IREM PARIS-NORD

SIMPLIFIONS ...

LA SIMPLIFICATION A SES RAISONS
QUE LA RAISON NE CONNAIT PAS !

SPECIMEN
NE PAS emporter
SVP

Jean-Claude EBALLARD
Martine LAIZE
Marc LAURA

Annexe 1 : Les erreurs de calcul
Annexe 2 : Résolutions erronées d'équations se ramenant au 1er degré

Université Paris-Nord.- I.R.E.M.-
Simplifions / J.C. EBALLARD, M.
LAIZE, M. LAURA.- Villetaneuse,
mai 82, 67 pages dactyl., 29 cm.

ISBN 2 86240 067 X

Dépôt légal : 2ème trimestre 1982

400 ex.

7,00 F

Table des matières

Avant - propos

Le groupe METHODOLOGIE de l'IREM Paris-Nord est né en 1977-1978. Son souci était alors l'étude du raisonnement de nos élèves à travers leurs erreurs. Le premier sujet abordé fut l'élément neutre, et les résultats ont été rassemblés dans un dossier.

Ce travail inspira aux membres du groupe l'idée de s'intéresser de plus près à la résolution des équations. Il en sortit un second dossier en 1978-1979.

Lors de cette étude, il apparut que les erreurs commises provenaient pour beaucoup d'une mauvaise appréhension du calcul numérique et, en 1979-1980, le groupe rédigea un dossier sur ce sujet.

Peu à peu se dégagea de celui-ci l'idée que bon nombre de calculs erronés naissaient d'un souci de simplifier. Ayant constaté en particulier que ce qui est "simple" pour les professeurs ne l'est pas forcément pour l'élève et réciproquement, le groupe s'attela en 1980-1981 au problème de la simplification.

Par exemple, simplifier est souvent, dans l'optique de l'enseignant, une préparation à une acquisition plus aisée de notions ultérieures, mais l'enfant, lui, ne se sent pas, ou peu, concerné par ce futur.

Nous aurions souhaité étudier l'emploi des mots "simple", "plus simplement", "simplifier" à travers les productions des élèves et de leurs professeurs. Ceci n'étant pratiquement pas réalisable, nous avons dû analyser l'emploi de ces mots par les auteurs de manuels. Nous sommes conscients du décalage existant entre le langage — écrit — des manuels et celui — plus souvent oral — des enseignants ; néanmoins, cette analyse nous a paru suffisamment significative.

Notre attention s'est portée particulièrement sur les manuels de 1er cycle : l'emploi des mots étudiés y est plus fréquent que dans le 2nd cycle et dans des sens beaucoup plus divers car leur utilisation coïncide souvent avec l'apprentissage de mécanismes supposés acquis après la classe de 3ème.

- DEFINITION ENCYCLOPEDIQUE

Voyons d'abord l'emploi du mot "simple". D'un usage très fréquent dans les manuels de 6ème, il devient rare dans ceux des autres classes. En voici la définition du Dictionnaire alphabétique et analogique de la langue française (Robert 6 volumes) — l'emploi de "simple" en parlant des personnes n'ayant été rencontré qu'une fois :

(1) *Nous avons voulu être simples*

nous ne citons que le second sens :

II (au sens latin de "non complexe")

A. dans un sens absolu.

1° Philos. Qui n'est pas composé ; dans lequel on ne peut distinguer de parties (ou de qualités) différentes. V. Incomplexe ; irréductible ; un.

Quelques exemples :

(2) : *Cherche des solides ayant un forme "simple"* et dont tu ne connais pas le nom géométrique (exemple : ballon de rugby). Certains objets sont des*

** entre guillemets dans le texte*
(1) se reporter à la bibliographie page 23.

solides simples accolés l'un à l'autre. Nomme les solides accolés dans :
- un crayon taillé ...
(3) : Images de quelques figures simples par une symétrie orthogonale.
1) Image d'une droite.

2° Que l'on peut décomposer en éléments, en parties d'une nature définie. V. Indécomposable, indivisible, élémentaire.

Un exemple mathématique : décomposer en éléments simples.

- Qui n'est pas double ou multiple.

(2) : que signifient les flèches rouges (simples ou doubles) ?

(1) : Combien faut-il prévoir de piquets d'angles ? de piquets simples.

Un exemple mathématique : intégrale simple.

- Mécanique

(1) : Un pendule simple est constitué d'un fil souple et d'un écrou.

3° (Placé devant le nom). Qui est uniquement (ce que le substantif implique) à l'exclusion de tout autre caractère. V. Pur, seul. Ordinaire. Dans cet emploi, simple a souvent une valeur restrictive quasi adverbiale.

B. dans un sens relatif. Formé de peu d'éléments.

1° Qui est formé d'un petit nombre de parties, d'éléments (par rapport à d'autres choses de même espèce). V. élémentaire.

(1) : Tu seras rassuré par le plan très simple.

(4) : Trouve un lien verbal, qui te paraît plus simple que "appartient à la même classe de la partition que ..."

(5) : Pour les solutions, on demande une écriture décimale simple.

(6) : On sait que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ vérifient la relation suivante :

$$4(\vec{u}-2\vec{v}) - 3(3\vec{u}-\vec{v}) = 5(2\vec{u}-2\vec{v})$$

Quelle relation simple peut-on déduire ?

2° Qui, étant formé de peu d'éléments, est aisé à comprendre, à utiliser (par opposition à compliqué, difficile). V. Compréhensible. Par ext. V. Commode, facile.

(2) : Exercices simples sur suite d'additions et de multiplications.

Dans beaucoup de manuels :

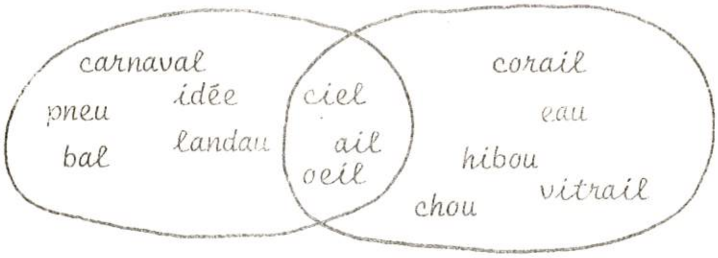
Calcule les sommes suivantes en rendant les calculs les plus simples et les plus rapides possibles.

(4) Tu vas maintenant apprendre à résoudre des équations assez simples.

(4) Le temps passe, il faut bien le mesurer. Les unités traditionnelles ne sont pas très simples à manipuler.

(4) *Coder, c'est souvent définir une bijection de l'ensemble des éléments que l'on veut coder vers un ensemble plus "simple".*

(4) *Les pluriels des mots écrits sur le schéma ne sont pas simples. Cherche-les !*



(4) *... Il proposa une petite déduction qui semble d'abord assez simple : ...*

(1) *Dans le dernier cas, tu devineras les valeurs très simples de ℓ et ℓ'.*

(7) *Les nombres 11500 et 5635 font partie de 2 suites de nombres proportionnels mais ils ne sont pas simples".*

Nous reviendrons sur ces 2 exemples dans la partie consacrée à la simplification.

(7) *Sachant que la France peut-être inscrite dans un carré de 1000 km de côté, quelle échelle simple peut-on choisir pour faire une carte de France sur une feuille de papier de 21 cm sur 29,5 cm.*

3° Qui comporte peu d'éléments ajoutés, peu d'ornements et constitue un ensemble harmonieux par son homogénéïté. Dans l'exemple de (6) cité page 4, la relation attendue est $3\vec{u} + \vec{v} = \vec{0}$.

Voici la définition de "simplifier" donnée par l'encyclopédie déjà citée.

Simplifier : mot didactique, répandu dans la langue courante au XIXème siècle. Rendre plus simple, moins complexe, moins difficile ou moins chargé d'éléments accessoires.

L'emploi de ce mot dans les manuels de mathématique est très fréquent et, semble-t-il, dans 3 contextes :

1/ abréger (assez rare)

2/ transformer l'écriture (le plus usuel dans le 1er cycle)

3/ transformer un problème.

II - SIMPLIFIER : ABREGER

Voici les utilisations que nous avons relevées :

(4) : L'écriture {a,a} se simplifie en {a}. Dans une paire bien écrite, on ne fait pas figurer deux fois le même élément.

A propos de l'écriture d'un ensemble :

(1) : Pour simplifier l'écriture, chaque adjectif est désigné par sa première lettre (minuscule).

(1) : écriture simplifiée ou normale.

Il s'agit de la présentation de la division sous la forme :

$$\begin{array}{r|l} 359 & 43 \\ \hline 015 & 8 \end{array} \quad \text{plutôt que} \quad \begin{array}{r|l} 359 & 43 \\ \hline -\ 344 & 8 \\ \hline 015 & \end{array}$$

(1) Pour simplifier les notations, la symétrie par rapport à (x'x) sera notée a, la symétrie par rapport à (y'y) sera notée b, la symétrie par rapport à O sera notée c.

(3) Pour simplifier, une fois l'unité de longueur choisie, nous notons de la même manière une longueur et sa mesure.

(7) Sur la figure, on a hachuré le rectangle repéré par le couple (3,1) ; pour simplifier, nous dirons "on a hachuré le rectangle (3,1)".

(3) Nous sommes en présence de 3 êtres géométriques :

- le quadruplet (A,B,C,D)

- le quadrilatère ou ligne polygonale fermée à 4 côtés

- la surface parallélogrammatique ...

Pour simplifier, ces trois êtres géométriques seront appelés parallélogrammes.

(?) Pour simplifier votre dessin, prenez un repère orthonormé

Dans chacun de ces exemples, l'expression "pour simplifier" annonce une convention entre l'auteur du manuel et son lecteur, ou une convention plus généralement admise, cette différence n'étant d'ailleurs pas précisée dans tous les manuels :

(10) $\dfrac{1}{1 + (tg\alpha)^2} = (cos\alpha)^2$ *que l'on écrit plus simplement* $\dfrac{1}{1 + tg^2\alpha} = cos^2\alpha$.

Parfois la convention est rejetée par l'élève. C'est le cas de Ø qui est souvent remplacé par {Ø}.

III - SIMPLIFIER : TRANSFORMER L'ECRITURE

1. Etat initial - Etat final.

Que simplifie-t-on ?

Une écriture numérique, littérale, une équation, une inéquation. Cette écriture constitue ce que nous appellerons l'état initial.

Comment simplifie-t-on ?

Par application d'une convention, d'une propriété. Le processus, bien que réversible, n'apparaît pas toujours ainsi dans l'esprit des élèves, pour qui l'état final ne représente pas nécessairement le même être que l'état initial. Il est vrai que dans certains cas, la transformation et son inverse ne relèvent pas du même processus. De plus, une transformation donnée peut être plus fréquente que son inverse :

- on transforme plus souvent $\dfrac{10}{\sqrt{5}}$ en $2\sqrt{5}$ que le contraire ;
- il est immédiat que $(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd$, mais la transformation inverse nécessite une étape intermédiaire ;
- la transformation de $\dfrac{\cos x}{2\cos^2 x - (\cos x + \sin x)(\cos x - \sin x)}$ en $\cos x$ est sans retour immédiat.

Pourquoi simplifie-t-on ?

L'objectif n'est pratiquement jamais explicité. Citons cependant :

(11) *Simplifie avant d'effectuer les multiplications, tu gagneras du temps !*

et un paragraphe titré :

(11) *Pourquoi simplifier des écritures contenant des radicaux.*

Qu'est-ce que simplifier ? Comment reconnaît-on une écriture "simple" ?

Parmi les manuels que nous avons consultés, seul "Faire des maths" explicite ces mots. Il y consacre même un chapitre entier, dans chacune des classes 4ème et 3ème.

Citons :

Simplifier, réduire, effectuer ... Les 3 verbes précédents sont synonymes. Ils signifient : "écrire la même chose avec moins de signes".

Nous avons tenté, au travers du texte et des exercices de manuels, de cerner le sens des mots "simple", "simplifier". Ajoutons que cela relève de l'analyse. Cela ne signifie nullement que nous approuvions ou non l'emploi de ces mots.

2. Simplicité d'un nombre.

Il semble qu'un nombre soit "simple" s'il est déjà familier, et familier parce qu'introduit antérieurement. Il se dégage une hiérarchie entre les nombres qui est, elle, souvent explicite.

- Les nombres les plus "simples" sont les entiers et, parmi eux, ceux dont la valeur absolue est inférieure à 10, puis 100, et les multiples de 10.

(1) *Calcule de la manière la plus simple* $(+6)+(+15)+(+4)$.

(3) *Effectue le plus simplement possible* $\frac{1}{5} + 2 + \frac{3}{2} + \frac{4}{5} + \frac{7}{2}$.

(1) *Dans le dernier cas, tu devineras les valeurs très simples de* ℓ *et* ℓ'.

Ces valeurs sont 10 et 20, les autres nombres étant des décimaux et des entiers non multiples de 10.

(7) *Si vous voulez indiquer la distance entre 2 villes, vous pouvez dire A et B sont séparées de 94000 m.*
Vous simplifierez l'écriture de cette distance en changeant d'unité.
94 km = 94000 m.

(5) *Calcule le plus simplement possible* $4^3 \times 25^3$; $19 \times 92 + 19 \times 8$.

(7) *Les nombres 11500 et 5635 font partie de 2 suites de nombres proportionnels mais ils ne sont pas simples.*

- Viennent ensuite les décimaux, puis les rationnels.

(12) *Simplifier le quotient* $\frac{128}{44}$, *c'est le remplacer par le quotient égal* $\frac{32}{11}$ *dans lequel les termes sont plus petits. Par contre,* $\frac{3,2}{1,1}$ *dont les termes sont plus petits est plus "compliqué" car il y a des virgules.*
Tu auras simplifié une écriture fractionnaire quand :

. elle ne renfermera plus de nombre à virgule.

. le numérateur et le dénominateur seront les entiers les plus petits : ils n'auront alors aucun autre diviseur commun que 1.

. elle ne renfermera pas plus d'un signe moins, ce signe n'étant pas au dénominateur.

et à propos des équations,

(12) *Quand il y a des écritures fractionnaires, cela se complique encore.*

Mais quelle est la réponse attendue à la consigne :

(12) *Ecris plus simplement* $\frac{2,13}{100}$; $2,13 \times 10^{14}$.

(3) *Nous avons vu que $\frac{10}{30}$, $\frac{5}{15}$, $\frac{2}{6}$, $\frac{1}{3}$ sont quatre notations [...].*

La plus simple des 4 écritures est $\frac{1}{3}$.

Nous ne saurons pas pourquoi.

(3) *Donner l'écriture la plus simple de chacun des rationnels ...*

Les 6 premiers nombres sont des naturels. Parmi les 6 suivants, figurent un entier et trois inverses d'entiers.

On peut également trouver de nombreux exercices du type :

Ecrivez d'une façon plus simple $\dfrac{1}{\frac{7}{9}}$ ...

On peut en conclure que l'écriture la plus simple d'un rationnel est $\frac{a}{b}$ avec $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{N}^*$ et $|a|$ et b les plus petits possibles.

- Enfin, les écritures numériques les plus complexes semblent être celles contenant des radicaux.

(6) *Simplifier* $\sqrt{49}$, $\sqrt{27^2}$, $(\sqrt{8})^2$

(6) *Simplifier* $\sqrt{4\times 0{,}01}$, $\sqrt{9\times 0{,}0016}$

(6) *Simplifier* $\sqrt{\frac{250}{90}}$, $\sqrt{\frac{72}{50}}$

(10) *Simplification de l'écriture d'une somme.*

(10) *Simplifier* $2\sqrt{13} - \sqrt{117} + 3\sqrt{52}$.

La complexité est fonction du nombre de radicaux, mais aussi de leur place.
Nous avons trouvé différentes expressions concernant la transformation $a\sqrt{b} \rightleftarrows \sqrt{a^2 b}$ ($a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$) et parfois dans le même manuel.

(6) ex.13 : *Sortir du radical le plus grand naturel possible dans*

$\sqrt{48}$, $\sqrt{54}$, $\sqrt{180}$.

ex.14 : *Simplifier le plus possible*

$\sqrt{300}$, $\sqrt{160}$, $\sqrt{32}$, $\sqrt{45}$, $\sqrt{1000}$.

(11) *Savoir trouver l'écriture la plus simple de certains irrationnels*

$\sqrt{18} = 3\sqrt{2}$

$\sqrt{6-2\sqrt{5}} = \sqrt{5} - 1$

Nous avons également trouvé, mais peu fréquemment, "simplifier" pour "rendre entier le dénominateur".

(8) *Simplifier les rapports* $\dfrac{1}{\sqrt{3}-2}$; $\dfrac{1}{\sqrt{3}+2}$

(10) *Simplification de calculs*

Exemples : $\sqrt{\frac{51}{49}} = \dfrac{\sqrt{51}}{\sqrt{49}} = \dfrac{\sqrt{51}}{7}$

Nous avons ainsi tenté de dégager, à travers le texte et les exercices de manuels une hiérarchie entre les nombres.

Cette hiérarchie est l'ordre d'apparition des différentes notions dans l'apprentissage : entiers, décimaux, rationnels, irrationnels. Elle est aussi directement liée, comme nous le verrons, au nombre de caractères qui interviennent dans l'écriture : chiffres, signes séparateurs (virgule, parenthèses, signes opératoires, barre de fraction, radical ...). Ainsi il semble que l'objectif essentiel (le seul ?) de la "simplification" soit de remonter dans la hiérarchie des nombres et de diminuer dans une écriture le nombre de "termes", de séparateurs. La répétition de tels exercices conduit à certains comportements d'élèves : familiarisés aux manipulations d'entiers et de rationnels et habitués à ce que tout calcul conduise à un résultat de ce type, ou bien ils considèrent un résultat "compliqué" comme faux, ou bien ils pensent que le calcul est inachevé et ils font des manipulations sur les nombres et "les séparateurs" et même les omettent pour parvenir à leur fin : obtenir un résultat "simple", qui ait un aspect fini. Il est vraisemblable que ce comportement soit une des causes des erreurs que nous rencontrons souvent.

Quelques exemples :

. La "création" de règles permettant de poursuivre un calcul pour aboutir à un résultat plus "compact" :

$$\sqrt{75} + 5 = \sqrt{80}$$
$$2\sqrt{5} + 3\sqrt{3} = 5\sqrt{8}$$
$$\frac{3\sqrt{2} - 7}{\sqrt{2}} = 3 - 7 = -4$$

surtout lorsque cette idée est renforcée par les nombres en présence :

$$\sqrt{75} + \sqrt{25} = \sqrt{100} = 10$$

. L'omission du symbole $\sqrt{\ }$ ou de la barre de fraction qui intervient presque toujours en fin de calcul :

$$5\sqrt{2} = 2 \times 25 = 50$$
$$\frac{\sqrt{5} \times \sqrt{8}}{\sqrt{70}} = \sqrt{\frac{40}{70}} = \sqrt{\frac{4}{7}} = \frac{2}{7}$$
$$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{27}} = \sqrt{\frac{3}{27}} = \sqrt{\frac{1}{9}} = \frac{1}{\sqrt{9}} = \frac{1}{3} = 3$$

Ce phénomène est abordé dans l'un des "rapports et diplômes élaborés pour le D.E.A. de didactique des maths" publiés en 80 par l'Université Louis Pasteur, Université de Nancy 1. Dans le rapport : "un questionnaire sur les propriétés opératoires" de H. Capsilis, on peut lire, à propos d'un exemple analogue :

"... à force de penser à quelque chose de plus difficile, on oublie les choses qui l'entourent [...].

On peut dire qu'il s'agit d'un phénomène de palier. L'erreur n'est pas commise à l'endroit de la difficulté mais à son voisinage : l'ultime "marche" qui sépare de la réponse correcte n'est pas franchie, malgré sa faible hauteur."

et un peu plus loin :

"La taille des nombres a pour conséquence l'augmentation du nombre d'abandons (non réponse) et du nombre d'erreurs arithmétiques ... mais on ne peut pas affirmer que la "taille" des nombres peut intervenir dans des phénomènes qui, à priori, ne lui sont pas aussi liés, c'est-à-dire des phénomènes de procédure de calcul.

. Les simplifications abusives.

$$\frac{a+c}{b+c} - \frac{a-c}{b-c} = \frac{a}{b} - \frac{a}{b} = 0$$

$$\sqrt{28} - \sqrt{63} + \sqrt{7} = \sqrt{4}\,\sqrt{7} - \sqrt{9}\,\sqrt{7} + \sqrt{7} = 2\,\sqrt{7} - 3$$

3. Simplification d'une expression

La complexité d'une expression numérique ou littérale est liée au nombre et au type des caractères qui interviennent dans l'écriture : chiffres, signes séparateurs, etc ...

Très tôt, l'élève apprend à "simplifier" en <u>supprimant</u> :

- <u>des signes opératoires</u> :

(13) Ecriture simplifiée : il manque un signe opératoire.

5a veut dire 5xa

ab veut dire axb.

(13) On peut aller plus loin dans la simplification en convenant de ne plus écrire dans les sommes :

- les signes + d'addition

...

- <u>des parenthèses</u> :

(13) Lorsqu'il n'y a pas de parenthèses, la multiplication a priorité sur l'addition et la soustraction ; c'est une convention faite pour simplifier l'écriture.

(13) On peut aller plus loin dans la simplification en convenant de ne plus écrire dans les sommes :

- les signes + d'addition

- les parenthèses entourant les nombres relatifs, et le signe + qui se trouve placé au début.

(14) *Simplifier au maximum l'écriture des expressions suivantes sans effectuer d'opérations :*

$(+5) + (-8)$

$(-a) + (-b) \dots$

(4) justifie cette simplification :

La présence de parenthèses dans une expression donne une impression de complication. Autant que possible, on cherche à les supprimer.

Mais toutes les simplifications ne résultent pas de conventions :

(5) : *Simplifier l'écriture de* $(5a^2)^3$.

(6) : *Simplifier les expressions suivantes :*

$-(\vec{u}+\vec{v})$; $-(-\vec{u}+\vec{v})$; $-(\vec{v}-\vec{u})$

- des symboles :

En fait, il s'agit quelquefois de remplacer un symbole par un autre. En quoi est-ce plus simple ?

(6) : *Simplifier les écritures suivantes où x est un réel quelconque :*

$\sqrt{x^2}$; $\sqrt{(x+1)^2}$; $\sqrt{x^2-2x+1}$

(10) : *Simplifier :*

$\sqrt{a^4}$; $\sqrt{a^6}$

Simplifier, c'est aussi diminuer :

- le nombre de termes :

(4) *Simplifie les écritures suivantes :*

$18\times18\times18\times18$

$(-6)\times(-6)\times(-6)\times(-6)\times(-6)\times(-6)\times(-6)\times(-6)\times(-6)$

$b.b.b.b.b.b.b.b.b.b.b.b.b.b$

$5^2+5^2+5^2+5^2+5^2$

(13) *Ecrivez plus simplement :*

$a + 2a + 3a$

$a \times 2a \times 3a$

(15) *Ecrire de façon plus simple les réels suivants :*

$(7x + \frac{3}{5})^2 + (7x - \frac{3}{5})^2$ *et* $(7x + \frac{3}{5})^2 - (7x - \frac{3}{5})^2$

(6) *Simplifier les expressions suivantes :*

$\overrightarrow{MN} - \overrightarrow{RQ} - \overrightarrow{PN} + \overrightarrow{RS} - \overrightarrow{TS} =$

$\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{EF} - \overrightarrow{GF} - \overrightarrow{HG} =$

(10) *On veut simplifier l'écriture de* $g(x) = \dfrac{x^2-4}{3x^2-6x}$

......

On a mis en évidence, dans $g(x) = \dfrac{(x-2)(x+2)}{3x(x-2)}$ *, la simplification par* $(x-2)$ *en supposant* $x-2 \neq 0$.

- le nombre de fonctions intervenant :

(6) *Simplifier l'expression :*

$$\frac{\cos^2 x \ tg\, x}{\sin x}$$

(3) *Quelle est l'image de A dans la translation* $t_{\vec{BC}} \circ t_{\vec{AB}}$?
Nommer plus simplement cette dernière translation.

4. Simplification d'une égalité, d'une inégalité.

Cette expression fut très rarement rencontrée. Nous avons trouvé cependant :

(10) : *Simplification d'égalités.*

Il s'agit de la transformation de $k\vec{v} = k\vec{v}'$ *en* $\vec{v} = \vec{v}'$, *k étant un réel non nul et* $(\vec{v}, \vec{v}')$ *un couple de vecteurs.*

(10) : *Simplifier :*

a) $3x - (7+2x) \leqslant 4 - 2x$

b) $4x - 7 \geqslant -12$

Simplifier :

a) $\frac{4x}{3} - \frac{1}{4} < \frac{5}{6}$

b) $0,33\,x - 0,13 \leqslant \frac{15}{4}$.

IV - ACTIONS SIMPLIFICATRICES : LES ERREURS QUI EN DECOULENT.

Dans un premier temps, nous allons définir ce que nous entendons par "actions simplificatrices" : que se cache-t-il derrière le mot magique "simplifier" ?

Et dans un second temps, nous reprendrons chacun des paragraphes précédents en montrant les erreurs qui peuvent découler de ce souci de simplifier.

1° - Actions simplificatrices.

A. Supprimer

Supprimer des parenthèses : $a + (b+c) = a+b+c$

$A + (b-c) = a+b-c$.

Supprimer un nombre : $\frac{2a}{2b} = \frac{a}{b}$.

Supprimer un symbole ou plusieurs symboles :

$|a|^2 = |b|^2 \Longleftrightarrow a^2 = b^2$

$\sqrt{3^2 \times 7^2} = 3 \times 7$

B. Avoir seulement un ...

Avoir seulement une puissance : $a^2b^2 = (ab)^2$

Avoir seulement un quotient : $\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b}$

Avoir seulement un radical : $\sqrt{2} \times \sqrt{7} = \sqrt{14}$

Avoir seulement une valeur absolue : $|a| \times |b| = |ab|$.

C. Associer

$(ax^n)(bx^p) = (ab)x^{n+p}$.

D. Séparer

$(ab = 0) \Longleftrightarrow (a = 0 \text{ ou } b = 0)$

E. Faire sortir

Faire sortir d'un produit : $(2x)(yz) = 2(xyz)$

Faire sortir d'une somme de produits : $ab + ac = a(b+c)$

Faire sortir d'une puissance : $(3x+3y)^2 = 3^2(x+y)^2$

Faire sortir d'une racine carrée : $\sqrt{3^2 \times 7} = 3 \times \sqrt{7} = 3\sqrt{7}$.

F. Faire passer

Comme $2 + x = 7$, $x = 7 - 2$

Comme $5x = 1$, $x = \frac{1}{5}$

Comme $9x < 4$, $x < \frac{4}{9}$.

G. Effectuer

$\frac{10}{2} = 5$

$\frac{1}{4} = 0,25$

$\sqrt{9} = 3$.

2° - Les erreurs qui en découlent.

Simplifier a ses raisons que la raison ne connaît pas ...

A. Supprimer

Supprimer des parenthèses

$(a.b)^2 = a.b^2$

$(a+b).c = a + b.c$

$c.(a+b) = c.a + b$

$(a-b).c = a - b.c$

$c.(a-b) = c.a - b$

$a - (b+c) = a - b + c$.

Supprimer un nombre

$\frac{9}{9} = 9$ ou $\frac{9}{9} = 0$

$\frac{641}{668} = \frac{41}{68}$

$\frac{a+c}{a} = c$ ou $\frac{a-c}{a} = -c$

$\frac{b+a}{c+a} = \frac{b}{c}$ ou $\frac{b-a}{c-a} = \frac{b}{c}$

$\frac{3\sqrt{2} - 7}{\sqrt{2}} = 3 - 7$

$\left(\frac{x^2-4}{x+2} = 0\right) \Longleftrightarrow (x^2-4 = 0)$

$(3x + 1 + \frac{2x+5}{4} = \frac{x+1}{4}) \Longleftrightarrow (3x + 1 + 2x + 5 = x + 1)$

$\left((5x - 4)(3x - 8) = (5x - 4)(7x + 9)\right) \Longleftrightarrow (3x - 8 = 7x + 9)$

$3 \times 0 = 3$.

Supprimer un symbole

$\frac{g(a)}{g(b)} = \frac{a}{b}$; $\sqrt{a^2 + b^2} = a + b$; $\sqrt{a^2} = a$

$(|x+3| = |3x-1|) \Longleftrightarrow (x + 3 = 2x - 1)$

$(\sqrt{2x+1} = \sqrt{x-1}) \Longleftrightarrow (2x + 1 = x - 1)$

$\left(\text{Log}(2x+3) = \text{Log}(x+1)\right) \Longleftrightarrow (2x + 3 = x - 1)$

B. Avoir seulement un ...

Avoir seulement une puissance

$3(-2)^2 = (-6)^2$

$a.b^2 = (ab)^2$

$4(x+6)^2 = (4x+24)^2$

$a^2 + b^2 = (a+b)^2$.

<u>Avoir seulement un quotient</u>

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}$$

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{a-c}{b-d}$$

$$\frac{a}{b} + c = \frac{a+c}{b+c} \quad \text{ou} \quad \frac{a}{b} - c = \frac{a-c}{b-c}$$

$$\frac{a}{b} \times c = \frac{a\times c}{b\times c}$$

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{3} = \frac{1}{7}$$

$$\frac{3}{4} + \frac{4}{3} = \frac{4+4}{3+3}$$

<u>Avoir seulement un radical</u>

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{a+b}$$

$$\sqrt{75} + \sqrt{25} = \sqrt{100}$$

$$\sqrt{75} + 5 = \sqrt{80}$$

$$\frac{\sqrt{42}}{2} = \sqrt{21}$$

$$\sqrt{a} - \sqrt{b} = \sqrt{a-b}$$

<u>Avoir seulement une valeur absolue</u>

$$|x+1| + |2x-3| = |3x-2|$$

$$|x+3| - |x+5| = |-2|$$

C. <u>Associer</u>.

$$(3+a)(5+b) = 15 + ab$$

$$(3+a)(5+b) = 3b + 5a$$

$$2 + 5t = 7t$$

$$6x + x\sqrt{3} = 7x\sqrt{3}$$

$$2\sqrt{5} + 3\sqrt{3} = 5\sqrt{8}$$

$$5b + 3b - 4b = b^3(5+3-4)$$

$$4a + ab = 2a(4+b)$$

$$15\,ac + 5a = 5a(3c + a)$$

$$15\,ac + 5a = 5a(3c)$$

D. Séparer

$$(x^2 + 2x + 1 = 0) \Longleftrightarrow (x(x+2) = -1)$$

donc $(x^2 + 2x + 1 = 0) \Longleftrightarrow (x = -1 \text{ ou } x + 2 = -1)$.

$$4(x+5) + 3(3x+2) = 0$$

donc $4(x+5) = 0$ et $3(3x+2) = 0$.

$$ax + 2 = 2x + a$$

donc $ax + 2 = 0$ et $2x + a = 0$.

E. Faire sortir

Faire sortir d'un produit

$$(ab).(ac) = a(bc)$$

$$(2x - 2)(2x^2 - 8) = 2(x - 1)(x^2 - 4).$$

Faire sortir d'une somme de produits

$$15ac + 5a = 5a(3c)$$

Faire sortir d'une puissance

$$(a+b)^2 = a^2 + b^2$$

$$(2x + 6)^2 = 2(x + 3)^2$$

$$\left(\frac{16}{81} + \frac{1}{25}\right)^{-1} = \frac{81}{16} + \frac{25}{1}$$

Comme $a^2 = 25$, $a = 5$

Faire sortir d'une racine carrée

$$\sqrt{a^2 + b} = a + \sqrt{b}$$

$$\sqrt{a^2 - b} = a - \sqrt{b}$$

$$\sqrt{7a^2} = a\sqrt{7}$$

F. Faire passer

Comme $7x = 4$, $x = 4 - 7$

Comme $8x = 20$, $x = -\frac{20}{8}$

Comme $5x = 4$, $x = \frac{5}{4}$

Comme $2x = 5$, $x = \frac{5}{-2}$

Comme $x^2 = 3$ donc $x = \frac{3}{x}$

Comme $\frac{x-3}{3x+1} = 0$ donc $x - 3 = 3x + 1$

Comme $-2x > 5$ donc $x > -\frac{5}{2}$

Comme $-3x > +3$ donc $x < \frac{3}{3}$

G. Effectuer

Comme $3x = 2$ donc $x = 0{,}66$

$\frac{4}{7} = 0{,}57$

Comme $x' = 1 - \sqrt{3}$ et $x'' = 1 + \sqrt{3}$

$x' = 0{,}3$ et $x'' = 0{,}27$.

V - SIMPLIFIER : TRANSFORMER UN PROBLEME

Nous venons de voir comment "simplifier" consiste à passer d'un état initial à un état final. Parfois, il ne s'agit que de trouver un état intermédiaire qui rendra plus évidente la dernière partie de la résolution.

C'est le cas, par exemple :

1/ des changements d'unité

(7) : *Vous simplifierez l'écriture de cette distance en changeant d'unité. Vous savez que : 94 km = 94000 m.*

2/ de restrictions ne nuisant pas à la généralité des cas

(9) : *Pour simplifier votre dessin, prenez un repère orthonormé.*

Aussi, par la suite, pour simplifier, nous n'allons plus nous intéresser qu'aux secteurs angulaires saillants et le qualificatif "saillant" sera omis.

3/ des symétries

(6) : *Simplifications dues aux symétries du cercle.*

4/ des changements de variable, de repère, de l'utilisation des périodes

(16) : *Calcul simplifié de la variance d'une série grâce à la propriété suivante :*
... $\rho^2 = \frac{1}{N} \Sigma n_i (x_i)^2$ *et* $\sigma^2 = \rho^2 - \overline{x}^2$.

5/ des astuces du calcul intégral

(17) : $[f(t)g(t)]_a^x = \int_a^x f'(t)g(t)\,dt + \int_a^x f(t)g'(t)\,dt$

ce qui permet de ramener le calcul de l'une des intégrales du second membre à celui de l'autre intégrale s'il est plus simple.

Ne peut-on pas inclure aussi dans ce paragraphe des problèmes du type :

(8) : *En répétant ce procédé, on peut simplifier des dénominateurs où figurent plus de deux racines carrées.*
Exemple : $A = \frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{3}+\sqrt{2}} = \ldots\ldots\ldots = \frac{3\sqrt{2}-\sqrt{30}+2\sqrt{3}}{12}$.

Evidemment, on a "simplifié" le dénominateur mais que dire du numérateur ? Toutefois, si la question suivante est l'encadrement de A, alors ...

VI - CONCLUSION : SIMPLIFIER, POUR QUOI FAIRE ?

Nous venons d'aborder différents aspects de la notion de simplification en effectuant uniquement une classification. Peu à peu sont apparues quelques idées que nous allons évoquer ici.

1/ Notre première constatation est que simplifier n'a pas le même fondement pour l'élève et le professeur, bien que dans les deux cas s'y rattache une évolution des connaissances.

* Pour l'élève, c'est une tentative de se ramener à une notion familière parce que déjà souvent utilisée.
  Ex : hiérarchie des nombres.

* Pour le professeur, c'est une étape nécessaire pour aborder de manière satisfaisante des notions ultérieures.
  Ex : $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ pour l'encadrement.

De telles étapes mènent parfois à l'introduction de symboles qui peuvent être rejetés par l'élève : $|a|$ est souvent remplacé par a.

Dans cette deuxième optique, la démarche imposée peut passer aux yeux de l'élève pour :

- une complication gratuite ("Pourquoi fait-on ça ?"),
  Ex : les puissances d'exposant négatif ;
- une sanction injustifiée quand on ne "simplifie" pas ;
- un certain côté maniaque du professeur.

2/ Penchons-nous davantage sur l'intérêt de la simplification vue par l'enseignant :

* le mot "simplifier" dans un énoncé est souvent un moyen pratique d'éviter de trop détailler ce que l'on demande.
  Ex : simplifier
  $32{,}5 - [-3{,}6 + (-4{,}9 + 5{,}3)] + [7{,}9 - (13{,}4 - 5{,}3)]$
  pour ne pas dire calculer en supprimant les parenthèses puis les crochets.
  Il doit alors s'établir une sorte de consensus entre le professeur et l'élève, ce dernier devant faire ce que l'on attend de lui sans que cela soit explicite dans l'énoncé. Mais il arrive souvent qu'il

ne sache plus à quel moment s'arrêter !

Ex : $(2x+1)(3x-5) = 6x^2 - 10x + 3x - 5$

$= 6x^2 - 13x + 5$

$= -7x^3 + 5$

$= -2x^3$

* Simplification est également synonyme de rapidité.

Ex : calculer le plus simplement possible

57×101 .

* Et enfin, voici un tableau illustrant que toute action simplificatrice tend à supprimer des symboles superflus sans en réduire le nombre.

ACTION SIMPLIFICATRICE	MOINS de symboles OPERATOIRES	MOINS de symboles FONCTIONNELS
DECOMPOSER	$a.b = 0 \Leftrightarrow a = 0$ ou $b = 0$ $a^2 + b^2 = 0 \Leftrightarrow a = 0$ et $b = 0$	$\sqrt{a} + \sqrt{b} = 0 \Leftrightarrow a = 0$ et $b = 0$ $\lvert a\rvert + \lvert b\rvert = 0 \Leftrightarrow a = 0$ et $b = 0$
REGROUPER	$a.b + a.c = a.(b+c)$ $ab \neq 0$ $\frac{1}{a} \times \frac{1}{b} = \frac{1}{a.b}$	$\lvert a\rvert . \lvert b\rvert = \lvert a.b\rvert$ $a \geqslant 0$ et $b \geqslant 0$ $\sqrt{a} . \sqrt{b} = \sqrt{a.b}$
SUPPRIMER	$a \neq 0$ $\frac{a.c}{a} = c$ $ac \neq 0$ $\frac{a.b}{a.c} = \frac{b}{c}$ $a + x = a + y \Leftrightarrow x = y$ $a + x < a + y \Leftrightarrow x < y$ $a > 0$ $ax < ay \Leftrightarrow x < y$ $a \neq 0$ $ax = ay \Leftrightarrow x = y$	$ab > 0$ $\lvert a\rvert = \lvert b\rvert \Leftrightarrow a = b$ $a \geqslant 0$ et $b \geqslant 0$ $\sqrt{a} = \sqrt{b} \Leftrightarrow a = b$ f est une injection $f(a) = f(b) \Leftrightarrow a = b$ f est une application croissante $f(a) \leqslant f(b) \Leftrightarrow a \leqslant b$
EFFECTUER	$(3x^2).(2x^3) = 6x^5$ $\frac{3}{4} = 0,75$	$\sqrt{a^4} = a^2$ $\sqrt{0,01} = 0,1$

VII - BIBLIOGRAPHIE

Les nombres entre parenthèses sont les codes utilisés dans cette brochure pour faire référence aux manuels consultés. Ces manuels sont ici dans l'ordre où ils sont cités dans le texte.

(1) Mathématique comtemporaine. 6ème.- Thirioux, Sanchez et Domain, Editions Magnard.

(2) Faire des mathématiques. 6ème.- Deledicq et Lassave, Editions Cedic.

(3) Mathématiques. 4ème.- Collection Maughin, Editions Istra.

(4) Faire des mathématiques. 5ème.- Deledicq et Lassave, Editions Cedic.

(5) Mathématiques. 4ème.- Aguilar, Louquet et Mouha, Editions Colin.

(6) Mathématiques. 3ème.- Collection Renée Polle, Editions Delagrave.

(7) Mathématiques. 6ème.- Queysanne, Revuz, Editions Nathan.

(8) Mathématiques. 3ème.- Blaquière, Boursin, Pisot, Stouls.- Editions Bordas.

(9) Mathématiques. 3ème.- Collection Maughin, Editions Istra.

(10) Mathématiques. 3ème.- Collection Louquet, Editions Colin.

(11) Faire des mathématiques. 3ème.- Deledicq, Lassave, C. et D. Missenard., Editions Cedic.

(12) Faire des mathématiques. 4ème.- Deledicq, Lassave, C. et D. Missenard., Editions Cedic.

(13) Mathématiques. 5ème.- Maughin, Fauvergue, Jeannot, Rieu.- Editions Istra.

(14) Mathématiques. 5ème.- IREM de Strasbourg, Editions Istra.

(15) Mathématiques. 4ème.- Monge, Bégot et Hautcoeur.- Editions Belin.

(16) Terminale G.- Renée Polle., Editions Delagrave.

(17) Terminale D.- Gourion Novelli., Editions Nathan.

Annexe 1

L E S   E R R E U R S   D E   C A L C U L

1 9 7 9 - 1 9 8 0

J.C. EBALLARD
M. LAIZE
M. LAURA
J. ROUGET
M. THEBAULT

SOMMAIRE

Les numéros renvoient aux exemples.

DISTRIBUTIVITE ABUSIVE

A. Distributivité de la multiplication par rapport à la multiplication

1/ $a(b.c) = (a.b)(a.c)$

C 1. $(3-2x)^2 = 3^2 + 2(3.(-2x)) + (2x)^2$
$= 9 + 6(-4x) + 4x^2$
....

2/ $(a.b)(a.c) = a(b.c)$

C 2. $(2x-2)(2x^2-8) = 2(x-1)(x^2-4)$

C 3. $(x+2)(x-5) + (5-x)(x+3) = (x+2)(x-5) - (x-5)(-x-3)$

B. Distributivité de l'addition sur l'addition

C 4. $7t + 14 = 2 + (5t+12)$

C. Distributivité de la multiplication sur la division

$$\frac{b}{c} \times a = \frac{a \times b}{a \times c}$$

C 5. $-\frac{5}{7} \times \frac{3}{2} \times (-3) = \frac{5 \times 3 \times (-3)}{7 \times 2 \times (-3)} = -\frac{45}{42}$

C 6. $\frac{9}{7} \times 4 = \frac{36}{28}$

D. Distributivité de l'addition sur la division

$$\frac{b}{c} + a = \frac{b+a}{c+a}$$

C 7. $\frac{3}{5} + 1 = \frac{4}{6}$

C 8. $\frac{6x-8}{2x+2} - 1 = \frac{6x-8-1}{2x+2-1}$

Remarque : $\frac{b+a}{c+a}$ est le plus souvent transformé en $\frac{b}{c}$; la transformation en $\frac{b}{c} + a$ n'a pas été observée.

TRANSFORMATION DE L'EXPRESSION a.b + a.c

C 9. $5b + 3b - 4b = b^3(5+3-4) = 4b^3$

C 10. $4a + ab = 2a(4+b)$

C 11. $(3+a)(5+b) = 3b + 5a$

C 12. $(3+a)(5+b) = 15 + ab$

C 13. $(2a+3)(2a-3) = 4a^2 - 6a$

FACTORISATION DE a.b+a

C 14. $15ac + 5a = 5a(3c+a)$

C 15. $15\ ac + 5a = 5a(3c)$

C 16. $33a + 11 = 11(a+3)$

C 17. $33a + 11 = 11(3+a)$

MECONNAISSANCE DES REGLES DE PRIORITE

A/ <u>Produit et puissance</u> 1) $a.b^2 = (a.b)^2$

C 18. $4(x+6)^2 = (4x+24)^2$

C 19. $3(-2)^2 = (-6)^2 = 36$

2) $(a.b)^2 = a.b^2$

C 20. $(2x+6)^2 = 2(x+3)^2$

B/ Produit et somme

1) $a + b . c = (a + b).c$

C 21.	$2 + 5t = 7t$
C 22.	$(3 - 2x)^2 = 3^2 + 2(3.(-2x)) + (2x)^2$
	$= 9 + 6.(-2x) + 4x^2$
	$= \quad 15.(-2x) + 4x^2$
	....

2) $(a + b).c = a + b . c$

C 23.	$3x(7 - 4x) = 21x - 4x = 17x$
C 24.	$2a(6 + 3a) = 12a + 3a = 15a$

OPPOSE D'UNE EXPRESSION ALGEBRIQUE

C 25.	$f(x) = (x + 2)^2 - (x + 2)(3x - 1)$
	$= x^2 + 4x + 4 - 3x^2 + x + 6x - 2$
	....
C 26.	$f(x) = (x + 2)^2 - (x + 2)(3x - 1)$
	$= x^2 + 4x + 4 - 3x^2 - x + 6x - 2$
	....
C 27.	Si $x < 3$, $\lvert x - 3 \rvert = x + 3$

APPLICATION A L'ADDITION DES MECANISMES ACQUIS POUR LE MULTIPLICATION

C 28.	$\frac{2}{5}(3 - \frac{1}{2}) = \frac{2}{5} \times \frac{3 - 1}{2}$
C 29.	$\frac{3}{5} + 1 = \frac{4}{5}$
C 30.	$\frac{6x - 8}{2x + 2} - 1 = \frac{6x - 8 - 1}{2x + 2 - 1} = \frac{6x - 9}{2x + 1}$

APPLICATION A LA MULTIPLICATION DES MECANISMES ACQUIS POUR L'ADDITION

C 31. $\frac{4}{3} \times \frac{2}{5} = \frac{20}{15} \times \frac{6}{15} = \frac{120}{15}$

C 32. $\frac{2}{5}\,(3 - \frac{1}{2}) = \frac{2}{5}\,(\frac{6-1}{2}) = \frac{2}{5} \times \frac{5}{2} = \frac{4}{10} \times \frac{25}{10} = \frac{100}{10} = 10$

APPLICATION AU CALCUL ALGEBRIQUE DES MECANISMES ACQUIS POUR LA RESOLUTION DES EQUATIONS

C 33. $f(x) = 6x^2 - 23x + 20$

$$f(\tfrac{4}{3}) = (6 \times \frac{16}{9}) - (23 \times \frac{4}{3}) + 20$$

$$= (\frac{54}{9} \times \frac{16}{9}) - (\frac{207}{9} \times \frac{12}{9}) + \frac{180}{9}$$

$$= (54 \times 16) - (207 \times 12) + 180$$

$$= -\ 1440$$

INVERSE D'UNE SOMME ET SOMME DES INVERSES

C 35. $((-\frac{2}{3})^4 + (\frac{1}{5})^2)^{-1} = (\frac{16}{81} + \frac{1}{25})^{-1}$

$$= \frac{81}{16} + \frac{25}{1}$$

....

QUOTIENT D'UNE SOMME ET SOMME DE QUOTIENTS

1/ $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}$

C 36. $\frac{4}{3} + \frac{7}{3} = \frac{11}{6}$

C 37. $\frac{4}{15} + \frac{2}{12} = \frac{6}{27}$

2/ $\frac{a+c}{b+d} = \frac{a}{b} + \frac{c}{d}$

C 38. $\frac{a+c}{b+c} - \frac{a-c}{b-c} = \frac{a}{b} + \frac{c}{c} - (\frac{a}{b} - \frac{c}{c})$

$= \frac{a}{b} + 1 - \frac{a}{b} + 1$

$= 2$

PRIORITE DU FAMILIER SUR LE NON-FAMILIER

A. Distinction entre variables et constantes

C 39. $2 + 5t = 7t$

C 40. $15ac + 5a = 20\ a^2c$

C 41. $(3+a)(5+b) = 15 + 3b + 5a + ab = 23a^2b^2$

B. Priorité des nombres sur les symboles

1) Avec conservation de leurs places relatives

C 42. $2\sqrt{5} + 3\sqrt{3} = 5\sqrt{8}$

C 43. $\frac{2}{5} + \frac{3}{4} = \frac{5}{9}$

C 44. $\sqrt{75} + \sqrt{25} = \sqrt{75+25} = \sqrt{100} = 10$

C 45. $6x + x\sqrt{3} = 7x\sqrt{3}$

2) Sans respect de leurs places relatives

C 46.	$\sqrt{75} + 5 = \sqrt{80}$
C 47.	$\frac{3}{5} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{5} = 5$
C 48.	$\sqrt{75} = \sqrt{25} \times \sqrt{3} = 3\sqrt{5}$
C 49.	$6\sqrt{3} - 4\sqrt{3} = \sqrt{18} - \sqrt{12}$
C 50.	$\frac{\sqrt{42}}{2} = \sqrt{21}$

OMISSION DE SYMBOLES

A. Les exposants

C 51.	$(x + 2y)(x - 2y) = x - 2yx + 2xy - 4y = x - 4y$
C 52.	$3x(7 - 4x) = 21x - 12x = 9x$

B. Le signe $\sqrt{\ }$

C 53.	$5\sqrt{2} = 2 \times 25 = 50$
C 54.	$6\sqrt{3} - 4\sqrt{3} = \sqrt{36 \times 3} - \sqrt{16 \times 3} = 108 - 48 = 60$
C 55.	$\frac{\sqrt{5} \times \sqrt{8}}{\sqrt{70}} = \sqrt{\frac{40}{70}} = \sqrt{\frac{4}{7}} = \frac{2}{7}$

C. La barre de fraction

C 56.	$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{27}} = \sqrt{\frac{3}{27}} = \sqrt{\frac{1}{9}} = \frac{1}{\sqrt{9}} = \frac{1}{3} = 3$

SIMPLIFICATION ABUSIVE

C 57. $\dfrac{m-1}{m} = -1$

C 57.bis $\dfrac{3\sqrt{2} - 7}{\sqrt{2}} = 3 - 7 = -4$

C 58. $\dfrac{\mathrm{Log}|x+1|}{\mathrm{Log}|x|} = \dfrac{|x+1|}{|x|}$

C 59. $\dfrac{a+c}{b+c} - \dfrac{a-c}{b-c} = \dfrac{a}{b} - \dfrac{a}{b} = 0$

C 60. $\dfrac{9}{9} = 9$

C 61. $\dfrac{9}{9} = 0$

C 62. $\dfrac{641}{668} = \dfrac{41}{68}$

C 63. $\sqrt{28} - \sqrt{63} + \sqrt{7} = \sqrt{4}\sqrt{7} - \sqrt{9}\sqrt{7} + \sqrt{7} = 2\sqrt{7} - 3$

CALCULS EN CROIX

C 64. $\dfrac{3}{4} + \dfrac{4}{3} = \dfrac{8}{6}$

C 65. $\dfrac{4}{3} \times \dfrac{2}{5} = \dfrac{20}{6}$

CONFUSION ENTRE 0 ET 1

C 66. $\frac{2}{3} \times \frac{5}{7} \times \frac{3}{5} \times \frac{7}{2} = 0$

C 67. $\frac{3}{5} + 1 = \frac{3}{5} + \frac{1}{1} = \frac{3}{5}$

C 68. $\frac{4}{4} = 0$

C 69. $3 \times 0 = 3$

C 70. $15ac + 5a = 5a(3c)$

HOMOMORPHISME ABUSIF

1) $f(a) + f(b) = f(a+b)$

C 71. $\sqrt{50} - \sqrt{8} = \sqrt{50-8} = \sqrt{42}$

C 72. $\frac{1}{4} + \frac{1}{3} = \frac{1}{7}$

2) $f(a+b) = f(a) + f(b)$

C 73. $(x+3)^2 = x^2 + 9$

C 74. $\sqrt{x^2+4} = x + 2$

PRESUPPOSE ABUSIF

Une lettre désigne un réel positif :

C 75. $\sqrt{x^2} = x$

CALCUL EN CHAINE

C 76. $4 + 3 = 7 + 2 = 9 + 1 = 10$

C 77. $6 \times 4 - 3 \times 5 = 6 \times 4 = 24 - 3 \times 5 = 15 = 9$

UTILISATION ABUSIVE DU SIGNE D'EGALITE

C 78. 22 : 3 = 7 reste 1

C 79. $\frac{4}{7} = 0{,}57$

Annexe 2

RESOLUTIONS ERRONEES D'EQUATIONS SE RAMENANT AU 1ER DEGRE

1978 - 1979

R. BENABOU
P. COHEN
J.C. EBALLARD
M. LAIZE
M. LAURA
J. ROUGET
M. THEBAULT

SOMMAIRE

Les numéros renvoient aux exemples.

UTILISATION AVEUGLE D'UN MECANISME

Problème	Solution erronée	Classe
EqP 1. Résoudre dans N l'équation $(3x - 2) (x - 7) = 0$	On a successivement: $(3x - 2) (x - 7) = 0$ $3x \cdot x = 7 + 2 + 0$ $3x^2 = 9$ $X^2 = 3$ $x = 3 / x$	3 ème
EqP 2. Résoudre dans R l'équation $x^2 + 2x + 1 = 0$	$x^2 + 2x + 1 = 0$ est équivalente à $x^2 + 2x = -1$ $x (x + 2) = -1$ $x = -1$ ou $x + 2 = -1$ $x = -1$ ou $x = -3$	3 ème
EqP 3. a et b sont des réels donnés. Résoudre dans R l'équation $a (1 + x) = bx$	L'équation s'écrit $a = bx - ax$ si $a - b > 0$ alors $x = \frac{a}{b - a}$ si $a - b < 0$ alors $x = \frac{-a}{b - a}$ si $a - b = 0$ et $a \neq 0$, pas de solution. si $a - b = 0$ et $a = 0$, tout réel est solution.	2 nde A

UTILISATION AVEUGLE D'UN MECANISME

Dans EqP 1, les mécanismes sont :

" Garder les x dans un membre et changer le signe de tout terme qui passe d'un membre à l'autre."

" Trouver une réponse de la forme $x = \dots$ "

Dans EqP 2, il semble qu'il y ait confusion avec :

" $a \cdot b = 0$ équivaut à $a = 0$ ou $b = 0$ "

Un autre mécanisme pourrait être l'utilisation dans R d'un procédé utilisé dans Z :

" si $a \cdot b = -1$ alors l'un des facteurs est -1 et l'autre est 1. "

Dans EqP 3, le mécanisme:

" Quand on multiplie ou l'on divise par un nombre, l'inégalité change de"signe " (sens)" est adapté à une équation.

CONFUSION ENTRE
EQUATION ET INEQUATION

Problème	Solution erronée	Classe
EqP 4. Résoudre dans R, suivant le réel m, l'équation: $mx + 2 = 2x + m$	On a $(m - 2)x = m - 2$ Si $m = 2$, x est un réel quelconque. Si $m > 2$, $(m - 2)x < m - 2$, $x < \frac{m - 2}{m - 2}$ donc $x < 1$ Si $m < 2$, $(m - 2)x > m - 2$, $x > \frac{m - 2}{m - 2}$ donc $x > 1$	2 nde A

CONFUSION ENTRE MULTIPLICATION ET ADDITION

A. Substitution d'une somme à un produit

	Problème	Solution erronée	Classe
EqP 5.	Résoudre dans R $7x = 4$	$7x = 4 \Longleftrightarrow x = 4 - 7 \Longleftrightarrow x = -3$ -3 est la solution.	4 ème

Deux interprétations sont possibles:

1) une lecture incorrecte de $7x$ comme $7 + x$, et une résolution correcte de l'équation $7 + x = 4$.

2) une lecture correcte de $7x$, mais une résolution incorrecte de l'équation $7x = 4$ par l'addition de l'opposé de 7 au lieu de la multiplication par l'inverse de 7.

B. Utilisation pour la multiplication des mécanismes acquis pour l'addition.

	Problème	Solution erronée	Classe
EqP 6.	Résoudre dans R, l'équation $7x + 7 = 27 - x$	$8x = 20 \Longleftrightarrow x = -\frac{20}{8}$ $8x = 20 \Longleftrightarrow x = \frac{20}{-8}$	2 nde A

"Pour un terme d'une somme, tout changement de membre entraine un changement de signe."

CONFUSION ENTRE MULTIPLICATION ET ADDITION

C. Utilisation pour une somme d'une propriété de produit dans R

Problème	Solution erronée	Classe
EqP 7. (dans R) Trouver l'ensemble des solutions de l'équation $4(x+5)+3(3x+2)=0$	L'égalité signifie: $4(x+5)=0$ ou $3(3x+2)=0$ L'ensemble des solutions est $\{-5, -\frac{2}{3}\}$	3 ème

Utilisation de $(\forall_{a\in R})(\forall_{b\in R})(a.b=0 \Longleftrightarrow (a=0 \text{ ou } b=0))$

TRADUCTION D'UN "OU" PAR $\cap$

	Problème	Solution erronée	Classe
EqP 8.	Résoudre dans R l'équation $(5x^2 - x)(3x^2 + x) = 0$	L'ensemble S_1 des solutions de $5x^2 - x = 0$ est $S_1 = \left\{0, \frac{1}{5}\right\}$ L'ensemble S_2 des solutions de $3x^2 + x = 0$ est $S_2 = \left\{0, -\frac{1}{3}\right\}$ L'ensemble S des solutions de l'équation proposée est $S = S_1 \cap S_2$	2 nde C

INVERSION DE TERMES

Problème	Solution erronée	Classe
EqP 9. Résoudre dans R $5x = 4$	L'équation s'écrit $x = \frac{5}{4}$	4 ème
EqP 9bis. Résoudre dans R $2x - 5 = 0$	L'équation s'écrit successivement: $2x - 5 = 0$ $x = 5 - 2$ $x = -\frac{2}{5}$	3ème Am.

PRIORITÉS DE CERTAINS NOMBRES SUR D'AUTRES

A. Les quotients sont privilégiés.

	Problème	Solution erronée	Classe
EqP 10.	Résoudre dans R l'équation $3x + 1 + \frac{2x + 5}{4} = \frac{x + 1}{4}$	En multipliant les deux membres par 4, on obtient: $3x + 1 + 2x + 5 = x + 1$ ...	2 nde A

B. 1 est privilégié par rapport à 0.

	Problème	Solution erronée	Classe
EqP 11.	Résoudre dans R l'équation $2x + 1 = 1 - 3x$	L'équation s'écrit $5x = 0$ c.à.d. $x = \frac{1}{5}$ ...	2 nde AB
EqP 12.	Résoudre dans R l'équation $\frac{x - 3}{3x + 1} = 0$	Pour $x \neq \frac{-1}{3}$, on a: $\frac{x - 3}{3x + 1} = 0$ $x - 3 = 3x + 1$ ...	2 nde C

PRIORITES DE CERTAINS NOMBRES SUR D'AUTRES

C. Une valeur approchée est privilégiée par rapport à une valeur exacte.

Problème	Solution erronée	Classe
EqP 13. Résoudre dans R, l'équation $3x - 2 = 0$	L'équation s'écrit $3x = 2$ c.à.d. $x = 0,66$ ...	3 ème

D. Zéro est privilégié.

Problème	Solution erronée	Classe
EqP 14. Résoudre dans R, suivant le réel m, l'équation $mx + 2 = 2x + m$	$mx + 2 = 2x + m \Longleftrightarrow \begin{cases} mx + 2 = 0 \\ \text{et} \\ 2x + m = 0 \end{cases}$ Si $m \neq 0$ $\left(x = -\frac{2}{m} \text{ et } x = -\frac{m}{2} \right)$ donc $-\frac{2}{m} = -\frac{m}{2}$ d'où $m^2 = 4$ si $m = -2$ alors $x = 1$ si $m = 2$ alors $x = -1$ Dans les autres cas, il n'y a pas de solutions.	2 nde A

PRIORITES DE CERTAINS NOMBRES SUR D'AUTRES

Problème	Solution erronée	Classe
EqP 15. Résoudre dans R l'équation $25x^2 - 4 = 0$	l'équation se traduit successivement par $(5x + 2)(5x - 2) = 0$ $5x + 2 = 0$ ou $5x - 2 = 0$ $x = -\frac{2}{5}$ ou $x = \frac{2}{5}$ L'ensemble des solutions est $\left\{-\frac{2}{5}, \frac{2}{5}, 0\right\}$	3 ème

E. Le premier membre est privilégié par rapport au second.

Problème	Solution erronée	Classe
EqP 16. Résoudre dans R, suivant le réel m, l'équation $mx + 2 = 2x + m$	On a $mx + 2 = 2x + m$ Si $m \neq 0$, $x + \frac{2}{m} = 2x + m$ $x = -\frac{2}{m} + 2x + m$ $-x = m - \frac{2}{m}$ donc $x = \frac{2}{m} - m$ Si $m = 0$, $x = ?$	2nde A

PRIORITES DE CERTAINS NOMBRES SUR D'AUTRES

F. L'inconnue est privilégiée par rapport à un paramètre.

Problème	Solution erronée	Classe
EqP 17. a et b sont des réels donnés. Résoudre dans R l'équation $a(1+x) = bx$	Si $1 + x \neq 0$ donc si $x \neq -1$ alors $a = \frac{bx}{1+x}$ Si $x = -1$ alors $b = 0$	2nde A

G. Le paramètre est privilégié par rapport à l'inconnue.

Problème	Solution erronée	Classe
EqP 18. m est un réel donné. Déterminez: $S = \{ x \in R \ ; \ m^2(x-1) - mx = m(x+1) \}$	On obtient l'équation équivalente $x(m^2 - 2m) = m^2 + m$ Si $m^2 - 2m \neq 0$ $\quad x = \frac{m^2+m}{m^2-2m}$ Ce nombre x est un réel car $m^2 + m$ et $m^2 - 2m$ sont des réels. Dans ce cas $S = R$	2 nde C

Mauvaise compréhension de la notion de paramètre.

CONFUSION ENTRE
CONDITION NECESSAIRE ET SUFFISANTE
ET
CONDITION SUFFISANTE

Problème	Solution erronée	Classe
EqP 19. Résoudre dans R l'équation $2(2x+3)+5(2x-1)=0$	On a $2(2x+3)=0$ et $5(2x-1)=0$ Il n'y a pas de solution.	2 nde A
EqP 20. Résoudre dans R l'équation $x^2 = 25$	$x^2 = 25 \Longleftrightarrow x = 5$ La solution de l'équation est 5.	2 nde C
EqP 21. Résoudre dans R l'équation $(5x-4)(3x-8)=(5x-4)(7x+9)$	L'équation s'écrit $3x-8=7x+9$ ou encore $-4x=17$ L'ensemble des solutions est $\left\{-\frac{17}{4}\right\}$	2 nde C

Dans EqP 19, il y a confusion avec " si $a=0$ et $b=0$ alors $a+b=0$ ".
Dans EqP 20, il y a confusion avec " si $a=b$ alors $a^2=b^2$ ".
Dans EqP 21, il y a confusion avec " si $a=b$ alors $c.a=c.b$ ".

C O N F U S I O N   E N T R E
C O N D I T I O N   N E C E S S A I R E   E T   S U F F I S A N T E
E T
C O N D I T I O N   N E C E S S A I R E

Problème	Solution erronée	Classe
EqP 22. Résoudre dans R l'équation $7x - 8 = 0$	$7x - 8 = 0 \Longrightarrow 7x = 8$ $7x = 8 \Longrightarrow x = \frac{8}{7}$ L'ensemble des solutions est $\left\{\frac{8}{7}\right\}$	2 nde A

C O N D I T I O N   N O N   P R I S E   E N   C O M P T E

A. Condition explicite dans l'énoncé.

	Problème	Solution erronée	Classe
EqP 23.	Résoudre dans N l'équation $(3x - 2)(x - 7) = 0$	L'équation se traduit par: $3x - 2 = 0$ ou $x - 7 = 0$ $x = \frac{2}{3}$ ou $x = 7$ l'ensemble des solutions est $\left\{\frac{2}{3}, 7\right\}$	3 ème

Il n'est pas tenu compte du référentiel.

B. Condition que l'on se fixe.

	Problème	Solution erronée	Classe
EqP 24.	Résoudre dans R l'équation $\lvert x + 2 \rvert = - 2x - 5$	Si $x \leqslant -2$, l'équation est: $- x - 2 = - 2x - 5$ c.à.d. $x = - 3$ Si $x \geqslant -2$, l'équation est: $x + 2 = - 2x - 5$ c.à.d. $3x = - 7$ Donc les solutions de l'équation sont -3 et $-\frac{7}{3}$	2 nde A

CONDITION NON PRISE EN COMPTE

Problème	Solution erronée	Classe
EqP 25. a et b sont des réels donnés. Résoudre dans R $a(1+X) = bX$	Si $a \neq b$ alors $X = \frac{-a}{a-b}$	2nde A

Dans EqP 24, il n'est pas tenu compte de la partition utilisée:

$$(x = -3 \text{ et } x \leqslant -2) \text{ ou } (x = -\frac{7}{3} \text{ et } x \geqslant -2)$$

Dans EqP 25, le cas $a=b$ n'est pas envisagé.

C. Condition non explicitée dans la résolution.

Problème	Solution erronée	Classe
EqP 26. Résoudre dans R, suivant la valeur de m, $(m^2-1)x + m + 1 = 0$	$(m^2-1)x = -(m+1)$ signifie $x = -\frac{m+1}{m^2-1}$ La solution est $-\frac{1}{m-1}$	2nde AB
EqP 27. a et b sont des réels donnés. Résoudre dans R $a(1+x) = bx$	l'équation est équivalente à $x(b-a) = a$ c.à.d. $x = \frac{a}{b-a}$	2nde A

Dans EqP 26, condition: $m \notin \{-1, 1\}$ et dans EqP 27, condition $b \neq a$

C O N D I T I O N   N O N   P R I S E   E N   C O M P T E

D. Condition implicite dans l'énoncé.

	Problème	Solution erronée	Classe
EqP 28.	Résoudre dans R, l'équation $\frac{x^2 - 4}{x + 2} = 0$	$\frac{x^2 - 4}{x + 2} = 0$ signifie $x^2 - 4 = 0$ c.à.d. $x^2 = 4$ ou encore ($x = 2$ ou $x = -2$) L'ensemble des solutions est $\{-2 , 2\}$	2nde C
EqP 29.	Résoudre dans R, l'équation $\sqrt{2x + 1} = \sqrt{x - 1}$	$\sqrt{2x + 1} = \sqrt{x - 1}$ s'écrit $2x + 1 = x - 1$ c.à.d. $x = -2$. La solution est -2 .	2nde C
EqP 30.	Résoudre dans R l'équation $\text{tg} \left(3x - \frac{\pi}{2} \right) = \text{tg}\ x$	L'équation s'écrit successivement: $3x - \frac{\pi}{2} = x + k\pi$ et $k \in Z$ $2x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ et $k \in Z$ $x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$ et $k \in Z$ Les solutions sont $\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$ où $k \in Z$	1ère C
EqP 31.	Résoudre dans R l'équation $\text{Log} (2x + 3) = \text{Log} (x + 1)$	L'équation s'écrit $2x + 3 = x + 1$ soit $x = -2$ -2 est la solution.	TD

Les conditions implicites dans l'énoncé sont: pour EqP 28, $x \neq -2$; pour EqP 29, $2x + 1 \geqslant 0$ et $x - 1 \geqslant 0$
pour EqP 30, $3x - \frac{\pi}{2} \neq \frac{\pi}{2} + k$ et $x \neq \frac{\pi}{2} + k'\pi$ et $(k, k') \in Z \times Z$
pour EqP 31, $2x + 3 > 0$ et $x + 1 > 0$

D I S C U S S I O N   A   P R I O R I , I N J U S T I F I E E

Problème	Solution erronée	Classe
EqP 32. a et b sont des réels donnés. Résoudre dans R $a(1 + x) = bx$	On a $a(1 + x) = bx$ $a \neq b$: x peut avoir toutes les valeurs d'un réel $a = b$: l'équation n'a pas de solution	2nde A
	On a $a(1 + x) = bx$ Si $a = 0$ alors il n'y a pas de solution Si $a \neq 0$, x peut avoir la valeur de tous les réels.	2nde A

RESOLUTION INCOMPLETE

A. Discussion incomplète.

Problème	Solution erronée	Classe
EqP 33. Résoudre l'équation $$(m^2+2m)x+2=4mx+m^3-6$$ où m est un paramètre et x l'inconnue.	L'équation est équivalente à: $(m^2-2m)x=m^3-8$ Si $m^2-2m\neq 0$, la solution est $\frac{m^3-8}{m^2-2m}$ Si $m=0$, $0=-8$, l'ensemble des solutions est $\emptyset$	2nde C
EqP 34. m est un réel donné. Résoudre dans R l'équation $\lvert x-m\rvert+m=0$	On suppose $m\leqslant 0$ Si $x\geqslant m$, on a $x-m+m=0$ d'où $x=0$ Si $x<m$, on a $-x+m+m=0$ d'où $x=2m$ 0 et 2m vérifient bien l'équation, l'ensemble des solutions est $\{0, 2m\}$	1ère C
	Supposons $x-m\geqslant 0$: si $m\leqslant 0$, 0 est solution. si $m>0$, pas de solution. Supposons $x-m<0$: si $m\leqslant 0$, 2m est solution. si $m>0$, pas de solution.	1ère C

Dans EqP 33, le cas " $m=2$ " n'est pas considéré.

Dans EqP 34 a), le cas " $m>0$ " n'est pas considéré.

Dans EqP 34 b), il manque une synthèse donnant le rôle prépondérant au paramètre.

RESOLUTION INCOMPLETE

B. Réponse non explicitée.

Problème	Solution erronée	Classe
EqP 35. Résoudre dans R, l'équation $2x - 3 = 0$	$2x - 3 = 0 \Longleftrightarrow 2x = 3$ $2x - 3 = 0 \Longleftrightarrow x = \frac{3}{2}$	3 ème
EqP 36. Résoudre dans R, l'équation $(3x - 2)(x - 7) = 0$	on a $3x - 2 = 0$ ou $x - 7 = 0$ Si $3x - 2 = 0$ alors $x = \frac{2}{3}$ Si $x - 7 = 0$ alors $x = 7$	3 ème
EqP 37. Résoudre dans R, l'équation $\lvert x + 2 \rvert = -2x - 5$	Si $x < -2$, on a $-x - 2 = -2x - 5$ soit $x = -3$ comme $-3 < -2$, l'ensemble des solutions est $\{-3\}$ Si $x \geqslant -2$, on a $x + 2 = -2x - 5$ ou encore $3x = -7$ soit $x = -\frac{7}{3}$ Comme $-\frac{7}{3} < -2$, l'ensemble des solutions est $\emptyset$	2nde A

ABSENCE DE LIENS ENTRE LES ENONCES

Problème	Solution erronée	Classe
EqP 38. Résoudre dans R, l'équation $5x + 1 = 0$	$5x + 1 = 0$ $5x = -1$ $x = -\frac{1}{5}$ L'ensemble des solutions est $\left\{-\frac{1}{5}\right\}$	4 ème

CONCLUSION NE TRADUISANT PAS LES RESULTATS TROUVES

Problème	Solution erronée	Classe
EqP 39. Résoudre dans R, l'équation $2(x+1) - 3x = 2 - x$	L'équation s'écrit successivement: $2x + 2 - 3x = 2 - x$ $-x + 2 = 2 - x$ $0 = 0$ L'ensemble des solutions est $\emptyset$.	2nde C
EqP 40. Résoudre dans R, l'équation $3(x-3) + 2x - 1 = x - 5 + 4(x-1)$	L'équation s'écrit successivement: $3x - 9 + 2x - 1 = x - 5 + 4x - 4$ $5x - 10 = 5x - 9$ $0 = 1$ L'ensemble des solutions est R.	2nde C

MAUVAISE UTILISATION D'UN SYMBOLISME

A. Déviation d'un symbolisme existant.

Problème	Solution erronée	Classe
EqP 41. Résoudre dans Q, l'équation $2x - 3 = 0$	$2x - 3$ s'écrit $2x = 3$ ou encore $x = \frac{3}{2}$ L'ensemble des solutions est $\left\{ x = \frac{3}{2} \right\}$	3 ème

B. Utilisation d'une notation personnelle sans définition préalable.

Problème	Solution erronée	Classe
EqP 42. Résoudre dans R, l'équation $7x + 5 = 0$	$7x + 5 = 0$ s'écrit $7x = -5$ ou encore $x = -\frac{5}{7}$ donc $S = \left\{ -\frac{5}{7} \right\}$	3 ème

S est-il un symbole universel signifiant " ensemble des solutions " ?

MAUVAISE UTILISATION D'UN SYMBOLISME

C. Confusion entre symbolisme.

Problème	Solution erronée	Classe
EqP 43. Résoudre dans Z: $2x + 1 = 0$	L'équation s'écrit $x = -\frac{1}{2}$ Comme $-\frac{1}{2} \notin Z$, l'ensemble des solutions est $\{\emptyset\}$	TF 8
EqP 44. Résoudre dans R l'équation $\lvert x + 2 \rvert = -2x - 5$	Si $x < -2$, ona $-x - 2 = -2x - 5$ soit $x = -3$ comme $-3 < -2$, -3 est solution. Si $x \geqslant -2$, on a $x + 2 = -2x - 5$ soit $x = -\frac{7}{3}$ comme $-\frac{7}{3} < -2$, $-\frac{7}{3}$ n'est pas solution. L'ensemble des solutions est $\{-3, \emptyset\}$	2nde A

$\{\emptyset\}$ est mis à la place de $\emptyset$, $\{-3, \emptyset\}$ est mis à la place de $\{-3\}$

MAUVAISE UTILISATION D'UN SYMBOLISME

D. Utilisation de la même notation pour désigner des ensembles différents.

	Problème	Solution erronée	Classe
EqP 45.	m est un réel donné. Trouver l'ensemble des réels x tels que $(mx + 1)(x - m) = 0$	Si $m \neq 0$, on sait qu'un produit de facteurs est nul ssi l'un des facteurs est nul. $mx + 1 = 0$ donc $mx = -1$ d'où $x = -\frac{1}{m}$ $S = \left\{-\frac{1}{m}\right\}$ $x - m = 0$ donc $x = m$ $S = \{m\}$ Par suite $S = \left\{-\frac{1}{m}, m\right\}$ Si $m = 0$, $S = \{m\}$	2nde A

UNIVERSITÉ PARIS 13
I.R.E.M.
99, Avenue Jean-Baptiste Clément
93430 VILLETANEUSE
Tél. 01 49 40 36 40