

COURRIER DES LECTEURS

Nous l'attendons à l'adresse suivante :

LE PIED CARRÉ
IREM PARIS-NORD
CSP
AVENUE JEAN-BAPTISTE CLÉMENT
93430 VILLETANEUSE

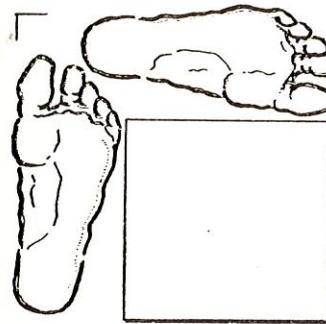
oooooooooooooooooooo

Lisez aussi :



le petit
archimède

Adresser toute correspondance à
Y. ROUSSEL - CES Sagebien - 80000 AMIENS



LE PIED CARRÉ

PUBLICATION DE L'I.R.E.M.° PARIS - NORD

SOMMAIRE

R. CUCULIERE	: DU BON USAGE DES THEOREMES D'EXISTENCE....	p.39
B. VERLANT	: MATHEMATIQUES APPLIQUEES	p.46
R. ISS	: A PROPOS DE CENTRE DE GRAVITE	p.48
<u>SOLUTIONS DES PROBLEMES</u>		p.50
<u>PROBLEMES</u>		p.62
<u>COURRIER DES LECTEURS</u>		p.62
<u>LE PIED CROISE</u>		p.65

N° 2

Prix: 5 Francs

Décembre 1979

PETITES ANNONCES

Si vous cherchez des références sur telle ou telle question mathématique,

Si un problème vous empêche de dormir pendant des mois,

Si vous désirez trouver un ouvrage mathématique peu répandu,

Bref,

Pour toute question à propos de laquelle d'autres amateurs de mathématique sont susceptibles de vous venir en aide,

ECRIVEZ À CETTE RUBRIQUE

Le Pied Carré • IREM Paris-Nord • Avenue Jean-Baptiste Clément • 93430 Villetaneuse

Avec un peu de chance, un autre lecteur vous répondra.

UNIVERSITÉ PARIS 13
I.R.E.M.
99, Avenue Jean-Baptiste Clément
93430 VILLETANEUSE
Tél. 01 49 40 36 40

UNIVERSITÉ PARIS 13
I.R.E.M.
99, Avenue Jean-Baptiste Clément
93430 VILLETANEUSE
Tél. 01 49 40 36 40

COURRIER DES LECTEURS

• De M. ISS - Strasbourg

"Je vous félicite pour le "Pied Carré" auquel je souhaite le meilleur succès. Pouvez-vous m'inscrire comme "abonné" - pour un numéro - à titre personnel ?

A propos de l'article sur les centres de gravité paru dans le premier n° du Pied Carré, je vous propose une note sur un résultat curieux, mais semble-t-il assez peu connu sur les centres de gravité (voir ci-contre). Peut-être cela pourrait-il faire l'objet d'un "problème". "

Réponse : Merci à M. ISS pour ses encouragements. On pourra lire par ailleurs son article sur les centres de gravités.

• De M. R. CHARTIER - Massy

Questions se rapportant aux moyennes.

1) Pour deux nombres, il est bien connu que leur moyenne géométrique est la racine (carrée) du produit de leurs moyennes arithmétique et harmonique. Y a-t-il d'autres cas, d'ordre supérieur à 2 ? Je n'arrive pas à trancher.

2) L'utilisation pratique des moyennes amène, entre autres, aux formulations suivantes :

a) pour une progression arithmétique on peut dire "synthétiquement" que la somme de ses termes "vaut n fois la moyenne" étant entendu - mnémotechniquement - que n désigne le nombre de termes et que la moyenne est celle (arithmétique) des extrêmes (parce qu'elle est aussi ... etc ...)

b) dans le concret, la moyenne harmonique n'a de sens que si les grandeurs en cause sont en fait des "rapports" (vitesses, contrevaieur de change, dotation par habitant en frigo, ...).

Y a-t-il des critiques à adresser à ces formulations ?

Réponse : Nous espérons que des lecteurs apporteront des solutions aux intéressantes questions posées par M. Chartier.

DU BON USAGE DES THEOREMES D'EXISTENCE

par Roger CUCULIERE

Voici un extrait des "Leçons d'Algèbre" de M. LEFEBVRE de FOURCY, éditées en 1850 :

" On a trouvé plus haut que le produit maximum qu'il est possible de former avec les deux parties d'un nombre est égal au produit de ses deux moitiés. Cette proposition peut être généralisées en ces termes : Le produit de plusieurs nombres, dont la somme est égale à un nombre donné, devient maximum quand ces nombres sont égaux entre eux.

Supposons qu'on ait $a+b+c+d+\dots = p$, et que parmi les différentes manières de choisir les nombres a, b, c, d, \dots sans que cette condition cess d'avoir lieu, ont ait pris celle qui rend le produit $abcd\dots$ maximum : je dis qu'alors tous ces nombres sont égaux. En effet, si a et b , par exemple, étaient inégaux, on aurait :

$$ab < \left(\frac{a+b}{2}\right) \left(\frac{a+b}{2}\right),$$

et par conséquent

$$abcd\dots < \left(\frac{a+b}{2}\right) \left(\frac{a+b}{2}\right) cd\dots$$

Dans le second produit, la somme des facteurs est la même que dans le premier, c'est-à-dire égale à p . Donc le produit $abcd\dots$ n'est pas un maximum, à moins que tous ses facteurs ne soient égaux entre eux. "

PROBLEMES

ELEMENTAIRES

Les lecteurs du "Pied Carré" n°1 auront été sans doute convaincus de l'importance de cette proposition par l'article de JC Martzloff, "Moyennes et inégalités". Mais ils auront été aussi convaincus que la démonstration ci-dessus laisse à désirer.

En lisant ce texte, deux impressions se dégagent de prime abord : premièrement, la proposition énoncée n'a pas vraiment été démontrée, mais, deuxièmement, un discours mathématique a été tenu qui élucide une partie de la question, même s'il ne la résoud pas complètement.

Regardons-y de plus près.

L'extrait ci-dessus démontre effectivement que le maximum du produit ne peut advenir si deux des nombres sont inégaux. C'est-à-dire que, si ce maximum existe, alors il a lieu lorsque les nombre sont tous égaux entre eux.

L'existence de ce maximum est tenue pour évidente par notre auteur, semble-t-il. Dans ce cas, sa démonstration est correcte. Mais il n'en va pas de même pour nous : il faut que nous démontrions cette existence.

Voici donc le problème reformulé :

On considère l'application

$$f : (x_1, x_2, \dots, x_n) \longmapsto x_1 x_2 \dots x_n, \text{ avec } n \geq 2, \text{ où}$$

l'ensemble de départ est la partie E de \mathbb{R}^n formée des n-uplets (x_1, x_2, \dots, x_n) tels que : $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_n \geq 0$ et $x_1 + x_2 + \dots + x_n = S$, où S est un réel constant > 0 . L'ensemble d'arrivée est \mathbb{R} .

Pourquoi cette application admet-elle un maximum sur E ?

Parce que f est une application continue et que E est un compact, en tant que partie bornée et fermée de \mathbb{R}^n .

Il existe donc au moins un n-uplet (a_1, a_2, \dots, a_n) appartenant à E et qui rend f maximum.

Aucun élément de ce n-uplet n'est nul, sans quoi f serait constante nulle, ce qui n'est pas, puisque $f(\frac{S}{n}, \frac{S}{n}, \dots, \frac{S}{n}) = (\frac{S}{n})^n > 0$.

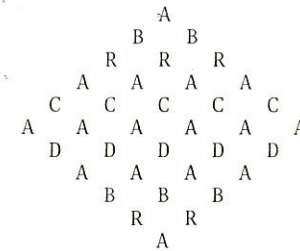
La démonstration de M. Lefebvre est alors valable, et nous dit que ce maximum ne peut se produire en aucun n-uplets $(x_1 \dots x_n)$ formé de termes > 0 non tous égaux. Il ne reste alors qu'une possibilité pour ce maximum : le n-uplet pour lequel les x_i sont tous égaux.

Une méthode

En fait, nous tenons ici une méthode de résolution des problèmes de maximums et minimums. Id est souvent commode de démontrer que l'ex-

PE 5 Comparer π^e et e^π (sans machine et sans calculs numériques)

PE 6 (M. LAURA) De combien de manière peut-on lire le mot ABRACADABRA sur la figure suivante, en partant du A supérieur pour aller vers le A inférieur, toujours en descendant (à titre d'exemple, on a indiqué l'une de ces manières).

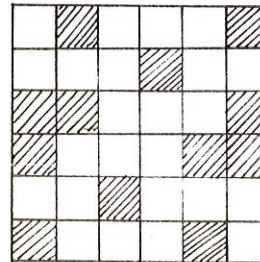


PE 7 A et B étant deux points donnés d'un plan affine euclidien et k un réel donné, déterminer l'ensemble E des points M tels que

$$MA^2 + MB^2 + k MA \cdot MB = AB^2$$

(AB désigne la distance des points A et B)

LE PIED CROISE



Remplir cette grille avec des nombres distincts de 2, 3, 4 chiffres, carrés parfaits, aucun d'eux ne commençant par 0.

PROBLEMES

ENONCES

P. 9 (M. Caby) Soit P un plan vectoriel et f une application de P dans P qui commute à tout automorphisme de P, c'est-à-dire telle que f o phi = phi o f pour tout phi appartenant à GL(P). Que peut-on dire de f ?

P.10 Si a,b,c,d,e sont des nombres positifs bornés par p et q, c'est-à-dire tels que 0 < p <= a,b,c,d,e <= q, prouver que :

(a+b+c+d+e)(1/a + 1/b + 1/c + 1/d + 1/e) <= 25 + 6 (sqrt(p/q) - sqrt(q/p))^2

et déterminer à quelle condition se produit l'égalité. (Olympiades des USA)

P.11 Trouver tous les triangles à côtés entiers possédant deux médianes orthogonales.

P.12 (P. Barral) Dans un plan sur un certain corps (quel corps ?) trouver un ensemble de 9 points tel que toute droite passant par deux points de cet ensemble passe aussi par un troisième et non par un quatrième.

P.13 (A. Tissier) Calculer l'aire d'un ellipsoïde de révolution.

P.14 L'équation F_n^2 + F_p^2 = F_r^2 possède-t-elle des solutions en nombres de Fibonacci ?

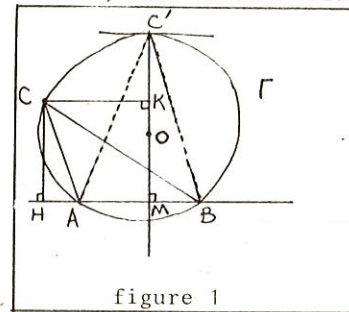
(Les nombres de Fibonacci sont définis par F_0 = 0, F_1 = 1, F_n = F_{n-1} + F_{n-2} n >= 2)

trémum d'une fonction ne se produit pas en un certain point car c'est une propriété locale : on exhibe un autre point qui rend la fonction strictement plus grande (si c'est un maximum), comme fait notre auteur. Si l'on est par ailleurs assuré de l'existence de l'extrémum, ceci clôt la question, sans que l'on ait besoin de comparer la valeur de la fonction à l'extrémum considéré avec toutes les autres. Nous allons voir à présent trois exemples d'application de cette méthode.

Exemple géométrique

1. Inscrire dans un cercle donné Gamma un triangle d'aire maximum.

Si l'on suppose que ce maximum existe, il ne peut assurément se produire pour un triangle dont deux côtés seraient distincts. En effet, soit ABC un triangle inscrit dans le cercle Gamma, et tel que



0 < AC < AB. On note M le milieu de AB, C' l'intersection de Gamma avec la médiatrice de AB - du moins celle des deux intersections qui est située, par rapport à la droite AB, du même côté que C. La hauteur du triangle ABC relative au côté AB est CH ou MK (voir fig.1). L'aire du triangle ABC est 1/2 AB.MK. L'aire du triangle ABC' est 1/2 AB.MC' > 1/2 AB.MK. CQFD. Il en résulte

que le maximum cherché se produit pour le triangle équilatéral.

Notons qu'en classe l'on pourrait se borner à la solution précédente. Car, si la question de l'existence du maximum ne se pose pas pour les élèves, il peut être inutile de la soulever. En général, les mathématiques doivent d'abord servir à démontrer des choses qu'on ne tient pas pour évidentes.

Mais si l'on se place un peu plus haut et que la question de l'existence du maximum est soulevée, on considère l'application f de Gamma x Gamma x Gamma vers R qui à tout triplet (A,B,C) associe l'aire du triangle ABC. Cette application est continue, au moins parce que l'aire d'un triangle s'exprime comme un déterminant. Et l'ensemble de départ est compact, ce qui achève le raisonnement.

On peut aussi faire intervenir les longueurs a,b,c des 3 côtés et considérer la fonction S(a,b,c) = sqrt(p(p-a)(p-b)(p-c)) égale à l'aire du triangle. Cette fonction est définie et continue sur l'ensemble E des triplets (a,b,c) de réels positifs qui vérifient a <= b+c, b <= c+a, c <= a+b. Pour exprimer que le triangle est inscrit dans le

cercle Γ , de rayon R , on utilise la relation $abc = 4RS$ et on appelle F la partie de E telle que $abc - 4RS(a,b,c) = 0$. Cet ensemble est encore fermé. Il est aussi borné : on peut le démontrer par le calcul ou rappeler une évidence géométrique : si $(a,b,c) \in F$, c'est-à-dire si le triangle de côtés a,b,c est inscrit dans le cercle Γ , alors $a \leq 2R$, $b \leq 2R$, $c \leq 2R$. La fonction S atteint donc son maximum sur l'ensemble F .

2. Problème de Fagnano

Inscrire dans un triangle ABC un triangle MNP de périmètre minimum.

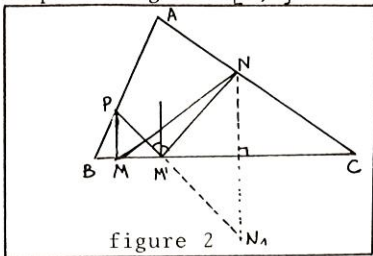
C'est-à-dire : étant donnés 3 points A,B,C non alignés, trouver des points M,N,P sur les segments $[B,C]$, $[C,A]$, $[A,B]$ tels que la somme des distances $MN + NP + PM$ soit minimum.

Notons d'abord que ce minimum existe car :

$$f : (M,N,P) \longmapsto MN+NP+PM$$

est une application continue du compact $K = [B,C] \times [C,A] \times [A,B]$ vers \mathbb{R} .

Cela dit, soit un triangle MNP inscrit dans le triangle ABC (fig.2). Soit N_1 le symétrique de N par rapport à BC. Si nous nous plaçons dans le cas où notre triangle ABC a ses trois angles aigus, le segment $[P,N_1]$ coupe le segment $[B,C]$ en un point M' .



si $M \neq M'$, on a
 $PM+MN = PM+MN_1 > PN_1 = PM'+M'N_1 = PM'+M'N$
 d'où
 $PM+MN+PN > PM'+M'N+PN$

Tous ceux qui ont étudié les rudiments de l'optique géométrique que les bancs du lycée sauront comment caractériser ce point M' : si BC était un miroir, le rayon lumineux issu de N qui passerait par P après réflexion sur BC frapperait BC en M' . La bissectrice intérieure de l'angle $\widehat{NM'P}$ est normale à BC (l'angle d'incidence égale l'angle de réflexion).

Même raisonnement peut être fait pour les points N et P : le minimum de $MN+NP+PM$ ne peut advenir que si, en chacun des 3 points M,N,P la bissectrice intérieure du triangle MNP est normale au côté corres-

Le problème est de placer α entre deux fractions consécutives de cette liste. On constate que $\frac{157}{50}$ et $\frac{179}{57}$ sont les deux fractions cherchées ce qui donne la clé de l'énigme : puisque l'on a $\frac{157}{50} < \alpha < \frac{179}{57} < \frac{22}{7}$, de deux choses l'une : ou bien $\alpha < r < \frac{179}{57}$ et alors $\frac{157}{50} < \frac{p}{q} < \frac{179}{57}$, ce qui entraîne $q \geq 107$, parce que $\left| \frac{157}{50} - \frac{179}{57} \right| = -1$; ou bien ces valeurs constituent ce que l'on appelle les réduites de π . Elles sont approchées alternativement par défaut et par excès : $3 < \frac{333}{106} < \pi < \frac{355}{113} < \frac{22}{7}$, et meilleures à chaque fois.

Les nombres 3,7,15,1,... qui interviennent dans la fraction continue s'appellent les quotients. Ils permettent de calculer les réduites de la façon suivante : les deux premières réduites étant $\frac{3}{1}$ et $\frac{22}{7}$ et le troisième quotient étant 15, la troisième réduite sera :

$$\frac{15 \times 22 + 3}{15 \times 7 + 1} = \frac{333}{106}, \text{ et ainsi de suite.}$$

Chaque réduite approchant π mieux que la précédente, on peut écrire

$$\pi - 3 > \frac{22}{7} - \pi > \pi - \frac{333}{106}, \text{ d'où } 3 < 2\pi - \frac{22}{7} < \frac{333}{106} :$$

Notre nombre α est compris entre 3 et $\frac{333}{106}$.

$$\frac{179}{57} < \frac{p}{q} < \frac{22}{7}, \text{ et alors } q \geq 64 \text{ pour la même raison.}$$

C'est bien $\frac{p}{q} = \frac{179}{57}$ qui a le plus petit dénominateur.

Pris ainsi, le problème est susceptible de généralisations. Par exemple : parmi les fractions qui approchent π mieux que $\frac{179}{57}$, quelle est celle qui a le plus petit dénominateur ? And so on ...

Vous pouvez aussi remarquer un curieux phénomène : nous avons dressé une liste des 16 fractions de meilleure approximation, de $\frac{3}{1}$ à $\frac{333}{106}$, et le nombre α est tombé entre la 8ème et la 8ème, c'est à dire les deux du milieu. Qu'en pensez-vous ?

Si vous êtes un peu familier avec les fractions continues, reportez-vous à un ouvrage de Théorie des Nombres. Par exemple "Arithmétique et Théorie des Nombres" de Jean Itard (Que sais-je n°1093) ou bien les rééditions que nous vous signalons dans la rubrique "Bibliographie" de ce numéro.

Donc $\frac{179}{57}$ est la fraction la plus simple comprise entre $\frac{157}{50}$ et $\frac{22}{7}$.
 On voit de plus que $\frac{179}{57} > 3,14035 > \alpha$, donc c'est bien la fraction que nous cherchons :

$$r = \frac{179}{57}$$

N.B. Les lecteurs peuvent à juste titre s'inquiéter du caractère "miraculeux" de cette solution. Pour y voir un peu plus clair, il faut recourir à la théorie des fractions continues. On part du fait que :

$$\pi = 3 + \frac{1}{7 + \frac{1}{15 + \frac{1}{1 + \dots}}}$$

ce qui donne successivement comme valeurs approchées de π :

$$3, \quad 3 + \frac{1}{7} = \frac{22}{7} \quad (\text{bien connue des enfants des écoles}),$$

$$3 + \frac{1}{7 + \frac{1}{15}} = \frac{333}{106}, \quad 3 + \frac{1}{7 + \frac{1}{15 + \frac{1}{1}}} = \frac{355}{113} \quad (\text{valeur remarquable par sa forme, due à Adrien Métius), etc.}$$

On a vu dans la solution précédente l'intérêt qu'il y avait à se placer entre deux fractions $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$ telles que $\left| \frac{a}{b} - \frac{c}{d} \right| = -1$.

C'est toujours le cas de deux réduites consécutives, telles que $\frac{3}{1}$ et $\frac{22}{7}$, $\frac{333}{106}$ et $\frac{22}{7}$. Ce n'est pas le cas de $\frac{3}{1}$ et $\frac{333}{106}$, mais entre $\frac{3}{1}$ et $\frac{333}{106}$ il y a d'autres fractions qui ont la même propriété, ce sont toutes les fractions de la forme $\frac{3+22k}{1+7k}$ pour $0 < k < 15$. C'est ce que l'on appelle les fractions de meilleure approximation.

On a toujours en effet $\left| \frac{3+22k}{1+7k} - \frac{22}{7} \right| = \left| \frac{3}{1} - \frac{22}{7} \right| = -1$ et par suite toute fraction qui approche de π plus que $\frac{3+22k}{1+7k}$ a un dénominateur plus grand, d'où son nom.

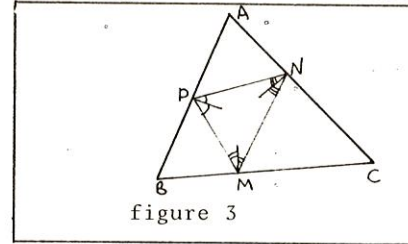
Ces 14 fractions s'échelonnent entre $\frac{3}{1}$ et $\frac{333}{106}$:

$$\frac{3}{1} < \frac{25}{8} < \frac{47}{15} < \dots < \frac{311}{99} < \frac{333}{106}$$

pendant du triangle ABC. Les segments MN, NP, PM forment alors une trajectoire de lumière (figure 3) (*).

Un peu de ci-devant géométrie élémentaire nous indique qu'un seul triplet (M,N,P) satisfait à cette condition.

En effet, le point A situé sur les bissectrices extérieures des angles \hat{N} et \hat{P} du triangle MNP est aussi sur la bissectrice intérieure de l'angle \hat{M} de ce même triangle, donc AM est perpendiculaire à BC.



Les points M,N,P sont les pieds des hauteurs du triangle ABC. C'est ce qu'on appelle le triangle podaire (ou pédal). C'est bien lui qui réalise le minimum voulu.

Laissons le lecteur traiter le cas où le triangle ABC possède un angle droit, ou obtus. Signalons aussi, dans le même ordre d'idées, le problème consistant à trouver le minimum de MN+NP+PM lorsque M,N,P sont situés respectivement sur des droites données $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$. On a alors la même fonction (M,N,P) \mapsto MN+NP+PM, mais l'ensemble de départ est le produit $\Delta_1 \times \Delta_2 \times \Delta_3$ qui n'est plus compact.

Il est toutefois localement compact, et comme cette fonction tend vers l'infini, en un certain sens à préciser, on peut tout de même se ramener dans un compact et l'existence du minimum est assurée.

Un exemple combinatoire

Soit n un entier ≥ 1 , E_n l'ensemble $\{1,2,\dots,n\}$, S_n l'ensemble des permutations de E_n . Soit a un réel > -2 .

A toute permutation σ de E_n , on associe le réel $T(\sigma) = \prod_{i=1}^n (a+i+\sigma(i))$.
 On cherche le minimum et le maximum de $T(\sigma)$ lorsque σ décrit S_n .

Ici, l'existence de ces extremums n'est pas en question parce que S_n est fini, et qu'est par suite fini l'ensemble des valeurs de $T(\sigma)$. Et bien sûr, dans tout ensemble fini de réels, il y en a un plus grand et un plus petit.

(*) Voir Marcel Berger, Géométrie, Tome 2 (éditions CEDIC).

Un examen empirique du problème nous conduira à penser que la permutation qui rend $T(\sigma)$ minimum, c'est la permutation $\sigma = \epsilon$, permutation identique définie par : $\epsilon(i) = i$ pour tout $i \in E_n$.

On sait que les éléments k et h de E_n sont inversés par σ si σ change leur ordre, c'est-à-dire si

$$\frac{\sigma(k) - \sigma(h)}{k - h} < 0.$$

La permutation ϵ est caractérisée par le fait qu'elle n'inverse aucune paire $\{k, h\}$.

Si maintenant nous prenons une permutation $\sigma \neq \epsilon$, elle inverse au moins un paire $\{k, h\}$, c'est-à-dire qu'il existe deux éléments de E_n distincts, k et h , tels que

$$\frac{\sigma(k) - \sigma(h)}{k - h} < 0.$$

Pour supprimer cette inversion, nous pouvons échanger k et h par τ_{kh} , transposition de k et h . Je rappelle que τ_{kh} est définie par : $\tau_{kh}(k) = h$, $\tau_{kh}(h) = k$ et $\tau_{kh}(j) = j$ si $j \notin \{k, h\}$.

Posons alors $\sigma' = \sigma \circ \tau_{kh}$. On a $\sigma'(k) = \sigma(h)$, $\sigma'(h) = \sigma(k)$ et $\sigma'(j) = \sigma(j)$ si $j \notin \{k, h\}$.

Par suite :

$$\begin{aligned} \frac{T(\sigma')}{T(\sigma)} &= \frac{(a+k+\sigma'(k))(a+h+\sigma'(h))}{(a+k+\sigma(k))(a+h+\sigma(h))} = \frac{(a+k+\sigma(h))(a+h+\sigma(k))}{(a+k+\sigma(k))(a+h+\sigma(h))} \\ &= \frac{(a+k)(a+h) + (a+k)\sigma(k) + (a+h)\sigma(h) + \sigma(k)\sigma(h)}{(a+k)(a+h) + (a+k)\sigma(h) + (a+h)\sigma(k) + \sigma(k)\sigma(h)} = \frac{N}{D} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{On a } N-D &= (a+k)(\sigma(k) - \sigma(h)) + (a+h)(\sigma(h) - \sigma(k)) \\ &= (k-h)(\sigma(k) - \sigma(h)) = (k-h)^2 \frac{\sigma(k) - \sigma(h)}{k - h} < 0. \end{aligned}$$

Ceci montre bien que $N < D$, d'où $T(\sigma') < T(\sigma)$, c'est-à-dire que $T(\sigma)$ n'est pas minimum, par la seule raison que $\sigma \neq \epsilon$. Comme le minimum est atteint, il l'est pour $\sigma = \epsilon$.

Pour déterminer le maximum de $T(\sigma)$, il n'est pas nécessaire de procéder de même. On peut observer que $T(\sigma)$ est le produit de n facteurs dont la somme est constante (i.e. indépendante de σ) et appli-

Nous avons donc prouvé que la suite $t_n = x_n - \sqrt{2n+24}$ est décroissante.

Il en découle que $t_{1000} < t_0$, soit $x_{1000} - \sqrt{2024} < 5 - \sqrt{24}$, ou encore $x_{1000} < \sqrt{2024} - \sqrt{24} + 5$. Comme $\sqrt{2024} \approx 44,989 < 44,99$ et que $\sqrt{24} \approx 4,899 > 4,89$, il vient : $x_{1000} < 44,99 - 4,89 + 5 = 45,1$.

p. 8 Parmi les rationnels r tels que $|r-\pi| < |\frac{22}{7}-\pi|$, quel est celui qui a le plus petit dénominateur ?

Rappelons que $\pi \approx 3,141593$ et $\frac{22}{7} \approx 3,142857$.

Nous cherchons un rationnel $r = \frac{p}{q}$ tel que $|r-\pi| < |\frac{22}{7}-\pi|$.

Si nous appelons α le réel défini par $\pi - \alpha = \frac{22}{7} - \pi$, cette condition s'écrit $\alpha < r < \frac{22}{7}$. Ce réel α est à peu près égal à :

$2 \times 3,141593 - 3,142857 = 3,140329$. En tous cas, il est tel que : $3,14 < \alpha < 3,14033$.

Nous cherchons donc une fraction $\frac{p}{q}$ telle que $3,14 < \frac{p}{q} < \frac{22}{7}$, soit $\frac{157}{50} < \frac{p}{q} < \frac{22}{7}$. Cette recherche va être favorisée par une circonstance exceptionnelle.

Nous avons $\left| \frac{157}{50} - \frac{22}{7} \right| = 1099 - 1100 = -1$. Or, il est une propriété que nous laisserons démontrer à nos lecteurs : si a, b, c, d, p, q sont des entiers > 0 tels que $\frac{a}{b} < \frac{p}{q} < \frac{c}{d}$ et $\left| \frac{a}{b} - \frac{c}{d} \right| = -1$, alors $q \geq b+d$.

Ici, nous avons donc $q \geq 57$. Tout rationnel compris entre α et $\frac{22}{7}$, qui se trouve ipso facto compris entre $\frac{157}{50}$ et $\frac{22}{7}$, a un dénominateur ≥ 57 .

Cherchons s'il en est un de dénominateur 57. Si c'est le cas, on aura $\frac{157}{50} < \frac{p}{57} < \frac{22}{7}$, d'où $\frac{57 \times 157}{50} < p < \frac{57 \times 22}{7}$.

Or, $\frac{57 \times 157}{50} = 178,98$ et $\frac{57 \times 22}{7} \approx 179,143 > 179$. Il y a un seul entier compris entre $\frac{57 \times 157}{50}$ et $\frac{57 \times 22}{7}$, c'est 179.

$$= \frac{1}{x_n} - \frac{2}{\sqrt{2n+26} + \sqrt{2n+24}}$$

On aura $t_{n+1} < t_n$ ssi $x_n > \frac{\sqrt{2n+24} + \sqrt{2n+26}}{2}$. Cette dernière propriétés est-elle vraie ? Voyons.

n	0	1	2	3	4
x_n	5	5,2	5,392	5,578	5,757
$\frac{\sqrt{2n+24} + \sqrt{2n+26}}{2}$	4,999	5,195	5,384	5,567	5,744

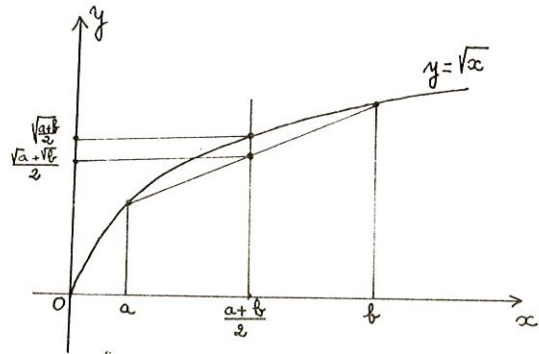
Ici, cela a l'air de marcher. Vérifions ceci par récurrence.

$$\begin{aligned} \text{Si } x_n > \frac{\sqrt{2n+24} + \sqrt{2n+26}}{2}, \text{ alors } x_{n+1} &> \frac{\sqrt{2n+24} + \sqrt{2n+26}}{2} + \frac{2}{\sqrt{2n+24} + \sqrt{2n+26}} \\ &= \frac{\sqrt{2n+24} + \sqrt{2n+26} + 2(\sqrt{2n+26} - \sqrt{2n+24})}{2} = \frac{3\sqrt{2n+26} - \sqrt{2n+24}}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Par suite } x_{n+1} - \frac{\sqrt{2n+26} + \sqrt{2n+28}}{2} &= \frac{2\sqrt{2n+26} - \sqrt{2n+24} - \sqrt{2n+28}}{2} \\ &= 2n+26 - \frac{\sqrt{2n+24} + \sqrt{2n+28}}{2} \end{aligned}$$

Or, cette quantité est positive parce que $2n+26$ est la demi-somme de $2n+24$ et $2n+28$ et que l'on a $\sqrt{\frac{a+b}{2}} > \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{2}$ si $a > b \geq 0$.

Cette propriété se vérifie sans peine par le calcul, et se voit sur la graphique de la fonction $\sqrt{\cdot}$, laquelle est dite, de ce fait, concave. Voir figure :



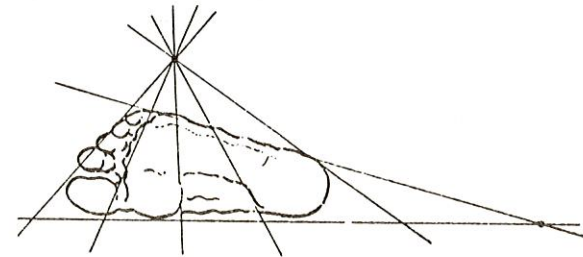
quer la proposition par laquelle nous avons débuté le présent article. On conclut que le produit $T(\sigma)$ est maximum lorsque ses facteurs sont égaux, ce qui est possible si l'on prend pour σ la permutation définie, pour tout $i \in E_n$, par $p(i) = n+1-i$ ("les premiers seront les derniers").

Conclusion

Nous venons d'étudier quatre exemples où le fait de savoir qu'une certaine fonction possède un extremum nous permet de déterminer celui-ci à moindre frais.

La certitude de cette existence peut se fonder sur un argument de finitude, comme dans le dernier exemple, ou sur un argument de compacité, qui provient aussi, au fond, d'une question de finitude.

Espérons que nos lecteurs trouveront d'autres exemples d'applications de cette méthode et nous en feront part.



par B. Verlant

Dans les classes de terminales des lycées technologiques préparant aux baccalauréats de techniciens du secteur industriel (séries F), les utilisateurs de la Mathématique sont nombreux : du professeur d'atelier au professeur de technologie, de mécanique ou de résistance des matériaux, de laboratoire, d'organisation de chantier ... et, bien sûr, de sciences physiques.

Les difficultés d'harmonisation des notations et des programmes math-physique rencontrées en lycées classiques se trouvent multipliées.

Voici deux exercices utilisant les applications du calcul intégral. Le premier a été posé dans un baccalauréat de technicien dans une matière traitant de l'organisation et de la gestion des chantiers de génie civil. Le second, provenant d'un cours de technologie, dépasse le programme de mathématique de terminale. Il montre que les applications technologiques n'utilisent pas les valeurs numériques entières rencontrées dans la plupart des exercices des manuels de mathématique, mêmes destinés aux futurs techniciens, ce qui milite véhément pour l'autorisation de l'usage des calculatrices aux épreuves de baccalauréat.

EXEMPLE 1

Lorsqu'une entreprise travaille sur stock, la tentation des techniciens est de produire de grandes séries pour diminuer les frais fixes de fabrication (établissement de documents, temps de mise en route, réglage, approvisionnement). On aboutit ainsi à un gonflement du stock qui coûte cher. Le gestionnaire doit déterminer le processus de fabrication qui minimise le coût. La production totale est donc effectuée en x lots.

Exercice

Une entreprise doit produire chaque année 12000 pièces dont le prix de revient unitaire est de 8 F et dont la vente est répartie uniformément sur toute l'année. La mise en route d'un lot entraîne 300 F de charges fixes. Le stock coûte annuellement 15% de sa valeur de production. Calculer le nombre de lots x tel que le prix de revient de la production soit minimal.

Démontrons donc par récurrence que, pour tout $n \geq 1$, $x_n > \sqrt{2n+25}$. En effet, $x_0 = \sqrt{2 \cdot 0 + 25}$. Si $x_n \geq \sqrt{2n+25}$, alors

$$x_{n+1} \geq \sqrt{2n+25} + \frac{1}{\sqrt{2n+25}} \text{ car la fonction } x \mapsto x + \frac{1}{x} \text{ est crois-}$$

sante sur l'intervalle $[1, +\infty[$.

Nous en tirons $x_{n+1}^2 \geq 2n+25+2 + \frac{1}{2n+25} > 2(n+1)+25$, d'où :

$x_{n+1} > \sqrt{2(n+1)+25}$, CQFD. Appliqué à $n = 1000$, ceci donne :

$x_{1000} > \sqrt{2025} = 45$, juste ce que nous voulons.

Il reste à majorer x_{1000} , et pour cela nous devons chercher à améliorer notre connaissance de la suite x_n . Un bon moyen semble l'étude de la suite $y_n = x_n - \sqrt{2n}$:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
y_n	5	4,2	3,392	3,129	2,929	2,769	2,635	2,521	2,423	2,336

A première vue, elle semble décroissante. Si c'est vrai, nous pourrions en déduire une majoration de x_n . On aura en effet :

$y_{1000} < y_9$, d'où :

$x_{1000} < 44,8 + 2,4 = 47,2$, précision encore insuffisante.

Pourquoi ? Toujours la même raison : on n'a pas pris en considération la valeur de x_0 .

On pourrait penser à étudier la suite $z_n = x_n - \sqrt{2n+25}$, mais celle-ci démarre comme une suite croissante.

Essayons $t_n = x_n - \sqrt{2n+24}$

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
x_n	5	5,2	5,392	5,578	5,757	5,931	6,099	6,263	6,423	6,579
$\sqrt{2x+24}$	4,899	5,099	5,292	5,477	5,657	5,831	6,000	6,164	6,325	6,481
t_n	0,101	0,101	0,100	0,101	0,100	0,100	0,099	0,099	0,099	0,098

Elle a l'air à peu près décroissante.

Il faudrait le démontrer

$$t_{n+1} - t_n = x_{n+1} - \sqrt{2n+26} - x_n + \sqrt{2n+24}$$

$$= (x_{n+1} - x_n) - (\sqrt{2n+26} - \sqrt{2n+24})$$

paraît assez déroutant. Pour y voir plus clair, il faut étudier le comportement de la suite x_n .

Nous pouvons d'abord remarquer que cette suite a ses termes positifs et ne converge pas. En effet, si x_n tendait vers un nombre réel ℓ , celui-ci serait forcément > 0 et vérifierait l'égalité $\ell = \ell + \frac{1}{\ell}$, ce qui ne se peut. Mais la suite x_n est croissante : elle tend donc vers $+\infty$.

On peut même préciser encore : on a $x_{n+1}^2 = x_n^2 + 2 + \frac{1}{x_n^2}$.

La suite $u_n = x_{n+1}^2 - x_n^2$ tend vers 2. D'après le théorème de Cesaro, la suite :

$$v_n = \frac{u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1}}{n}$$

a aussi pour limite 2. Mais $v_n = \frac{x_n^2 - x_0^2}{n}$, ce qui montre que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_n^2}{n} = 2, \text{ et par suite } x_n \sim \sqrt{2n}.$$

C'est donc à $\sqrt{2n}$ qu'il faut comparer x_n .

On a le tableau :

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
x_n	5	5,2	5,392	5,578	5,757	5,931	6,099	6,263	6,423	6,579
$\sqrt{2n}$	0	1	2	2,449	2,828	3,162	3,464	3,742	4	4,243

On observe que $x_n > \sqrt{2n}$, ce que l'on peut établir par récurrence. Ceci implique $x_{1000} > 44,7$, résultat encore trop imprécis au vu des exigences de l'énoncé. Ceci provient de ce que l'on n'a pas tenu compte de la valeur de x_0 . Ce n'est pas à $\sqrt{2n}$ mais à $\sqrt{2n+25}$ que l'on doit comparer x_n , car $x_0 = \sqrt{25}$.

Pour les premiers termes, cela a plutôt l'air de bien se passer :

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
x_n	5	5,200	5,392	5,578	5,757	5,931	6,099	6,263	6,433	6,579
$\sqrt{2n+25}$	5	5,196	5,385	5,568	5,745	5,916	6,083	6,245	6,403	6,557

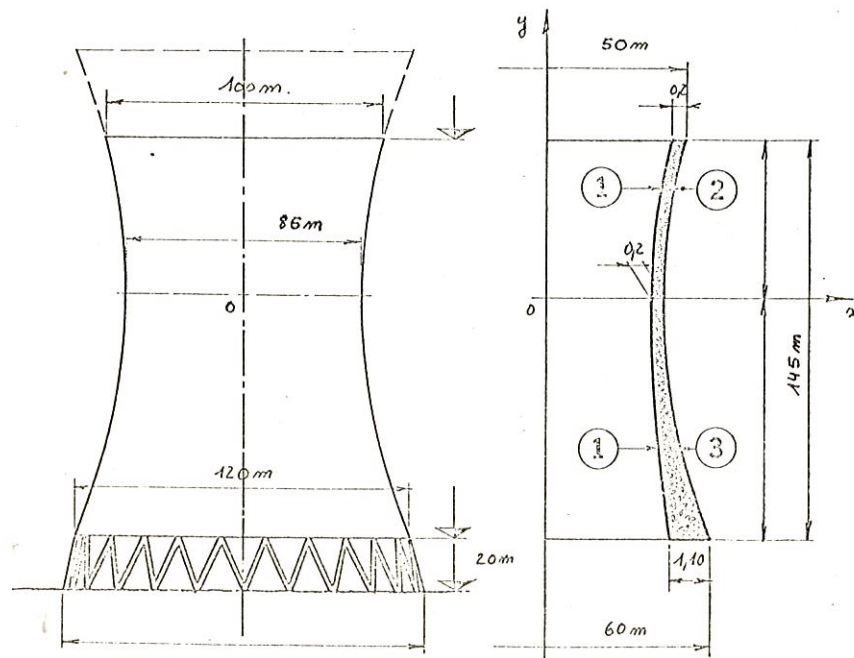
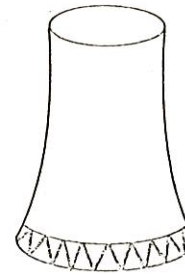
EXEMPLE 2

Les dessins ci-dessous représentent une des tours de réfrigération de la centrale nucléaire EDF de Dampierre. Toute les cotes sont en mètres. L'épaisseur de la paroi a été exagérée : ramenée à la dimension d'un oeuf, elle serait inférieure à celle de la coquille.

Le contour (1) définit un arc d'hyperbole d'axes $x'Ox$ et $y'Oy$. Le contour (2) est un arc d'hyperbole déduit de l'arc de (1) tel que $y > 0$ par translation de vecteur $0,2\vec{i}$. Le contour (3) définit un arc de cercle de rayon 250 mètres.

Calculer le volume du béton nécessaire pour édifier la tour.

(On ne s'intéresse pas au soubassement de 20 m de haut.)



A PROPOS DE CENTRE DE GRAVITE

par Roger ISS

Voici un résultat classique, mais semble-t-il assez peu connu :

Etant donné un récipient contenant un liquide, quelle que soit la forme du récipient, le centre de gravité de l'ensemble récipient+liquide est le plus bas possible lorsqu'il est à la surface du liquide.

Soit h la hauteur du liquide et z la cote du centre de gravité G de l'ensemble vase+liquide (mesurées à partir du fond du vase).

Si $z < h$, en utilisant la propriété d'associativité, on vérifie facilement qu'en rajoutant du liquide le centre de gravité monte et qu'en enlevant du liquide ($\Delta h < h - z$) il descend. $z(h + \Delta h) - z(h)$ a donc le signe de Δh , ou encore $z(h)$ est fonction croissante de h .

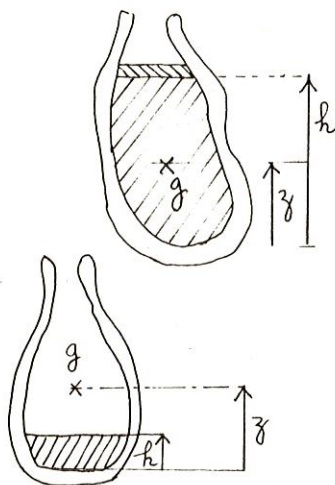
Si $z > h$, on constate de la même façon que $z(h)$ est fonction décroissante de h .

Dans ces conditions, soit z_0 la cote du centre de gravité du vase vide.

Lorsqu'on remplit le vase, si $z_0 > 0$, $z(0) = z_0$, $z(h)$ est d'abord fonction décroissante de h . Pour $z > h$ (vérifier que le vase ne peut pas être "plein" pour $z \leq h$!), $z(h)$ sera croissante. Comme c'est une fonction continue,

$z(h)$ est minimum pour $z = h$.

N.B. Il faut $z_0 > 0$; sinon seule la phase "ascendante" du centre de gravité subsiste et le minimum correspond au vase vide ... ce théorème est alors en défaut.



Il s'agit de trouver le maximum de cette aire.

Exprimons que $A'B'C'$ est un triangle cévien : le théorème de Céva traduit ce fait :

$$\frac{x}{a-x} \cdot \frac{y}{a-y} \cdot \frac{z}{a-z} = 1 \quad \text{ou} \quad xyz = (a-x)(a-y)(a-z) \quad (2)$$

Développons (2) :

$$xyz = a^3 - a^2(x+y+z) + a(xz+yx+zy) - xyz$$

Soit :

$$a^2 - a(x+y+z) + xz + yx + zy = \frac{2xyz}{a} \quad (3)$$

On voit donc en rapprochant (2) et (3) que l'aire $A'B'C'$ est égale, à une constante près, au produit $P = xyz$; tout le problème revient donc à maximiser ce produit.

D'après (2) :

$$P = xyz = (a-x)(a-y)(a-z)$$

P^2 s'écrit :

$$P^2 = x(a-x)y(a-y)z(a-z)$$

La somme des termes de ce produit est constante et vaut $3a$, mais si n nombres positifs ou une somme constante, leur produit est maximum lorsqu'ils sont tous égaux.

Par conséquent, le maximum de P^2 (donc de P) est obtenu pour

$$x = a-x = y = a-y = z = a-z$$

c'est-à-dire $x = y = z = \frac{a}{2}$

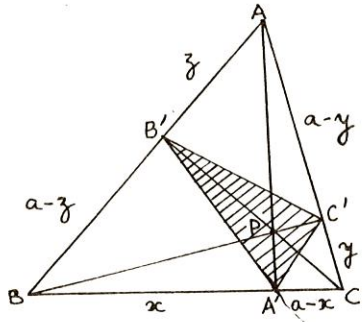
P est alors situé au centre de gravité du triangle ABC et $\frac{S'}{S} = \frac{1}{4}$.

On a donc toujours $\frac{S'}{S} \leq \frac{1}{4}$.

p. 5 Soit la suite x_n définie par $x_0 = 5$ et, pour tout $x \geq 1$, $x_n = x_{n-1} + \frac{1}{x_{n-1}}$. Démontrer que $45 < x_{1000} < 45,1$.

Ce problème nous vient du petit livre bleu que MM Gerll et Girard ont consacré aux Olympiades Internationales de Mathématiques (Hachette éditeur). C'était un énoncé non retenu par le jury. De prime abord, il

P. 3 Soient A,B,C, trois points d'un plan affine euclidien et P un point intérieur au triangle ABC. AP coupe BC en A', BP coupe CA en B', CP coupe AB en C'. Soient S' l'aire du "triangle cévien" A'B'C' et S l'aire de ABC. Quel est le maximum du rapport $\frac{S'}{S}$?



Si S' désigne l'aire du triangle cévien A'B'C' et S l'aire du triangle ABC, on voit qu'il est facile de calculer le maximum du rapport $\frac{S'}{S}$ dans certain cas particulier : par exemple, lorsque P est situé au centre de gravité (il est immédiat que $\frac{S'}{S} = \frac{1}{4}$ dans ce cas), ou bien lorsque P est situé au point de concours des bissectrices ... etc, et, il semble bien que, dans chaque cas $\frac{S'}{S} \leq \frac{1}{4}$.

Essayons de démontrer que c'est effectivement le cas.

Le problème devient plus simple lorsque l'on se limite à prendre un triangle équilatéral pour ABC, mais cela ne restreint en rien la généralité du problème car on peut toujours trouver une application affine f qui envoie ABC sur un autre triangle équilatéral de manière que le rapport des aires soit conservé par f. Les lecteurs fervents de "vieille géométrie" pourront aussi se convaincre de la propriété énoncée en transformant le triangle donné ABC en un triangle équilatéral à l'aide d'une projection parallèle (dans l'espace).

Soit donc un triangle ABC, équilatéral, P intérieur à ABC et A'B'C' le triangle cévien correspondant à P. Posons aussi (en longueur) :
 $x = A'B$; $a-x = A'C$; $y = CC'$; $a-y = C'A$; $z = AB'$; $a-z = BB'$
 $a =$ longueur du côté de ABC.

Evaluons l'aire de A'B'C'.

aire A'B'B + aire A'C'C + aire AB'C' = $\frac{\sqrt{3}}{4} [x(a-z) + y(a-x) + z(a-y)]$
 (en tenant compte du fait que ABC est équilatéral $\sin B = \sin C = \sin A = \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$; on a appliqué la formule $S = \frac{1}{2} bc \sin A$)

$$\begin{aligned} \text{aire A'B'C'} = S &= \frac{\sqrt{3}}{4} [a^2 - x(a-z) - y(a-x) - z(a-y)] \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4} [a^2 - a(x+y+z) + xz + yx + zy] \quad (1) \end{aligned}$$

• Une démonstration "savante" est possible. Je le fais démontrer chaque année par mes "taupins" :

On suppose connue S(z), aire de la section du vase par un plan de cote z.

$$\text{masse du liquide} : m(h) = \rho \int_0^h S(t) dt$$

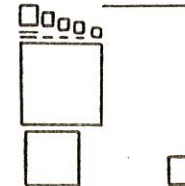
$$\text{cote du centre de gravité du liquide } z(h) = \frac{\int_0^h tS(t) dt}{\int_0^h S(t) dt}$$

et on cherche les extremus de

$$z = \frac{m_0 z_0 + m(h) z(h)}{m_0 + m(h)}$$

• Le raisonnement proposé sur l'autre page est très "physicien" - avec des hypothèses de continuité, etc. plus ou moins implicites.

Peut-être y a-t-il un meilleur raisonnement élémentaire !



SOLUTIONS



τὸ θέλημα τῆς νύμφης.

P. 2 "Produit scalaire" des nombres de Fibonacci et des coefficients binomiaux. Calculer :

$$F_0 C_n^0 + F_1 C_n^1 + \dots + F_{n-1} C_n^{n-1} + F_n C_n^n$$

Le lecteur retrouvera facilement les relations suivantes relatives aux nombres de Fibonacci : *

$$F_0 = 0, F_1 = 1, F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \text{ pour } n \geq 2$$

Soit $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ α et β sont racines de $x^2 - x - 1 = 0$ et $\alpha\beta = -1$; $\alpha - \beta = \sqrt{5}$;

$$F_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} \quad (\text{formule de Binet})$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned} S &= \sum_{p=0}^n C_n^p F_p = \sum_{p=0}^n \frac{1}{\alpha - \beta} C_n^p (\alpha^p - \beta^p) = \frac{1}{\alpha - \beta} \left[\sum_{p=0}^n C_n^p \alpha^p - \sum_{p=0}^n C_n^p \beta^p \right] \\ &= \frac{1}{\alpha - \beta} [(1 + \alpha)^n - (1 + \beta)^n] \end{aligned}$$

mais $1 + \alpha = \alpha^2$ et $1 + \beta = \beta^2$

donc $S = \frac{1}{\alpha - \beta} [\alpha^{2n} - \beta^{2n}] = F_{2n}$

La somme cherchée est donc le nombre de Fibonacci d'indice $2x$. Une démonstration directe par récurrence ne semble pas facile à établir. Diverses généralisations se présentent d'elles-mêmes. La suivante, par exemple, se démontre facilement avec la même technique :

$$\sum_{p=0}^n C_n^p F_{p+j} = F_{2n+j}$$

* Voir, par exemple : Comtet, Analyse combinatoire (PUF), tome 1, page 57, ou encore : A. Ronveaux, Introduction aux équations aux différences finies, Montréal, distribué par Vuibert.