10. — En appelant M_1 l'intersection de GJ_1 et IS_1, et M_2 celle de GJ_2 et IS_2, les équipollences (4) (5) montrent facilement qu'on a :

$$\frac{IS_1}{IM_1} = \frac{IS_2}{IM_2} = \frac{S_1S_2}{M_1M_2} = \frac{3u^2 + q^2}{3u^2 - 2pu + q^2},$$
$$\frac{GJ_1}{GM_1} = \frac{GJ_2}{GM_2} = \frac{J_1J_2}{M_1M_2} = \frac{3u^2 + q^2}{q^2}.$$

La droite M_1M_2 est donc aussi parallèle à la droite de Jérabek, c'est-à-dire à l'orientation moyenne du triangle.

Les trois segments J_1J_2, S_1S_2, M_1M_2 sont donc parallèles, et respectivement proportionnels à $\frac{1}{q^2}$, $\frac{1}{3u^2 - 2pu + q^2}$ et $\frac{1}{3u^2 + q^2}$.

11. — Un cas particulier remarquable nous est fourni par le triangle dont les trois côtés a, b, c forment une progression harmonique, c'est-à-dire satisfont à la relation $\frac{1}{a} + \frac{1}{c} = \frac{2}{b}$; comme par exemple celui qui a pour côtés 30, 35, 42. On reconnait alors très aisément que $\frac{b}{2}$ est racine de l'équation $u^3 = (a - u)(b - u)(c - u)$. Il faut donc remplacer u par $\frac{b}{2}$ dans les calculs qui précèdent. Les coordonnées barycentriques de S_1 sont c, a, c, et celles de S_2 : a, c, a. Les deux points équisegmentaires sont donc situés l'un et l'autre sur la médiane BB_0 issue de B, laquelle est dirigée dans ce cas, suivant l'orientation moyenne du triangle.

Les trois points S_1, G, S_2 sont alors en ligne droite, et les longueurs BS_1, BG, BS_2 sont proportionnelles à $\frac{c}{2c + a}$, $\frac{1}{3}$ et $\frac{a}{2a + c}$.

M. H. DELANNOY

Sous-Intendant en retraite, à Guéret.

PROBLÈMES DIVERS CONCERNANT LE JEU

— Séance du 8 août 1890 —

Il y a quelque temps, M. L..., ingénieur en chef des ponts et chaussées en retraite, m'écrivait ce qui suit :

« Un monsieur qui s'occupe beaucoup de tout ce qui est relatif aux » jeux et aux combinaisons auxquelles ils donnent lieu, mais qui est

» peu au courant du calcul des probabilités, m'a dit avoir trouvé expéri-
» mentalement la formule $e = 0,8\sqrt{N}$ dans laquelle e désigne la diffé-
» rence entre les gains et les pertes sur N parties. Il m'a demandé si
» je ne pourrais pas en démontrer ou au moins en vérifier l'exactitude.
» Il ne me semble pas impossible de trouver mathématiquement la
» limite vers laquelle tend e lorsque N tend vers l'infini. Mais, avant
» d'aborder cette recherche, qui ne me semble pas très facile, je me
» permets de vous soumettre la question et de vous demander s'il est
» à votre connaissance que la question ait déjà été traitée et, dans ce
» cas, à quel résultat on est parvenu, de quelle manière et où je pourrais
» me procurer ce qui a été publié à ce sujet. »

Je ne pus donner les renseignements demandés, cette question m'étant complètement inconnue, mais j'arrivai assez promptement à la solution.

Ultérieurement, M. L... m'a appris que cette question avait été traitée par M. Dormoy et par M. Laurent dans le *Journal des Actuaires*, qu'il n'avait pu se procurer ce recueil, mais qu'un résumé du travail de M. Laurent avait été publié par M. Badoureau dans la *Revue scientifique* du 29 janvier 1881.

La méthode indiquée dans cet article de la *Revue* étant toute différente de celle que j'ai suivie, je crois pouvoir donner ma solution, qui est très simple.

Sur $2n$ parties, l'un des joueurs peut les gagner toutes, l'excès considéré est alors $2n$; ou bien en gagner $2n-1$ et en perdre 1 (et cela de C_{2n}^1 façons différentes), l'excès est dans ce cas $2n-2$; ou bien en gagner $2n-2$ et en perdre 2 (et cela de C_{2n}^2 façons différentes), l'excès est alors $2n-4$, et ainsi de suite.

Appelant E_{2n} l'excès des parties gagnées sur les parties perdues par l'un des joueurs en $2n$ parties, on a donc pour la valeur moyenne :

$$E_{2n} = \frac{1}{2^{2n}}\Big[2n + (2n-2)\,C_{2n}^1 + (2n-4)\,C_{2n}^2 + \ldots\ldots + 4\,C_{2n}^{n-2} + 2\,C_{2n}^{n-1}\Big],$$

je dis que, si l'on appelle S_p la somme des p premiers termes de E_{2n}, on a :

$$S_p = pC_{2n}^p.$$

Pour le démontrer, il suffit de prouver que, si cette formule est vraie pour p, elle l'est également pour $p+1$, car elle est évidemment vraie pour $S_1 = 1 \times C_{2n}^1$ et $S_2 = 2\,C_{2n}^2$.

Admettant donc qu'on ait pour les p premiers termes :

$$S_p = pC_{2n}^p.$$

on aura :

$$\begin{aligned} S_{p+1} &= pC_{2n}^p + \text{le } (p+1)^e \text{ terme de } E_{2n} \\ &= \frac{2n(2n-1)\ldots(2n-p+1)}{1.2\ldots(p-1)} \\ &\quad + (2n-2p)\frac{2n(2n-1)\ldots(2n-p+1)}{1.2\ldots p} \\ &= \frac{2n(2n-1)\ldots(2n-p)}{1.2\ldots p} = (p+1)\,C_{2n}^{p+1} \end{aligned}$$

Il en résulte que : $E_{2n} = \dfrac{1}{2^{2n}} n C_{2n}^n = \dfrac{n}{2^{2n}} \dfrac{(2n)!}{(n!)^2}$.

On sait que, pour $n = \infty$

$$\lim. \frac{n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}}{1.2\ldots n} = 1,$$

par suite :

$$\lim. E_{2n} = \frac{n}{2^{2n}} \frac{2^{2n} e^{-2n} \sqrt{4\pi n}}{(n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n})^2} = n\sqrt{\frac{1}{\pi n}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{2n}.$$

La limite est la même pour E_{2n-1}, car on a :

$$E_{2n-1} = \frac{1}{2^{2n-1}} \left[(2n-1) + (2n-3)\,C_{2n-1}^1 + \ldots + 1.C_{2n-1}^{n-1} \right].$$

D'après la loi même de formation des termes du triangle de Pascal, la quantité entre parenthèses est égale à :

$$\frac{1}{2}\left(E_{2n} \times 2^{2n}\right),$$

donc :

$$E_{2n-1} = E_{2n}.$$

Si, au lieu de l'excès des gains sur les pertes d'un joueur, on considérait la différence entre les gains et les pertes, abstraction faite du signe, la limite serait doublée et égale à $\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\sqrt{2n} = 0{,}7978\sqrt{2n}$.

La valeur approchée $0{,}8\sqrt{N}$, trouvée expérimentalement, était donc sensiblement exacte.

M. L... m'a également posé les problèmes suivants relatifs au jeu :

I. — *Si deux joueurs ayant des chances égales font* A *parties, quel est le nombre moyen d'équilibres qui peuvent avoir lieu pendant ces* A *parties?*

Par *équilibre*, on entend le cas où le nombre des parties perdues est égal à celui des parties gagnées.

Le nombre des *équilibres* est le même pour $A = 2n$ et pour $A = 2n + 1$.

Pour $A = 2n$, on a :

$$\frac{1}{2^{2n}}\, 2^p\, C_{2n-p}^{n-p} \text{ chances d'avoir } p \text{ équilibres,}$$

le nombre moyen des *équilibres* est donc :

$$\frac{1}{2^{2n}}\left(1.2^1.\, C_{2n-1}^{n-1} + 2.2^2.C_{2n-2}^{n-2} + 3.2^3\, C_{2n-3}^{n-3} + \ldots + n.2^n\, C_n^0\right)$$
$$= \frac{1}{2^{2n}} \sum_{k=1}^{k=n} k2^k\, C_{2n-k}^{n-k}$$

II. — *Un joueur a perdu* a *parties, quelles chances a-t-il de se rattraper en jouant encore* A *parties, étant entendu qu'il joue toujours le même jeu et que les chances sont égales?*

La probabilité P de rattraper au moins a parties en A parties nouvelles est :

$$P = \frac{1}{2^A}\left(C_A^0 + C_A^1 + C_A^2 + \ldots + C_A^{\frac{A-a}{2}}\right)$$

en prenant pour $\frac{A - a}{2}$ la partie entière du quotient.

III. — *Sur un jeu de 32 cartes bien mêlées, combien doit-on trouver de groupes de 2, de 3, . . . de 8 cartes de même couleur?*

M. L..., qui préparait un traité mathématique du jeu de l'écarté, avait besoin de connaître ce groupement des cartes bien mêlées, pour le comparer à celui que prennent les cartes après un certain nombre de parties, ce dernier groupement lui étant fourni par une suite d'expériences.

En ne tenant pas compte de la valeur des cartes, mais seulement des couleurs, le nombre des permutations des 32 cartes sera :

$$\frac{32\,!}{(8\,!)}.$$

Cherchons la disposition des groupes de cartes d'une couleur, par exemple *cœur*. Appelons

A_8 le nombre des permutations dans lesquelles se trouve une séquence de 8 cœurs.

$A_{7,1}$ le nombre des permutations dans lesquelles se trouve une séquence de 7 cœurs et 1 cœur isolé.

$A_{6,2}$ le nombre des permutations dans lesquelles se trouve une séquence de 6 cœurs et une de 2 cœurs.

$A_{6,1,1}$ le nombre des permutations dans lesquelles se trouve une séquence de 6 cœurs et 2 cœurs isolés, etc., etc.

Appelons $p = \frac{24!}{(8!)^3}$ le nombre des permutations des cartes des trois autres couleurs.

Dans une permutation quelconque de ces 24 cartes, nous pourrons introduire la séquence S_8 de 8 cœurs en 25 places différentes ;

on a donc:
$$A_8 = 25p.$$

On pourra de même introduire la séquence S_7 en 25 places différentes, puis dans chacune des permutations ainsi obtenues on pourra introduire S_1 seulement en 24 places différentes (car on ne pourrait la mettre immédiatement à gauche ou à droite de S_7, sans reproduire une permutation de A_8), et l'on aura :

$$A_{7,1} = 25 . 24p.$$

De même pour $A_{6,1,1}$ on introduira S_6 en 25 places différentes, la première carte S_1 en 24 places, la deuxième carte isolée S_1 en 23 places; mais on obtiendra ainsi des permutations répétées deux fois, il faudra donc diviser $25.24.23p$ par 1.2 et l'on aura:

$$A_{6,1,1} = \frac{25.24.23}{1.2}p$$

et ainsi de suite.

Nous formons ainsi le tableau ci-après:

			Probabilité correspondante
A_8	$= 25p$	$= 25p \times 1$	$\frac{1}{420732} = 0{,}000002$
$A_{7,1}$	$= 25.24p$	$= 25p \times 24$	$0{,}00006$
$A_{6,2}$	$= 25.24p$	$= 25p \times 24$	$0{,}00006$
$A_{6,1,1}$	$= \frac{25.24.23}{1.2}p$	$= 25p \times 276$	$0{,}0007$
$A_{5,3}$	$= 25.24p$	$= 25p \times 24$	$0{,}00006$
$A_{5,2,1}$	$= 25.24.23p$	$= 25p \times 552$	$0{,}0013$
$A_{5,1,1,1}$	$= \frac{25.24.23.22}{1.2.3}p$	$= 25p \times 2024$	$0{,}0048$
$A_{4,4}$	$= \frac{25.24}{1.2}p$	$= 25p \times 12$	$0{,}00003$
$A_{4,3,1}$	$= 25.24.23p$	$= 25p \times 552$	$0{,}0013$
$A_{4,2,2}$	$= \frac{25.24.23}{1.2}p$	$= 25p \times 276$	$0{,}0007$
$A_{4,2,1,1}$	$= \frac{25.24.23.22}{1.2}p$	$= 25p \times 6072$	$0{,}0144$
$A_{4,1,1,1,1}$	$= \frac{25.24.23.22.21}{1.2.3.4}p$	$= 25p \times 10626$	$0{,}0253$
$A_{3,3,2}$	$= \frac{25.24.23}{1.2}p$	$= 25p \times 276$	$0{,}0007$
$A_{3,3,1,1}$	$= \frac{25.24.23.22}{1.2 \times 1.2}p$	$= 25p \times 3036$	$0{,}0072$
$A_{3,2,2,1}$	$= \frac{25.24.23.22}{1.2}p$	$= 25p \times 6072$	$0{,}0144$
$A_{3,2,1,1,1}$	$= \frac{25.24.23.22.21}{1.2.3}p$	$= 25p \times 42504$	$0{,}1010$
$A_{3,1,1,1,1,1}$	$= \frac{25.24.23.22.21.20}{1.2.3.4.5}p$	$= 25p \times 42504$	$0{,}1010$
$A_{2,2,2,2}$	$= \frac{25.24.23.22}{1.2.3}p$	$= 25p \times 506$	$0{,}0012$
$A_{2,2,2,1,1}$	$= \frac{25.24.23.22.21}{1.2.3 \times 1.2}p$	$= 25p \times 21252$	$0{,}0505$
$A_{2,2,1,1,1,1}$	$= \frac{25.24.23.22.21.20}{1.2 \times 1.2.3.4}p$	$= 25p \times 106260$	$0{,}2526$
$A_{2,1,1,1,1,1,1}$	$= \frac{25.24.23.22.21.20.19}{1.2.3.4.5.6}p$	$= 25p \times 134596$	$0{,}3199$
$A_{1,1,1,1,1,1,1,1}$	$= \frac{25.24.23.22.21.20.19.18}{1.2.3.4.5.6.7.8}p$	$= 25p \times 43263$	$0{,}1028$
Comme vérification : Total . . .		$25p \times 420732 = \frac{32!}{(8!)^4}$	$1{,}0000$

Appelons P_8, P_7, . . . la probabilité d'avoir une séquence de 8, de 7, . . . cartes d'une même couleur, on déduit du tableau précédent :

$$P_8 = 0{,}000002$$
$$P_7 = 0{,}00006$$
$$P_6 = 0{,}00076$$
$$P_5 = 0{,}00616$$
$$P_4 = 0{,}04173$$
$$P_3 = 0{,}22566$$
$$P_2 = 0{,}75676$$
$$P_1 = 0{,}1028$$ (c'est la probabilité de ne pas avoir de séquence de cette couleur).

La somme de toutes ces probabilités dépasse 1, parce que plusieurs séquences différentes peuvent avoir lieu en même temps.

M. H. DELANNOY

Sous-Intendant militaire en retraite, à Guéret.

FORMULES RELATIVES AUX COEFFICIENTS DU BINOME

— Séance du 8 août 1890 —

On sait que la somme alternée des q premiers coefficients du binôme est:

$$1 - C_p^1 + C_p^2 - C_p^3 + \dots + (-1)^{q-1}\, C_p^{q-1} = (-1)^{q-1}\, C_{p-1}^{q-1}$$

mais on ne connaît pas de formule simple donnant la somme des q premiers coefficients.

La formule, que nous avons obtenue en cherchant la limite de l'écart moyen entre les gains et les pertes, nous semble présenter un certain intérêt, car elle donne la somme des q premiers coefficients multipliés respectivement par les q premiers termes de la progression arithmétique :

$$p,\ p-2,\ p-4,\ \dots$$

Nous avons démontré, en effet, que l'on a :

$$p.1 + (p-2)\, C_p^1 + (p-4)\, C_p^2 + \dots + (p-2q+2)\, C_p^{q-1} = q C_p^q$$