelles propriétés géométriques peut-on découvrir ($m=2$)?

6° En déduire un programme d'application ($m=2$).

7° En utilisant la relation (G), résoudre le cas $m=3$ et reprendre alors les questions 4°, 5° et 6°.

Remarque :

D'autres activités sont proposées après l'exposé de référence.

II. EXPOSÉ DE RÉFÉRENCE

1. INTRODUCTION:

L'approximation d'une suite de $n+1$ points P_0, P_1, \dots, P_n est réalisée par une courbe B-spline définie paramétriquement par :

$$\vec{OM}(t) = \sum_{i=0}^n N_{i,m}(t) \vec{OP}_i.$$

Les fonctions $N_{0,m}, N_{1,m}, \dots, N_{n,m}$ sont les fonctions polynomiales B-splines de degré m .

Remarque:

On retrouve une définition analogue à celle des courbes de Bézier,

$$\vec{OM}(t) = \sum_{i=0}^n B_{i,n}(t) \vec{OP}_i.$$

où les fonctions $B_{0,n}, B_{1,n}, \dots, B_{n,n}$ sont les fonctions polynômes de Bernstein.

Les différences essentielles entre les approximations d'une suite de points par une courbe B-spline et par une courbe de Bézier sont les suivantes:

- Un changement de points modifie localement la courbe dans le modèle B-spline, alors qu'il modifie globalement toute la courbe dans le modèle de Bézier.
- On peut augmenter le nombre des points de contrôle sans augmenter le degré de la courbe B-spline, alors que dans le modèle de Bézier, s'il y a $n+1$ points P_0, P_1, \dots, P_n la courbe est nécessairement de degré n .

2. LES FONCTIONS POLYNOMIALES B-SPLINES, PRÉSENTATION RÉCURSIVE:

2.1. Définition récursive des fonctions polynomiales B-splines:

Cette définition est due à Cox et De Boor.

Soit (t_0, t_1, \dots, t_k) une suite finie d'entiers naturels telle que pour tout entier $i, 1 \leq i \leq k, t_{i-1} \leq t_i$. Ces entiers sont appelés nœuds et la suite (t_0, t_1, \dots, t_k) est appelée vecteur nœud.

Les nœuds sont de deux types, dits simples ou multiples.

- t_i est un *nœud simple* si $t_{i-1} < t_i < t_{i+1}$, et dans ce cas les entiers naturels t_{i-1}, t_i, t_{i+1} sont en général consécutifs.
- t_i est un *nœud multiple* d'ordre p si $t_{i-1} < t_i = t_{i+1} = \dots = t_{i+p-1} < t_{i+p}$.

Les fonctions polynomiales B-splines $N_{i,m}$ sont définies récursivement par:

$$\left\{ \begin{array}{l} (1) N_{i,0}(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \text{ appartient à } [t_i, t_{i+1}[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (\text{initialisation}) \\ (2) N_{i,m}(t) = \frac{t-t_i}{t_{i+m}-t_i} N_{i,m-1}(t) + \frac{t_{i+m+1}-t}{t_{i+m+1}-t_{i+1}} N_{i+1,m-1}(t) . \end{array} \right.$$

Remarque:

Dans le cas de nœuds multiples, il peut arriver que le numérateur et le dénominateur de l'un des quotients du second membre de la relation (2) soient simultanément nuls. On convient que dans ce cas le quotient est nul.

2.2. Exploration de la définition:

2.2.1. Quelques exemples:

On se borne dans ce paragraphe à énoncer les résultats obtenus sur des exemples simples dans les activités proposées dans la partie III. A.

On étudie successivement le cas de nœuds simples puis celui de nœuds multiples.

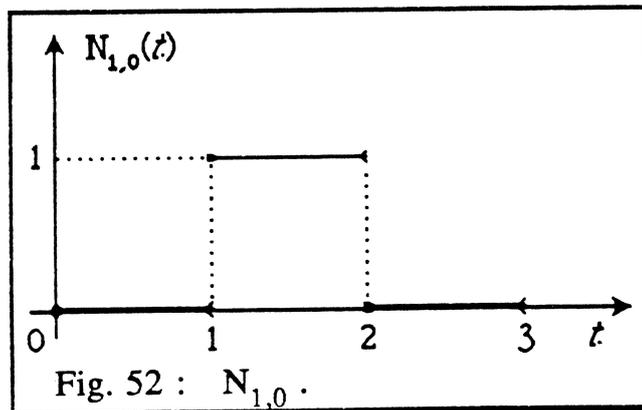
• Soit le vecteur nœud (0, 1, 2, 3).

On a $t_0=0$, $t_1=1$, $t_2=2$, $t_3=3$, (activité A.1.)

La définition des fonctions B-splines de degré zéro $N_{i,0}$ est donnée par la relation (1), par exemple:

$$N_{1,0}(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \text{ appartient à } [1,2[\\ 0 & \text{sinon} . \end{cases}$$

Les fonctions $N_{i,0}$ sont constantes par intervalles, discontinues en t_i et t_{i+1} .

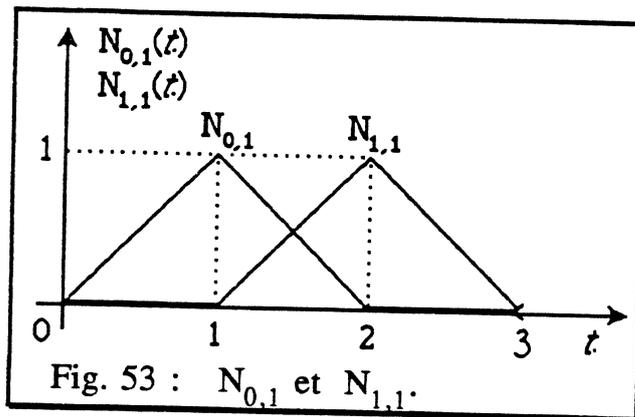


La relation de récurrence (2) permet de déterminer les fonctions B-splines de degré 1 : $N_{0,1}$ et $N_{1,1}$.

On obtient :

$$N_{0,1}(t) = \begin{cases} t & \text{si } t \text{ appartient à } [0,1[\\ 2-t & \text{si } t \text{ appartient à } [1,2[\\ 0 & \text{si } t \text{ appartient à } [2,3[\end{cases}$$

$$N_{1,1}(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \text{ appartient à } [0,1[\\ t-1 & \text{si } t \text{ appartient à } [1,2[\\ 3-t & \text{si } t \text{ appartient à } [2,3[. \end{cases}$$



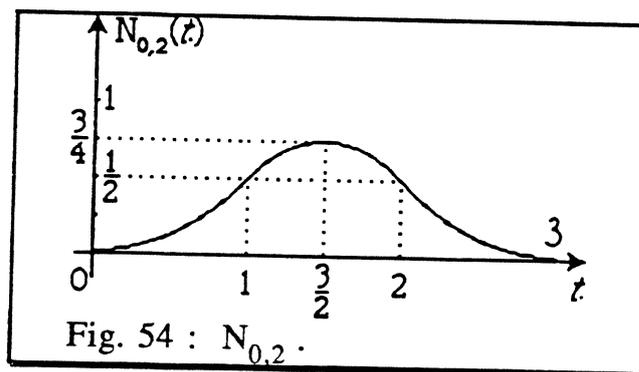
Ces fonctions sont affines par intervalles et continues mais non dérivables en t_i .

A l'aide des fonctions $N_{0,1}$ et $N_{1,1}$ on peut définir la fonction B-spline de degré 2, soit $N_{0,2}$.

On obtient :

$$N_{0,2}(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}t^2 & \text{si } t \text{ appartient à } [0,1[\\ \frac{1}{2}(-2t^2 + 6t - 3) & \text{si } t \text{ appartient à } [1,2[\\ \frac{1}{2}(t-3)^2 & \text{si } t \text{ appartient à } [2,3[. \end{cases}$$

$N_{0,2}$ est une fonction polynôme de degré deux par intervalles, continue, continument dérivable à l'ordre 1, mais non dérivable à l'ordre 2 en t_i .



• Soit le vecteur nœud $(0, 1, 2, 2, 3, 4)$, c'est-à-dire que l'on a : $t_0=0, t_1=1, t_2=2, t_3=2, t_4=3, t_5=4$, (activité A.2.).

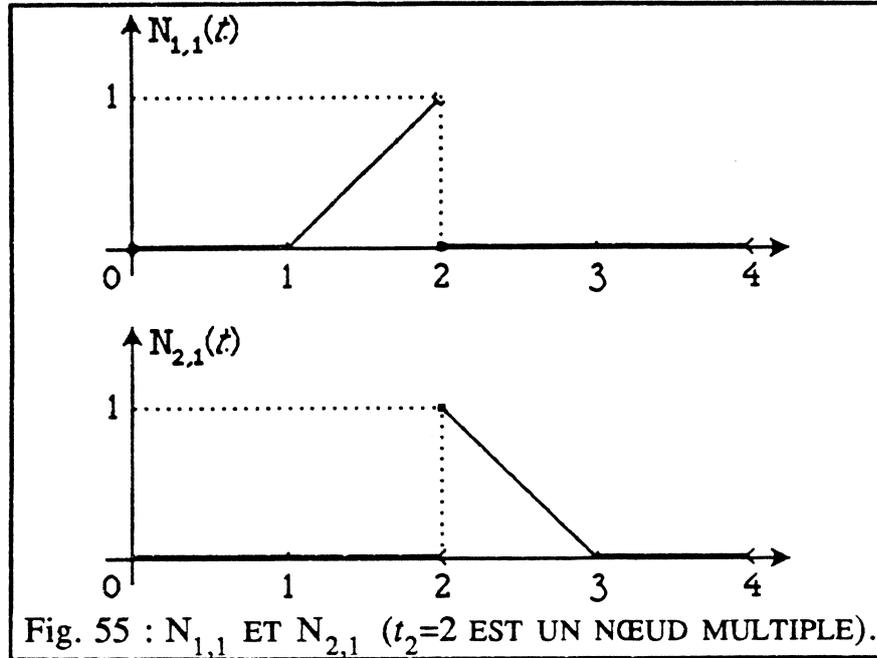
$t_2=2$ est un nœud multiple d'ordre 2.

La présence de ce nœud multiple a une influence sur les fonctions B-splines de degré 1, $N_{1,1}$ et $N_{2,1}$.

On obtient les fonctions suivantes:

$$N_{1,1}(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \text{ appartient à } [0,1[\\ t-1 & \text{si } t \text{ appartient à } [1,2[\\ 0 & \text{si } t \text{ appartient à } [2,4[\end{cases} \quad N_{2,1}(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \text{ appartient à } [0,2[\\ 3-t & \text{si } t \text{ appartient à } [2,3[\\ 0 & \text{si } t \text{ appartient à } [3,4[\end{cases}$$

Ce sont encore des fonctions affines par intervalles mais il apparaît une discontinuité en $t=2$, le nœud multiple d'ordre 2.

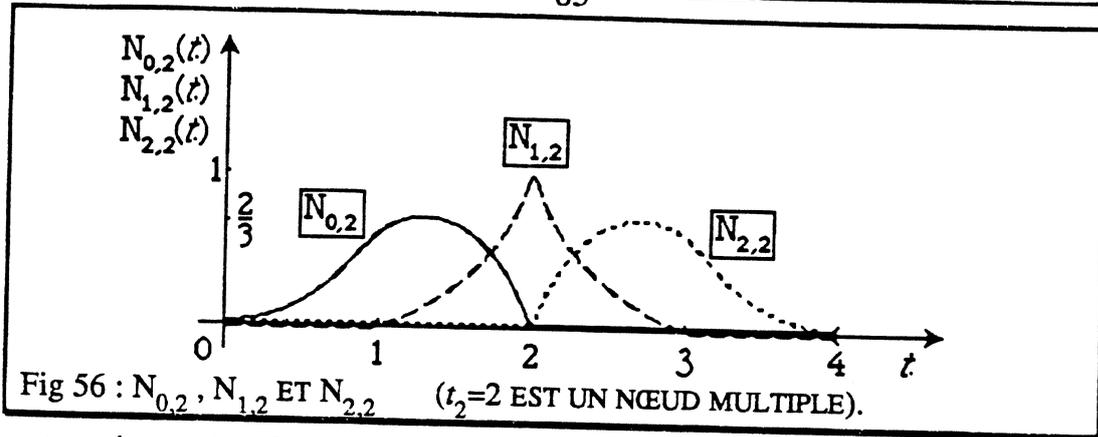


Avec le même vecteur nœud, les fonctions B-splines de degré 2, soient $N_{0,2}$, $N_{1,2}$ et $N_{2,2}$, sont définies par :

$$N_{0,2}(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}t^2 & \text{si } t \text{ appartient à } [0,1[\\ \frac{1}{2}(2-t)(3t-2) & \text{si } t \text{ appartient à } [1,2[\\ 0 & \text{si } t \text{ appartient à } [2,4[\end{cases}$$

$$N_{1,2}(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \text{ appartient à } [0,1[\\ (t-1)^2 & \text{si } t \text{ appartient à } [1,2[\\ (3-t)^2 & \text{si } t \text{ appartient à } [2,3[\\ 0 & \text{si } t \text{ appartient à } [3,4[\end{cases}$$

$$N_{2,2}(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \text{ appartient à } [0,2[\\ \frac{1}{2}(t-2)(10-3t) & \text{si } t \text{ appartient à } [2,3[\\ \frac{1}{2}(4-t)^2 & \text{si } t \text{ appartient à } [3,4[\end{cases}$$



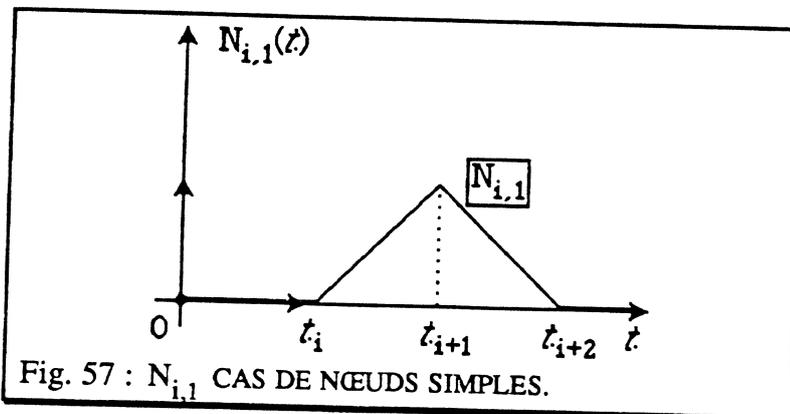
Ce sont toujours des fonctions polynômes de degré 2 par intervalles, elles sont continues mais non dérivables en $t_2=2$, nœud multiple d'ordre 2.

2.2.2. Expression générale des fonctions B-splines de degré 1 et 2:

Fonctions B-splines de degré 1 :

- Si les nœuds sont simples : $t_i < t_{i+1} < t_{i+2}$

$$N_{i,1}(t) = \begin{cases} \frac{t-t_i}{t_{i+1}-t_i} & \text{si } t \text{ appartient à } [t_i, t_{i+1}[\\ \frac{t_{i+2}-t}{t_{i+2}-t_{i+1}} & \text{si } t \text{ appartient à } [t_{i+1}, t_{i+2}[\\ 0 & \text{si } t \text{ n'appartient pas à } [t_i, t_{i+2}[. \end{cases}$$



Si t_i, t_{i+1}, t_{i+2} sont des entiers consécutifs ($t_{i+1}=t_i+1, t_{i+2}=t_i+2$), en posant $u=t-t_i$, on a :

$$N_{i,1}(u+t_i) = \begin{cases} u & \text{si } u \text{ appartient à } [0,1[\\ 2-u & \text{si } u \text{ appartient à } [1,2[\\ 0 & \text{si } u \text{ n'appartient pas à } [0,2[. \end{cases}$$

On retrouve la fonction $u \mapsto N_{0,1}(u)$ obtenue dans le paragraphe précédent. Toutes les fonctions $N_{i,1}$ se déduisent de $N_{0,1}$ par le changement de variable $t=u+t_i$.

Dans le cas de nœuds simples, les fonctions $N_{i,1}$ sont affines par intervalles, continues et nulles en dehors de l'intervalle $[t_i, t_{i+2}[$.

• Si t_i est un nœud multiple d'ordre 2 alors $t_{i-1} < t_i = t_{i+1} < t_{i+2}$.

$$N_{i-1,1}(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < t_{i-1} \\ \frac{t-t_{i-1}}{t_i-t_{i-1}} & \text{si } t \text{ appartient à } [t_{i-1}, t_i[\\ 0 & \text{si } t \geq t_i \end{cases}$$

$$N_{i,1}(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < t_{i+1} \\ \frac{t_{i+2}-t}{t_{i+2}-t_{i+1}} & \text{si } t \text{ appartient à } [t_{i+1}, t_{i+2}[\\ 0 & \text{si } t \geq t_{i+2} \end{cases}$$

Si t_{i-1}, t_i, t_{i+2} sont des entiers consécutifs on a :

$$N_{i-1,1}(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < t_{i-1} \\ t-t_i & \text{si } t \text{ appartient à } [t_{i-1}, t_i[\\ 0 & \text{si } t \geq t_i \end{cases}$$

$$N_{i,1}(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < t_{i+1} \\ t_{i+2}-t & \text{si } t \text{ appartient à } [t_{i+1}, t_{i+2}[\\ 0 & \text{si } t \geq t_{i+2} \end{cases}$$

Si t_i est un nœud multiple d'ordre 2, alors $N_{i-1,1}$ et $N_{i,1}$ sont des fonctions affines par intervalles, discontinues en t_i .

Si t_i est un nœud multiple d'ordre 2, alors $N_{i,1}$ est réduite à la fonction nulle.

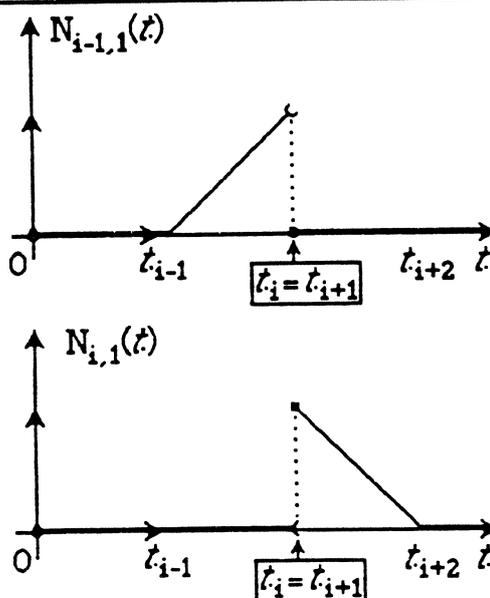


Fig. 58 : CAS D'UN NŒUD D'ORDRE 2.

Fonctions B-splines de degré 2:

• Dans le cas de nœuds simples, on a: $t_i < t_{i+1} < t_{i+2} < t_{i+3}$.

$$N_{i,2}(t) = \begin{cases} \frac{(t-t_i)^2}{(t_{i+1}-t_i)(t_{i+2}-t_i)} & \text{si } t \text{ appartient à } [t_i, t_{i+1}[\\ \frac{(t-t_i)(t_{i+2}-t)}{(t_{i+2}-t_i)(t_{i+2}-t_{i+1})} + \frac{(t_{i+3}-t)(t-t_{i+1})}{(t_{i+3}-t_{i+1})(t_{i+2}-t_{i+1})} & \text{si } t \text{ appartient à } [t_{i+1}, t_{i+2}[\\ \frac{(t_{i+3}-t)^2}{(t_{i+3}-t_{i+1})(t_{i+3}-t_{i+2})} & \text{si } t \text{ appartient à } [t_{i+2}, t_{i+3}[\\ 0 & \text{si } t \text{ n'appartient pas à } [t_i, t_{i+3}[\end{cases}$$

Si les nœuds $t_i, t_{i+1}, t_{i+2}, t_{i+3}$ sont des entiers consécutifs on a:

$$N_{i,2}(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}(t-t_i)^2 & \text{si } t \text{ appartient à } [t_i, t_{i+1}[\\ \frac{1}{2}[(t-t_i)(t_{i+2}-t) + (t_{i+3}-t)(t-t_{i+1})] & \text{si } t \text{ appartient à } [t_{i+1}, t_{i+2}[\\ \frac{1}{2}(t_{i+3}-t)^2 & \text{si } t \text{ appartient à } [t_{i+2}, t_{i+3}[\\ 0 & \text{si } t \text{ n'appartient pas à } [t_i, t_{i+3}[\end{cases}$$

Si l'on effectue le changement de variable $u = t - t_i$, on obtient:

$$N_{i,2}(u+t_i) = \begin{cases} \frac{1}{2}u^2 & \text{si } u \text{ appartient à } [0,1[\\ \frac{1}{2}[u(2-u) + (3-u)(u-1)] = \frac{1}{2}(-2u^2 + 6u - 3) & \text{si } u \text{ appartient à } [1,2[\\ \frac{1}{2}(3-u)^2 & \text{si } u \text{ appartient à } [2,3[\\ 0 & \text{si } u \text{ n'appartient pas à } [0,3[\end{cases}$$

$$N_{i,2}(u+t_i) = N_{0,2}(u).$$

Les fonctions $N_{i,2}$ se déduisent de $N_{0,2}$ par le changement de variable $t = u + t_i$.

Dans le cas de nœuds simples, les fonctions B-splines $N_{i,2}$ de degré 2 sont des fonctions polynômes de degré 2 par intervalles, continûment dérivables à l'ordre 1 et nulles en dehors de l'intervalle $[t_i, t_{i+3}[$.

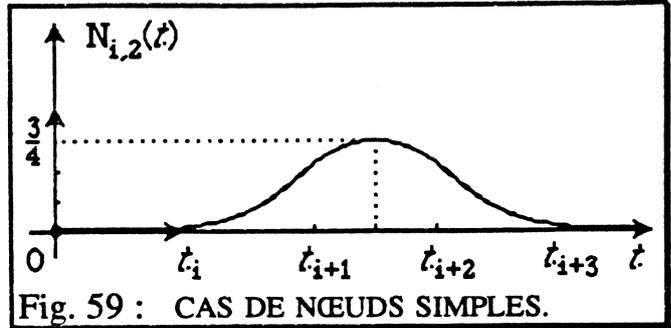


Fig. 59 : CAS DE NŒUDS SIMPLES.

• Si t_i est un nœud multiple d'ordre 2: $t_{i-2} < t_{i-1} < t_i = t_{i+1} < t_{i+2} < t_{i+3}$.

Si on suppose que $t_{i-2}, t_{i-1}, t_i, t_{i+2}, t_{i+3}$ sont des entiers consécutifs, les trois fonctions B-splines $N_{i-2,2}, N_{i-1,2}, N_{i,2}$ se déduisent respectivement des fonctions $N_{0,2}, N_{1,2}$ et $N_{2,2}$ trouvées dans le paragraphe 2.2.1. pour le vecteur nœud $(0,1,2,2,3,4)$ par le changement de variable $t = u + t_{i-2}$:

$$N_{i-2,2}(u+t_{i-2}) = N_{0,2}(u) ; N_{i-1,2}(u+t_{i-2}) = N_{1,2}(u) ; N_{i,2}(u+t_{i-2}) = N_{2,2}(u).$$

Ce sont des fonctions polynômes de degré 2 par intervalles, elles sont continues mais non dérivables pour $t = t_i$. On a donc les courbes représentatives suivantes (Fig. 60):

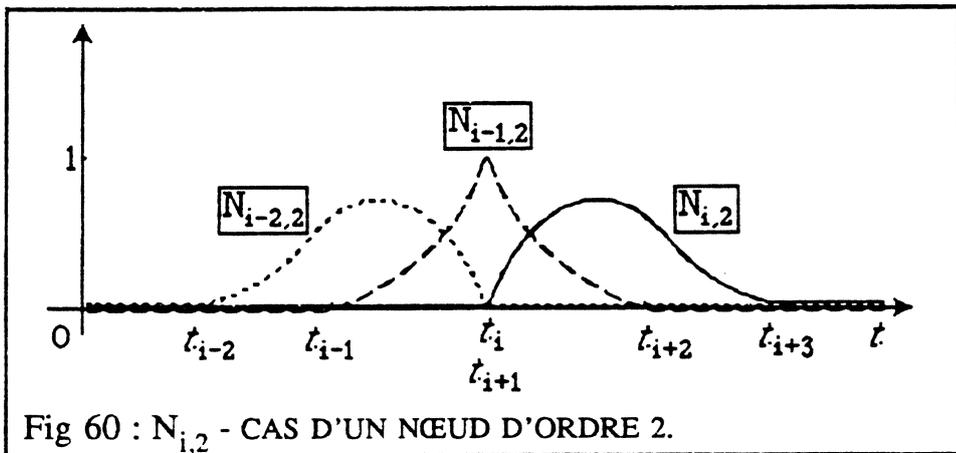


Fig 60 : $N_{i,2}$ - CAS D'UN NŒUD D'ORDRE 2.

• Si t_i est un nœud multiple d'ordre 3: $t_{i-1} < t_i = t_{i+1} = t_{i+2} < t_{i+3}$.

Si on suppose que t_{i-1}, t_i, t_{i+3} sont des entiers consécutifs, on a:

$$N_{i-1,2}(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < t_{i-1} \\ (t - t_{i-1})^2 & \text{si } t \text{ appartient à } [t_{i-1}, t_i[\\ 0 & \text{si } t \geq t_{i+2} \end{cases}$$

$$N_{i,2}(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < t_i \\ (t_{i+3} - t)^2 & \text{si } t \text{ appartient à } [t_{i+2}, t_{i+3}[\\ 0 & \text{si } t \geq t_{i+3} \end{cases}$$

Les courbes représentatives des fonctions $N_{i-1,2}$ et $N_{i,2}$ sont données à la figure 61.

En posant $u = t - t_{i-2}$ on retrouve les fonctions $N_{1,2}$ et $N_{2,2}$ obtenues à l'activité A. 3. Ce sont des fonctions polynômes de degré 2 par intervalles, discontinues au point multiple $t = t_i$.

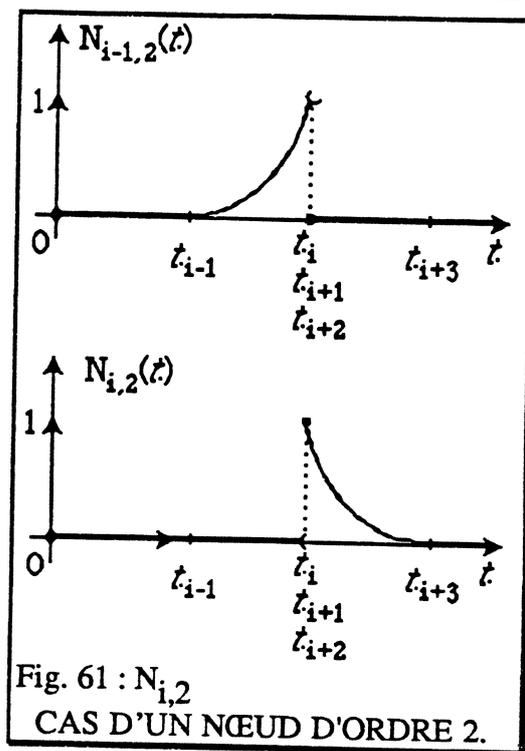


Fig. 61 : $N_{i,2}$
CAS D'UN NŒUD D'ORDRE 2.

- Si t_i est un nœud multiple d'ordre 4, la fonction $N_{i,2}$ est réduite à la fonction nulle.

2.3. Quelques propriétés des fonctions polynomiales B-splines:

- Une fonction B-spline de degré m , soit $N_{k,m}$, est une fonction polynôme de degré m par intervalles, nulle à l'extérieur de l'intervalle $[t_k, t_{k+m+1}[$.
- Si dans l'intervalle $[t_k, t_{k+m+1}[$ tous les nœuds sont simples, alors la fonction est continûment dérivable jusqu'à l'ordre $m-1$.
- La présence d'un nœud t_i d'ordre p dans l'intervalle $[t_k, t_{k+m+1}[$ (c'est-à-dire que parmi les nœuds $t_k, t_{k+1}, \dots, t_{k+m}$, p nœuds consécutifs sont confondus), entraîne une diminution de $p-1$ de l'ordre de différentiabilité de $N_{k,m}$ en $t=t_i$ ($N_{k,m}$ est $m-p$ fois continûment dérivable en t_i).

En particulier:

- Si $p=m$ alors $N_{k,m}$ est seulement continue en $t=t_i$ mais non dérivable.
- Si $p=m+1$ alors $N_{k,m}$ est discontinue en $t=t_i$.
- Si $p>m+1$ alors on a nécessairement $t_k = t_{k+1} = \dots = t_{k+m+1}$ et $N_{k,m}$ est réduite à la fonction nulle.

- Les fonctions B-splines sont positives. Ceci est évident pour les fonctions $N_{i,0}$ et a été vérifié pour $m=1$ et $m=2$ dans le paragraphe 2.2.

D'une manière générale, si l'on suppose que les fonctions $N_{k,m-1}$ sont positives, la relation de récurrence

$$N_{i,m}(t) = \frac{t-t_i}{t_{i+m}-t_i} N_{i,m-1}(t) + \frac{t_{i+m+1}-t}{t_{i+m+1}-t_{i+1}} N_{i+1,m-1}(t)$$

donne : si $t < t_i$ ou si $t \geq t_{i+m+1}$ alors $N_{i,m-1}(t) = N_{i+1,m-1}(t) = 0$ donc $N_{i,m}(t) = 0$.

Si t appartient à $[t_i, t_{i+m+1}[$ alors $\frac{t-t_i}{t_{i+m}-t_i} \geq 0$ et $\frac{t_{i+m+1}-t}{t_{i+m+1}-t_{i+1}} \geq 0$ donc $N_{i,m}(t) \geq 0$.

• La somme des fonctions B-splines vaut 1.

On considère pour simplifier le cas où $m=2$.

Sur l'intervalle $[t_i, t_{i+1}[$ seules les fonctions $N_{i-2,2}$, $N_{i-1,2}$, $N_{i,2}$ ne sont pas nulles, on a donc:

pour tout t de $[t_i, t_{i+1}[$, $\sum_{k=0}^n N_{k,2}(t) = N_{i-2,2}(t) + N_{i-1,2}(t) + N_{i,2}(t)$.

En utilisant la relation de récurrence (2) de la définition on a:

pour tout t de $[t_i, t_{i+1}[$,

$$\begin{aligned} N_{i-2,2}(t) + N_{i-1,2}(t) + N_{i,2}(t) = & \left(\frac{t-t_{i-2}}{t_i-t_{i-2}} N_{i-2,1}(t) + \frac{t_{i+1}-t}{t_{i+1}-t_{i-1}} N_{i-1,1}(t) \right) \\ & + \left(\frac{t-t_{i-1}}{t_{i+1}-t_{i-1}} N_{i-1,1}(t) + \frac{t_{i+2}-t}{t_{i+2}-t_i} N_{i,1}(t) \right) \\ & + \left(\frac{t-t_i}{t_{i+2}-t_i} N_{i,1}(t) + \frac{t_{i+3}-t}{t_{i+3}-t_{i+1}} N_{i+1,1}(t) \right) \end{aligned}$$

Sur l'intervalle $[t_i, t_{i+1}[$ les fonctions $N_{i-2,1}$ et $N_{i+1,1}$ sont nulles, on obtient :

pour tout t de $[t_i, t_{i+1}[$, $N_{i-2,2}(t) + N_{i-1,2}(t) + N_{i,2}(t) = N_{i-1,1}(t) + N_{i,1}(t)$.

On applique à nouveau la relation (2) :

$$\begin{aligned} \text{pour tout } t \text{ de } [t_i, t_{i+1}[, \quad N_{i-1,1}(t) + N_{i,1}(t) = & \left(\frac{t-t_{i-1}}{t_i-t_{i-1}} N_{i-1,0}(t) + \frac{t_{i+1}-t}{t_{i+1}-t_i} N_{i,0}(t) \right) \\ & + \left(\frac{t-t_i}{t_{i+1}-t_i} N_{i,0}(t) + \frac{t_{i+2}-t}{t_{i+2}-t_{i+1}} N_{i+1,0}(t) \right) \end{aligned}$$

Sur l'intervalle $[t_i, t_{i+1}[$ les fonctions $N_{i-1,0}$ et $N_{i+1,0}$ sont nulles, d'où:

pour tout t de $[t_i, t_{i+1}[$,

$$\sum_{k=0}^n N_{k,2}(t) = N_{i-2,2}(t) + N_{i-1,2}(t) + N_{i,2}(t) = N_{i-1,1}(t) + N_{i,1}(t) = N_{i,0}(t) = 1.$$

D'une manière générale on démontre que pour tout t de $[t_i, t_{i+1}[$,

$$\sum_{k=0}^n N_{k,m}(t) = \sum_{k=i-m}^i N_{k,m}(t) = \sum_{k=i-m+1}^i N_{k,m-1}(t) = \dots = N_{i,0}(t) = 1.$$

3. APPROXIMATION D'UN ENSEMBLE DE POINTS PAR UNE COURBE B-SPLINE:

Une courbe B-spline contrôlée par la suite de points P_0, P_1, \dots, P_n a pour définition paramétrique :

$$\vec{OM}(t) = \sum_{k=0}^n N_{k,m}(t) \vec{OP}_k.$$

Comme pour les courbes de Bézier, cette définition ne dépend pas du point O choisi pour origine du repère, en effet:

$$\vec{OM}(t) = \vec{OO'} + \vec{O'M}(t)$$

$$= \sum_{k=0}^n N_{k,m}(t) (\vec{OO'} + \vec{O'P}_k)$$

$$= \left(\sum_{k=0}^n N_{k,m}(t) \right) \vec{OO'} + \sum_{k=0}^n N_{k,m}(t) \vec{O'P}_k$$

$$= \vec{OO'} + \sum_{k=0}^n N_{k,m}(t) \vec{O'P}_k$$

car $\sum_{k=0}^n N_{k,m}(t) = 1$, d'où $\vec{O'M}(t) = \sum_{k=0}^n N_{k,m}(t) \vec{O'P}_k$

3.1. Lien avec les polynômes de Riesenfeld:

On étudie le cas où $m=2$ avec des nœuds simples régulièrement espacés, $t_{i-2} < t_{i-1} < t_i < t_{i+1} < t_{i+2} < t_{i+3}$, ces nœuds étant des entiers naturels consécutifs. Sur $[t_i, t_{i+1}[$ seules les fonctions $N_{i-2,2}$, $N_{i-1,2}$, $N_{i,2}$ prennent des valeurs non nulles (Fig. 62), et on a vu au paragraphe 2.2.2. que pour tout t de $[t_i, t_{i+1}[$:

$$N_{i-2,2}(t) = \frac{1}{2} (t_{i+1} - t)^2$$

$$N_{i-1,2}(t) = \frac{1}{2} [(t - t_{i-1})(t_{i+1} - t) + (t_{i+2} - t)(t - t_i)]$$

$$N_{i,2}(t) = \frac{1}{2} (t - t_i)^2.$$

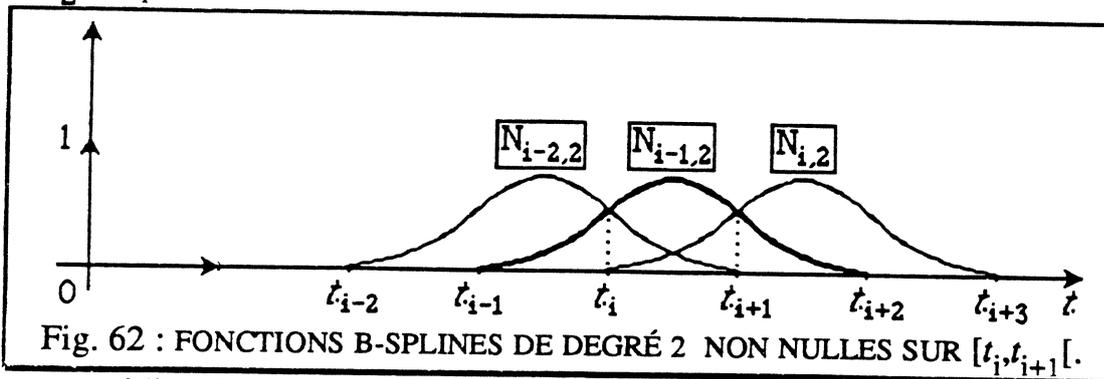


Fig. 62 : FONCTIONS B-SPLINES DE DEGRÉ 2 NON NULLES SUR $[t_i, t_{i+1}[$.

Si l'on considère la courbe B-spline contrôlée par les points P_0, P_1, \dots, P_n , pour

t appartenant à $[t_i, t_{i+1}[$ on a : $\vec{OM}(t) = N_{i-2,2}(t) \vec{OP}_{i-2} + N_{i-1,2}(t) \vec{OP}_{i-1} + N_{i,2}(t) \vec{OP}_i$.

On pose $t = u + t_i$, u appartenant à $[0, 1[$. Les nœuds étant des entiers consécutifs,

on a $t_{i-1} = t_i - 1$, $t_{i+1} = t_i + 1$, $t_{i+2} = t_i + 2$, d'où : $N_{i-2,2}(u + t_i) = \frac{1}{2} (1 - u)^2$.

On reconnaît le polynôme de Riesenfeld $R_{0,2}(u)$. De même :

$$N_{i-1,2}(u+t_i) = \frac{1}{2} [(u+1)(1-u) + (2-u)u] = \frac{1}{2} (-2u^2 + 2u + 1) = R_{1,2}(u)$$

$$N_{i,2}(u+t_i) = \frac{1}{2} u^2 = R_{2,2}(u),$$

donc pour u appartenant à $[0,1[$ le point de la courbe B-spline peut être défini par :

$$\vec{OM}(u) = R_{0,2}(u)\vec{OP}_{i-2} + R_{1,2}(u)\vec{OP}_{i-1} + R_{2,2}(u)\vec{OP}_i.$$

On retrouve bien le modèle de Riesenfeld développé précédemment.

3.2. Choix du vecteur nœud:

La forme de la courbe B-spline dépend évidemment de la position des points de contrôle P_0, P_1, \dots, P_n mais aussi du choix du vecteur nœud.

On choisit souvent un vecteur nœud tel que l'ordre de multiplicité des nœuds extrêmes soit égal à $m+1$ (m étant le degré de la courbe), car ceci assure à la courbe B-spline une propriété identique à celle des courbes de Bézier:

elle passe par les premier et dernier points de contrôle P_0 et P_n , et en ces points, elle est tangente respectivement à (P_0P_1) et $(P_{n-1}P_n)$.

Cependant on peut aussi ne pas faire passer la courbe par ces points P_0 et P_n , ce qui est le cas du modèle introductif (Riesenfeld).

On étudie tout d'abord un exemple dont le détail est donné dans l'activité B.1.

On se place dans le cas particulier où $m=2$ (courbe B-spline de degré 2) et $n=4$ (cinq points de contrôle P_0, P_1, \dots, P_4). On a donc cinq fonctions B-splines

$$N_{0,2}, N_{1,2}, \dots, N_{4,2}.$$

$$N_{0,2} \text{ a pour support } [t_0, t_3[,$$

$$N_{1,2} \text{ a pour support } [t_1, t_4[,$$

...

$$N_{4,2} \text{ a pour support } [t_4, t_7[.$$

Il faut donc définir un vecteur nœud $(t_0, t_1, \dots, t_6, t_7)$. Si l'on impose que les valeurs extrêmes aient des ordres de multiplicité égaux à $m+1=3$, on obtient le vecteur nœud :

$$(0, 0, 0, 1, 2, 3, 3, 3).$$

Les représentations graphiques des fonctions B-splines $N_{0,2}, N_{1,2}, N_{2,2}, N_{3,2}, N_{4,2}$ sont alors réalisées ci-contre.

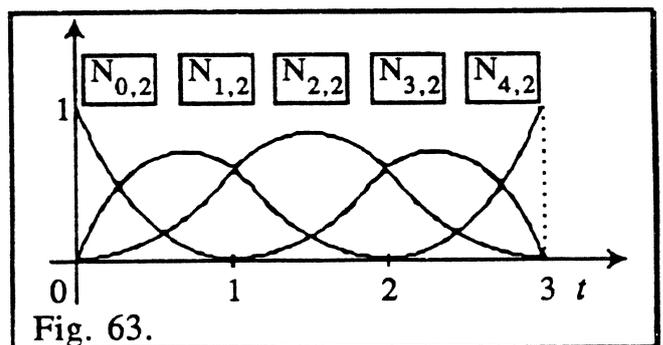


Fig. 63.

Un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ étant donné, on choisit cinq points $P_0 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $P_1 \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$, $P_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$,

$$P_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}, P_4 \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

La courbe B-spline obtenue est la suivante (voir activité B.1.) :

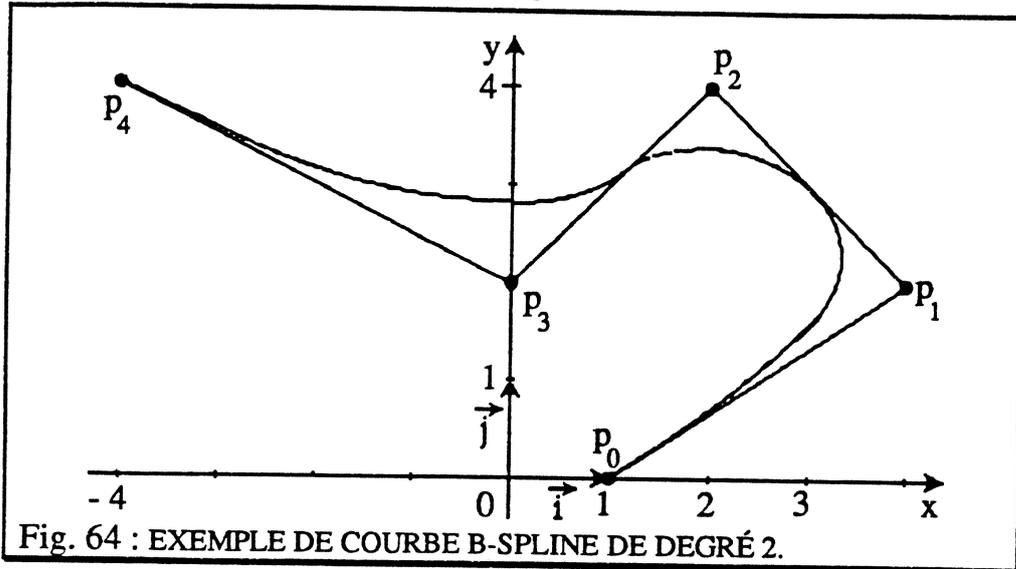


Fig. 64 : EXEMPLE DE COURBE B-SPLINE DE DEGRÉ 2.

• *Remarque (P.B.) :*

“ Les points extrêmes de définition sont sur la courbe parce que la somme des fonctions splines est égale à 1 (condition signalée par CAUCHY), mais cette propriété a pour corollaire la nullité de la courbure, ce qui n'est pas toujours désirable pour la forme voulue ”.

Étude du cas général :

On a $n+1$ points de contrôle P_0, P_1, \dots, P_n . On veut tracer une courbe B-spline de degré m ($m \leq n$) passant par P_0 et P_n , tangente respectivement à (P_0P_1) et à $(P_{n-1}P_n)$ en ces points. Les nœuds extrêmes ont alors un ordre de multiplicité égal à $m+1$. La courbe est définie par :

$$\vec{OM}(t) = \sum_{i=0}^n N_{i,m}(t) \vec{OP}_i.$$

On a donc $n+1$ fonctions B-splines $N_{0,m}, N_{1,m}, \dots, N_{n,m}$.

$N_{0,m}, N_{1,m}, \dots, N_{n,m}$ ont pour supports respectifs :

$[t_0, t_{m+1}[$, $[t_1, t_{m+2}[$, \dots , $[t_n, t_{m+n+1}[$.

Il faut donc définir un vecteur nœud $(t_0, t_1, \dots, t_{m+n+1})$ comprenant $m+n+2$ nœuds. Les $m+1$ premiers t_0, t_1, \dots, t_m ainsi que les $m+1$ derniers $t_{n+1}, t_{n+2}, \dots, t_{n+m+1}$ sont confondus, les autres étant des nœuds simples (sauf cas particulier).

On peut choisir le vecteur nœud suivant:

$$\left\{ \begin{array}{l} t_0 = t_1 = \dots = t_m = 0 \\ t_{m+1} = 1 \\ t_{m+2} = 2 \\ \dots \\ t_n = n - m \\ t_{n+1} = t_{n+2} = \dots = t_{n+m+1} = n - m + 1. \end{array} \right.$$

Par exemple pour une courbe B-spline de degré 3, contrôlée par six points ($n=5$), on peut choisir le vecteur nœud: (0, 0, 0, 1, 2, 3, 3, 3, 3).

Algorithme permettant de générer un vecteur nœud de ce type:

Les données sont les entiers naturels n et m ($n+1$ étant le nombre de points de contrôle et m le degré de la courbe).

Ils vérifient nécessairement la condition $m \leq n$.

Le résultat est le vecteur nœud, stocké dans un tableau t d'entiers.

Procédure NŒUD (m, n, t)

m, n données (entiers)

t résultat (tableau d'entiers)

variable locale i : entier

début

$i \leftarrow 0$

Tant que $i \leq m$ faire

début

$t[i] \leftarrow 0$

$i \leftarrow i+1$

fin

Tant que $i \leq n$ faire

début

$t[i] \leftarrow i-m$

$i \leftarrow i+1$

fin

Tant que $i \leq n+m+1$ faire

début

$t[i] \leftarrow n-m+1$

$i \leftarrow i+1$

fin

fin

On peut écrire d'autres procédures générant d'autres types de vecteurs nœuds suivant la forme que l'on veut donner à la courbe.

Remarque:

Le type de vecteur nœud généré par l'algorithme précédent est appelé vecteur nœud *non périodique, uniforme*.

Étude du cas particulier où $m=n$:

Dans le cas où $m=n$ cet algorithme donne un vecteur nœud dégénéré de la forme $(t_0, \dots, t_n, t_{n+1}, \dots, t_{2n+1}) = (0, \dots, 0, 1, \dots, 1)$.

On étudie sur un exemple simple ($m=2$) la nature des fonctions B-splines associées à ce type de vecteur nœud.

On a $m=n=2$, d'où le vecteur nœud $(t_0, t_1, t_2, t_3, t_4, t_5) = (0, 0, 0, 1, 1, 1)$.

Pour tout nombre réel t de $[0,1[$, on a :

$$N_{0,2}(t) = \frac{t-t_0}{t_2-t_0} N_{0,1}(t) + \frac{t_3-t}{t_3-t_1} N_{1,1}(t) = (1-t)N_{1,1}(t) = (1-t)^2 \quad (\text{car } \frac{t-t_0}{t_2-t_0} N_{0,1}(t) = 0)$$

$$N_{1,2}(t) = \frac{t-t_1}{t_3-t_1} N_{1,1}(t) + \frac{t_4-t}{t_4-t_2} N_{2,1}(t) = t N_{1,1}(t) + (1-t)N_{2,1}(t) = 2t(1-t)$$

$$N_{2,2}(t) = \frac{t-t_2}{t_4-t_2} N_{2,1}(t) + \frac{t_5-t}{t_5-t_3} N_{3,1}(t) = t N_{2,1}(t) = t^2 \quad (\text{car } \frac{t_5-t}{t_5-t_3} N_{3,1}(t) = 0).$$

On retrouve les polynômes de Bernstein de degré 2 :

$$B_{0,2}(t) = (1-t)^2, \quad B_{1,2}(t) = 2t(1-t) \quad \text{et} \quad B_{2,2}(t) = t^2.$$

Si l'on se donne trois points de contrôle P_0, P_1, P_2 la courbe B-spline de degré 2 contrôlée par ces points est définie par :

$$\overrightarrow{OM}(t) = (1-t)^2 \overrightarrow{OP_0} + 2t(1-t) \overrightarrow{OP_1} + t^2 \overrightarrow{OP_2} \quad t \text{ décrivant l'intervalle } [0,1[,$$

c'est donc la courbe de Bézier associée aux points P_0, P_1, P_2 .

D'une manière générale, les fonctions B-splines de degré n associées au vecteur nœud $(t_0, \dots, t_n, t_{n+1}, \dots, t_{2n+1}) = (0, \dots, 0, 1, \dots, 1)$ sont égales aux polynômes de Bernstein de degré n .

Donc la courbe B-spline de degré n contrôlée par $n+1$ points P_0, \dots, P_n est identique à la courbe de Bézier associée à ces mêmes points.

4. ALGORITHME ASSOCIÉ A LA DÉFINITION RÉCURSIVE DES FONCTIONS B-SPLINES

(ALGORITHME de COX et DE BOOR)

4.0. Rappel de la définition récursive des fonctions B-splines:

Les fonctions B-splines sont définies par :

La donnée des fonctions $N_{i,0}$:

$$(1) \quad N_{i,0}(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \text{ appartient à } [t_i, t_{i+1}[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (\text{initialisation})$$

La relation de récurrence :

$$(2) \quad N_{i,m}(t) = \frac{t-t_i}{t_{i+m}-t_i} N_{i,m-1}(t) + \frac{t_{i+m+1}-t}{t_{i+m+1}-t_{i+1}} N_{i+1,m-1}(t).$$

$$\text{Si l'on pose } \alpha_{i,m}(t) = \frac{t-t_i}{t_{i+m}-t_i} \text{ alors } \frac{t_{i+m+1}-t}{t_{i+m+1}-t_{i+1}} = 1 - \frac{t-t_{i+1}}{t_{i+m+1}-t_{i+1}} = 1 - \alpha_{i+1,m}(t).$$

La relation (2) peut donc alors s'écrire :

$$N_{i,m}(t) = \alpha_{i,m}(t) N_{i,m-1}(t) + (1 - \alpha_{i+1,m}(t)) N_{i+1,m-1}(t).$$

4.1. Étude d'un exemple simple (m=2) :

Le but est de mettre en place un algorithme qui, pour t donné, détermine le point $M(t)$ de la courbe B-spline.

Le point $M(t)$ est défini par $\overrightarrow{OM}(t) = \sum_{i=0}^n N_{i,2}(t) \overrightarrow{OP}_i$, relation que l'on

notera plus simplement: $M(t) = \sum_{i=0}^n N_{i,2}(t) P_i$.

t étant donné, il existe un entier i unique tel que t appartienne à $[t_i, t_{i+1}[$ (t_i et t_{i+1} sont nécessairement distincts).

L'entier i appartient à l'intervalle $[2, n]$.

Sur l'intervalle $[t_i, t_{i+1}[$ seules les fonctions $N_{i-2,2}$, $N_{i-1,2}$ et $N_{i,2}$ ne sont pas nulles, donc : $M(t) = N_{i-2,2}(t) P_{i-2} + N_{i-1,2}(t) P_{i-1} + N_{i,2}(t) P_i$.

En utilisant la relation (2) on a :

$$\begin{aligned} M(t) = & [\alpha_{i-2,2}(t)N_{i-2,1}(t) + (1 - \alpha_{i-1,2}(t))N_{i-1,1}(t)] P_{i-2} \\ & + [\alpha_{i-1,2}(t)N_{i-1,1}(t) + (1 - \alpha_{i,2}(t))N_{i,1}(t)] P_{i-1} \\ & + [\alpha_{i,2}(t)N_{i,1}(t) + (1 - \alpha_{i+1,2}(t))N_{i+1,1}(t)] P_i. \end{aligned}$$

Sur l'intervalle $[t_i, t_{i+1}[$ les fonctions $N_{i-2,1}$ et $N_{i+1,1}$ sont nulles, donc :

$$\begin{aligned} M(t) = & N_{i-1,1}(t) [\alpha_{i-1,2}(t)P_{i-1} + (1 - \alpha_{i-1,2}(t))P_{i-2}] \\ & + N_{i,1}(t) [\alpha_{i,2}(t)P_i + (1 - \alpha_{i,2}(t))P_{i-1}] \end{aligned}$$

On pose: $P_{i-1}^{(1)} = \alpha_{i-1,2}(t)P_{i-1} + (1 - \alpha_{i-1,2}(t))P_{i-2}$.

$P_{i-1}^{(1)}$ est le barycentre des points P_{i-1} et P_{i-2} affectés respectivement des coefficients $\alpha_{i-1,2}(t)$ et $(1 - \alpha_{i-1,2}(t))$.

On pose de même: $P_i^{(1)} = \alpha_{i,2}(t)P_i + (1 - \alpha_{i,2}(t))P_{i-1}$.

$P_i^{(1)}$ est le barycentre des points P_i et P_{i-1} affectés respectivement des coefficients $\alpha_{i,2}(t)$ et $(1 - \alpha_{i,2}(t))$.

Pour tout t de $[t_i, t_{i+1}[$, $0 \leq \alpha_{i-1,2}(t) \leq 1$ donc $P_{i-1}^{(1)}$ appartient à $[P_{i-2} P_{i-1}[$,

$0 \leq \alpha_{i,2}(t) \leq 1$ donc $P_i^{(1)}$ appartient à $[P_{i-1} P_i[$.

$M(t)$ peut être défini à partir des deux nouveaux points $P_{i-1}^{(1)}$ et $P_i^{(1)}$:

$$M(t) = N_{i-1,1}(t)P_{i-1}^{(1)} + N_{i,1}(t)P_i^{(1)}.$$

On itère le procédé précédent:

$$M(t) = [\alpha_{i-1,1}(t)N_{i-1,0}(t) + (1-\alpha_{i-1,1}(t))N_{i,0}(t)] P_{i-1}^{(1)} + [\alpha_{i,1}(t)N_{i,0}(t) + (1-\alpha_{i+1,1}(t))N_{i+1,0}(t)] P_i^{(1)}$$

sur $[t_i, t_{i+1}[$ on a :

$$N_{i-1,0}(t) = N_{i+1,0}(t) = 0 \text{ et } N_{i,0}(t) = 1$$

d'où :

$$M(t) = \alpha_{i,1}(t)P_i^{(1)} + (1-\alpha_{i,1}(t))P_{i-1}^{(1)}.$$

On pose $P_i^{(2)} = \alpha_{i,1}(t)P_i^{(1)} + (1-\alpha_{i,1}(t))P_{i-1}^{(1)}$.

$P_i^{(2)}$ est le barycentre des points $P_i^{(1)}$ et $P_{i-1}^{(1)}$ affectés respectivement des coefficients $\alpha_{i,1}(t)$ et $(1-\alpha_{i,1}(t))$.

Comme précédemment, si t appartient à $[t_i, t_{i+1}[$, alors $0 \leq \alpha_{i,1}(t) \leq 1$ donc $P_i^{(2)}$ appartient à $[P_{i-1}^{(1)} P_i^{(1)}[$. Le point $M(t)$ cherché est le point $P_i^{(2)}$.

Si l'on note $P_{i-2}^{(0)}$, $P_{i-1}^{(0)}$ et $P_i^{(0)}$ les points initiaux P_{i-2} , P_{i-1} et P_i on a le graphe (Fig. 65) :

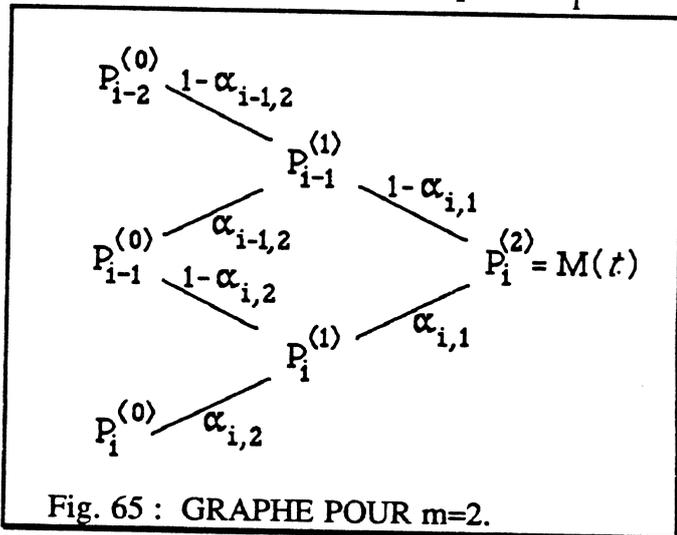


Fig. 65 : GRAPHE POUR $m=2$.

Ce qui donne la construction

(Fig. 66).

Note:

L'orientation de cet algorithmique est la même que celle de l'algorithmique de type barycentrique déjà présenté dans le modèle de BÉZIER.

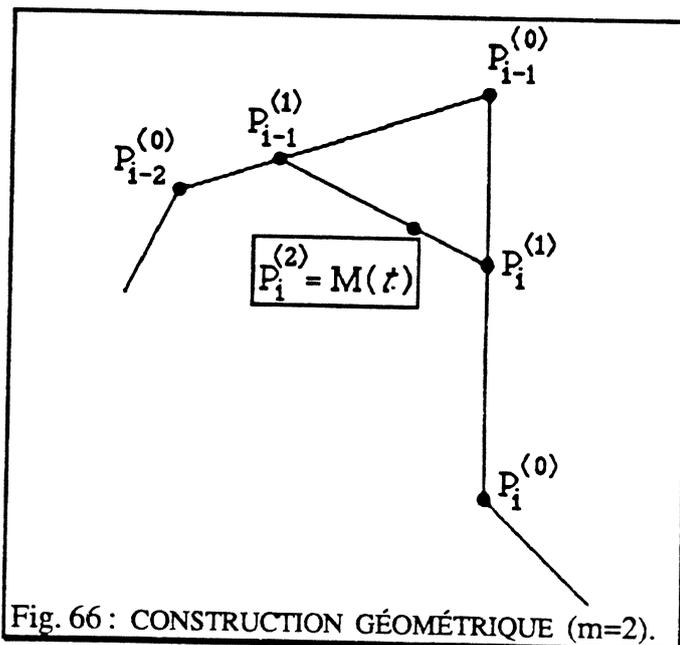


Fig. 66 : CONSTRUCTION GÉOMÉTRIQUE ($m=2$).

4.2. Algorithme général de construction d'un point de la courbe B-spline:

t étant donné, on détermine comme précédemment l'indice i tel que t appartienne à $[t_i, t_{i+1}[$. Les fonctions B-splines qui ne sont pas nulles sur cet intervalle sont : $N_{i-m,m}, N_{i-m+1,m}, \dots, N_{i-1,m}, N_{i,m}$.

Remarque:

i doit appartenir à l'intervalle $[m,n]$, donc pour tout t de $[t_i, t_{i+1}[$ on a :

$$M(t) = \sum_{k=i-m}^i N_{k,m}(t) P_k.$$

L'arc de courbe correspondant à l'intervalle $[t_i, t_{i+1}[$ est donc contrôlé par les points P_{i-m}, \dots, P_i seulement.

Ces points initiaux P_{i-m}, \dots, P_i sont notés $P_{i-m}^{(0)}, \dots, P_i^{(0)}$.

À la première itération ces $m+1$ points sont remplacés par les m points $P_{i-m+1}^{(1)}, \dots, P_i^{(1)}$ définis par :

$$\begin{aligned} P_{i-m+1}^{(1)} &= \alpha_{i-m+1,m} P_{i-m+1}^{(0)} + (1-\alpha_{i-m+1,m}) P_{i-m}^{(0)} \\ P_{i-m+2}^{(1)} &= \alpha_{i-m+2,m} P_{i-m+2}^{(0)} + (1-\alpha_{i-m+2,m}) P_{i-m+1}^{(0)} \\ &\dots \\ P_i^{(1)} &= \alpha_{i,m} P_i^{(0)} + (1-\alpha_{i,m}) P_{i-1}^{(0)}. \end{aligned}$$

Les points $P_j^{(1)}$ se substituant aux points $P_j^{(0)}$, les calculs doivent être effectués dans l'ordre inverse, c'est-à-dire :

À l'itération $k=1$ on calcule les points $P_j^{(1)}$ pour j variant de i à $i-m+1$ avec la relation :

$$P_j^{(1)} = \alpha_{j,m} P_j^{(0)} + (1-\alpha_{j,m}) P_{j-1}^{(0)}.$$

De même à l'itération $k=2$ on calcule les points $P_j^{(2)}$ pour j variant de i à $i-m+2$ avec la relation :

$$P_j^{(2)} = \alpha_{j,m-1} P_j^{(1)} + (1-\alpha_{j,m-1}) P_{j-1}^{(1)}.$$

À la $k^{\text{ième}}$ itération on calcule les points $P_j^{(k)}$ pour j variant de i à $i-m+k$ avec la relation :

$$P_j^{(k)} = \alpha_{j,m-k+1} P_j^{(k-1)} + (1-\alpha_{j,m-k+1}) P_{j-1}^{(k-1)}.$$

Jusqu'à $k=m$, où l'on détermine le point $P_j^{(m)}$ pour $j=i$,

$$P_i^{(m)} = \alpha_{i,1} P_i^{(m-1)} + (1-\alpha_{i,1}) P_{i-1}^{(m-1)}.$$

$P_j^{(m)}$ est le point de paramètre t , soit $M(t)$, de la courbe B-spline.

La valeur de t étant donnée et la valeur de i étant supposée trouvée (telle que t appartienne à $[t_i, t_{i+1}[$), l'algorithme est de la forme :

Pour $k=1$ à m faire

début

Pour $j=1$ à $i-m+k$ par pas -1 faire

début

$$\alpha \leftarrow (t-t_j)/(t_{j+m-k+1}-t_j)$$

$$P_j \leftarrow \alpha P_j + (1-\alpha)P_{j-1}$$

fin

fin

$$M \leftarrow P_i$$

Pour une valeur de t donnée, si l'on veut déterminer l'entier i tel que t appartienne à $[t_i, t_{i+1}[$, l'algorithme est le suivant:

$$i \leftarrow 0$$

Tant que $t \geq t_{i+1}$ faire $i \leftarrow i+1$

(t est supposé appartenir à l'intervalle $[t_m, t_{m+1}[$).

On fait tourner l'algorithme sur un exemple simple ($m=2$). On suppose que le vecteur nœud est tel que t_0 est un nœud multiple d'ordre 3 :

$(t_0, t_1, t_2, t_3, t_4, \dots) = (0, 0, 0, 1, 2, \dots)$. On suppose que t appartient à $[0, 1[$.

D'après l'étude faite dans les paragraphes 2 et 3 on sait que :

$$M(t) = N_{0,2}(t) P_0 + N_{1,2}(t) P_1 + N_{2,2}(t) P_2$$

avec : $N_{0,2}(t) = (1-t)^2$, $N_{1,2}(t) = \frac{1}{2}t(4-3t)$, $N_{2,2}(t) = \frac{1}{2}t^2$.

Si l'on fait tourner l'algorithme précédent, pour t appartenant à l'intervalle $[0, 1[$, l'entier i tel que t appartienne à $[t_i, t_{i+1}[$ est $i=2$.

$$P_2^{(1)} = \alpha_{2,2} P_2^{(0)} + (1-\alpha_{2,2}) P_1^{(0)} \quad \text{et} \quad \alpha_{2,2}(t) = \frac{t-t_2}{t_4-t_1} = \frac{t}{2},$$

$$\text{d'où} \quad P_2^{(1)} = \frac{t}{2} P_2^{(0)} + \left(1 - \frac{t}{2}\right) P_1^{(0)}.$$

$$P_1^{(1)} = \alpha_{1,2} P_1^{(0)} + (1-\alpha_{1,2}) P_0^{(0)} \quad \text{et} \quad \alpha_{1,2}(t) = \frac{t-t_1}{t_3-t_1} = t,$$

$$\text{d'où} \quad P_1^{(1)} = t P_1^{(0)} + (1-t) P_0^{(0)}.$$

$$P_2^{(2)} = \alpha_{2,1} P_2^{(1)} + (1-\alpha_{2,1}) P_1^{(1)} \quad \text{et} \quad \alpha_{2,1}(t) = \frac{t-t_2}{t_3-t_2} = t,$$

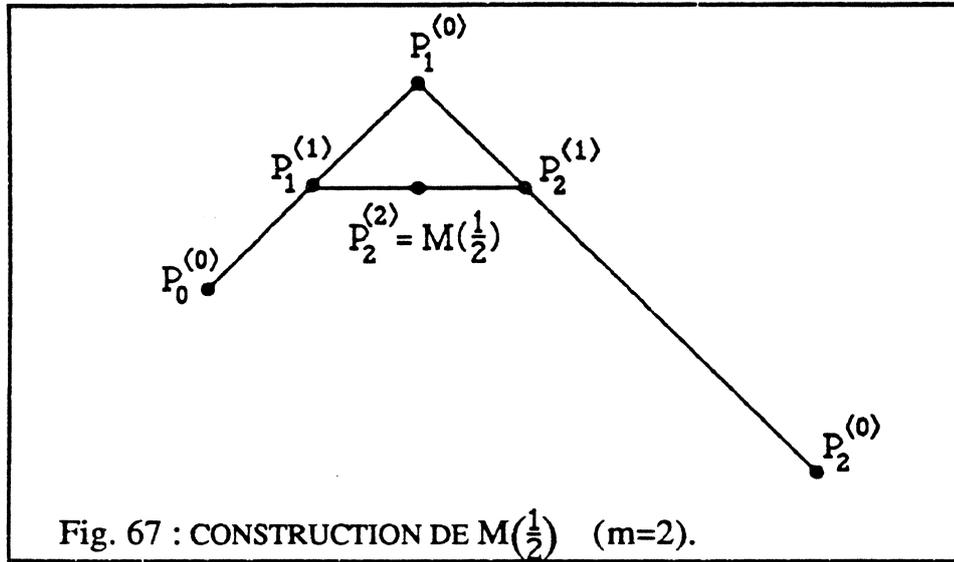
$$\text{d'où} \quad P_2^{(2)} = t P_2^{(1)} + (1-t) P_1^{(1)}.$$

$$P_2^{(2)} = t \left[\frac{t}{2} P_2^{(0)} + \left(1 - \frac{t}{2}\right) P_1^{(0)} \right] + (1-t) \left[t P_1^{(0)} + (1-t) P_0^{(0)} \right]$$

$$= (1-t)^2 P_0 + \frac{1}{2} t(4-3t) P_1 + \frac{1}{2} t^2 P_2.$$

On retrouve bien le point $M(t)$.

Construction du point $P_2^{(2)} = M(t)$ pour $t = \frac{1}{2}$ (Fig. 67).



Remarque:

Une question peut se poser pour l'algorithme précédent:

le calcul de $\alpha = \frac{t-t_j}{t_{j+m-k+1}-t_j}$ est-il toujours possible ?

En effet, on peut penser que le dénominateur risque d'être nul dans le cas d'un nœud multiple. On a constaté dans l'exemple précédent que la présence d'un nœud multiple (t_0 d'ordre 3) ne semblait pas poser de problème.

On démontre en fait que le choix de l'entier i tel que t appartienne à $[t_i, t_{i+1}[$, implique que le dénominateur ne s'annule pas au cours de l'algorithme.

Supposons que t_ℓ soit un nœud multiple d'ordre p . On a :

$$t_{\ell-1} < t_\ell = t_{\ell+1} = \dots = t_{\ell+p-1} < t_{\ell+p} \text{ avec } p \leq m+1 \text{ et } m \leq n.$$

Lorsque le paramètre t passe d'une valeur appartenant à $[t_{\ell-1}, t_\ell [$ à une valeur appartenant à $[t_\ell, t_{\ell+p}[$, la valeur de i passe de $\ell-1$ à $\ell-p+1$, de sorte que la condition $t_i \leq t < t_{i+1}$ est toujours vérifiée.

Ainsi lorsqu'on calcule $\alpha = \frac{t-t_j}{t_{j+m-k+1}-t_j}$, pour j entier variant de i à $i-m+k$

et k entier variant de 1 à m , on a $j+m-k+1 \geq i+1 > i \geq j$,

donc $t_{j+m-k+1} \geq t_{i+1} > t_i \geq t_j$ d'où $t_{j+m-k+1} \neq t_j$.

4.3. Algorithme général pour le tracé d'une courbe B-spline:

Les données de l'algorithme sont:

$\left\{ \begin{array}{l} n+1 \text{ points de contrôle } P_0, P_1, \dots, P_n \text{ donnés par leurs coordonnées} \\ \quad \left\{ \begin{array}{l} X0[i] \text{ } i \text{ variant de } 0 \text{ à } n \\ Y0[i] \end{array} \right. \\ m \text{ le degré de la courbe} \\ h \text{ le pas du tracé} \\ u_{\min} \text{ et } u_{\max} \text{ les bornes de l'intervalle pour le paramètre } u. \end{array} \right.$

- Phase d'initialisation

Construction du vecteur nœud t ($t[0] \ t[1] \ \dots \ t[n+m+1]$)
 Initialisation du paramètre u à u_{\min}
 Calcul de l'indice i tel que $t[i] \leq u < t[i+1]$
 Détermination du premier point $M(0)$
 Positionner la plume (ou le curseur) en ce point
 Incréments u ($u \leftarrow u+h$)

- Boucle

Tant que $u < u_{\max}$ faire
 Mise à jour de l'indice i tel que $t[i] \leq u < t[i+1]$
 Détermination du point $M(u)$
 Tracé de la position courante de la plume jusqu'à $M(u)$
 Incréments u ($u \leftarrow u+h$)

Les valeurs minimales et maximales du paramètre u , u_{\min} et u_{\max} doivent être telles que la condition $m \leq i \leq n$ soit vraie.
 On peut choisir $u_{\min} = t[m]$ et $u_{\max} = t[n+1]$.

Remarque:

Si le vecteur nœud est tel que les nœuds extrêmes sont d'ordre $m+1$, on peut sans problème choisir :

$$\begin{aligned}
 u_{\min} &= t[0] = t[1] = \dots = t[m] = 0 \\
 u_{\max} &= t[n+1] = t[n+2] = \dots = t[n+m+1].
 \end{aligned}$$

Algorithme principal:

début

(* entrée des données n, m, X0, Y0, h *)

NŒUD (n, m, t)

u ← u_{min}

i ← 0

Tant que t[i+1] ≤ u faire i ← i+1

POINT (u, i, X, Y)

POS-CURS (X[i], Y[i])

u ← u+h

Tant que u < u_{max} faire i ← i+1

début

Tant que t[i+1] ≤ u faire i ← i+1

POINT (u, i, X, Y)

trace (X[i], Y[i])

u ← u+h

fin

fin

• La procédure NŒUD construit le vecteur nœud t[0], t[1], ... , t[n+m+1], c'est la procédure vue au paragraphe 3.2. (nœud extrêmes d'ordre m+1) ou toute autre procédure générant un autre type de vecteur nœud.

• La procédure POINT détermine le point M(u).

Procédure POINT(u, i, X, Y)

(* les coordonnées de M(u) sont dans X[i] Y[i] *)

var locales:

j, k : entiers

ALPHA : réel

début

Pour j=0 à n faire début X[j] ← X0[j] (*initialisation*)
Y[j] ← Y0[j]

fin

Pour k=1 à m faire

début

Pour j=i à i-m+k par pas -1 faire

début

ALPHA ← (u-t[j])/(t[j+m-k+1]-t[j])

X[j] ← ALPHA*X[j]+(1-ALPHA)*X[j-1]

Y[j] ← ALPHA*Y[j]+(1-ALPHA)*Y[j-1]

fin

fin

fin

• *POS-CURS* positionne le curseur en un point donné.

• *TRACE* permet de tracer un segment de la position courante du curseur jusqu'à un point donné.

III. PRÉSENTATION DES ACTIVITÉS SUR LE MODÈLE B-SPLINE

A. SUR LES FONCTIONS POLYNOMIALES B-SPLINES :

On rappelle que les fonctions polynomiales B-splines sont définies récursivement par

$$(1) N_{i,0}(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \text{ appartient à } [t_i, t_{i+1}[\quad (\text{initialisation}) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$(2) N_{i,m}(t) = \frac{t-t_i}{t_{i+m}-t_i} N_{i,m-1}(t) + \frac{t_{i+m+1}-t}{t_{i+m+1}-t_{i+1}} N_{i+1,m-1}(t).$$

avec la convention que si le numérateur et le dénominateur de l'un des termes sont nuls alors ce terme est nul.

1) On choisit pour vecteur nœud $(0, 1, 2, 3)$, c'est-à-dire avec les notations de la définition précédente : $t_0=0, t_1=1, t_2=2, t_3=3$.

a) Préciser la définition des fonctions $N_{0,0}, N_{1,0}, N_{2,0}$ pour t appartenant à $[0,3[$. Représenter graphiquement la fonction $N_{1,0}$.

b) Déterminer les fonctions $N_{0,1}$ et $N_{1,1}$ pour t appartenant à $[0,3[$, et construire leurs représentations graphiques.

Quelle est la nature de ces fonctions ? Sont-elles continues ? Dérivables ?

c) Déterminer la fonction $N_{0,2}$ pour t appartenant à $[0,3[$, dresser son tableau de variation et construire sa courbe représentative.

Étudier la continuité et la dérivabilité de cette fonction.

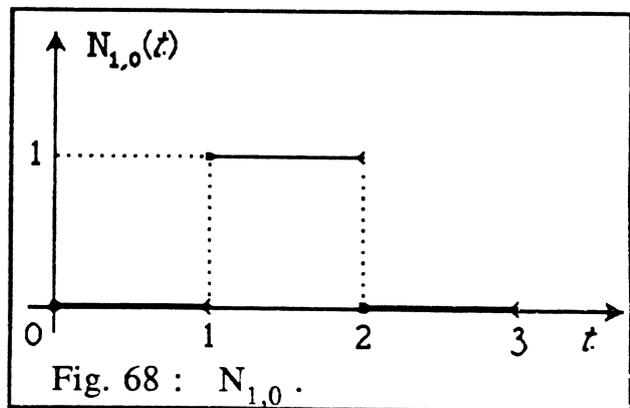
Est-elle dérivable à l'ordre 2 ?

a) La définition (1) donne:

$$N_{0,0}(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \text{ appartient à } [0,1[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$N_{1,0}(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \text{ appartient à } [1,2[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$N_{2,0}(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \text{ appartient à } [2,3[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$



b) La relation (2) de la définition donne:

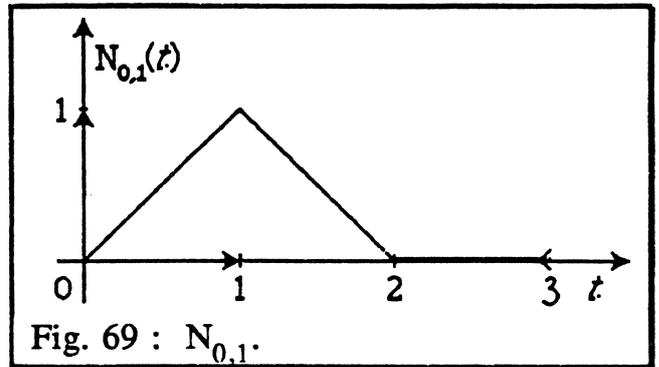
$$N_{0,1}(t) = \frac{t-t_0}{t_1-t_0} N_{0,0}(t) + \frac{t_2-t}{t_2-t_1} N_{1,0}(t) = tN_{0,0}(t) + (2-t)N_{1,0}(t).$$

Pour t appartenant à $[0,1[$, $N_{0,0}(t)=1$, $N_{1,0}(t)=0$, d'où $N_{0,1}(t)=t$.

Pour t appartenant à $[1,2[$, $N_{0,0}(t)=0$, $N_{1,0}(t)=1$, d'où $N_{0,1}(t)=2-t$.

Pour t appartenant à $[2,3[$, $N_{0,0}(t)=0$, $N_{1,0}(t)=0$, d'où $N_{0,1}(t)=0$.

La fonction $N_{0,1}$ est affine par intervalles, continue en $t=1$ et en $t=2$ donc continue sur $[0,3[$. Elle n'est pas dérivable en $t=1$ ni en $t=2$.



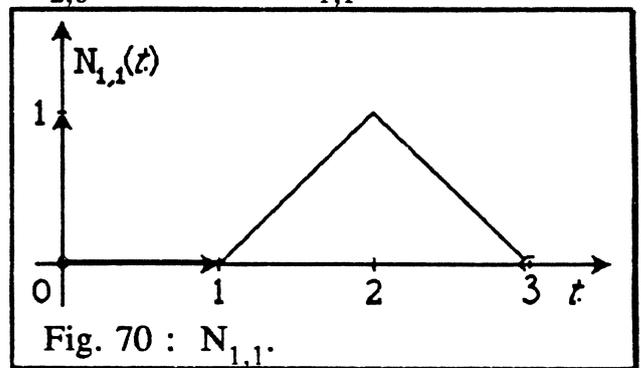
$$N_{1,1}(t) = \frac{t-t_1}{t_2-t_1} N_{1,0}(t) + \frac{t_3-t}{t_3-t_2} N_{2,0}(t) = (t-1)N_{1,0}(t) + (3-t)N_{2,0}(t)$$

Pour t appartenant à $[0,1[$, $N_{1,0}(t)=0$, $N_{2,0}(t)=0$, d'où $N_{1,1}(t)=0$.

Pour t appartenant à $[1,2[$, $N_{1,0}(t)=1$, $N_{2,0}(t)=0$, d'où $N_{1,1}(t)=t-1$.

Pour t appartenant à $[2,3[$, $N_{1,0}(t)=0$, $N_{2,0}(t)=1$, d'où $N_{1,1}(t)=3-t$.

La fonction $N_{1,1}$ est affine par intervalles, continue en $t=1$ et en $t=2$ donc continue sur $[0,3[$. Elle n'est pas dérivable en $t=1$ ni en $t=2$.



$$c) N_{0,2}(t) = \frac{t-t_0}{t_2-t_0} N_{0,1}(t) + \frac{t_3-t}{t_3-t_1} N_{1,1}(t) = \frac{t}{2} N_{0,1}(t) + \frac{3-t}{2} N_{1,1}(t)$$

Pour t appartenant à $[0,1[$, $N_{0,1}(t)=t$, $N_{1,1}(t)=0$, d'où $N_{0,2}(t) = \frac{t^2}{2}$.

Pour t appartenant à $[1,2[$, $N_{0,1}(t)=2-t$, $N_{1,1}(t)=t-1$,

$$\text{d'où } N_{0,2}(t) = \frac{t(2-t)}{2} + \frac{(3-t)(t-1)}{2} = \frac{-2t^2 + 6t - 3}{2}.$$

Pour t appartenant à $[2,3[$, $N_{0,1}(t) = 0$, $N_{1,1}(t) = 3-t$, d'où $N_{0,2}(t) = \frac{(3-t)^2}{2}$.

On a donc une fonction de degré 2 par intervalles, sa fonction dérivée est définie par :

$$N_{0,2}'(t) = \begin{cases} t & \text{si } t \text{ appartient à } [0,1[\\ -2t+3 & \text{si } t \text{ appartient à } [1,2[\\ t-3 & \text{si } t \text{ appartient à } [2,3[. \end{cases}$$

La fonction $N_{0,2}'$ est continue en $t=1$ et en $t=2$ donc continue sur $[0,3[$.

La fonction $N_{0,2}$ est donc continûment dérivable sur $[0,3[$.

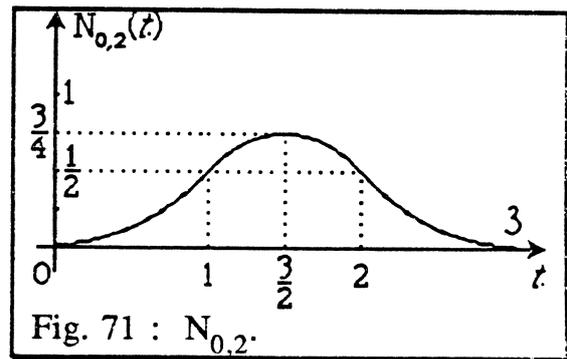
La dérivée seconde $N_{0,2}''$ est définie par:

$$N_{0,2}''(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \text{ appartient à } [0,1[\\ -2 & \text{si } t \text{ appartient à } [1,2[\\ 1 & \text{si } t \text{ appartient à } [2,3[. \end{cases}$$

La fonction $N_{0,2}$ n'est donc pas dérivable à l'ordre 2 en $t=1$ ni en $t=2$.

Tableau de variation et courbe représentative de $N_{0,2}$:

t	0	1	$\frac{3}{2}$	2	3
$N_{0,2}'$	0	+	1	+	0
$N_{0,2}$	0	$\xrightarrow{\frac{1}{2}}$		$\frac{3}{4}$	$\xrightarrow{\frac{1}{2}}$
					0



2) On choisit pour vecteur nœud $(0, 1, 2, 2, 3, 4)$, c'est-à-dire avec les notations de la définition précédente: $t_0=0, t_1=1, t_2=2, t_3=2, t_4=3, t_5=4$. t_2 est donc un nœud multiple d'ordre 2.

- a) Déterminer les fonctions $N_{0,1}, N_{1,1}, N_{2,1}, N_{3,1}$ pour t appartenant à $[0,4[$. Représenter graphiquement $N_{1,1}, N_{2,1}$. Sont-elles continues ?
- b) Déterminer les fonctions $N_{0,2}, N_{1,2}$ et $N_{2,2}$. Donner les tableaux de variation et les courbes représentatives de ces fonctions. Sont-elles continues ? Sont-elles dérivables ?

a) Comme dans l'activité précédente on obtient:

$$N_{0,1}(t) = \begin{cases} t & \text{si } t \text{ appartient à } [0,1[\\ 2-t & \text{si } t \text{ appartient à } [1,2[\\ 0 & \text{si } t \text{ appartient à } [2,4[\end{cases} \quad N_{3,1}(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \text{ appartient à } [0,2[\\ t-2 & \text{si } t \text{ appartient à } [2,3[\\ 4-t & \text{si } t \text{ appartient à } [3,4[\end{cases}$$

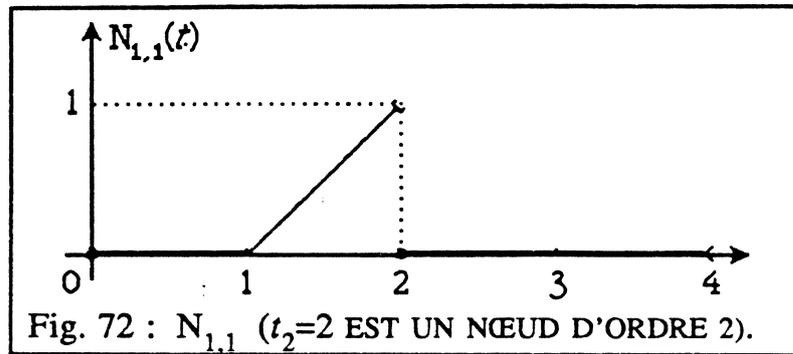
$$N_{1,1}(t) = \frac{t-t_1}{t_2-t_1} N_{1,0}(t) + \frac{t_3-t}{t_3-t_2} N_{2,0}(t).$$

Le terme $\frac{t_3-t}{t_3-t_2} N_{2,0}(t)$ est nul par convention puisque $t_3-t_2=0$ et $N_{2,0}(t)=0$.

$$N_{1,1}(t) = (t-1) N_{1,0}(t)$$

$$N_{1,1}(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \text{ appartient à } [0,1[\\ t-1 & \text{si } t \text{ appartient à } [1,2[\\ 0 & \text{si } t \text{ appartient à } [2,4[\end{cases}$$

$N_{1,1}$ est discontinue en $t=2$.



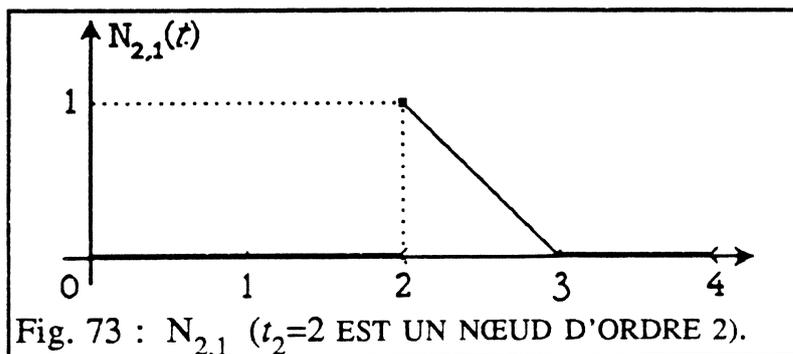
De même :

$$N_{2,1}(t) = \frac{t-t_2}{t_3-t_2} N_{2,0}(t) + \frac{t_4-t}{t_4-t_3} N_{3,0}(t).$$

Le terme $\frac{t-t_2}{t_3-t_2} N_{2,0}(t)$ est nul par convention, d'où : $N_{2,1}(t) = (3-t) N_{3,0}(t)$.

$$N_{2,1}(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \text{ appartient à } [0,2[\\ 3-t & \text{si } t \text{ appartient à } [2,3[\\ 0 & \text{si } t \text{ appartient à } [3,4[\end{cases}$$

$N_{2,1}$ est discontinue en $t=2$.



b) Détermination de $N_{0,2}$, $N_{1,2}$, $N_{2,2}$:

$$N_{0,2}(t) = \frac{t-t_0}{t_2-t_0} N_{0,1}(t) + \frac{t_3-t}{t_3-t_1} N_{1,1}(t) = \frac{t}{2} N_{0,1}(t) + (2-t)N_{1,1}(t).$$

Pour t appartenant à $[0,1[$, $N_{0,1}(t)=t$, $N_{1,1}(t)=0$, d'où $N_{0,2}(t) = \frac{t^2}{2}$.

Pour t appartenant à $[1,2[$, $N_{0,1}(t)=2-t$, $N_{1,1}(t)=t-1$,

$$\text{d'où } N_{0,2}(t) = \frac{t(2-t)}{2} + (2-t)(t-1) = (2-t)\frac{3t-2}{2}.$$

Pour $t \geq 2$, $N_{0,1}(t)=0$ et $N_{1,1}(t)=0$, d'où $N_{0,2}(t) = 0$.

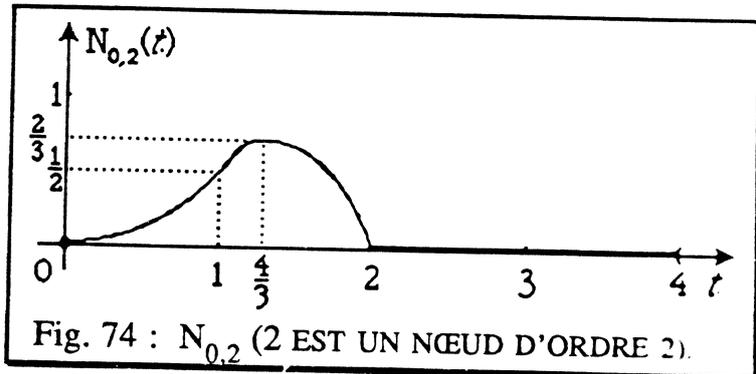
La fonction $N_{0,2}$ est une fonction polynôme de degré 2 par intervalles, elle est continue en $t=1$ et en $t=2$ donc continue sur $[0,4]$.

Calcul de la dérivée de $N_{0,2}$:

$$N'_{0,2}(t) = \begin{cases} t & \text{si } t \text{ appartient à } [0,1[\\ 4-3t & \text{si } t \text{ appartient à } [1,2[\\ 0 & \text{si } t \geq 2 \end{cases}$$

$N_{0,2}$ est dérivable en $t=1$ ($N_{0,2}'(1)=1$) mais non dérivable en $t=2$.

t	0	1	$\frac{4}{3}$	2	4
$N'_{0,2}$	0	+	1	+	0
$N_{0,2}$	0	$\xrightarrow{\frac{1}{2}}$	$\frac{2}{3}$	$\xrightarrow{-2}$	0



$$N_{1,2}(t) = \frac{t-t_1}{t_3-t_1} N_{1,1}(t) + \frac{t_4-t}{t_4-t_2} N_{2,1}(t) = (t-1)N_{1,1}(t) + (3-t)N_{2,1}(t)$$

Pour t appartenant à $[0,1[$, $N_{1,1}(t)=0$, $N_{2,1}(t)=0$, d'où $N_{1,2}(t)=0$.

Pour t appartenant à $[1,2[$, $N_{1,1}(t)=t-1$, $N_{2,1}(t)=0$, d'où $N_{1,2}(t)=(t-1)^2$.

Pour t appartenant à $[2,3[$, $N_{1,1}(t)=0$, $N_{2,1}(t)=3-t$, d'où $N_{1,2}(t)=(3-t)^2$.

Pour t appartenant à $[3,4[$, $N_{1,1}(t)=0$, $N_{2,1}(t)=0$, d'où $N_{1,2}(t)=0$.

Dérivée de $N_{1,2}$:

$$N'_{1,2}(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \text{ appartient à } [0,1[\\ 2(t-1) & \text{si } t \text{ appartient à } [1,2[\\ 2(t-3) & \text{si } t \text{ appartient à } [2,3[\\ 0 & \text{si } t \text{ appartient à } [3,4[\end{cases}$$

$N_{1,2}$ est une fonction polynôme de degré 2 par intervalles, elle est continue en $t=1$, en $t=2$ et en $t=3$, donc continue sur $[0,4[$.

$N_{1,2}$ est dérivable en $t=1$ et en $t=3$ mais non dérivable en $t=2$.

t	0	1	2	3	4
$N_{1,2}'$	0	0	$+2$	-0	0
$N_{1,2}$	0	0	1	0	0

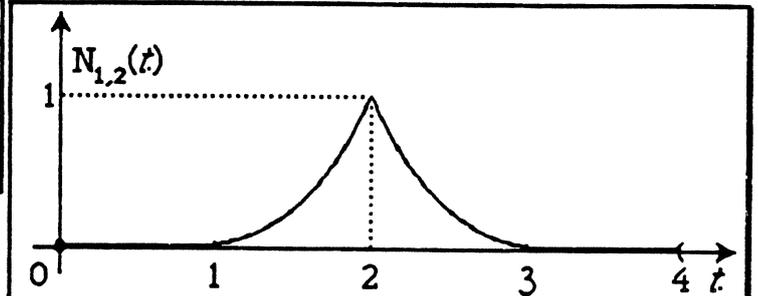


Fig. 75 : $N_{1,2}$ (2 EST UN NŒUD D'ORDRE 2).

$$N_{2,2}(t) = \frac{t-t_2}{t_4-t_2} N_{2,1}(t) + \frac{t_5-t}{t_5-t_3} N_{3,1}(t) = (t-2)N_{2,1}(t) + \frac{4-t}{2} N_{3,1}(t)$$

Pour t appartenant à $[0,2[$, $N_{2,1}(t)=0$, $N_{3,1}(t)=0$, d'où $N_{2,2}(t)=0$.

Pour t appartenant à $[2,3[$, $N_{2,1}(t)=3-t$, $N_{3,1}(t)=t-2$,

d'où $N_{2,2}(t) = (t-2)(3-t) + \frac{1}{2}(4-t)(t-2) = (t-2) \frac{10-3t}{2}$.

Pour t appartenant à $[3,4[$, $N_{2,1}(t)=0$, $N_{3,1}(t)=4-t$,

d'où $N_{2,2}(t) = \frac{1}{2}(4-t)^2$.

$N_{2,2}$ est une fonction polynôme de degré 2 par intervalles, elle est continue en $t=2$ et en $t=3$, donc continue sur $[0,4[$.

Dérivée de $N_{2,2}$:

$$N'_{2,2}(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \text{ appartient à } [0,2[\\ 8-3t & \text{si } t \text{ appartient à } [2,3[\\ t-4 & \text{si } t \text{ appartient à } [3,4[\end{cases}$$

$N_{2,2}$ est dérivable en $t=3$, ($N'_{2,2}(3)=-1$) mais non dérivable en $t=2$.

t	0	2	$\frac{8}{3}$	3	4
$N_{1,2}'$	0	0	$+0$	-1	0
$N_{1,2}$	0	0	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$	0

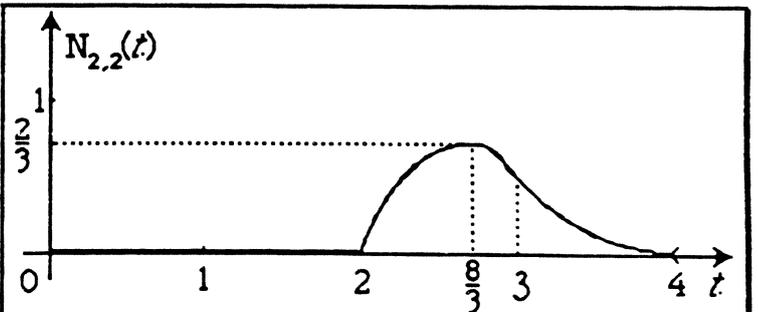


Fig. 76 : $N_{2,2}$ (2 EST UN NŒUD D'ORDRE 2).

3) On étudie dans cette activité le cas d'un nœud d'ordre 3.

On choisit le vecteur nœud $(0, 1, 2, 2, 2, 3, 4)$, d'où $t_0=0, t_1=1, t_2=2, t_3=2, t_4=2, t_5=3, t_6=4$, t_2 est donc un nœud multiple d'ordre 2.

a) Déterminer les fonctions $N_{1,2}$ et $N_{2,2}$ pour t appartenant à $[0,4[$ et construire leurs représentations graphiques.

Ces fonctions sont-elles continues ?

b) Déterminer les fonctions $N_{0,2}$ et $N_{3,2}$ pour t appartenant à $[0,4[$.

Que remarque-t-on ?

$$a) N_{1,2}(t) = \frac{t-t_1}{t_3-t_1} N_{1,1}(t) + \frac{t_4-t}{t_4-t_2} N_{2,1}(t).$$

Puisque $t_2=t_3=t_4$, la fonction $N_{2,1}$ est réduite à la fonction nulle.

De plus $t_4-t_2=0$, donc le terme $\frac{t_4-t}{t_4-t_2} N_{2,1}(t)$ est nul par convention et

$$N_{1,2}(t) = (t-1)N_{1,1}(t).$$

Pour t appartenant à $[0,1[$, $N_{1,1}(t)=0$, donc $N_{1,2}(t)=0$.

Pour t appartenant à $[1,2[$, $N_{1,1}(t)=t-1$, donc $N_{1,2}(t)=(t-1)^2$.

Pour t appartenant à $[2,4[$, $N_{1,1}(t)=0$, donc $N_{1,2}(t)=0$.

Dérivée de $N_{1,2}$:

$$N'_{1,2}(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \text{ appartient à } [0,1[\\ 2(t-1) & \text{si } t \text{ appartient à } [1,2[\\ 0 & \text{si } t \text{ appartient à } [2,4[\end{cases}$$

$N_{1,2}$ est une fonction polynôme de degré 2 par intervalles, elle est continue en $t=1$ (et dérivable), mais elle est discontinue en $t=2$.

t	0	1	2	4
$N'_{1,2}$	0	0 +	0	0
$N_{1,2}$	0	0	1	0

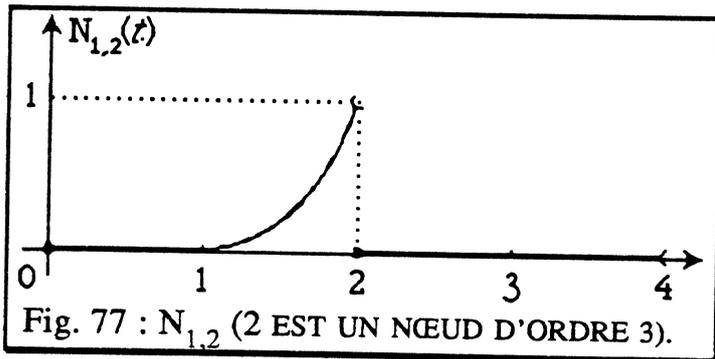


Fig. 77 : $N_{1,2}$ (2 EST UN NŒUD D'ORDRE 3).

On a des résultats analogues pour $N_{2,2}$:

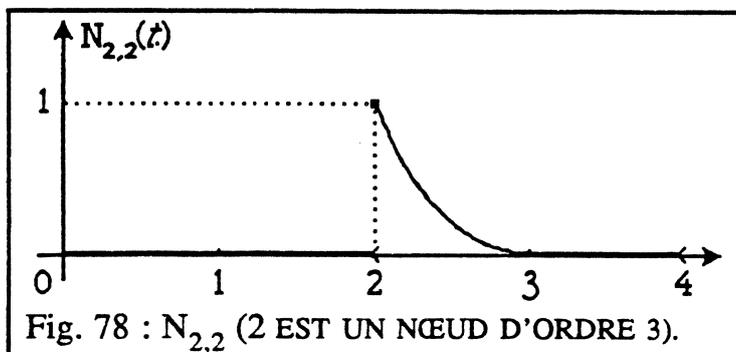
$$N_{2,2}(t) = \frac{t-t_2}{t_4-t_2} N_{2,1}(t) + \frac{t_5-t}{t_5-t_3} N_{3,1}(t) \text{ et par convention } \frac{t-t_2}{t_4-t_2} N_{2,1}(t) = 0,$$

$$\text{d'où : } N_{2,2}(t) = (3-t)N_{3,1}(t).$$

$$N_{2,2}(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \text{ appartient à } [0,2[\\ (3-t)^2 & \text{si } t \text{ appartient à } [2,3[\\ 0 & \text{si } t \text{ appartient à } [3,4[\end{cases} \quad N'_{2,2}(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \text{ appartient à } [0,2[\\ 2(t-3) & \text{si } t \text{ appartient à } [2,3[\\ 0 & \text{si } t \text{ appartient à } [3,4[\end{cases}$$

$N_{2,2}$ est une fonction polynôme de degré 2 par intervalles. Elle est continue et dérivable en $t=3$ ($N'_{2,2}(3)=0$), mais elle est discontinue en $t=2$.

t	0	2	3	4
$N'_{2,2}$	0		- 0	0
$N_{2,2}$	0	→ 0	1 → 0	→ 0



$$b) N_{0,2}(t) = \frac{t-t_0}{t_2-t_0} N_{0,1}(t) + \frac{t_3-t}{t_3-t_1} N_{1,1}(t) = \frac{t}{2} N_{0,1}(t) + (2-t)N_{1,1}(t).$$

On retrouve la fonction $N_{0,2}$ étudiée à l'activité 2. b).

$$N_{0,2}(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}t^2 & \text{si } t \text{ appartient à } [0,1[\\ (2-t)\left(\frac{3t-2}{2}\right) & \text{si } t \text{ appartient à } [1,2[\\ 0 & \text{si } t \text{ appartient à } [2,4[\end{cases}$$

$$N_{3,2}(t) = \frac{t-t_3}{t_5-t_3} N_{3,1}(t) + \frac{t_6-t}{t_6-t_4} N_{4,1}(t) = (t-2)N_{3,1}(t) + \frac{4-t}{2} N_{4,1}(t)$$

Pour t appartenant à $[0,2[$, $N_{3,1}(t)=N_{4,1}(t)=0$, donc $N_{3,2}(t)=0$.

Pour t appartenant à $[2,3[$, $N_{3,1}(t)=3-t$, $N_{4,1}(t)=t-2$,

$$\text{donc } N_{3,2}(t) = (t-2)(3-t) + \frac{1}{2}(4-t)(t-2) = (t-2) \frac{10-3t}{2}.$$

Pour t appartenant à $[3,4[$, $N_{3,1}(t)=0$, $N_{4,1}(t)=4-t$, donc $N_{3,2}(t) = \frac{1}{2}(4-t)^2$.

On retrouve la fonction $N_{2,2}(t)$ de l'activité 2. b).

$$N_{3,2}(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \text{ appartient à } [0,2[\\ (t-2)\left(\frac{10-3t}{2}\right) & \text{si } t \text{ appartient à } [2,3[\\ \frac{1}{2}(4-t)^2 & \text{si } t \text{ appartient à } [3,4[\end{cases}$$

B. SUR LES COURBES B-SPLINES:

Étant donnés $n+1$ points P_0, P_1, \dots, P_n , la courbe B-spline de degré m associée à ces points est définie paramétriquement par :

$$\vec{OM}(t) = \sum_{i=0}^n N_{i,m}(t) \vec{OP}_i$$

$N_{i,m}$ est la $i^{\text{ème}}$ fonction polynomiale B-spline de degré m .

Les points P_0, P_1, \dots, P_n sont appelés points de contrôle de la courbe.

1) On se propose d'étudier un exemple de courbe B-spline de degré $m=2$ associée à cinq points de contrôle P_0, P_1, P_2, P_3, P_4 ($n=4$).

On choisit le vecteur nœud $(0, 0, 0, 1, 2, 3, 3, 3)$.

a) Déterminer et représenter graphiquement les cinq fonctions B-splines $N_{0,2}, N_{1,2}, N_{2,2}, N_{3,2}, N_{4,2}$, pour t appartenant à $[0,3[$.

b) On donne les points P_0, P_1, P_2, P_3, P_4 par leurs coordonnées relativement à un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$:

$$P_0 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, P_1 \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}, P_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}, P_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}, P_4 \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Donner une représentation paramétrique de la courbe B-spline associée à ces points. Construire la courbe. Donner une propriété remarquable de cette courbe.

b) Indiquer sur quels arcs de courbe agissent respectivement les points P_0, P_1, P_2, P_3 et P_4 .

a) Avec des calculs analogues à ceux développés dans la partie A) on obtient les résultats suivants:

$$N_{0,2}(t) = \begin{cases} (1-t)^2 & \text{si } t \text{ appartient à } [0,1[\\ 0 & \text{si } t \text{ appartient à } [1,3[\end{cases}$$

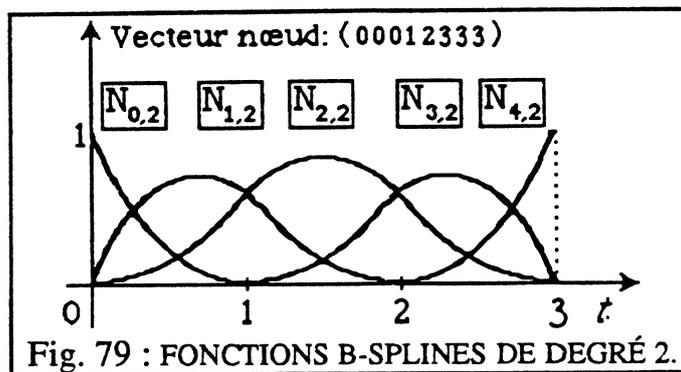
$$N_{1,2}(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}t(4-3t) & \text{si } t \text{ appartient à } [0,1[\\ \frac{1}{2}(t-2)^2 & \text{si } t \text{ appartient à } [1,2[\\ 0 & \text{si } t \text{ appartient à } [2,3[\end{cases}$$

$$N_{2,2}(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}t^2 & \text{si } t \text{ appartient à } [0,1[\\ \frac{1}{2}(-2t^2+6t-3) & \text{si } t \text{ appartient à } [1,2[\\ \frac{1}{2}(t-3)^2 & \text{si } t \text{ appartient à } [2,3[\end{cases}$$

$$N_{3,2}(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \text{ appartient à } [0,1[\\ \frac{1}{2}(t-1)^2 & \text{si } t \text{ appartient à } [1,2[\\ \frac{1}{2}(3-t)(3t-5) & \text{si } t \text{ appartient à } [2,3[\end{cases}$$

$$N_{4,2}(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \text{ appartient à } [0,2[\\ (t-2)^2 & \text{si } t \text{ appartient à } [2,3[\end{cases}$$

ce qui donne les représentations graphiques:



b) Pour t appartenant à $[0,1[$ seules les fonctions $N_{0,2}$, $N_{1,2}$ et $N_{2,2}$ sont non nulles.

$$N_{0,2}(t) = (1-t)^2 ; N_{1,2}(t) = \frac{1}{2}t(4-3t) ; N_{2,2}(t) = \frac{1}{2}t^2.$$

$$\vec{OM}(t) = (1-t)^2 \vec{OP}_0 + \frac{1}{2}t(4-3t) \vec{OP}_1 + \frac{1}{2}t^2 \vec{OP}_2$$

d'où :

$$\begin{cases} x(t) = -4t^2 + 6t + 1 \\ y(t) = -t^2 + 4t \end{cases}$$

$$\begin{cases} x'(t) = -8t + 6 = 2(-4t + 3) \\ y'(t) = -2t + 4 = 2(-t + 2) \end{cases}$$

t	0	$\frac{3}{4}$	1
$x'(t)$	6	+	0
$x(t)$	1	$\frac{13}{4}$	3
$y(t)$	0	$\frac{39}{16}$	3
$y'(t)$	4	+	2

Pour t appartenant à $[1,2[$ seules les fonctions $N_{1,2}$, $N_{2,2}$ et $N_{3,2}$ sont non nulles.

$$N_{1,2}(t) = \frac{1}{2}(1-t)^2 ; N_{2,2}(t) = \frac{1}{2}(-2t^2 + 6t - 3) ; N_{3,2}(t) = \frac{1}{2}(t-1)^2.$$

$$\vec{OM}(t) = \frac{1}{2}(1-t)^2 \vec{OP}_1 + \frac{1}{2}(-2t^2 + 6t - 3) \vec{OP}_2 + \frac{1}{2}(t-1)^2 \vec{OP}_3$$

d'où:

$$\begin{cases} x(t) = -2t + 5 \\ y(t) = -2t^2 + 6t - 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x'(t) = -2 \\ y'(t) = -4t + 6 = 2(-2t + 3) \end{cases}$$

t	1	$\frac{3}{2}$	2
$x'(t)$	-2		
$x(t)$	3		1
$y(t)$		$\frac{7}{2}$	
$y'(t)$	2	+ 0	- -2

Pour t appartenant à $[2,3[$ seules les fonctions $N_{2,2}$, $N_{3,2}$ et $N_{4,2}$ sont non nulles.

$$N_{2,2}(t) = \frac{1}{2}(t-3)^2 ; N_{3,2}(t) = \frac{1}{2}(3-t)(3t-5) ; N_{4,2}(t) = (t-2)^2.$$

$$\overrightarrow{OM}(t) = \frac{1}{2}(t-3)^2 \overrightarrow{OP_2} + \frac{1}{2}(3-t)(3t-5) \overrightarrow{OP_3} + (t-2)^2 \overrightarrow{OP_4}$$

d'où:

$$\begin{cases} x(t) = -3t^2 + 10t - 7 \\ y(t) = 3t^2 - 14t + 19 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x'(t) = -6t + 10 = 2(-3t + 5) \\ y'(t) = 6t - 14 = 2(3t - 7) \end{cases}$$

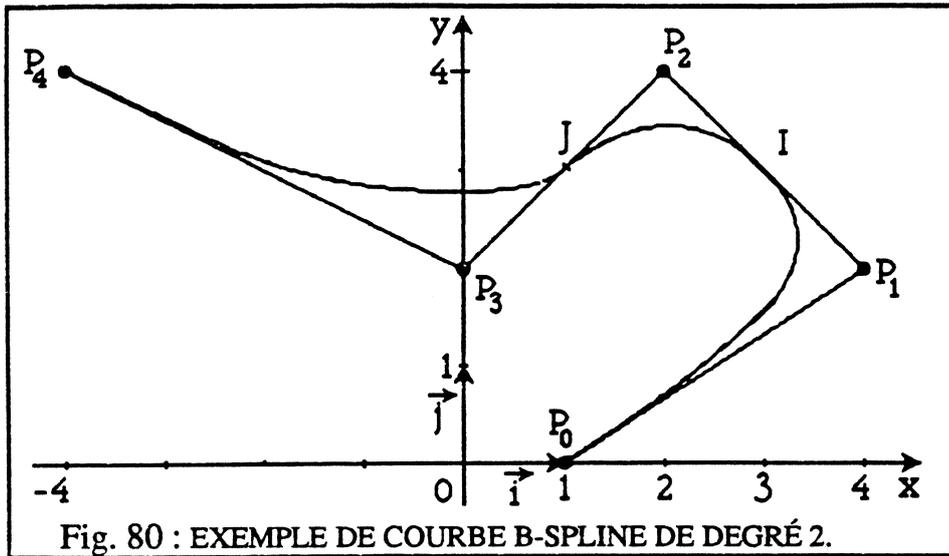
t	2	$\frac{7}{3}$	3
$x'(t)$	-2	-	-8
$x(t)$	1		-4
$y(t)$	3	$\frac{8}{3}$	4
$y'(t)$	-2	- 0	+ 4

Pour $t=0$, $M(0)=P_0$, $\frac{d\overrightarrow{M}}{dt}(0) \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\frac{d\overrightarrow{M}}{dt}(0) = 2\overrightarrow{P_0P_1}$.

La courbe passe donc par P_0 et en ce point, sa tangente admet pour vecteur directeur $\overrightarrow{P_0P_1}$.

De même pour $t=3$, $M(3)=P_4$, $\frac{d\overrightarrow{M}}{dt}(3) \begin{pmatrix} -8 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\frac{d\overrightarrow{M}}{dt}(3) = 2\overrightarrow{P_3P_4}$.

On remarque de plus que la courbe est tangente à (P_1P_2) et (P_2P_3) , les points de contact $I \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$, et $J \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ étant respectivement les milieux des segments $[P_1P_2]$ et $[P_2P_3]$.



On peut jouer sur la forme de la courbe en déplaçant les points de contrôle P_0 , P_1 , P_2 , P_3 et P_4 .

P_0 agit sur l'arc $\widehat{P_0I}$, P_1 agit sur l'arc $\widehat{P_0J}$, P_2 agit sur la totalité de la courbe $\widehat{P_0P_4}$, son influence est toutefois plus forte sur l'arc \widehat{IJ} , P_3 agit sur l'arc $\widehat{IP_4}$ et P_4 agit sur l'arc $\widehat{JP_4}$.

2) On étudie un cas où trois des points de contrôle sont alignés. On conserve les points P_0 , P_1 , P_2 et P_4 de l'exemple précédent et on choisit

$P_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \end{pmatrix}$, de telle sorte que P_1 , P_2 , P_3 soient alignés;

Construire la courbe B-spline de degré 2 associée à ces points. Que constate-t-on ?

La définition paramétrique de la courbe B-spline est:

Pour t décrivant l'intervalle $[0,3[$,

$$\overrightarrow{OM}(t) = N_{0,2}(t)\overrightarrow{OP_0} + N_{1,2}(t)\overrightarrow{OP_1} + N_{2,2}(t)\overrightarrow{OP_2} + N_{3,2}(t)\overrightarrow{OP_3} + N_{4,2}(t)\overrightarrow{OP_4}.$$

Les fonctions B-splines $N_{0,2}$, $N_{1,2}$, $N_{2,2}$, $N_{3,2}$ et $N_{4,2}$ ont été déterminées à la question précédente.

Pour t appartenant à $[0,1[$, les points P_0 , P_1 , P_2 étant inchangés, on obtient le même arc de courbe que dans la question 1 :

$$\begin{cases} x(t) = -4t^2 + 6t + 1 \\ y(t) = -t^2 + 4t \end{cases}$$

Pour t appartenant à $[1,2[$,

$$\overrightarrow{OM}(t) = \frac{1}{2}(t-2)^2\overrightarrow{OP_1} + \frac{1}{2}(-2t^2 + 6t - 3)\overrightarrow{OP_2} + \frac{1}{2}(t-1)^2\overrightarrow{OP_3}$$

d'où :

$$\begin{cases} x(t) = -2t + 5 \\ y(t) = 2t + 1 \end{cases}$$

L'arc de courbe obtenu est un segment de la droite d'équation $x+y-6=0$, c'est le segment [IJ], avec $I = M(1) \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $J = M(2) \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Pour t appartenant à $[2,3[$,

$$\vec{OM}(t) = \frac{1}{2}(t-3)^2 \vec{OP}_2 + \frac{1}{2}(3-t)(3t-5) \vec{OP}_3 + (t-2)^2 \vec{OP}_4$$

d'où :

$$\begin{cases} x(t) = -3t^2 + 10t - 7 \\ y(t) = -3t^2 + 14t - 11 \end{cases}$$

les dérivées sont données par:

$$\begin{cases} x'(t) = -6t + 10 = 2(-3t + 5) \\ y'(t) = -6t + 14 = 2(-3t + 7) \end{cases}$$

t	2	$\frac{7}{3}$	3
$x'(t)$	-2	-	-8
$x(t)$	1	0	-4
$y(t)$	5	$\frac{16}{3}$	4
$y'(t)$	2	+	-

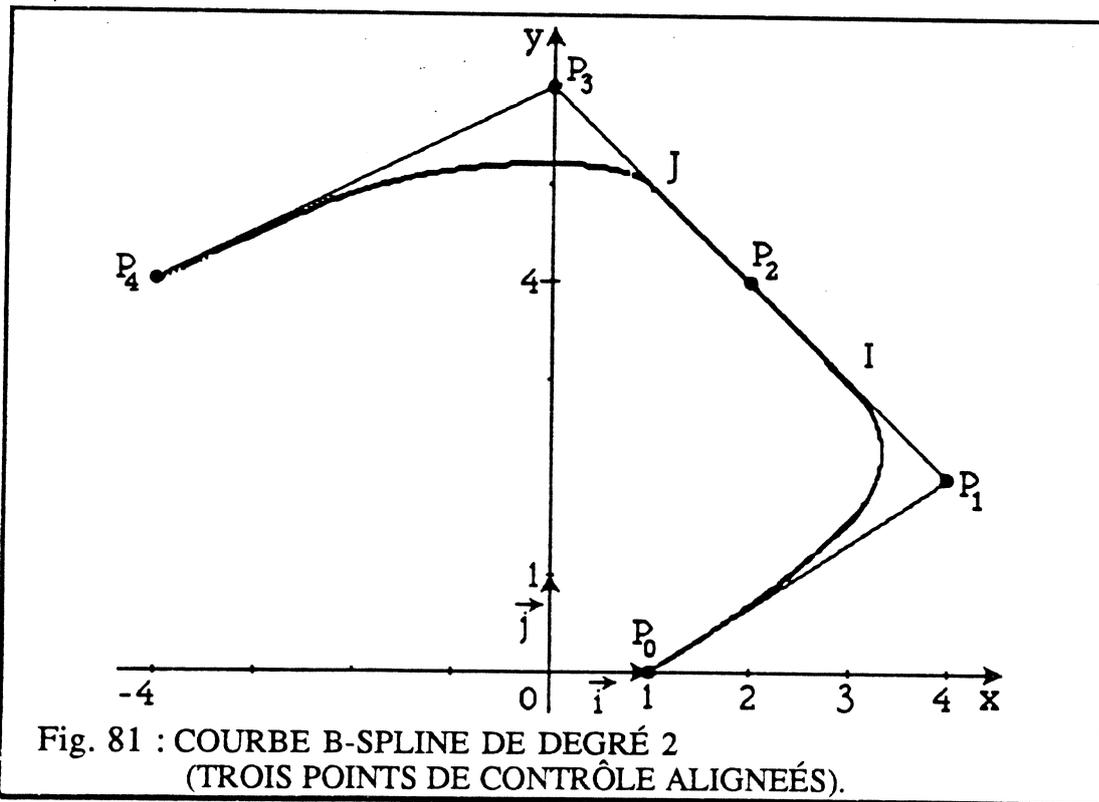


Fig. 81 : COURBE B-SPLINE DE DEGRÉ 2 (TROIS POINTS DE CONTRÔLE ALIGNÉS).

On constate que la modification du point P_3 agit sur l'arc \widehat{IP}_4 , l'arc $\widehat{P_0I}$ restant inchangé, et que d'autre part, la courbe contient un segment de droite:[IJ], I et J appartenant à la même droite que les points P_1, P_2, P_3 .

C. UN EXEMPLE DE COURBE B-SPLINE DE DEGRÉ 3 :

Les activités proposées précédemment (A. et B.), ainsi que les exemples développés dans l'exposé (Chapitre 3 partie II), ne portent que sur des fonctions B-splines et des courbes B-splines de degré 2 ($m=2$), dans le but de simplifier les calculs au maximum. Toutefois, dans la pratique, ce sont les courbes B-splines de degré 3 qui sont les plus utilisées, il est donc intéressant de compléter cette série d'activités par un tel exemple.

Cette dernière activité comporte trois parties:

1. La détermination et l'étude des fonctions B-splines de degré 3 associées au vecteur nœud $(0, 0, 0, 0, 1, 2, 3, 3, 3, 3)$.
2. La construction d'une courbe B-spline de degré 3 contrôlée par six points $P_0, P_1, P_2, P_3, P_4, P_5$ ($n=5$) et associée au vecteur nœud précédent.
3. La mise en œuvre de l'algorithme de De Boor pour la construction géométrique d'un point de la courbe ($t = \frac{3}{2}$).

Remarque:

Les calculs de la première partie étant relativement longs et fastidieux, on peut admettre une partie des résultats, ou même la totalité, et passer directement à la seconde partie.

1. On rappelle que les fonctions B-splines de degré 3 sont définies à partir des fonctions B-splines de degré 2 par la relation:

$$N_{i,3}(t) = \frac{(t-t_i)N_{i,2}(t)}{(t_{i+3}-t_i)} + \frac{(t_{i+4}-t)N_{i+1,2}(t)}{(t_{i+4}-t_{i+1})} \quad (1)$$

avec la convention que si le numérateur et le dénominateur de l'un des termes sont simultanément nuls, alors ce terme est nul.

On choisit pour vecteur nœud $(0, 0, 0, 0, 1, 2, 3, 3, 3, 3)$ c'est-à-dire :
 $t_0=t_1=t_2=t_3=0$; $t_4=1$; $t_5=2$; $t_6=t_7=t_8=t_9=3$.

On donne les expressions des fonctions B-splines de degré 2 associées au vecteur nœud $(0, 0, 0, 0, 1, 2, 3, 3, 3, 3)$ dans le tableau suivant : (2)

	$0 \leq t < 1$	$1 \leq t < 2$	$2 \leq t < 3$
$N_{0,2}$	0	0	0
$N_{1,2}$	$(1-t)^2$	0	0
$N_{2,2}$	$\frac{1}{2}t(4-3t)$	$\frac{1}{2}(t-2)^2$	0
$N_{3,2}$	$\frac{1}{2}t^2$	$\frac{1}{2}(-2t^2+6t-3)$	$\frac{1}{2}(t-3)^2$
$N_{4,2}$	0	$\frac{1}{2}(t-1)^2$	$\frac{1}{2}(3-t)(3t-5)$
$N_{5,2}$	0	0	$(t-2)^2$
$N_{6,2}$	0	0	0

a) Déterminer les fonctions B-splines du troisième degré $N_{0,3}, N_{1,3}, \dots, N_{5,3}$

et vérifier que $\sum_{i=0}^5 N_{i,3}(t) = 1$.

b) Étudier et représenter graphiquement chacune de ces fonctions.

a) La relation (1) donne :

$$N_{0,3}(t) = (1-t)N_{1,2}(t)$$

$$N_{1,3}(t) = tN_{1,2}(t) + \frac{2-t}{2} N_{2,2}(t)$$

$$N_{2,3}(t) = \frac{t}{2} N_{2,2}(t) + \frac{3-t}{3} N_{3,2}(t)$$

$$N_{3,3}(t) = \frac{t}{3} N_{3,2}(t) + \frac{3-t}{2} N_{4,2}(t)$$

$$N_{4,3}(t) = \frac{t-1}{2} N_{4,2}(t) + (3-t)N_{5,2}(t)$$

$$N_{5,3}(t) = (t-2)N_{5,2}(t).$$

En utilisant les résultats donnés dans le tableau (2) on a :

* Pour t appartenant à $[0,1[$:

$$N_{0,3}(t) = (1-t)^3$$

$$N_{1,3}(t) = t(1-t)^2 + \frac{2-t}{2} \left[\frac{1}{2}(4-3t) \right] = \frac{t}{4} (7t^2 - 18t + 12)$$

$$N_{2,3}(t) = \frac{t}{2} \left[\frac{1}{2}(4-3t) \right] + \frac{3-t}{3} \left(\frac{1}{2}t^2 \right) = \frac{t^2}{12} (-11t + 18)$$

$$N_{3,3}(t) = \frac{1}{6} t^3$$

$$N_{4,3}(t) = 0$$

$$N_{5,3}(t) = 0.$$

On peut vérifier que pour t appartenant à $[0,1[$:

$$\sum_{i=0}^5 N_{i,3}(t) = (-t^3 + 3t^2 - 3t + 1) + \left(\frac{7}{4} t^3 - \frac{9}{2} t^2 + 3t \right) + \left(-\frac{11}{12} t^3 + \frac{3}{2} t^2 \right) + \frac{1}{6} t^3 = 1.$$

* Pour t appartenant à $[1,2[$:

$$N_{0,3}(t) = 0$$

$$N_{1,3}(t) = \frac{1}{4} (2-t)^3$$

$$N_{2,3}(t) = \frac{t}{2} \left[\frac{1}{2}(t-2)^2 \right] + \frac{3-t}{3} \left[\frac{1}{2}(-2t^2 + 6t - 3) \right] = \frac{1}{12} (7t^3 - 36t^2 + 54t - 18)$$

$$N_{3,3}(t) = \frac{t}{3} \left[\frac{1}{2}(-2t^2 + 6t - 3) \right] + \frac{3-t}{2} \left[\frac{1}{2}(t-1)^2 \right] = \frac{1}{12} (-7t^3 + 27t^2 - 27t + 9)$$

$$N_{4,3}(t) = \frac{t-1}{2} \left[\frac{1}{2}(t-1)^2 \right] = \frac{1}{4} (t-1)^3$$

$$N_{5,3}(t) = 0.$$

On peut vérifier que pour t appartenant à $[1,2[$:

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^5 N_{i,3}(t) &= \left(-\frac{1}{4}t^3 + \frac{3}{2}t^2 - 3t + 2\right) + \left(\frac{7}{12}t^3 - 3t^2 + \frac{9}{2}t - \frac{3}{2}\right) \\ &\quad + \left(-\frac{7}{12}t^3 + \frac{9}{4}t^2 - \frac{9}{4}t + \frac{3}{4}\right) + \left(\frac{1}{4}t^3 - \frac{3}{4}t^2 + \frac{3}{4}t - \frac{1}{4}\right) \\ &= 1. \end{aligned}$$

* Pour t appartenant à $[2,3[$:

$$N_{0,3}(t) = 0$$

$$N_{1,3}(t) = 0$$

$$N_{2,3}(t) = \frac{3-t}{3} \left[\frac{1}{2}(t-3)^2\right] = \frac{1}{6} (3-t)^3$$

$$N_{3,3}(t) = \frac{t}{3} \left[\frac{1}{2}(t-3)^2\right] + \frac{3-t}{2} \left[\frac{1}{2}(3-t)(3t-5)\right] = \frac{(t-3)^2}{12} (11t-15)$$

$$N_{4,3}(t) = \frac{t-1}{2} \left[\frac{1}{2}(3-t)(3t-5)\right] + (3-t)(t-2)^2 = \frac{3-t}{4} (7t^2 - 24t + 21)$$

$$N_{5,3}(t) = (t-2)^3.$$

On vérifie de même que précédemment que pour t appartenant à $[2,3[$:

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^5 N_{i,3}(t) &= \left(-\frac{1}{6}t^3 + \frac{3}{2}t^2 - \frac{9}{2}t + \frac{9}{2}\right) + \left(\frac{11}{12}t^3 - \frac{27}{4}t^2 + \frac{63}{4}t - \frac{45}{4}\right) \\ &\quad + \left(-\frac{7}{4}t^3 + \frac{45}{4}t^2 - \frac{93}{4}t + \frac{63}{4}\right) + (t^3 - 6t^2 + 12t - 8) \\ &= 1. \end{aligned}$$

On peut résumer les résultats précédents sous forme de tableau : (3)

	$0 \leq t < 1$	$1 \leq t < 2$	$2 \leq t < 3$
$N_{0,3}(t)$	$(1-t)^3$	0	0
$N_{1,3}(t)$	$\frac{t}{4} (7t^2 - 18t + 12)$	$\frac{1}{4} (2-t)^3$	0
$N_{2,3}(t)$	$\frac{t^2}{12} (-11t + 18)$	$\frac{1}{12} (7t^3 - 36t^2 + 54t - 18)$	$\frac{1}{6} (3-t)^3$
$N_{3,3}(t)$	$\frac{1}{6} t^3$	$\frac{1}{12} (-7t^3 + 27t^2 - 27t + 9)$	$\frac{(t-3)^2}{12} (11t-15)$
$N_{4,3}(t)$	0	$\frac{1}{4} (t-1)^3$	$\frac{3-t}{4} (7t^2 - 24t + 21)$
$N_{5,3}(t)$	0	0	$(t-2)^3$

b) Étude des fonctions $N_{i,3}$ pour i appartenant à $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$.

Les courbes représentatives de ces six fonctions dans le même repère sont données à la figure 82.

• $i=0$:

$$N_{0,3}(t) = \begin{cases} (1-t)^3 & \text{si } t \text{ appartient à } [0,1[\\ 0 & \text{si } t \text{ appartient à } [1,2[\end{cases}$$

$$N'_{0,3}(t) = \begin{cases} -3(1-t)^2 & \text{si } t \text{ appartient à } [0,1[\\ 0 & \text{si } t \text{ appartient à } [1,2[\end{cases}$$

$$N''_{0,3}(t) = \begin{cases} 6(1-t) & \text{si } t \text{ appartient à } [0,1[\\ 0 & \text{si } t \text{ appartient à } [1,2[\end{cases}$$

t	0	1	3
$N'_{0,3}(t)$	-3	-	0 nulle
$N_{0,3}(t)$	1	↘	0 — 0 —→ 0

• $i=1$:

$$N_{1,3}(t) = \begin{cases} \frac{7}{4}t^3 - \frac{9}{2}t^2 + 3t & \text{si } t \text{ appartient à } [0,1[\\ \frac{1}{4}(2-t)^3 & \text{si } t \text{ appartient à } [1,2[\\ 0 & \text{si } t \text{ appartient à } [2,3[\end{cases}$$

$$N'_{1,3}(t) = \begin{cases} \frac{21}{4}t^2 - 9t + 3 & \text{si } t \text{ appartient à } [0,1[\\ -\frac{3}{4}(2-t)^2 & \text{si } t \text{ appartient à } [1,2[\\ 0 & \text{si } t \text{ appartient à } [2,3[\end{cases}$$

Dans l'intervalle $[0,1[$ $N'_{1,3}(t)$ s'annule et change de signe pour

$$\alpha = \frac{2}{7}(3 - \sqrt{2}) \approx 0,45 \quad M = f(\alpha) \approx 0,6.$$

$$N''_{1,3}(t) = \begin{cases} \frac{21}{2}t - 9 & \text{si } t \text{ appartient à } [0,1[\\ \frac{3}{2}(2-t) & \text{si } t \text{ appartient à } [1,2[\\ 0 & \text{si } t \text{ appartient à } [2,3[\end{cases}$$

t	0	α	1	2	3
$N'_{1,3}(t)$	3	+ 0	- - $\frac{3}{4}$	- 0	nulle
$N_{1,3}(t)$	0	↗ M	↘ $\frac{1}{4}$	0	→ 0

• $i=2$:

$$N_{2,3}(t) = \begin{cases} -\frac{11}{12}t^3 + \frac{3}{2}t^2 & \text{si } t \text{ appartient à } [0,1[\\ \frac{1}{12}(7t^3 - 36t^2 + 54t - 18) & \text{si } t \text{ appartient à } [1,2[\\ \frac{1}{6}(3-t)^3 & \text{si } t \text{ appartient à } [2,3[\end{cases}$$

$$N'_{2,3}(t) = \begin{cases} -\frac{11}{4}t^2 + 3t = \frac{t}{4}(-11t+12) & \text{si } t \text{ appartient à } [0,1[\\ \frac{7}{4}t^2 - 6t + \frac{9}{2} & \text{si } t \text{ appartient à } [1,2[\\ -\frac{1}{2}(3-t)^2 & \text{si } t \text{ appartient à } [2,3[\end{cases}$$

$N'_{2,3}(t) \geq 0$ pour t appartenant à $[0,1[$

$N'_{2,3}(t)$ s'annule et change de signe dans l'intervalle $[1,2[$ pour

$$\alpha = \frac{3}{7}(4 - \sqrt{2}) \approx 1,11 \quad M = f(\alpha) \approx 0,6.$$

$N'_{2,3}(t) < 0$ pour t appartenant à $[2,3[$

$$N''_{2,3}(t) = \begin{cases} -\frac{11}{2}t + 3 & \text{si } t \text{ appartient à } [0,1[\\ \frac{7}{2}t - 6 & \text{si } t \text{ appartient à } [1,2[\\ 3 - t & \text{si } t \text{ appartient à } [2,3[\end{cases}$$

t	0	1	α	2	3	
$N'_{2,3}(t)$	0	$+\frac{1}{4}$	+	0	$-\frac{1}{2}$	-
$N_{2,3}(t)$	0	$\frac{7}{12}$	\nearrow M	\searrow	$\frac{1}{6}$	0

• $i=3$:

$$N_{3,3}(t) = \begin{cases} \frac{1}{6}t^3 & \text{si } t \text{ appartient à } [0,1[\\ \frac{1}{12}(-7t^3 + 27t^2 - 27t + 9) & \text{si } t \text{ appartient à } [1,2[\\ \frac{(3-t)^2}{12}(11t-15) = \frac{11}{12}t^3 - \frac{27}{4}t^2 + \frac{63}{4}t - \frac{45}{4} & \text{si } t \text{ appartient à } [2,3[\end{cases}$$

$$N'_{3,3}(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}t^2 & \text{si } t \text{ appartient à } [0,1[\\ -\frac{7}{4}t^2 + \frac{9}{2}t - \frac{9}{4} & \text{si } t \text{ appartient à } [1,2[\\ \frac{(3-t)}{4}(-11t+21) & \text{si } t \text{ appartient à } [2,3[\end{cases}$$

$N'_{3,3}(t) \geq 0$ pour t appartenant à $[0,1[$

$N'_{3,3}(t)$ s'annule et change de signe dans l'intervalle $[1,2[$ pour

$$\alpha = \frac{3}{7}(3 + \sqrt{2}) \approx 1,89 \quad M = f(\alpha) \approx 0,6.$$

$N'_{3,3}(t) < 0$ pour t appartenant à $[2,3[$

$$N''_{3,3}(t) = \begin{cases} t & \text{si } t \text{ appartient à } [0,1[\\ -\frac{7}{2}t + \frac{9}{2} & \text{si } t \text{ appartient à } [1,2[\\ \frac{11}{2}t - \frac{27}{2} & \text{si } t \text{ appartient à } [2,3[\end{cases}$$

t	0	1	α	2	3
$N'_{3,3}(t)$	$0 + \frac{1}{2}$	$+$	0	$- - \frac{1}{4}$	$- 0$
$N_{3,3}(t)$	0	$\xrightarrow{\frac{1}{6}}$	M	$\xrightarrow{\frac{7}{12}}$	0

• $i=4$:

$$N_{4,3}(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \text{ appartient à } [0,1[\\ \frac{1}{4}(t-1)^3 & \text{si } t \text{ appartient à } [1,2[\\ \frac{(3-t)}{4}(7t^2 - 24t + 21) = -\frac{7}{4}t^3 + \frac{45}{4}t^2 - \frac{93}{4}t + \frac{63}{4} & \text{si } t \text{ appartient à } [2,3[\end{cases}$$

$$N'_{4,3}(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \text{ appartient à } [0,1[\\ \frac{3}{4}(t-1)^2 & \text{si } t \text{ appartient à } [1,2[\\ -\frac{21}{4}t + \frac{45}{2}t - \frac{93}{4} & \text{si } t \text{ appartient à } [2,3[\end{cases}$$

$N'_{4,3}(t) \geq 0$ pour t appartenant à $[1,2[$

$N'_{4,3}(t)$ s'annule et change de signe dans l'intervalle $[2,3[$ pour

$$\alpha = \frac{1}{7}(15 + 2\sqrt{2}) \approx 2,55 \quad M = f(\alpha) \approx 0,6.$$

$$N''_{4,3}(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \text{ appartient à } [0,1[\\ \frac{3}{2}(t-1) & \text{si } t \text{ appartient à } [1,2[\\ -\frac{21}{2}t + \frac{45}{2} & \text{si } t \text{ appartient à } [2,3[\end{cases}$$

t	0	1	2	α	3
$N'_{4,3}(t)$	nulle	$0 + \frac{3}{4}$	$+$	0	$- - 3$
$N_{4,3}(t)$	0	$\xrightarrow{\frac{1}{4}}$	M	$\xrightarrow{\quad}$	0

• $i=5$:

$$N_{5,3}(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \text{ appartient à } [0,2[\\ (t-2)^3 & \text{si } t \text{ appartient à } [2,3[\end{cases}$$

$$N'_{5,3}(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \text{ appartient à } [0,2[\\ 3(t-2)^2 & \text{si } t \text{ appartient à } [2,3[\end{cases}$$

$$N''_{5,3}(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \text{ appartient à } [0,2[\\ 6(t-2) & \text{si } t \text{ appartient à } [2,3[\end{cases}$$

t	0	2	3
$N'_{5,3}(t)$	nulle	0	$+$ 3
$N_{5,3}(t)$	0	$\xrightarrow{\quad}$	1

Les fonctions $N_{0,3}$, $N_{1,3}$, ..., $N_{5,3}$ sont continûment dérivables jusqu'à l'ordre 2 sur $[0,3[$.

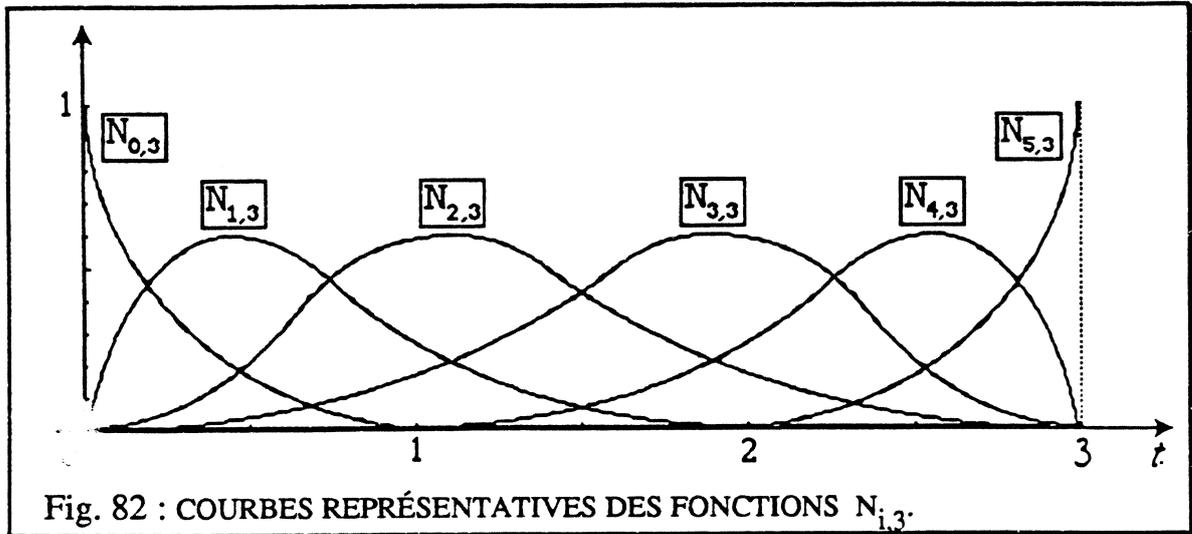


Fig. 82 : COURBES REPRÉSENTATIVES DES FONCTIONS $N_{i,3}$.

2. Construction de la courbe B-spline de degré 3 contrôlée par six points $P_0, P_1, P_2, P_3, P_4, P_5$ avec le vecteur nœud $(0, 0, 0, 0, 1, 2, 3, 3, 3, 3)$. On rappelle que cette courbe est définie paramétriquement par :

$$\vec{OM}(t) = \sum_{i=0}^5 N_{i,3}(t) \vec{OP}_i \quad t \text{ décrivant l'intervalle } [0,3[.$$

Les fonctions B-splines $N_{i,3}$ ont été déterminées à la question 3. (voir le tableau (3)).

Les points de contrôle sont donnés par leurs coordonnées relativement à un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$:

$$P_0 \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}; \quad P_1 \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad P_2 \begin{pmatrix} 12 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad P_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 12 \end{pmatrix}; \quad P_4 \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}; \quad P_5 \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

a) Calculer les coordonnées $(x(t), y(t))$ de $M(t)$ dans les trois cas :
 $0 \leq t < 1$; $1 \leq t < 2$; $2 \leq t < 3$.

b) Construire la courbe.

a) • pour tout t de $[0,1[$, $N_{4,3}(t) = N_{5,3}(t) = 0$

$$\begin{cases} x(t) = -5t^3 + 3t^2 + 9t + 1 \\ y(t) = -4(1-t)^3 + 2t^3 = 2(3t^3 - 6t^2 + 6t - 2) \end{cases}$$

• pour tout t de $[1,2[$, $N_{0,3}(t) = N_{5,3}(t) = 0$

$$\begin{cases} x(t) = 2(3t^3 - 15t^2 + 21t - 5) \\ y(t) = 2(-3t^3 + 12t^2 - 12t + 4) \end{cases}$$

• pour tout t de $[2,3[$, $N_{0,3}(t) = N_{1,3}(t) = 0$

$$\begin{cases} x(t) = 2(3-t)^3 - 4(t-2)^3 = 2(-3t^3 + 21t^2 - 51t + 43) \\ y(t) = 5t^3 - 42t^2 + 108t - 80 \end{cases}$$

b) Calcul des dérivées :

• pour tout t de $[0,1[$,

$$\begin{cases} x'(t) = 3(-5t^2 + 2t + 3) = 3(1-t)(5t+3) \\ y'(t) = 6(3t^2 - 4t + 2) \end{cases}$$

$x'(t) > 0$ et $y'(t) > 0$.

• pour tout t de $[1,2[$,

$$\begin{cases} x'(t) = 6(3t^2 - 10t + 7) = 6(t-1)(3t-7) \\ y'(t) = 6(-3t^2 + 8t - 4) = 6(2-t)(3t-2) \end{cases}$$

$x'(t) \leq 0$ et $y'(t) > 0$.

• pour tout t de $[2,3[$,

$$\begin{cases} x'(t) = -6(3t^2 - 14t + 17) \\ y'(t) = 3(5t^2 - 28t + 36) = 3(t-2)(5t-18) \end{cases}$$

$x'(t) < 0$ et $y'(t) \leq 0$.

$x'(t)$ s'annule et change de signe en $t=1$,

$y'(t)$ s'annule et change de signe en $t=2$.

t	0	t_0	1	2	t_1	3	
$x'(t)$	9	+	0	-	-6	-	-12
$x(t)$	1		8		2	0	-4
$y(t)$	-4		0	2	8		1
$y'(t)$	12	+	6	+	0	-	-9

$y(t)$ s'annule entre 0 et 1:

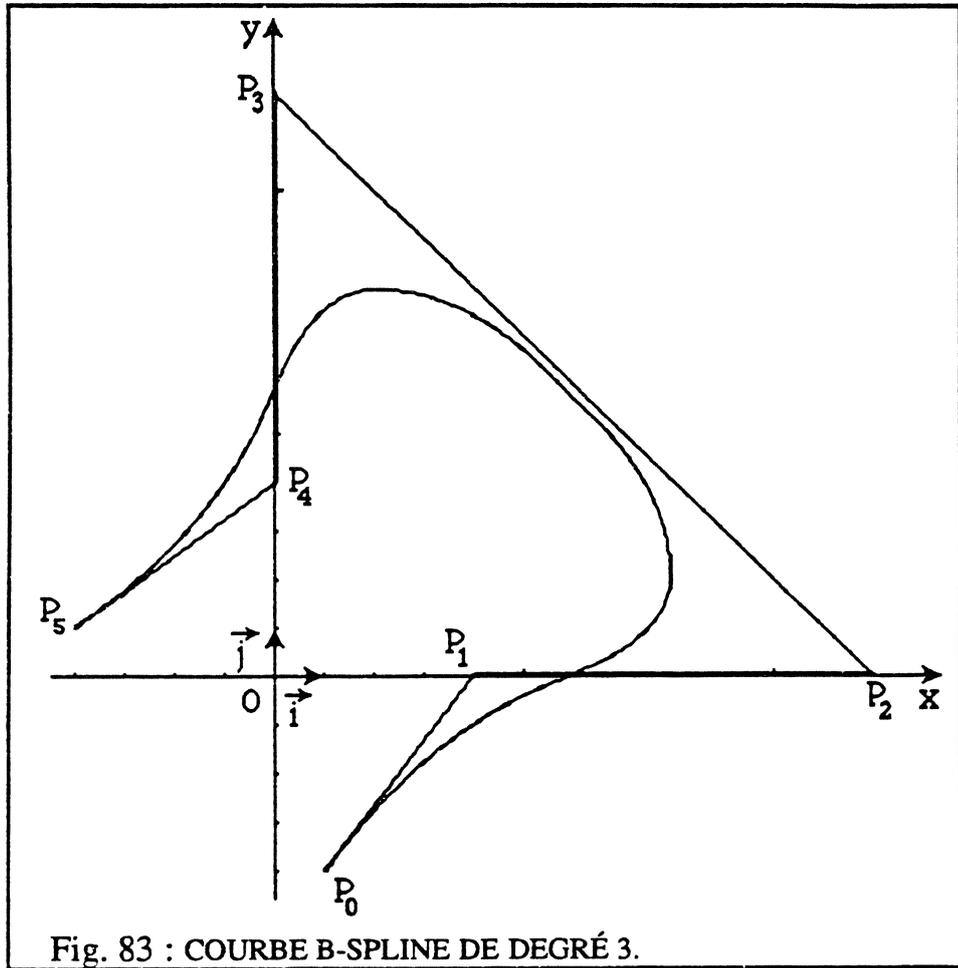
$$y(t) = -4(1-t)^3 + 2t^3 = 2[t^3 - 2(1-t)^3], \quad y(t) \text{ s'annule pour } t = \sqrt[3]{2}(1-t)$$

$$\text{d'où } t = t_0 = \frac{\sqrt[3]{2}}{1 + \sqrt[3]{2}} \approx 0,56 \text{ et } x(t_0) \approx 6,08.$$

$x(t)$ s'annule entre 2 et 3 :

$$x(t) = 2(3-t)^3 - 4(t-2)^3 = 2[(3-t)^3 - 2(t-2)^3], \quad x(t) \text{ s'annule pour } 3-t = \sqrt[3]{2}(t-2)$$

$$\text{d'où } t = t_1 = \frac{3+2\sqrt[3]{2}}{1+\sqrt[3]{2}} \approx 2,44 \quad \text{et } y(t_1) \approx 6,08.$$



3. On garde les données de la question précédente :

* Points de contrôle: $P_0 \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}$; $P_1 \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$; $P_2 \begin{pmatrix} 12 \\ 0 \end{pmatrix}$; $P_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 12 \end{pmatrix}$; $P_4 \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}$; $P_5 \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix}$.

* Vecteur nœud $(0, 0, 0, 0, 1, 2, 3, 3, 3, 3)$ c'est-à-dire :

$$t_0 = t_1 = t_2 = t_3 = 0; \quad t_4 = 1; \quad t_5 = 2; \quad t_6 = t_7 = t_8 = t_9 = 3.$$

Dans le cas où le degré m de la courbe B-spline est égal à 3, l'algorithme de De Boor pour la construction du point $M(t)$ de la courbe s'écrit :

Pour $k=1$ à 3 faire

Pour $j=i$ à $i-3+k$ par pas -1 faire

$$\alpha \leftarrow \frac{(t-t_j)}{(t_{j-k+4}-t_j)}$$

$$P_j^{(k)} \leftarrow \alpha P_j^{(k-1)} + (1-\alpha) P_{j-1}^{(k-1)}$$

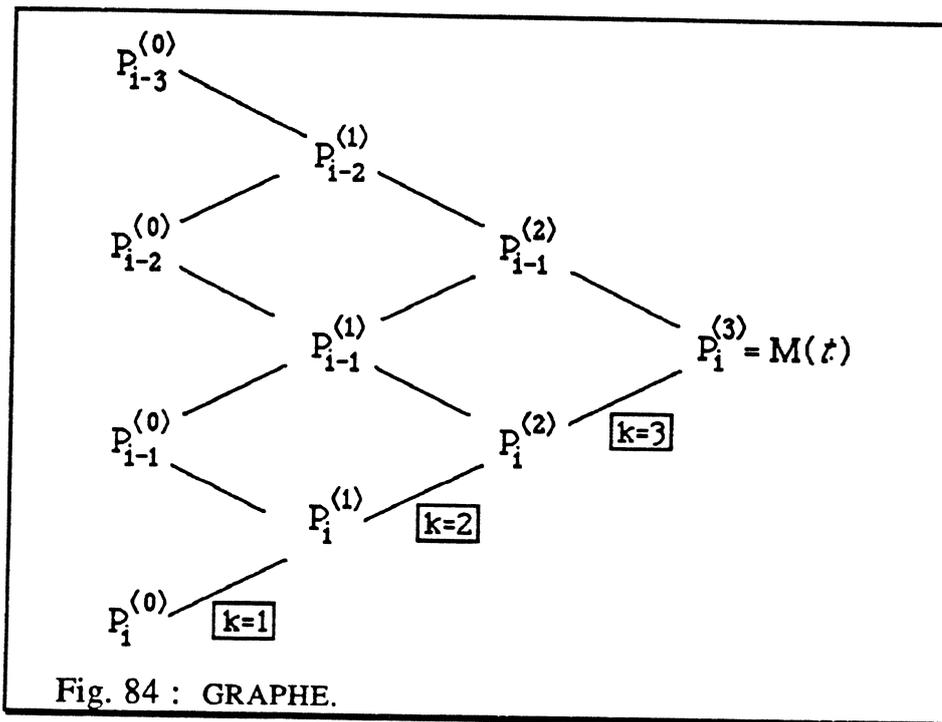
$$M(t) \leftarrow P_i^{(3)}$$

(Voir : Exposé de référence 4.2.).

L'entier i est l'indice tel que $t_i \leq t < t_{i+1}$.

Les points $P_j^{(0)}$ sont les points de contrôle P_j .

Cet algorithme peut être représenté par le graphe (Fig. 84) :



a) Quelle est la valeur de i dans le cas où $t = \frac{3}{2}$?

Quels sont les quatre points de contrôle qui interviennent dans la construction du point $M(\frac{3}{2})$?

b) Pour $t = \frac{3}{2}$, déterminer et construire les points $P_j^{(k)}$ pour $k=1, k=2$ et $k=3$.
En déduire les coordonnées du point $M(\frac{3}{2})$ de la courbe.

a) $1 \leq \frac{3}{2} < 2$ donc $t_4 \leq \frac{3}{2} < t_5$, $i=4$.

L'algorithme s'écrit:

Pour $k=1$ à 3 faire

Pour $j=4$ à $1+k$ par pas -1 faire

$$\alpha \leftarrow \frac{(t-t_j)}{(t_{j-k+4}-t_j)}$$

$$P_j^{(k)} \leftarrow \alpha P_j^{(k-1)} + (1-\alpha) P_{j-1}^{(k-1)}$$

$$M(t) \leftarrow P_4^{(3)}$$

Les points de contrôle intervenant dans la construction de $M(\frac{3}{2})$ sont:
 P_1, P_2, P_3, P_4 .

b) * Pour $k=1$ on détermine les points $P_4^{(1)}, P_3^{(1)}$ et $P_2^{(1)}$.

$j=4$:

$$P_4^{(1)} = \alpha P_4^{(0)} + (1-\alpha) P_3^{(0)}$$

$$\alpha = \frac{t-t_4}{t_7-t_4} = \frac{1}{4}.$$

$P_4^{(1)} = \frac{1}{4}P_4 + \frac{3}{4}P_3$, c'est le barycentre de $\{(P_4, \frac{1}{4}), (P_3, \frac{3}{4})\}$.

$$P_4^{(1)} \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \end{pmatrix}.$$

j=3 :

$$P_3^{(1)} = \alpha P_3^{(0)} + (1-\alpha)P_2^{(0)}$$

$$\alpha = \frac{t-t_3}{t_6-t_3} = \frac{1}{2}.$$

$P_3^{(1)} = \frac{1}{2}P_3 + \frac{1}{2}P_2$, c'est le milieu de $[P_2P_3]$.

$$P_3^{(1)} \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

j=2 :

$$P_2^{(1)} = \alpha P_2^{(0)} + (1-\alpha)P_1^{(0)}$$

$$\alpha = \frac{t-t_2}{t_5-t_2} = \frac{3}{4}.$$

$P_2^{(1)} = \frac{3}{4}P_2 + \frac{1}{4}P_1$, c'est le barycentre de $\{(P_2, \frac{3}{4}), (P_1, \frac{1}{4})\}$.

$$P_2^{(1)} \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

* Pour $k=2$ on détermine les points $P_4^{(2)}$ et $P_3^{(2)}$.

j=4 :

$$P_4^{(2)} = \alpha P_4^{(1)} + (1-\alpha)P_3^{(1)}$$

$$\alpha = \frac{t-t_4}{t_6-t_4} = \frac{1}{4}.$$

$P_4^{(2)} = \frac{1}{4}P_4^{(1)} + \frac{3}{4}P_3^{(1)}$, $P_4^{(2)}$ est le barycentre de $\{(P_4^{(1)}, \frac{1}{4}), (P_3^{(1)}, \frac{3}{4})\}$.

$$P_4^{(2)} \begin{pmatrix} 9 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

j=3 :

$$P_3^{(2)} = \alpha P_3^{(1)} + (1-\alpha)P_2^{(1)}$$

$$\alpha = \frac{t-t_3}{t_5-t_3} = \frac{3}{4}.$$

$P_3^{(2)} = \frac{3}{4}P_3^{(1)} + \frac{1}{4}P_2^{(1)}$, $P_3^{(2)}$ est le barycentre de $\{(P_3^{(1)}, \frac{3}{4}), (P_2^{(1)}, \frac{1}{4})\}$.

$$P_3^{(2)} \left(\frac{7}{2} \right).$$

* Pour $k=3$ on détermine $P_4^{(3)}$ qui est le point $M(\frac{3}{2})$ de la courbe.

$j=4$:

$$P_4^{(3)} = \alpha P_4^{(2)} + (1-\alpha)P_3^{(2)}$$

$$\alpha = \frac{t-t_4}{t_5-t_4} = \frac{1}{2}.$$

$P_4^{(3)} = \frac{1}{2}P_4^{(2)} + \frac{1}{2}P_3^{(2)}$, $P_4^{(3)}$ est le milieu de $[P_3^{(2)} P_4^{(2)}]$.

$$P_4^{(3)} \left(\frac{23}{4} \right), \text{ d'où } M(\frac{3}{2}) \left(\frac{23}{4} \right).$$

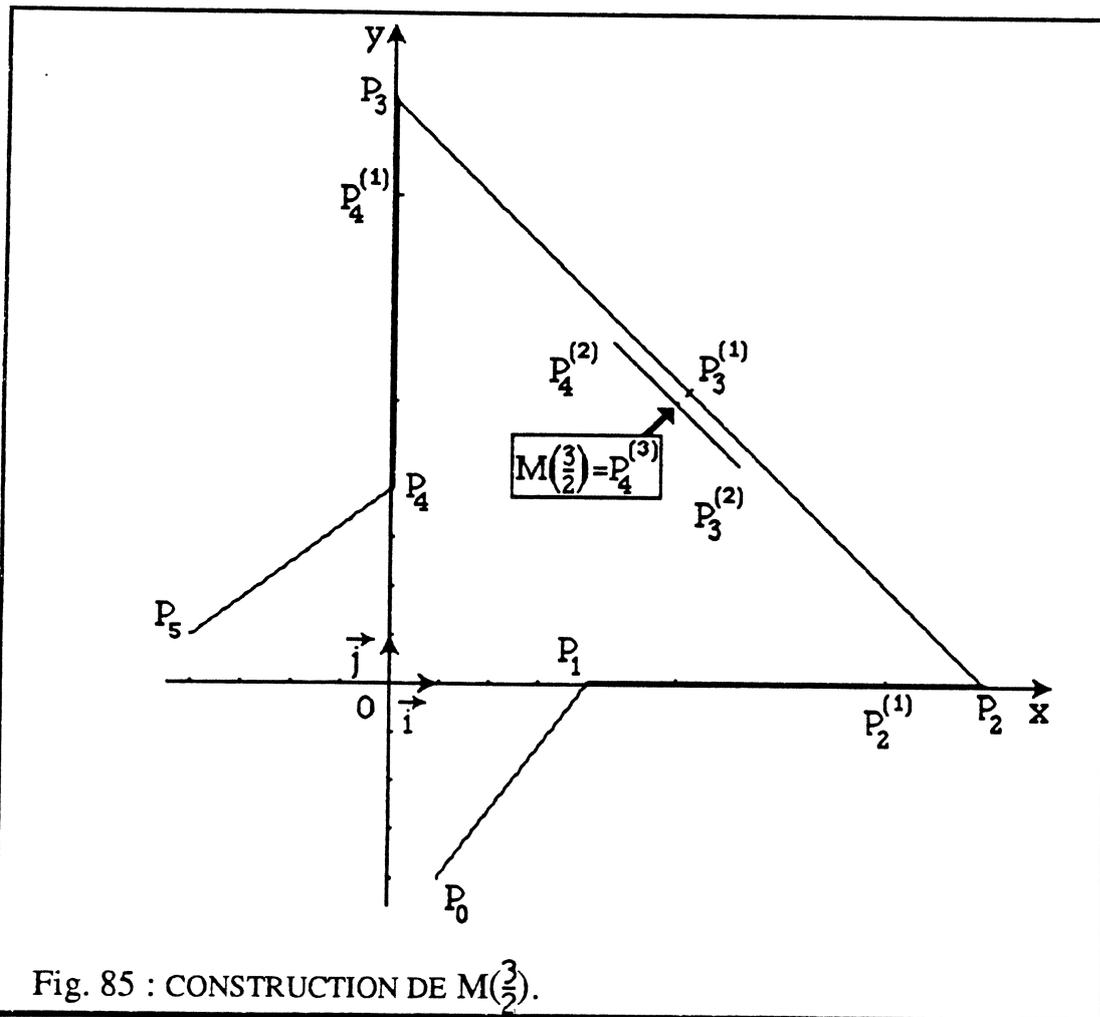


Fig. 85 : CONSTRUCTION DE $M(\frac{3}{2})$.

D. EXEMPLE DE SUJET D'EXAMEN :*(B.T.S. INFORMATIQUE INDUSTRIELLE 1992)*

Ce sujet utilise deux arcs de B-splines du modèle de Riesenfeld et montre l'intérêt du rajout d'un point de contrôle pour modifier localement une forme déjà faite.

Un exemple de courbe B-spline.

1°) On considère les polynômes R_i de degré 2, où i appartient à $\{0, 1, 2\}$, définis pour t , variable réelle appartenant à $[0,1]$, par :

$$R_i(t) = 3 \cdot \sum_{j=0}^{2-i} (-1)^j \frac{(t+2-i-j)^2}{j! (3-j)!}$$

a) Montrer que :

$$R_0(t) = \frac{t^2}{2} - t + \frac{1}{2}$$

$$R_1(t) = -t^2 + t + \frac{1}{2}$$

b) Déterminer $R_2(t)$; vérifier que : $\sum_{i=0}^2 R_i(t) = 1$.

2°) Soit un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$, unité graphique 2 cm.

Soient quatre points $P_1(0,1)$, $P_2(4,1)$, $P_3(6,5)$, $P_4(8,1)$.

On définit une courbe B-spline, associée à ces quatre points, formée de deux arcs de courbes (C_1) et (C_2) :

(C_1) étant l'ensemble des points $M_1(t)$ tels que :

$$\overrightarrow{OM_1(t)} = R_0(t) \cdot \overrightarrow{OP_1} + R_1(t) \cdot \overrightarrow{OP_2} + R_2(t) \cdot \overrightarrow{OP_3}$$

(C_2) étant l'ensemble des points $M_2(t)$ tels que :

$$\overrightarrow{OM_2(t)} = R_0(t) \cdot \overrightarrow{OP_2} + R_1(t) \cdot \overrightarrow{OP_3} + R_2(t) \cdot \overrightarrow{OP_4}$$

a) Montrer que l'arc (C_1) est défini en coordonnées paramétriques par :

$$\begin{cases} x_1 = f(t) = -t^2 + 4t + 2 \\ y_1 = g(t) = 2t^2 + 1 \end{cases}$$

Étudier les variations de f et g pour t appartenant à $[0,1]$ et construire (C_1) .

b) Définir l'arc (C_2) en coordonnées paramétriques pour t appartenant à $[0,1]$.
Construire (C_2) .

c) Vérifier que les arcs (C_1) et (C_2) se raccordent au point $I(5,3)$.
Montrer que les arcs (C_1) et (C_2) ont même tangente en I , et que cette tangente est la droite (P_2P_3) .

d) Montrer que $M_1(0)$ est le milieu du segment $[P_1P_2]$, $M_1(1)$ est le milieu du segment $[P_2P_3]$, $M_2(1)$ est le milieu du segment $[P_3P_4]$.

3°) On dispose de la procédure TRACE (x_A, y_A, x_B, y_B) permettant de tracer le segment $[AB]$ sur un périphérique graphique, (x_A, y_A) et (x_B, y_B) étant les coordonnées respectives de A et de B .

Donner l'algorithme d'un sous-programme ARC $(x_A, y_A, x_B, y_B, x_C, y_C)$ traçant l'arc de courbe B.Spline défini à partir des points A, B, C , selon le processus décrit dans la question 2.

En déduire un algorithme permettant de tracer la courbe B.Spline de la question 2.

4°) On ajoute un point $P'(2,0)$ aux quatre points P_1, P_2, P_3, P_4 de la question 2 en intercalant P' entre P_1 et P_2 .

a) Donner la définition en coordonnées paramétriques de chacun des arcs formant la nouvelle courbe B.Spline.

b) Représenter la courbe B.Spline de la question 2.

Dans le même repère, donner sans calcul, l'allure de la nouvelle courbe B.Spline.

CONCLUSION

Cette introduction sur le modèle de Bézier et le modèle B-spline est incomplète et non exhaustive ; on peut approfondir à l'aide de la bibliographie figurant dans ce document. En particulier l'étude restreinte volontairement au domaine plan et aux courbes peut être complétée par l'étude et la réalisation de surfaces, dans l'espace.

Par exemple dans l'espace, une extension des courbes de Bézier aux surfaces de Bézier donne une représentation paramétrique de surfaces par :

$$\overrightarrow{OM}(t, u) = \sum_{i=0}^m C_m^i t^i (1-t)^{m-i} \sum_{j=0}^n C_n^j u^j (1-u)^{n-j} \overrightarrow{OP_{i,j}}$$

t et u sont des réels appartenant à $[0,1]$.

Les points $P_{i,j}$ sont les points de contrôle. En général, on crée la surface en créant un ensemble de carreaux jointifs (on peut aussi créer des triangles, avec un autre modèle). L'extension du modèle B.Spline se fait de manière analogue. Il existe aussi d'autres modèles comme celui des carreaux de COONS où on définit par des carreaux dont on donne les quatre courbes frontières.

Outre les modèles de Bézier et des B.Spline, s'appuyant des fonctions polynomiales, des extensions de ces modèles utilisent des fractions rationnelles. En particulier on peut citer les modèles NURBS (Non Uniform Rational B.Spline) où on emploie les fractions rationnelles et on choisit des vecteurs nœuds répartis de façon non uniforme. Ceci permet de fédérer au sein d'un même modèle la modélisation exacte de courbes classiques, les coniques et le cercle, et la modélisation d'autres courbes créées ex nihilo, ou approchant des courbes connues. Ceci permet aussi de compenser certaines densités trop fortes de points de contrôle par un élargissement des intervalles intervenant dans le vecteur nœud [TIL 83].

On a proposé une ouverture sur un champ d'étude, montrant la grande variété des modèles mathématiques utilisables en fonction de celle des domaines applicatifs.

À côté des modèles de Bézier et des B-splines qui trouvent leur champ d'application notamment dans la représentation des formes en C.A.O., le modèle de la géométrie fractale, " initialisé " par MANDELROT, présente des modèles mathématiques susceptibles aussi de représenter des formes, mais pour des domaines où les formes sont " irrégulières ", où les processus sont irréguliers et variables suivant les directions: un autre univers ! [CHER 87 , NOËL 92]

L'ordinateur a remplacé le compas et la règle. Le savoir géométrique des bâtisseurs de cathédrale, des peintres et des architectes [BOS 92] s'est enrichi d'autres savoirs. Ces nouveaux modèles sont maintenant à notre disposition, pour faire des formes nouvelles plus élaborées que le cercle, le triangle ou le carré. Saurons-nous utiliser ces modèles pour bâtir des formes harmonieuses, face à des contraintes venues de l'univers physique ou économique ? Cette plus grande capacité dans la création des formes complexes, ce plus grand pouvoir devrait nous amener à de plus grandes réflexions.

Bibliographie complémentaire :

- [CHER 87] Fractals
 G. CHERBIT
 Masson 87
- [NOËL 90] Fractals
 G. NOËL
 Maths et pédagogie n° 77
- [TIL 83] Rational B.Splines
 W. TILLER IEE Computer
 graphic 1983 vol. 3 n° 6
- [BOS 92] L'art des bâtisseurs romans
 Cahier de Boscodon (1992).
-

