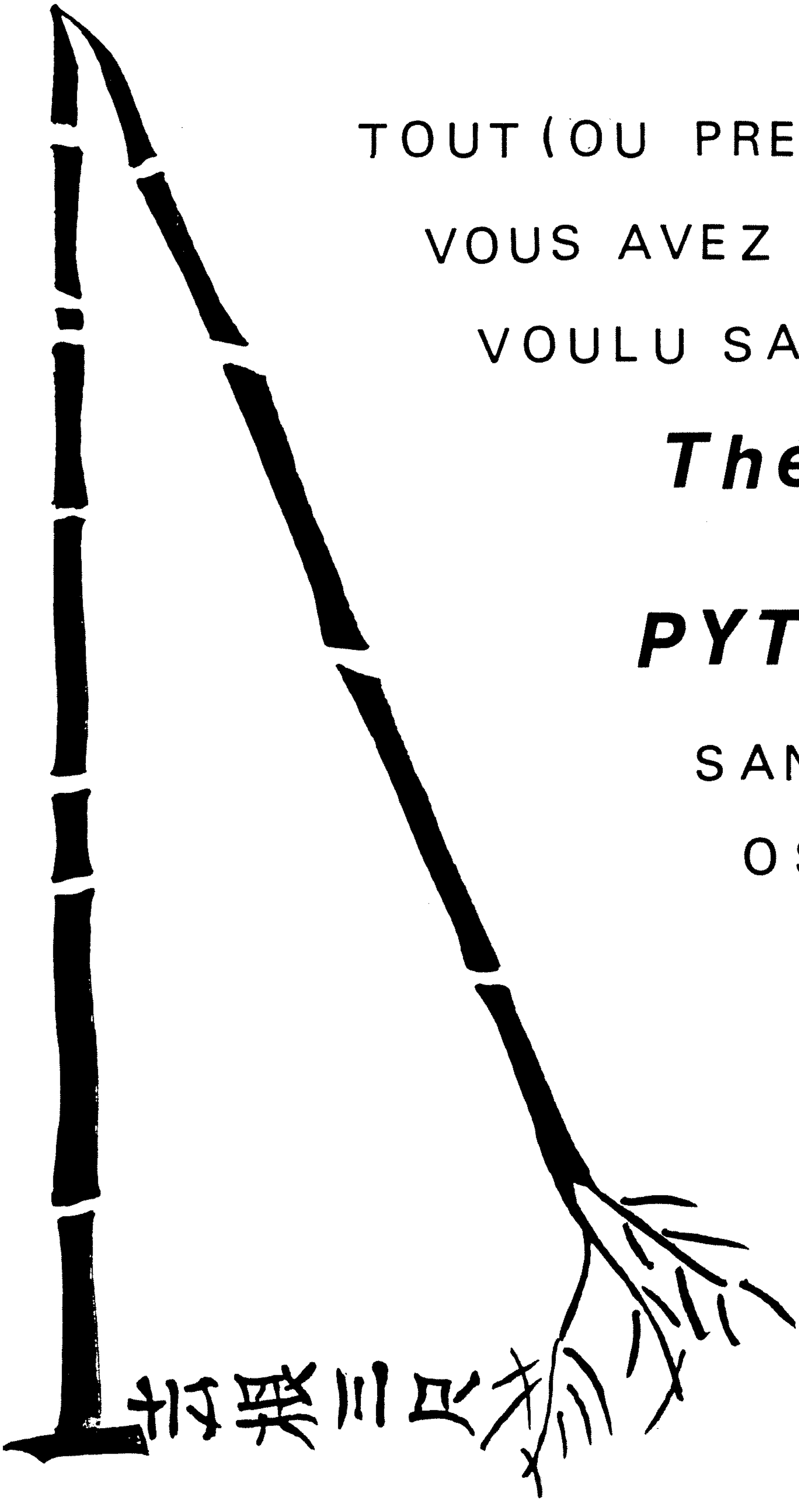
IREM Paris Nord



TOUT (OU PRESQUE) CE QUE
VOUS AVEZ TOUJOURS
VOULU SAVOIR SUR LE

Théorème de PYTHAGORE

SANS JAMAIS
OSER LE
DEMANDER

M.F. COSTE_ROY
P. KNERR
J.C. MARTZLOFF
R. TRAN_DANG

UNIVERSITE PARIS-NORD . IREM

Tout (ou presque) ce que vous avez toujours voulu savoir sur le théorème de pythagore sans jamais avoir oser le demander.

Villetaneuse, 1980, 65 pages, A4 .

ISBN 2 86240 059 9

Dépot légal : 2me trimestre 1980

Retirage **30,00 F**

Le CAPUCHON Du MOINE

LE PONT AUX ÂNES

LE THEOREME DE PYTHAGORE

La Chaise De La Mariée

弦圖

LA FIGURE DE L'HYPOTENUSE

S O M M A I R E

INTRODUCTION

Pourquoi s'intéresser ainsi au théorème de Pythagore ?

Ce résultat a une grande importance historique et a été établi -non nécessairement démontré dans un cadre axiomatique- de nombreuses manières et dans des contextes aussi bien mathématiques que culturels très divers.

Dans nos manuels scolaires du ler cycle de ces dernières années il apparaît à la fois comme le résultat d'une démarche axiomatique compliquée et comme un corollaire sans importance.

Il nous a paru utile de regrouper autour de ce thème des documents et des propositions d'activité en classe (problèmes, découpages).

La lourdeur axiomatique de l'enseignement de la géométrie est actuellement très contestée. Même les nouveaux programmes officiels laissent plus d'autonomie à l'enseignant dans sa démarche. Cette liberté ne pourra se concrétiser que si les enseignants ont les moyens collectifs de dégager de nouvelles approches de l'enseignement de la géométrie : travailler autour d'un thème, donner aux élèves les moyens de "saisir l'espace" (H. Freudenthal, Mathematics as an educational task, D. Rendel Dordrecht 1973)... Elaborer des projets, faire des expériences, diffuser leurs résultats ... Ceci nécessiterait que le temps et les moyens d'une autoformation des enseignant(e)s continuent à exister... dans les I.R.E.M. et ailleurs.

CHRONOLOGIE SOMMAIRE

Dates approximatives

- 1900 - 1600 Tablette babylonienne Plimpton 322

> cette tablette contient 15 triplets pythagoriciens d'une grande complexité.

- 1650 Papyrus de Rhind

> contient 85 problèmes, mais pas le théorème de Pythagore.

- 753 Fondation de Rome

- 600 Thalès

- 540 Pythagore

> Personnage semi-légendaire dont aucun écrit ne nous est parvenu.

- 500 Sulvasutras (Inde)

> Triangles rectangles en nombres entiers en relation avec l'architecture religieuse.

- 460 Parménide

> Sphéricité de la terre.

- 340 Aristote

- 300 Euclide

> Les Eléments d'Euclide contiennent une démonstration du théorème de Pythagore et de sa réciproque (livre I propositions 47 et 48.)

- 212 Mort d'Archimède

- 100 Zhou bi suan jing (Classique du gnomon et des trajectoires circulaires des cieux. Chine).

> contient le théorème de Pythagore et de nombreuses relations dérivées de ce théorème.

+ 75 Héron d'Alexandrie

> formule donnant l'aire d'un triangle en fonction des côtés $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

+ 150 Ptolémée

+ 250 Diophante

+ 470 Zu Chongzhi

> Mathématicien chinois. Calcule la valeur approchée pi $\simeq$ 355/113 par la méthode des polygones. En Europe il faut attendre le 16e siècle pour obtenir une aussi bonne valeur de pi. La méthode de calcul suppose une bonne connaissance du théorème de Pythagore.

+ 998 Mort d'Abu' l' Wafa

> contient un chapître sur les dissections.

+ 999 Gerbert

> pape connu également sous le nom de Sylvestre II, c'est un mathématicien renommé. Cf : problème de Gerbert.

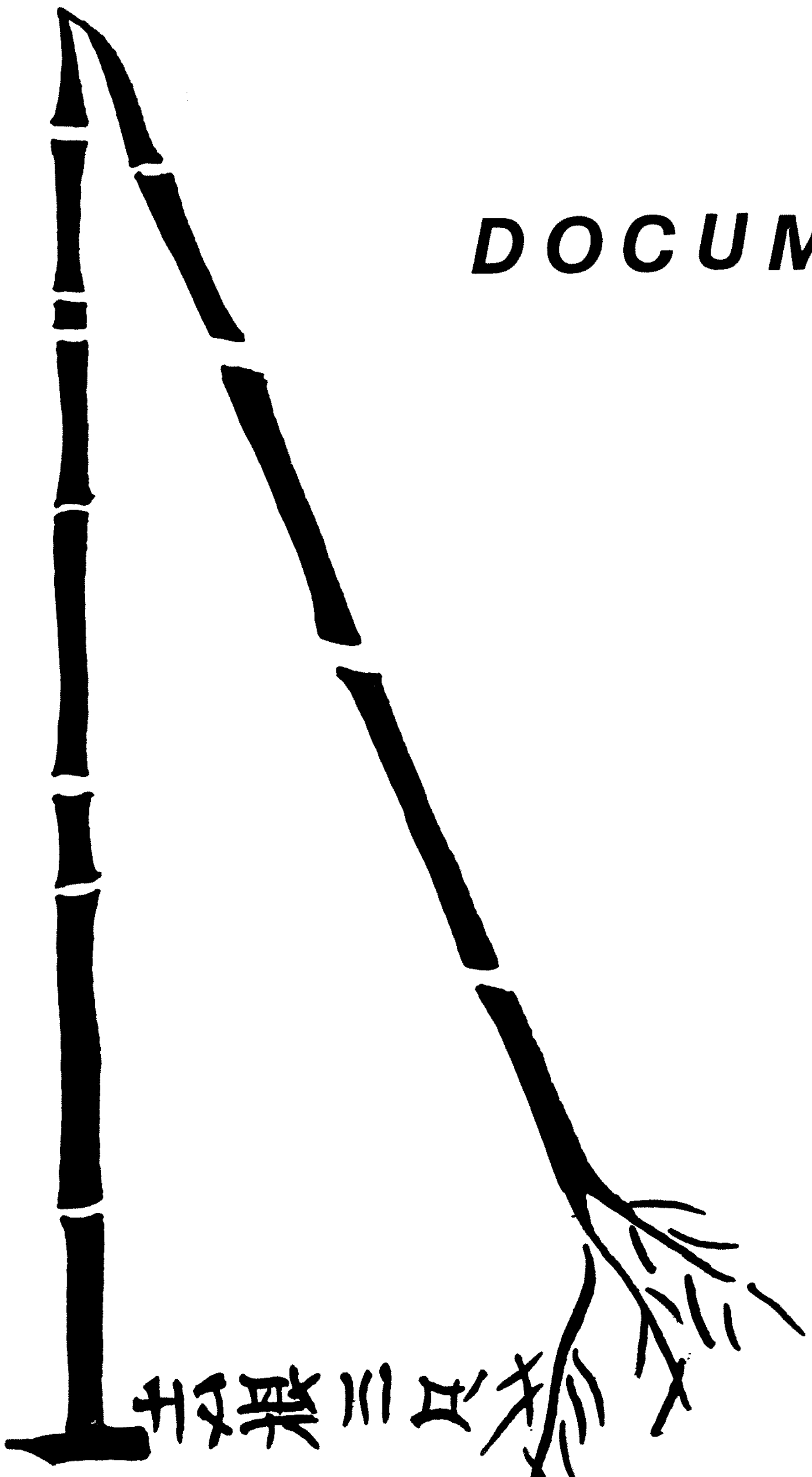
+ 1303 Zhu Shijie

> Mathématicien chinois . Résoud des systèmes d'équations polynômes jusqu'à 4 inconnues et jusqu'au 14ème degré. Un grand nombre de ses problèmes font intervenir les propriétés des triangles rectangles. Voir John Hoe : <u>Les systèmes d'équations polynômes dans le Siyuan Yujian (1303) Collège de France, Institut des Hautes Etudes Chinoises, Paris, 1977</u>.

+ 1642 Naissance de Seki Takakazu

Japonais. Utilise beaucoup le théorème de Pythagore en géométrie métrique. Est également très célèbre (bien que cela soit peu connu en France) par sa découverte des déterminants et des nombres dits "de Bernouilli".

DOCUMENTS

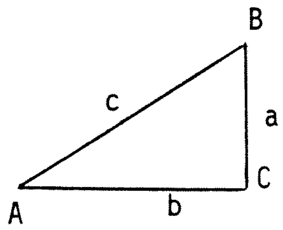


LA TABLETTE BABYLONIENNE PLIMPTON 322 (*)

(vers 1900 - 1600 av. J.C.)

illustration p. 9

Cette tablette se compose de 15 lignes de caractères cunéiformes qui notent des nombres en numération sexagésimale. Les nombres composant cette tablette peuvent se comprendre de la manière suivante :



si l'on note a, b, c les côtés d'un triangle rectangle les nombres de la seconde colonne représentent a , ceux de la troisième représentent l'hypoténuse c et ceux dela première représentent la valeur du rapport $\frac{c^2}{b^2} = \frac{1}{\cos^2 A}$.

Le résultat du calcul de b ne figure pas du tout dans la tablette mais les quinze lignes du texte vérifient dans tous les cas ** l'interprétation que nous venons d'en donner. Ainsi, par exemple, pourla première li-
$a = 1,59$ (sexagésimal) $= 1 + \frac{59}{60} = \frac{119}{60}$, $c = 2,49 = 2 + \frac{49}{60} = \frac{169}{60}$
et le nombre sexagésimal 1,59,0,15 correspond exactement (après simplifications) à $\frac{c^2}{b^2} = \frac{28\ 561}{14\ 400}$. $(1,59,0,15 = 1 + \frac{59}{60} + \frac{15}{(60)^3})$

Si l'on observe attentivement la succession de ces lignes de nombres on est frappé de leur désordre apparent, mais un examen attentif de la première colonne laisse apparaître une variation régulière : il s'agit des valeurs de $\frac{1}{\cos^2 A}$ pour A variant de 45° (lère ligne) à 31° (quinzième ligne). Cela est absolument remarquable et correspond à des triangles rectangles dont les côtés forment des "triplets pythagoriciens" (solutions (a, b, c) en entiers naturels de l'équation diophantienne $a^2 + b^2 = c^2$.) Etant donné la grande complexité de ces suites de nombres on est amené à supposer que les babyloniens possédaient une technique efficace pour les calculer simplement. Or ces triplets s'obtiennent comme suit en représentation paramétrique :

$$a = p^2 - q^2 \qquad \text{(p et q paramètres)}$$
$$b = 2\,pq$$
$$c = p^2 + q^2$$

---

* du nom de la collection Plimpton de l'université Columbia à New-York.

** à condition d'accepter les reconstitutions proposées des nombres manquants indiqués entre crochets dans la figure.

(ainsi pourla première ligne $p = 12$ et $q = 5$ permettent de trouver $a = 119$, $b = 120$ et $c = 169$).

Les babyloniens devaient donc posséder l'analogue de telles formules pour calculer les côtés des triangles rectangles. Neugebauer propose une explication relativement convaincante montrant comment obtenir ces formules avec des raisonnements très simples :

si on pose $a = x + y$ et $b = x - y$

pour que $a^2 = b^2 + c^2$ il faut supposer $c^2 = 4\,xy$. Comme on cherche a, b, c entiers, il est naturel de prendre $x = p^2$ et $y = q^2$. Par cette méthode (que l'on pourrait reformuler sans algèbre mais uniquement à l'aide de raisonnements arithmétiques) on trouve

$$a = p^2 + q^2 \quad , \quad b = p^2 - q^2 \qquad c = 2\,pq \; .$$

la tablette babylonienne

(1900 - 1600 av. J.C.)

fig 1. Plimpton 322

IV	III	II	I
[1,59.0]15	1,59	2,49	1
[1,56.56]58.14,50.6.15	56,7	3,12,1	2
[1,55.7]41,15.33,45	1,16,41	1,50,49	3
[1,]5[3.1]0.29,32,52,16	3,31,49	5,9,1	4
[1,]48.54,1.40	1,5	1,37	5
[1,]47,6.41,40	5,19	8,1	6
[1,]43.11,56,28,26.40	38,11	59,1	7
[1,]41.33,59.3.45	13,19	20,49	8
[1,]38,33,36.36	9,1	12,49	9
1,35.10,2,28,27,24,26,40	1,22,41	2,16,1	10
1,33,45	45	1,15	11
1,29,21,54,2,15	27,59	48,49	12
[1,]27,0.3,45	7,12,1	4,49	13
1,25,48,51,35,6,40	29,31	53,49	14
[1,]23,13,46,40	56	53	15

fig 2. Traduction de la tablette

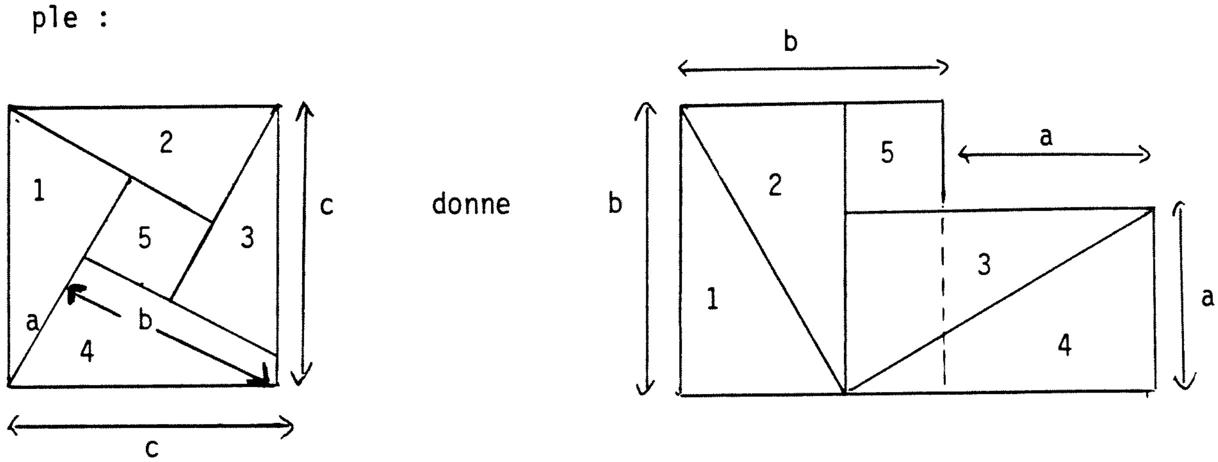
Division sexagésimale.

V	III	II	I
a	*b*	*c*	
120	119	169	1
3 456	3 367	4 825	2
4 800	4 601	6 649	3
13 500	12 709	18 541	4
72	65	97	5
360	319	481	6
2 700	2 291	3 541	7
960	799	1 249	8
600	481	769	9
6 480	4 961	8 161	10
60	45	75	11
2 400	1 679	2 929	12
240	161	289	13
2 700	1 771	3 229	14
90	56	106	15

fig 3 : Triplets "Pythagoriciens" correspondants aux nombres de la tablette.

LES DEMONSTRATIONS " CHINOISES " DU THEOREME de PYTHAGORE

Il s'agit de démonstrations par dissection d'une figure. (on dit aussi par décomposition et, en pédagogie on peut parler de découpages). La méthode consiste à décomposer une figure donnée en un certain nombre d'éléments qui, juxtaposés d'une autre manière, reproduisent une autre figure ayant la même aire que la figure initiale. Selon cette méthode, pour démontrer le théorème de Pythagore on doit décomposer le carré c^2 de manière à faire apparaître une figure d'aire $a^2 + b^2$. Par exemple :



開明青年叢書

中算家的幾何學研究

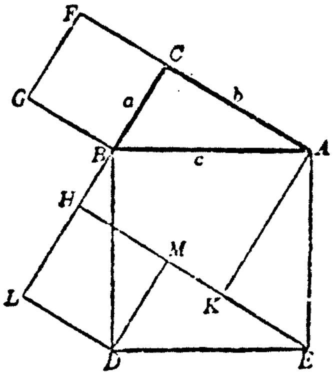
許蒓舫著

LA GEOMETRIE

DES MATHEMATICIENS CHINOIS

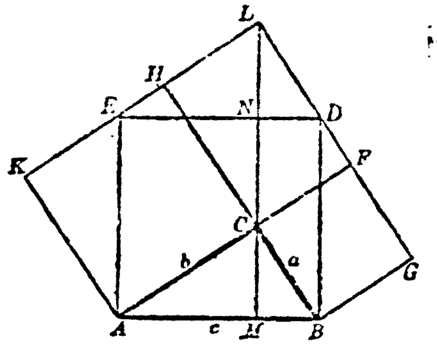
Xǔ Chǔnfáng

創的'青朱出入圖'二十二種最為神妙。所稱青朱出入的意義，大概就是根據割補的演段而說的。現在分別繪圖，用古法演段，作極簡略的說明於後，讀者可另用新法幾何自行作完密的證明。



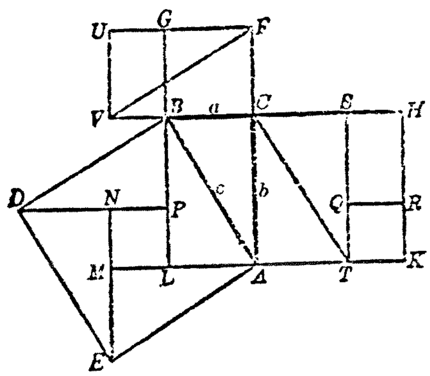
Mei Wending
(1633-1721)

圖 1. 梅文鼎第一圖：*BCFG* 為勾方，*ACHK* 為股方，移勾方於 *HLDM*，再移股方內的 *ABC* 於 *EDM*，最後移勾股方合成的形內的 *BLD* 於 *AKE*，就成弦方 *ABDE*



Mei Wending

圖 2. 梅文鼎第二圖：*BCFG* 為勾方，*ACHK* 為股方，移 *AKE* 於 *CHL*，再移 *LEN* 於 *CAM*，則股方已變成一矩形 *AENM*。同法可變勾方成矩形 *BDNM*。於是就合成弦方 *ABDE*



Mei Wending

圖 3. 梅文鼎第三圖：同前，先移 *SQRH* 於 *UVBG*，再移 *QTKR* 於 *NMLP*，又移 △*CAT*、*SCT*、*UVF*、*FVC* 於 △*BLA*、*NDE*、*MEA*、*BDP* 都得弦方 *ABDE*

Yang Zuomei
XVIIe siècle

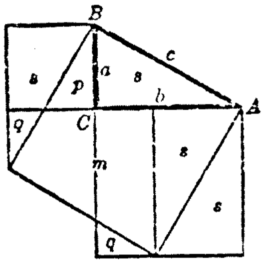


圖4. 楊作枚圖:

$$a^2+b^2=(s-q+p)+(s+m+q)=2s+p+m,$$

$$c^2=2s+p+m.$$

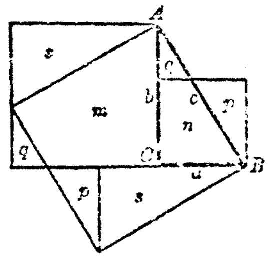


圖5. 李銳圖:

$$a^2+b^2=(n+p)+(m+s+q),$$

$$c^2=n+p+m+s+q.$$

Li Rui
1773-1817

An Qingqiao
1759-1830

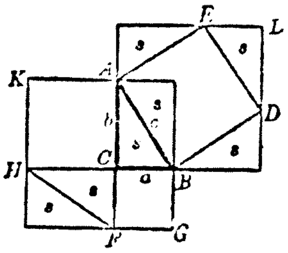


圖6. 安清翹圖:

$$a^2+b^2=\square BF+\square AH=\square KG-4s=(a+b)^2-4s=\square CL-4s=\square AD=c^2.$$

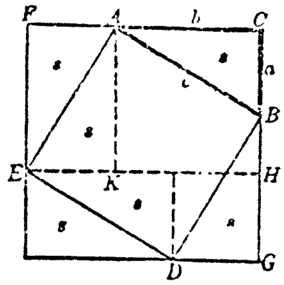


圖7. 何夢瑤圖:

$$a^2+b^2=\square DH+\square AH=\square FG-4s,$$

$$c^2=\square AD=\square FG-4s.$$

He Meng Yao

Xiang Mingda
1789-1850

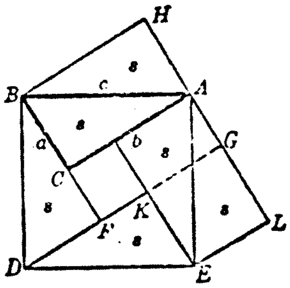


圖8. 項名達圖:

$$a^2+b^2=\square KL+\square BG=\text{五邊形 } BDELH-2s=\square AD=c^2.$$

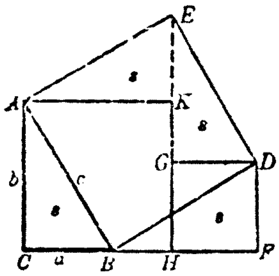
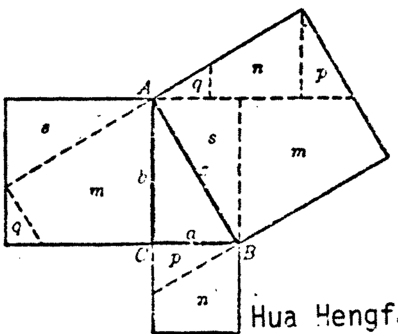


圖9. 陳杰圖:

$$a^2+b^2=\square GF+\square AH=\text{五邊形 } ACFDE-2s=\square AD=c^2.$$

Chen Jie
vers 1700



Hua Hengfang
1833 - 1902

圖10. 華蘅芳第一圖:

$$a^2=n+p,$$

$$b^2=m+s+q,$$

$$c^2=n+p+m+s+q.$$

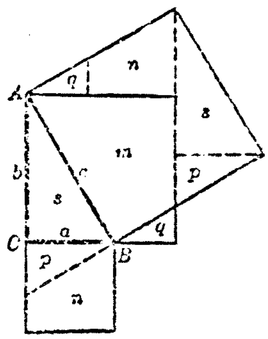


圖11. 華蘅芳第二圖:

$$a^2=n+p,$$

$$b^2=m+s+q,$$

$$c^2=n+p+m+s+q.$$

〔註〕 以下八圖都是從華蘅芳的'青朱出入圖'中選來的，爲節篇計，說明僅指出勾方、股方一共是哪幾個形的和，亦即弦方是這幾個形的和。

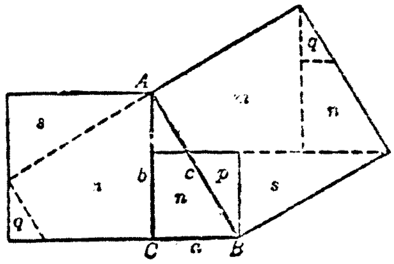


圖 12. $n+p+m+s+q$.

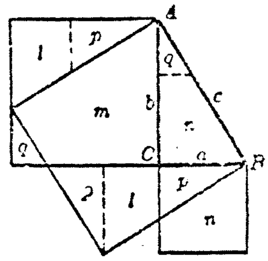


圖 13. $n+2p+m+l+q$.

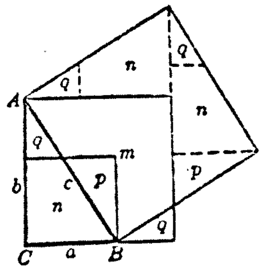


圖 14. $m+p+2n+2q$.

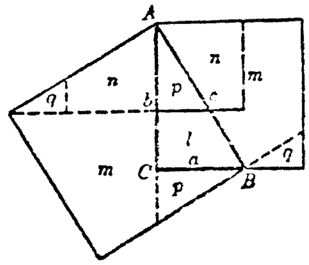


圖 15. $n+m+q+l+2p$.

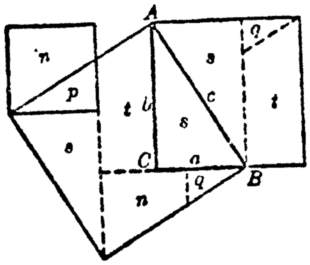


圖 16. $n+p+2s+t+q$.

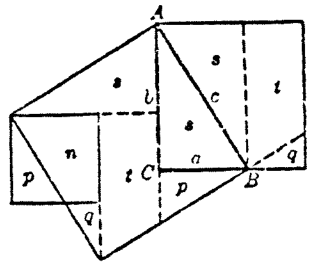


圖 17. $n+p+2s+t+q$.

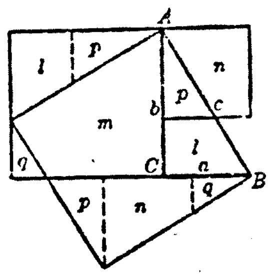


圖 18. $n+2p+m+q+l$.

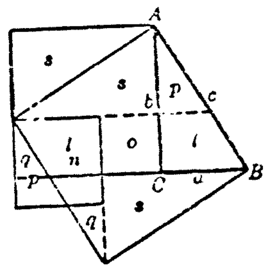


圖 19. $n+p+2s+q+l+o$.

中學生數學參考讀物

COLLECTION A L'USAGE DES ELEVES DU SECONDAIRE

圓 和 二 次 方 程

LE CERCLE ET L'EQUATION DU SECOND DEGRE

馬 明

MA MING

L'aire de la figure totale établie de 2 façons différentes permet de voir la relation fondamentale du triangle rectangle.

Exemple : fig. 6 Aire totale = C + I + II + III = $a^2 + b^2$ + I + II + III

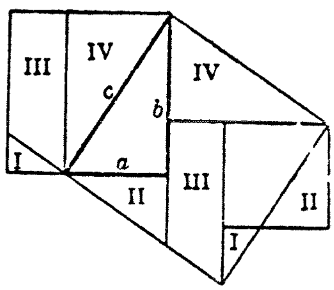


图 1

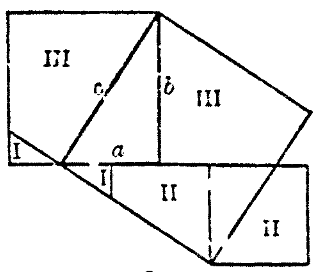


图 2

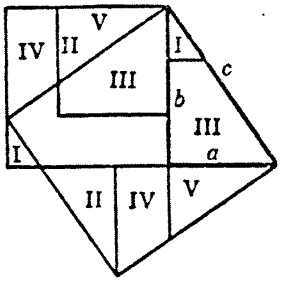


图 3

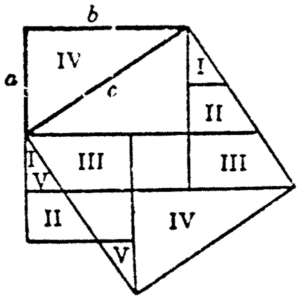


图 4

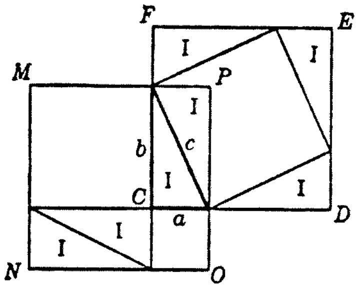


图 5

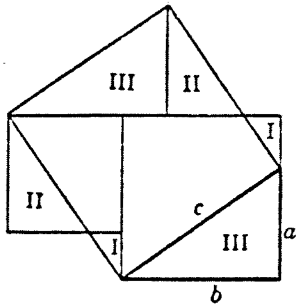


图 6

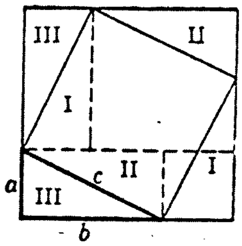


图 7

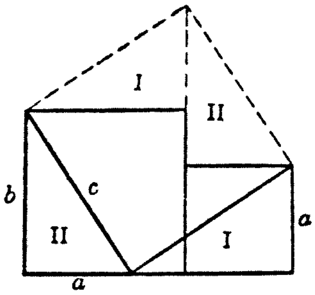


图 8

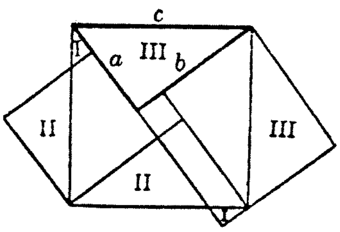


图 9

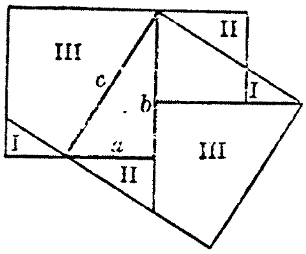


图 10

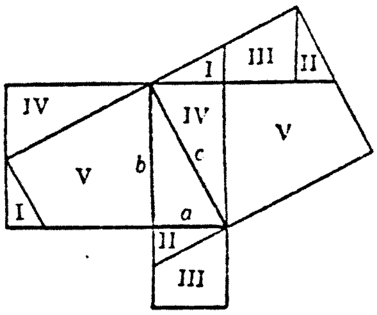


图 11

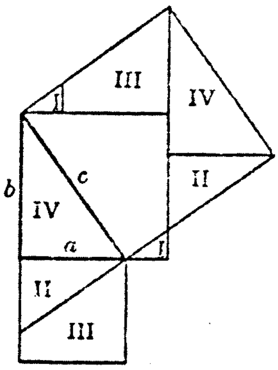


图 12

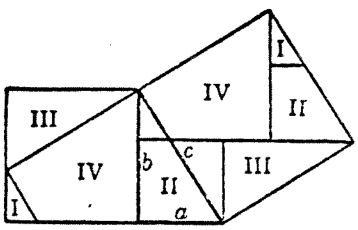


图 13

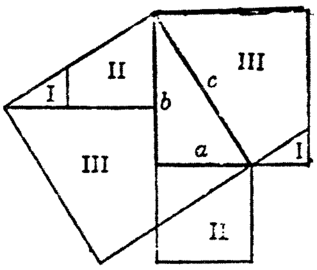


图 14

triplets pythagoriciens (a, b, c) [solutions de l'équation $c^2 = a^2 + b^2$ en entiers naturels]

1. extrait de "le cercle et l'équation du second degré. Ma Ming .

$$a = m^2 - n^2, \quad b = 2mn, \quad c = m^2 + n^2,$$

其中 m 和 n 是自然数，并且 $m > n$.

例如設：$m=2,\ n=1$，就有 $3^2+4^2=5^2$, (1)

$m=3,\ n=2$，就有 $5^2+12^2=13^2$, (2)

$m=3,\ n=1$，就有 $8^2+6^2=10^2$, (3)

$m=4,\ n=3$，就有 $7^2+24^2=25^2$, (4)

$m=4,\ n=2$，就有 $12^2+16^2=20^2$, (5)

$m=4,\ n=1$，就有 $15^2+8^2=17^2$, (6)

$m=5,\ n=4$，就有 $9^2+40^2=41^2$, (7)

$m=5,\ n=3$，就有 $16^2+30^2=34^2$, (8)

$m=5,\ n=2$，就有 $21^2+20^2=29^2$, (9)

$m=5,\ n=1$，就有 $24^2+10^2=26^2$, (10)

……………………………………

按照上述推算公式得出的数組一定是勾股数組，道理很简单，因为

$$c^2 = (m^2+n^2)^2 = m^4 + 2m^2n^2 + n^4,$$

而

$$a^2+b^2 = (m^2-n^2)^2 + (2mn)^2 = m^4 + 2m^2n^2 + n^4,$$

所以

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

m \ n	1	2	3	4	5	6	……
2	3, 4, 5						
3	8, 6,10	5,12,13					
4	15, 8,17	12.16.20	7,24,25				
5	24,10,26	21,20,29	16,30,34	9,40,41			
6	35,12,37	32,24,40	27,36,45	20,48,52	11,60,61		
7	48,14,50	45,28,53	40,42,58	33,56,65	24.70,74	13,84,85	
……	………	………	………	………	………	………	……

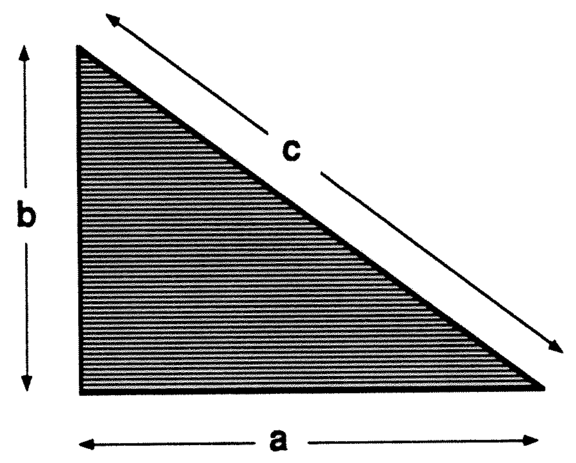
table permettant d'ordonner les triplets pythagoriciens.

2. extrait de "la géométrie des Mathématiciens chinois". Xu Chŭn Fáng .

Les pages qui suivent sont consacrées à une illustration sur papier calque et sans paroles d'une preuve chinoise du théorème de Pythagore datant approximativement de la dynastie des Han (- 200 av. J.C. + 200 ap. J.C.).

d'après : Schrimpf (Robert), La Collection mathématique " Souan King Che Chou " contribution à l'histoire des mathématiques chinoises des origines au VII^e^ siècle de notre ère , 4 vol. , 27 cm , 566 ff. , pl. thèse univ. Rennes , 1963 (inédite).

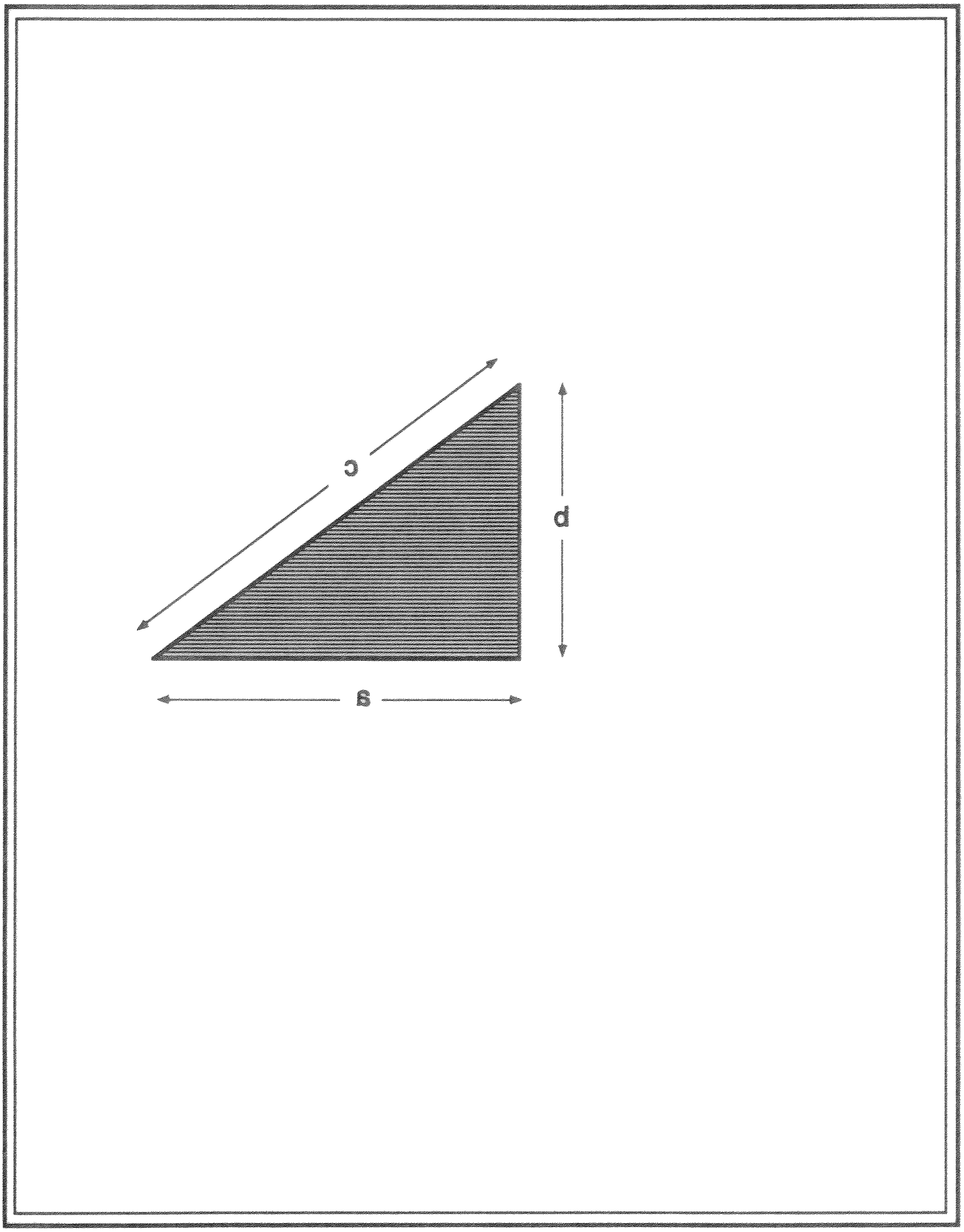
Planche n° 1 : Triangle de base



ROUGE

JAUNE

Planche n° 1 : Triangle de base



ROUGE

JAUNE

Planche n° 2 : C^2

$$(a + b)^2 = c^2 - 2\,ab$$

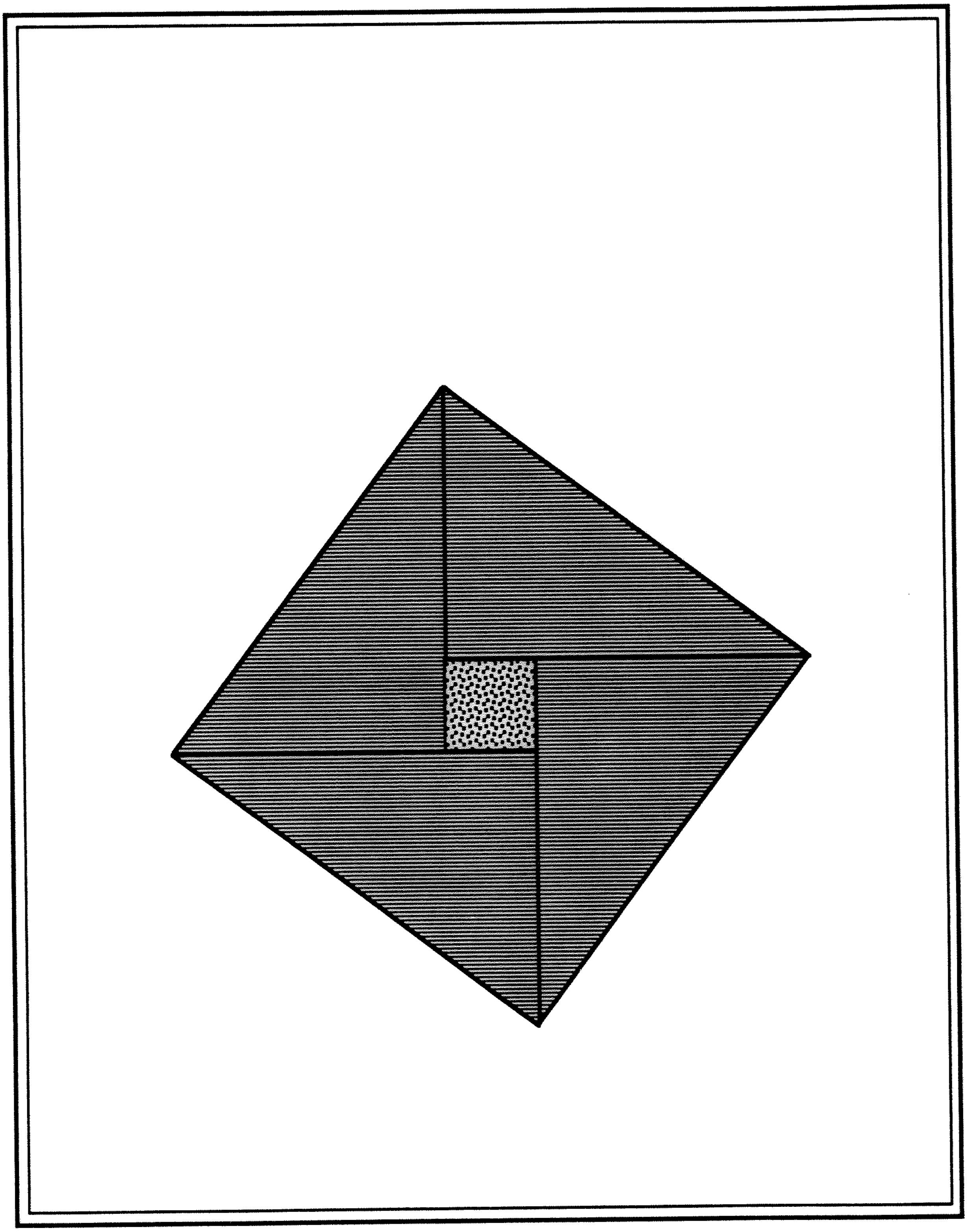


Planche n° 2 : C^2

$(a + b)^2 = c^2 - 2\,ab$

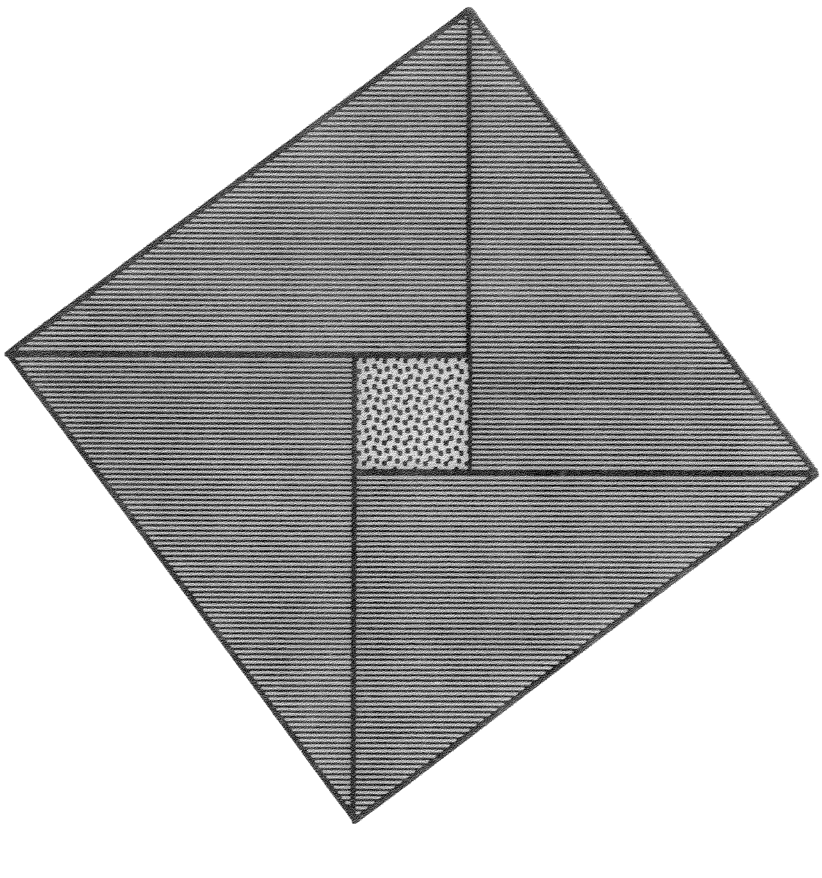


Planche n° 3 : $a^2 + b^2$

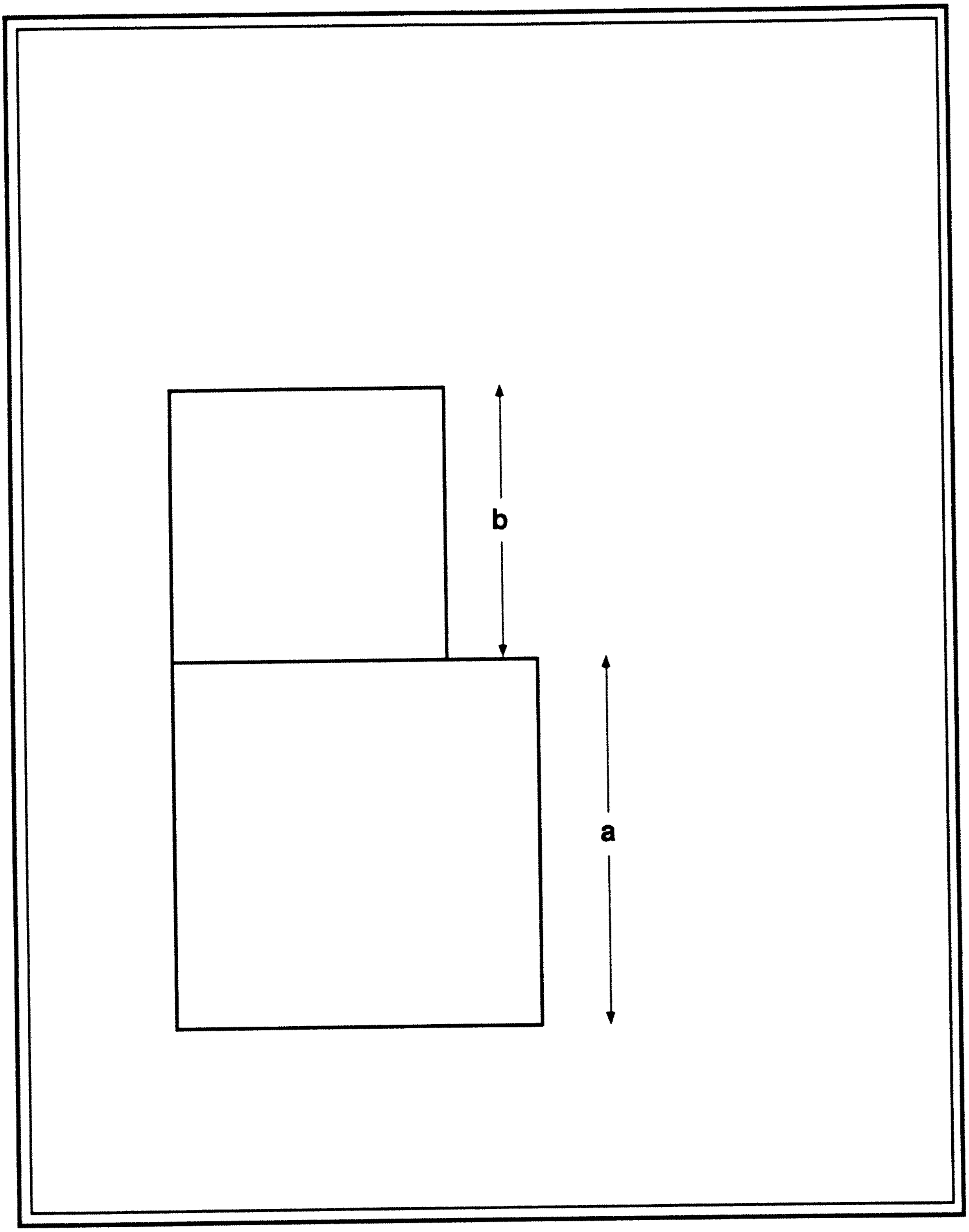


Planche n° 3 : $a^2 + b^2$

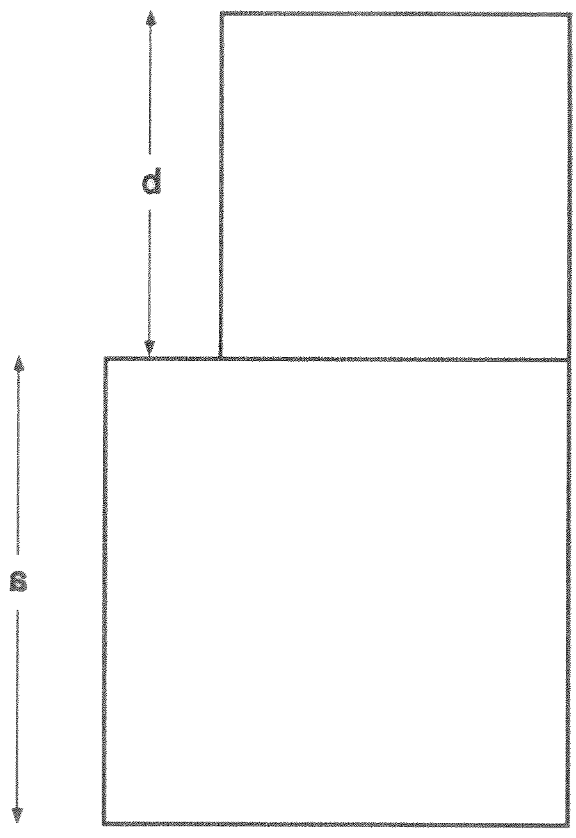


Planche n° 4 : $a^2 + b^2 = c^2$

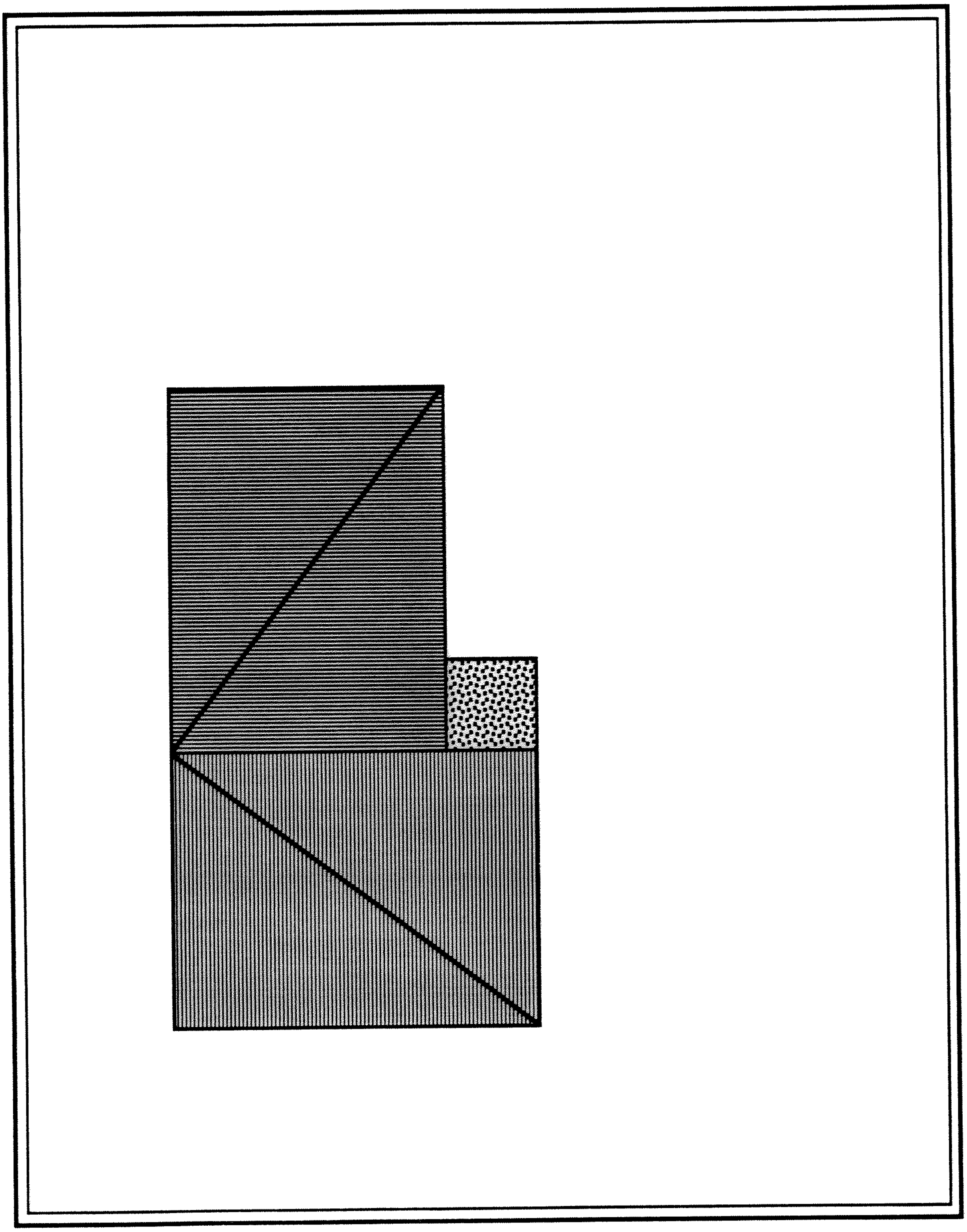
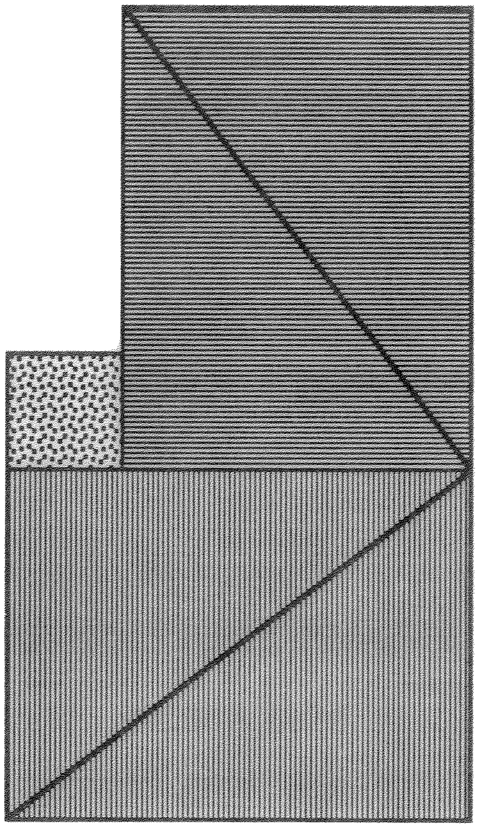
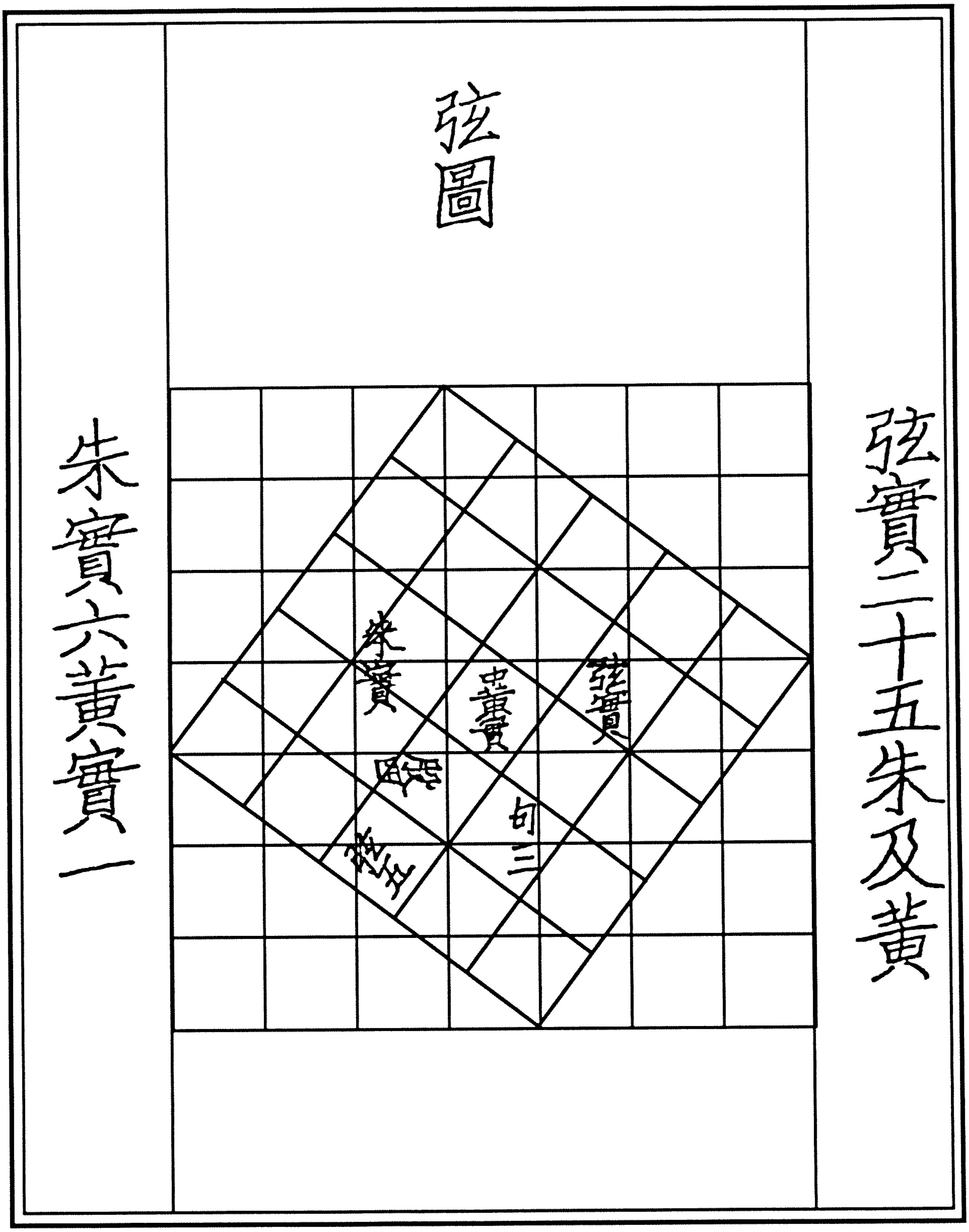


Planche n° 4 : $a^2 + b^2 = c^2$



"Illustration du bien" d'après une copie de l'édition de 1084 reproduite dans le Tien lou lin lang ts'ong chou



Cette figure illustre également l'égalité :

$$(a + b)^2 = c^2 + 2\,ab$$

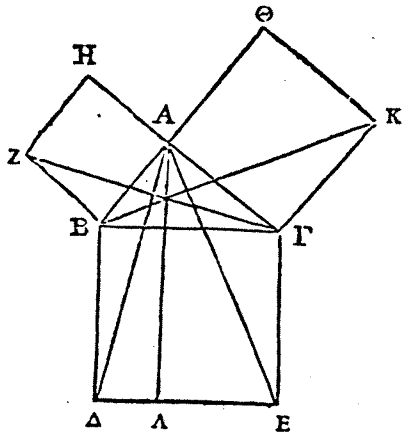
soit $$(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2\,ab$$

LES OEUVRES D'EUCLIDE

Traduites littéralement par F. PEYRARD

et éditées à PARIS en 1819

PROPOSITION XLVII.



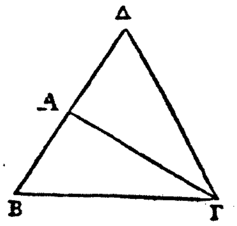
Dans les triangles rectangles, le quarré du côté opposé à l'angle droit est égal aux quarrés des côtés qui comprennent l'angle droit.

Soit ABΓ un triangle rectangle, que BAΓ soit l'angle droit; je dis que le quarré du côté BΓ est égal aux quarrés des côtés BA, AΓ.

Décrivons avec BΓ le quarré BΔEΓ, et avec BA, AΓ les quarrés HB, ΘΓ; et par le point A conduisons AΛ parallèle à l'une ou à l'autre des droites BΔ, ΓE; et joignons AΔ, ZΓ.

Puisque chacun des angles BAΓ, BAH est droit, les deux droites AΓ, AH, non placées du même côté, font avec la droite BA au point A de cette droite, deux angles de suite égaux à deux droits; donc la droite ΓA est dans la direction de AH; la droite BA est dans la direction AΘ, par la même raison. Et puisque l'angle ΔBΓ est égal à l'angle ZBA, étant droits l'un et l'autre, si nous leur ajoutons l'angle commun ABΓ, l'angle entier ΔBA sera égal à l'angle entier ZBΓ (not. 4). Et puisque ΔB est égal à BΓ, et ZB à BA, les deux droites ΔB, BA sont égales aux deux droites ΓB, BZ, chacune à chacune; mais l'angle ΔBA est égal à l'angle ZBΓ; donc la base AΔ est égale à la base ZΓ, et le triangle ABΔ égal au triangle ZBΓ (4). Mais le parallélogramme BΛ est double du triangle ABΔ (41), car ils ont la même base BΔ et ils sont entre les mêmes parallèles BΔ, AΛ; le quarré BH est double du triangle ZBΓ, car ils ont la même base BZ et ils sont entre les mêmes parallèles ZB, HΓ; et les grandeurs qui sont doubles de grandeurs égales, sont égales entr'elles; donc le parallélograme BΛ est égal au quarré HB. Ayant joint AE, BK, nous démontrerons semblablement que le parallélogramme ΓΛ est égal au quarré ΘΓ; donc le quarré entier BΔEΓ est égal aux deux quarrés HB, ΘΓ. Mais le quarré BΔEΓ est décrit avec BΓ, et les quarrés HB, ΘΓ sont décrits avec BA, AΓ; donc le quarré du coté BΓ est égal aux quarrés des côtés BA, AΓ. Donc dans les triangles, etc.

PROPOSITION XLVIII.

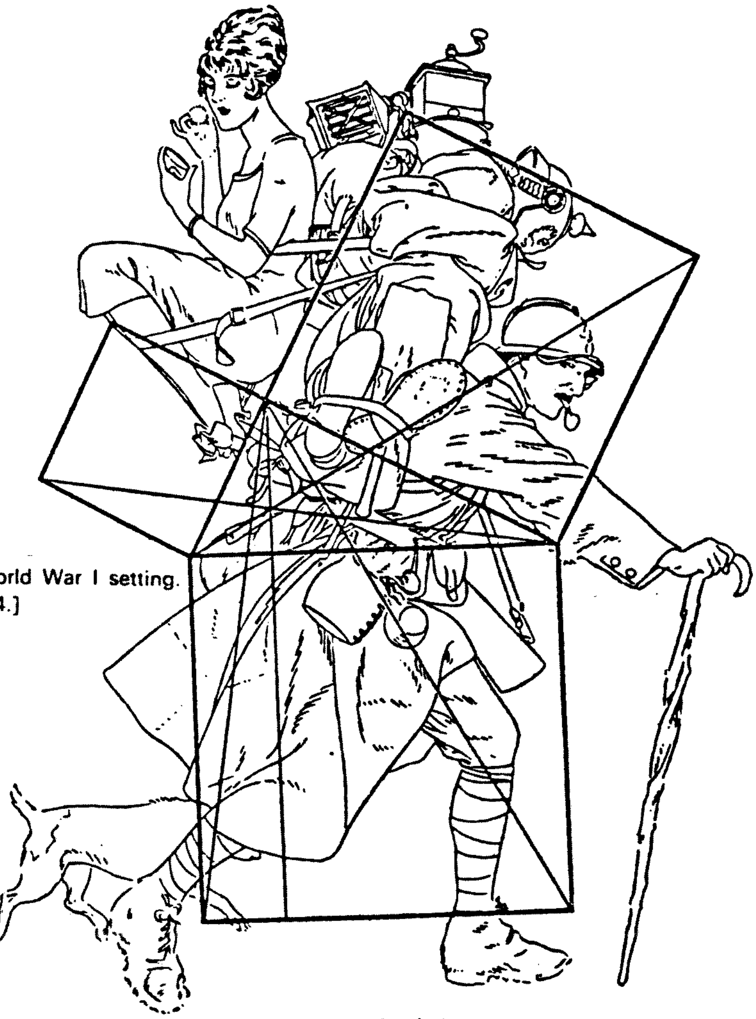


Si le quarré d'un des côtés d'un triangle est égal aux quarrés des deux côtés restants de ce triangle, l'angle compris par les deux côtés restants est droit.

Que le quarré du côté BΓ du triangle ABΓ soit égal aux quarrés des côtés BA, AΓ ; je dis que l'angle BAΓ est droit.

Du point A, conduisons la droite AΔ perpendiculaire à AΓ (11), faisons AΔ égal à BA, et joignons ΔΓ.

Car puisque ΔA est égal à AB, le quarré de ΔA est égal au quarré de AB. Ajoutons le quarré commun de AΓ; les quarrés des droites ΔA, AΓ seront égaux aux quarrés des droites BA, AΓ. Mais le quarré de ΔΓ est égal aux quarrés des droits ΔA, AΓ (47), car l'angle ΔAΓ est droit, et le quarré de BΓ est supposé égal aux quarrés des droites BA, AΓ; donc le quarré de ΔΓ est égal au quarré de BΓ; donc le côté ΔΓ est égal au côté BΓ; mais AΔ est égal à AB, et AΓ est commun; donc les deux droites ΔA, AΓ sont égales aux deux droites BA, AΓ; mais la base ΔΓ est égale à la base BΓ; donc l'angle ΔAΓ est égal à l'angle BAΓ (8). Mais l'angle ΔAΓ est droit; donc l'angle BAΓ est droit aussi. Donc, etc.



The "Bride's Chair" diagram of Euclid's *Elements* I. 47 in a World War I setting. [*The Mathematical Gazette*, **11** (1922–1923), 364.]

ou le sexisme ordinaire
fait bonne mémoire !

τὸ θεώρημα τῆς νύμφης.
(With apologies to *La Vie Parisienne*.)

Eugène ROUCHE et Ch. de COMBEROUSSE

1ère Ed. 1866

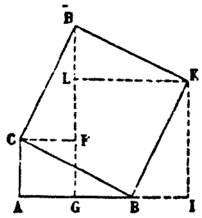
Livre IV - Les Aires

SCOLIE.

441. On peut donner du théorème qui précède (438) une autre démonstration qui montre comment on peut *décomposer effectivement* le carré construit sur l'hypoténuse en parties capables de recouvrir les carrés construits sur les côtés.

Soit (*fig.* 259) le triangle ABC rectangle en A. Sur l'hypoténuse BC, construisons le carré BCHK. Des sommets H et K,

Fig. 259.



abaissons sur le côté AB et sur son prolongement les perpendiculaires HG et KI; des sommets C et K, menons à ce même côté, jusqu'à la rencontre de HG, les parallèles CF et KL.

Les quatre triangles rectangles ABC, CFH, HLK, KIB, sont égaux, comme ayant l'hypoténuse égale et un angle aigu égal. GIKL et ACFG sont donc les carrés construits sur les côtés AB et AC du triangle donné. La figure montre alors immédiatement que, si l'on enlève les deux triangles HCF, HLK, qui, avec le pentagone irrégulier CFLKB, constituent le carré construit sur l'hypoténuse, pour les placer en CAB et BKI, on forme, avec les trois mêmes parties disposées de cette nouvelle façon, la figure ACFLKI, qui est précisément la somme des deux carrés construits sur les deux côtés de l'angle droit.

442. Enfin, on peut encore déduire le même théorème de celui du n° 224. Car, puisque l'aire du carré construit sur une droite a pour mesure le carré du nombre abstrait qui mesure la longueur de cette droite, on voit que le théorème du n° 224 exprime que la mesure du carré construit sur l'hypoténuse est égale à la somme des mesures des carrés construits sur les côtés de l'angle droit, et, par suite, que le premier carré équivaut à la somme des deux autres. Inversement, on passerait du point de vue *concret* au point de vue *abstrait*, c'est-à-dire du n° 438 au n° 224, en remplaçant les aires des carrés par leurs mesures respectives.

La même remarque s'applique aux diverses relations numériques que nous avons démontrées dans le § IV du Livre III, entre les divers éléments d'un triangle rapportés à une unité commune. De ces relations, résultent immédiatement autant de théorèmes sur les aires, et l'on pourrait inversement donner des démonstrations directes de ces derniers théorèmes et en déduire ensuite les relations numériques correspondantes.

438 - Théorème de Pythagore

224 - démonstration du théorème de Pythagore utilisant la similitude .

LA PHILOSOPHIE PYTHAGORICIENNE ET SES IMPLICATIONS

(D'après Daniel Shanks, Solved ans unsolved problems in number theory, ch. III p. 121 sq.[1]).

41. Les pythagoriciens

Nous allons examiner à présent une troisième source de la théorie des nombres[2], bien antérieure à l'apparition des nombres décimaux périodiques, et même plus ancienne que les nombres parfaits.

Définition 37 : On appelle nombres pythagoriciens[3], trois naturels véfifiant l'équation :

$$a^2 + b^2 = c^2 \tag{162}$$

La notion de nombres pythagoriciens est double :

a) Elle renvoie au théorème de Pythagore (propriété du triangle rectangle dont les côtés sont des naturels).

b) Elle se rapporte au fait que les pythagoriciens ont trouvé une formule permettant d'obtenir une infinité de tels triangles, à savoir :

Soit m impair et plus grand que 1, pour obtenir un triplet pythagoricien il suffit de poser :

$$a = m \quad ; \quad b = \frac{1}{2}(m^2 - 1) \quad ; \quad c = \frac{1}{2}(m^2 + 1) \tag{163}$$

par exemple :

$$3^2 + 4^2 = 5^2 \qquad 5^2 + 12^2 = 13^2$$

---

1. *Chelsea Publishing Company, New York, 1978, 2e ed., 1e ed. 1962.*
2. *Dans son ouvrage Daniel Shanks explique que la théorie des nombres est issue de trois sources fondamentales : les nombres parfaits, la loi de réciprocité quadratique et enfin les nombres pythagoriciens.*
3. *Plus précisément : "triplets pythagoriciens".*

L'adjectif "pythagoricien" prête à confusion pour au moins deux raisons. Tout d'abord parce que Neugebauer[4] a démontré que, plus de 1000 ans avant Pythagore, les babyloniens savaient trouver des triplets définis par l'équation (162) sans se limiter à ceux que (163) permet d'obtenir . Ensuite, l'expression "nombres pythagoriciens" ne suggère pas du tout, et tend même à dissimuler le fait qu'originellement les pythagoriciens étaient persuadés que tout triangle rectangle devait nécessairement avoir des côtés entiers pourvu que l'unité de longueur soit convenablement choisie. Qui plus est, loin d'être le fruit du hasard, une telle conception est au contraire fondamentale dans toute la philosophie pythagoricienne. Une découverte que firent les pythagoriciens en théorie des nombres provoqua une profonde crise au sein de cette philosophie et des mathématiques grecques.

Né dans l'ile grecque de Samos, Pythagore (570 ? - 500 ? av. J.C.) voyagea en Egypte, en Mésopotamie peut être aussi, fonda une école et une communauté secrète en Italie du Sud. Nous n'entrerons pas dans le détail des théories éthiques qu'il développa alors. En sciences, il étudia l'arithmétique (c'est-à-dire : la théorie des nombres), la géométrie, la musique et la sphérique (c'est-à-dire : l'astronomie mathématique). Il considérait que l'arithmétique constituait le domaine d'étude fondamental. En fait, la philosophie pythagoricienne estimait que tout est nombre. Nous soulignerons le fait que dans ce contexte, nombre signifie entier naturel : il n'existait alors aucune autre sorte de nombre. Puisque nous nous occupons ici de théorie des nombres, nous allons examiner plus en détail le sens de cette idée dont les implications sont nombreuses.

L'une des premières découvertes de Pythagore se rapporte au lien qui unit nombres et intervalles musicaux. Soit par exemple une corde tendue de longueur 12 unités. Si l'on appelle tonique la note que laisse entendre cette corde en vibrant alors, la moitié de cette corde résonne à l'octave. Elle résonne à la quinte (c'est-à-dire que le son produit passe de do à sol) si sa longueur est réduite à 8 unités et à la quarte (de do à fa) si sa longueur passe à 9 unités. La quarte représente la moyenne arithmétique entre la tonique et l'octave ($9 = 1/2\ (12 + 6)$), tandis que la quinte représente leur moyenne harmonique ($1/8 = 1/2\ (1/12 + 1/6)$). C'est là l'origine de la théorie des proportions. La quinte est à la tonique comme l'octave est à la quinte car le

4. *Voir : O. NEUGEBAUER, The exact sciences in antiquity New York, 1969 (2ème ed. Dover) pages 29 à 52 sur les mathématiques babyloniennes.*

critère de proportionnalité se vérifie :

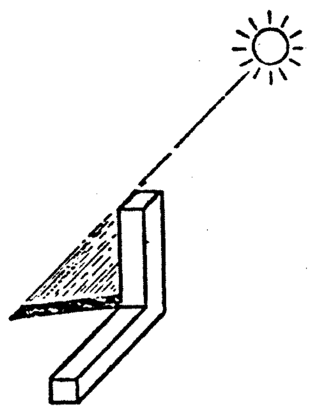
$$8.9 = 12.6$$

Comme cette égalité peut aussi s'écrire :

$$9.8 = 12.6$$

nous en déduisons que la quarte est à la tonique ce que l'octave est à la quinte et ainsi de suite. L'étude des moyennes et des proportions constitue un élément important de la philosophie pythagoricienne.

Le rapport que les pythagoriciens établissent entre la musique et la sphérique nous paraît beaucoup moins convaincant. Les intervalles entre les sept "planètes" (Lune, Soleil, Vénus, Mercure, Mars, Jupiter et Saturne) correspondent aux sept intervalles de l'échelle musicale : de là l'harmonie céleste et la preuve que le nombre constitue aussi l'essence du ciel. Nous verrons plus loin comment une idée aussi absurde a pu jouer un rôle essentiel dans l'histoire des sciences. La relation directe entre le nombre et la sphérique, sans passer par l'intermédiaire de la musique, que Pythagore connaissait grâce à ses voyages en Egypte, mérite davantage de retenir notre attention. Nous n'essayerons pas d'analyser en détail l'astronomie pythagoricienne. Il nous suffira simplement de définir le rôle de l'instrument élémentaire connu sous le nom de gnomon, car il illustre bien la synthèse que les pythagoriciens font de la sphérique, de la géométrie et de l'arithmétique.



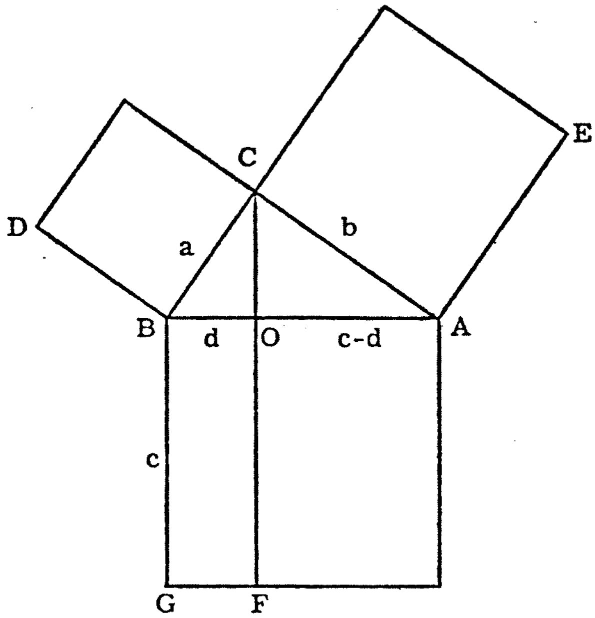
Le gnonom désigne un cadran solaire mobile en forme de " L ". Il repose sur un côté, l'autre demeurant vertical. Il sert à mesurer la longueur et la direction de l'ombre du soleil à différents instants du jour et de l'année. S'il se trouve que l'ombre tombe directement sur le côté horizontal à midi (c'est-à-dire lorsque la longueur de l'ombre est minimum) cela signifie que le côté horizontal pointe en direction du nord. La longueur de l'ombre portée à midi varie en fonction des saisons, elle est minimum au solstice d'été et maximum au solstice d'hiver. A l'équinoxe d'automne, l'ombre produite par le soleil levant est perpendiculaire au côté horizontal du gnomon. Le gnomon remplit donc à la fois les fonctions de calendrier, de boussole et d'horloge. Pythagore qui connaissait la forme sphérique du monde, utilisait le gnomon pour mesurer la latitude, l'obliquité de l'écliptique, etc. Tout ceci renferme les bases de l'astronomie solaire fondée sur le nombre.

42. Le théorême de Pythagore.

La géométrie des triangles semblables et des triangles rectangles intervient de manière essentielle dans toutes les questions relatives à la mesure de l'ombre. Une génération avant Pythagore, Thalès de Milet (Milet désigne un centre de l'activité commerciale près de Samos) avait aussi voyagé en Egypte et fondé une école philosophique. On dit parfois que Pythagore aurait été élève de Thalès. Plutarque écrit que Thalès aurait déterminé la hauteur de la Grande Pyramide d'Egypte en comparant la longueur de son ombre portée à celle d'une perche de longueur connue. Certains historiens des sciences n'acceptent pas l'authenticité de cette anecdote et pensent plutôt que Thalès ignorait les propriétés des triangles semblables. Nous ne sommes pas de leur avis mais, malgré tout, il ne nous sera d'aucune utilité d'entamer avec eux une polémique sur ce point. En effet, pour ce qui suit, il nous suffira d'admettre que les pythagoriciens connaissaient les propriétés des triangles semblables et ceci ne fait aucun doute.

A présent la question se pose de savoir comment les pythagoriciens ont découvert leur théorême : il se peut que cette connaissance leur soit venue d'Egypte. En effet, les arpenteurs Egyptiens savaient depuis longtemps construire des angles droits au moyen de triangles en corde aux côtés de longueur 3, 4, 5 ; il est même possible que la Grande Pyramide (2700 av. J.C.) ait été conçue en utilisant cette propriété. Quoi qu'il en soit, nous soulignerons que l'essentiel se rapporte à la question de savoir comment Pythagore a démontré (ou pensait avoir démontré) son théorême. Il se trouve en effet, que cette preuve représente une étape cruciale pour les événements subséquents.

Sur la base de ce que nous avons déjà dit, et aussi d'autres faits que nous allons présenter ultérieurement, nous conjecturons que la démonstration originale de Pythagore devait ressembler de très près à la suivante :



Abaissons COF perpendiculaire à AB. Recherchons la plus grande mesure commune[5] aux quatre lignes BC, CA, BO et OA et prenons cette longueur pour unité. Les mesures des quatre lignes citées s'expriment alors par les nombres a, b, c, d par rapport à cette unité, et les triangles CBO et ABC sont semblables. Par conséquent, c est à a ce que a est à d. Nous obtenons ici un troisième type de moyenne, à savoir, la moyenne géométrique de c et de d :

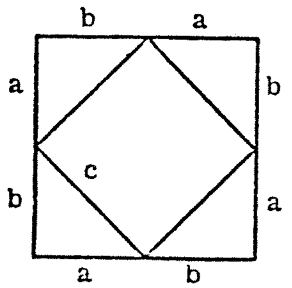
$$a^2 = cd$$

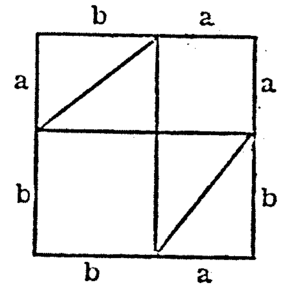
Par conséquent, le carré CD a même aire que le rectangle OG.

5. *on dit aussi " partie aliquote "*

De la même manière, CE égale AF et le carré construit sur l'hypoténuse égale la somme des carrés des côtés.

De nombreux historiens sont d'une opinion différente de la sienne et pensent que la démonstration de Pythagore reposait sur une <u>dissection</u> comme l'indiquent les figures ci-après :





\- On peut décomposer tout carré de côté $a + b$ de manière à faire apparaître 4 triangles et le carré c^2 d'une part, ou bien les mêmes 4 triangles et les deux carrés a^2 et b^2 .

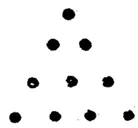
Nous estimons que ces historiens se trompent pour les raisons suivantes :

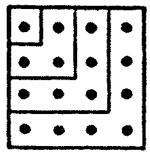
a) La démonstration par dissection ne retient aucun des éléments caractéristiques du pythagorisme: aucun appel à la proportionnalité, aucune référence au "tout est nombre", aucun rapport avec la sphérique.

b) La démonstration par dissection, très ingénieuse, semble être typique de ce que l'on aurait pu imaginer <u>après avoir démontré le théorème</u>. Il aurait donc fallu qu'existât une preuve antérieure ou, pour le moins, des arguments sérieux en faveur de la vérité du théorème.

c) On comprend mieux la suite des événements historiques (en particulier l'agencement des Eléments d'Euclide) si l'on admet l'existence de la démonstration (fallacieuse) que nous avons présenté.

Il est possible que la relation (163) ait été démontrée à la même date que la démonstration (ancienne) du théorème de Pythagore. Les termes "nombres carrés", "nombres cubiques", "nombres triangulaires", etc. proviennent tous des rapprochements que les pythagoriciens ont opéré entre nombre et forme. Les nombres triangulaires (1, 3, 6, 10, etc.) sont les sommes des naturels consécutifs :





10 = 1 + 2 + 3 + 4, etc. Les nombres carrés (1, 4, 9, 16, etc.) sont les sommes des nombres impairs consécutifs :

16 = 1 + 3 + 5 + 7, etc. Les pythagoriciens nomment gnomon tout nombre impair. On en déduit immédiatement que si m est impair, et si on considère m^2 comme le gnomon de côté $\frac{1}{2}(m^2 + 1)$ alors :

$$m^2 + \left[\frac{1}{2}(m^2 - 1)\right]^2 = \left[\frac{1}{2}(m^2 + 1)\right]^2$$

On a donc une démonstration "géométrique" de (163). Le premier exemple numérique que fournit (163) est précisément le triangle egyptien 3-4-5.

Reportons nous à l'illustration de la page 27 : nous y voyons l'ombre en forme de triangle rectangle ainsi que le gnomon délimitant le carré du côté, qui est en fait un nombre impair,... Il s'agit là de la synthèse pythagoricienne dans ses meilleurs jours, parvenue à son plus haut degré d'achèvement, juste avant que surgissent les difficultés.

43. $\sqrt{2}$ et la crise

On attribue l'origine de cette crise à Pythagore en personne. Elle naît avec son théorême :

Théorême 56. L'équation

$$2a^2 = c^2 \tag{164}$$

ne possède aucune solution en entiers naturels.

Démonstration : Supposons que l'équation (162) possède une solution. Soit $(a,c) = g$. Posons $a = Ag$ et $c = Cg$; dans ces conditions $(A,C) = 1$ et $2A^2 = C^2$.

Puisque C^2 est pair, il suit que C est lui aussi pair. Posons donc $C = 2D$, ce qui entraîne $2A^2 = 4D^2$ soit $A^2 = 2D^2$. A est pair, ce qui contredit le fait que $(A,C) = 1$. L'équation (164) ne possède donc aucune solution en naturels. Ceci signifie que $\sqrt{2}$ n'est pas un rapport et, par conséquent, d'un point de vue moderne, c'est un nombre irrationnel. Mais un nombre irrationnel n'est pas un nombre du tout - c'est une classe d'équivalence de paires ordonnées de rationnels (cf. les coupures de Dedekind). C'est un concept entièrement "fabriqué par l'homme" selon la formule de L. Kronecker ; la signification de ce concept est par conséquent philosophiquement peu claire.

Pour les pythagoriciens, la découverte du théorême (56) représenta une terrible épreuve. En effet, on en déduit que dans un triangle rectangle isocèle (moitié d'un carré) l'hypoténuse et le côté sont incommensurables. Il n'existe aucune unité de mesure susceptible de mesurer les deux longueurs et ceci invalide la démonstration du théorême de Pythagore ! Par suite, on en tire les conséquences suivantes :

a) La démonstration est erronée.

b) ou bien le "théorême" est faux.

c) ou bien, ni la théorie des proportions, ni la similitude ne constituent une base solide.

d) La philosophie pythagoricienne s'effondre. Si le nombre ne parvient pas à expliquer une chose aussi simple que le triangle rectangle isocèle, que dire de tout le reste, bien plus complexe.

Les pythagoriciens s'étaient groupés au sein d'une société secrète et certains affirment que leurs découvertes auraient été gardées secrètes. Cependant, d'autres disent que les citadins de Crotone fréquentaient assidûement les cours de Pythagore. Bien que ces diverses informations soient contradictoires, il ne fait aucun doute que l'existence du théorême (56) constituait alors un fait extrêmement gênant. Le premier pythagoricien (anonyme) qui aurait divulgué ce résultat effrayant aurait été victime d'un naufrage par la suite car "l'innomable et l'invisible devraient toujours rester secrets".

Ultérieurement, de nouvelles difficultés apparurent. Bien que n'ayant pas du tout le même caractère crucial que celle dont nous venons de parler, elles ont quand même dues être jugées dignes d'attention. Les pythagoriciens connaissaient les quatre polyèdres réguliers auxquels ils associaient les 4 éléments. Le tétraèdre était associé au feu, le cube à la terre, l'octaèdre à l'air et l'icosaèdre à l'eau. Un membre de la société secrète pythagoricienne - Hyppase de Métaponte - (VI^{e} - V^{e} siècles) découvrit le cinquième polyèdre régulier et, par une sinistre coïncidence, périt aussi dans un naufrage à la suite de cette découverte.

Loin de nous l'idée de faire des rapprochements douteux sur la base de faits historiques aussi peu solidement établis. Pourtant nous ne pouvons nous empêcher de penser que tous ces événements se déroulèrent en Italie du Sud[6] - patrie de la Mafia. L'une des règles d'or de la Mafia est d'exiger le silence de la part de ses membres sous peine de châtiment immédiat. Comme on le sait, la néo-Mafia de Chicago fût compromise dans d'innombrables rackets et crimes. Si les mouchards faisaient rarement naufrage, on les retrouvait fréquemment bien lestés au fond du fleuve de Chicago. Mais, on voit bien que le parallèle sonne un peu faux : il faudrait une imagination délirante pour se représenter Petit César[7] avançant à grands pas dans l'arrière boutique d'un garage de Clark Street tout en vociférant : "Okay Louie, t'as osé vendre la mèche du théorême de Gödel ! tu vas le payer !"

Mais revenons à des arguments plus solides, il est absolument certain que les problèmes soulevés par $\sqrt{2}$ étaient des plus sérieux. Nous examinerons les effets de la crise sur la géométrie, la "sphérique" et l'arithmétique dans les trois paragraphes suivants.

44. Conséquences de la crise pour la géométrie

Si ce que nous avons développé est exact, l'ordre du jour à ce point de la crise a dû se présenter comme suit :

---

6. *peut être la Sicile ?*
7. *célèbre gangster*

a) Trouver une démonstration saine du théorème de Pythagore.

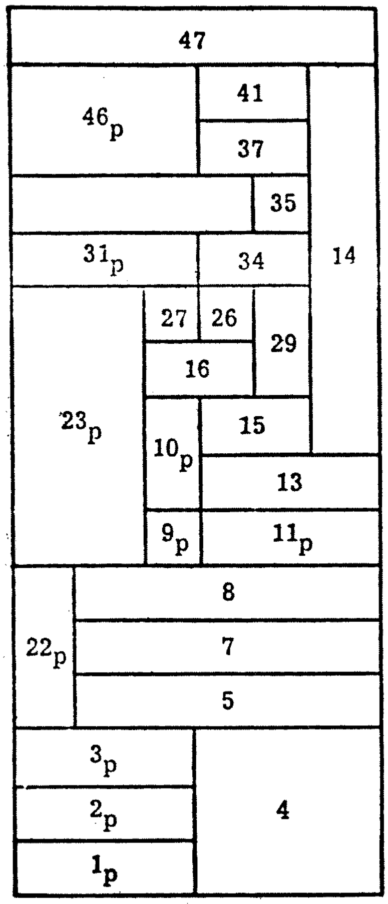
b) Etablir la théorie des proportions sur des bases solides de manière à prendre en compte les quantités incommensurables afin de conserver les importants résultats relatifs aux triangles semblables.

Il est probable que la géométrie en tant que science déductive commença avec les pythagoriciens. Comme nous pouvons le constater ils étaient fortement motivés pour cela. Lorsque les mathématiques naïves conduisent à des paradoxes et à des contradictions, les mathématiques rigoureuses débutent. Au 19^{e} siècle, les paradoxes des séries de Fourier ont joué un rôle similaire pour motiver des mathématiques rigoureuses. Si cela ne nous entraînait pas à trop de digressions nous exposerions à présent le parallélisme qui existe entre les problèmes qui ont surgi et les réponses fournies dans les deux cas.

Plutôt que de la faire, nous reviendrons aux mathématiques grecques 2 siècles après Pythagore et nous analyserons succintement les réponses grecques aux problèmes (a) et (b) ci-dessus, telles qu'on peut les trouver dans les Eléments d'Euclide.

Euclide donne deux démonstrations du théorème de Pythagore (Livre I, prop. 47 et livre VI prop. 31). Ces deux démonstrations utilisent essentiellement la figure de la page 29 . Aucune d'elles n'a de rapport avec les dissections de la page 30 . La première démonstration n'a rien à voir avec les triangles semblables - ces derniers nécessitent en effet que la théorie des proportions soit solidement fondée, ce qu'Euclide rejette au cinquième livre des Eléments. Le livre I est plus élémentaire que les autres parties des Eléments. Sa lecture montre clairement que le but fondamental de ce livre est de parvenir à donner une démonstration du théorème de Pythagore. Ce théorème porte le N° 47, et le N° 48, dernière proposition du livre I, en constitue la réciproque. A quelques exceptions près, tous les théorêmes du livre I interviennent dans la chaîne qui permet de prouver I-47.

Nous en montrons la structure logique dans le diagramme ci-après. Les propositions étiquetées " p " représentent des problèmes ; nous en préciserons le rôle ci-après. Le rectangle blanc inséré sous 46 p et 37 signifie que ces deux propositions dépendent toutes les deux de 31 p et de 34.



- La démonstration de I-47 ne s'appuie pas sur les triangles semblables, mais sur les triangles égaux. Dessinons AD et CG (voir la figure page 29) . Les triangles ABD et GBC sont égaux. Le premier d'entre-eux égale la moitié du carré CD et le second, la moitié du rectangle OG...

Les trois théorêmes relatifs aux triangles égaux (I-4 ; I-8 ; et I-26), fort justement appréciés de tous les lycéens, jouent un rôle fondamental dans la structure logique. Il en est de même des problèmes (construire la médiatrice d'un segment, la bissectrice d'un angle, élever une perpendiculaire, etc.). Le nombre n'y joue aucun rôle ; la proportionnalité non plus.

Le livre V développe la théorie Eudoxéenne des proportions ainsi que la réponse au problème (b) ci-dessus. Le livre VI renferme une deuxième démonstration du théorême de Pythagore, fondée cette fois sur la saine base logique de la théorie d'Eudoxe. Il est certain qu'Euclide connaissait la "démonstration" primitive du théorême de Pythagore ainsi que sa faiblesse.

En conclusion, nous voudrions insister sur le fait que trois aspects spécifiques des Eléments témoignent de la démonstration initiale de Pythagore et de la crise provoquée par $\sqrt{2}$:

a) Dans l'enseignement élémentaire, les "problèmes" (des Eléments) sont souvent pris pour des exercices ou bien des applications. Euclide n'en fait aucun usage. Ses problèmes sont des démonstrations du fait qu'une certaine construction est effectivement possible. Il n'allait surtout pas commettre une fois de plus la faute originelle de Pythagore (trouver la plus grande commune mesure, etc.) .

b) Le nombre est exclu de la géométrie. Bien des absurdités ont été écrites à ce propos. On a prétendu qu'il s'agissait d'une spécificité de "l'esprit" grec qui aurait préféré la forme au nombre, qui aurait été plus habile en géométrie qu'en arithmétique, etc. Rien de tout cela n'est fondé. Euclide a écrit trois livres en théorie des nombres. Les sources des mathématiques grecques (Egypte et Mésopotamie) reposent sans aucun doute sur le numérique. Nous connaissons bien l'opinion de Pythagore sur le nombre. L'expulsion du nombre de la géométrie provient uniquement des problèmes soulevés par $\sqrt{2}$.

c) Il est bien rare que la démonstration euclidienne de I-47 soit appréciée dans son contexte historique. Sans aucun doute, Euclide "aimait" la simplicité logique de la fausse démonstration Pythagoricienne. Mais, pour lui, il n'était pas souhaitable d'attendre d'avoir écrit le livre V pour posséder une preuve du théorême de Pythagore. C'est pourquoi il a imaginé la démonstration la plus élémentaire qu'il ait pu trouver tout en restant cependant aussi proche que possible de la structure pythagoricienne originelle. Lorsque Schopenhauer critiqua la démonstration euclidienne de I-47 en la qualifiant de "souricière", de "démonstration marchant sur des béquilles", il montra par là même qu'il en appréciait bien peu l'histoire, les mathématiques, et même la philosophie sous jacente.

LES FORMES BILINEAIRES SYMETRIQUES DEFINIES POSITIVES DANS LE PLAN

Les formes bilinéaires symétriques définies positives fournissent un cadre axiomatique où le théorème de Pythagore se démontre comme une conséquence immédiate.

Après un rappel de définitions et la démonstration du théorème de Pythagore dans ce cadre nous donnerons un modèle de géométrie dans le plan où la notion d'orthogonalité sera différente de celle de la géométrie euclidienne naive.

Dans l'enseignement secondaire cette axiomatique est introduite,mais le seul modèle considéré est celui de la géométrie euclidienne.Est-il bien utile d'introduire une telle axiomatique si on n'a en vue qu'un seul modèle?

Définitions

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$

Une forme bilinéaire sur E est une application de ExE dans $\mathbb{R}$,notée $\langle\ ,\ \rangle$ telle que

$$\forall\lambda_1\in\mathbb{R}\ \forall\lambda_2\in\mathbb{R}\quad \forall(u,u',v,v')\in E^4 \langle\lambda_1 u+\lambda_2 u',v\rangle=\lambda_1\langle u,v\rangle+\lambda_2\langle u',v\rangle$$
$$\langle u,\lambda_1 v+\lambda_2 v'\rangle=\lambda_1\langle u,v\rangle+\lambda_2\langle u,v'\rangle$$

Elle est symétrique lorsque $\forall(u,v)\in ExE\ \langle u,v\rangle=\langle v,u\rangle$

Elle est définie positive lorsque

$\forall u\in E\ \langle u,u\rangle\geqslant 0$ et $(\langle u,u\rangle=0 \Rightarrow u=0)$

Deux vecteurs u et v sont orthogoanux par rápport à $\langle\ ,\ \rangle$ lorsque $\langle u,v\rangle=0$.

La norme d'un vecteur u,notée $\|u\|$ est la racine carrée de $\langle u,u\rangle$ (qui est un nombre positif ou nul).

Théorème de Pythagore:

Si u et v sont orthogonaux par rapport à $\langle\ ;\ \rangle$ $\|u+v\|^2=\|u\|^2+\|v\|^2$

preuve:

$\|u+v\|^2=\langle u+v,u+v\rangle$ (par définition de la norme)

$=\langle u,u\rangle+\langle u,v\rangle+\langle v,u\rangle+\langle v,v\rangle$ (par bilinéarité)

$=\langle u,u\rangle+2\langle u,v\rangle+\langle v,v\rangle$ (par symétrie)

$=\langle u,u\rangle+\langle v,v\rangle$ (u et v sont $\langle\ ,\ \rangle$ orthogonaux par hypothèse)

$=\|u\|^2+\|v\|^2$ (par définition de la norme)

La réciproque du théorème est tout à fait claire puisque tous les calculs peuvent se remonter.

Quelles sont toutes les formes bilineaires symetriques définies positives de $\mathbb{R}^2$?

Soit $\langle\ ,\ \rangle$ une telle forme.

Posons $\langle(1,0),(1,0)\rangle=a$, $\langle(0,1),(1,0)\rangle=b$, $\langle(1,0),(1,0)\rangle=c$.

Par bilinéarité et symétrie on a toujours

$\langle(x,y),(x',y')\rangle=axx'+b(xy'+x'y)+cyy'$.

Dire que $\langle\ ,\ \rangle$ est définie positive c'est dire que $ax^2+2bxy+cy^2$ est toujours positif ou nul et ne s'annule que pour $x=y=0$.

Supposons $x=0$, on doit avoir $cy^2>0$ sauf quand $y=0$, soit $c>0$. De même on a nécessairement $a>0$.

Si $x\neq 0$, posons $\frac{y}{x}=t$. $ct^2+2bt+a$ doit être strictement positif pour tout t, il faut que le discriminant soit négatif (pas de racines réelles) d'où $b^2-ac<0$.

On a donc une expression du type $axx'+b(xy'+x'y)+cyy'$ avec $b^2-ac<0$, $a>0, c>0$.

Réciproquement une telle expression définit clairement une forme bilinéaire symétrique définie positive.

Cherchons de nouveaux axes du plan pour simplifier cette expression et faire disparaitre le terme en $xy'+x'y$.

Considérons de nouveaux axes OX et OY obtenus à partir des anciens axes Ox et Oy par une rotation d'angle θ .

Calculons les coordonnées du point (x,y) dans les nouveaux axes.

$X=x\cos\theta+y\sin\theta$

$Y=-x\sin\theta+y\cos\theta$

On a donc $x=X\cos\theta-Y\sin\theta$

$y=X\sin\theta+Y\cos\theta$

Reportons x et y dans l'expression $ax^2+2bxy+cy^2$ et calculons le terme en XY. On trouve $(c-a)\cos\theta\sin\theta+b(\cos^2\theta-\sin^2\theta)$.

Peut-on annuler cette expression par un choix convenable de θ ?

Puisque $2\cos\theta\sin\theta=\sin 2\theta$

$\cos^2\theta-\sin^2\theta=\cos 2\theta$

il suffit de prendre quand $c=a$ $\cos 2\ =0, \theta=\frac{\pi}{4}$, quand $c\neq a$ $\operatorname{tg} 2\theta=\frac{2b}{a-c}$.

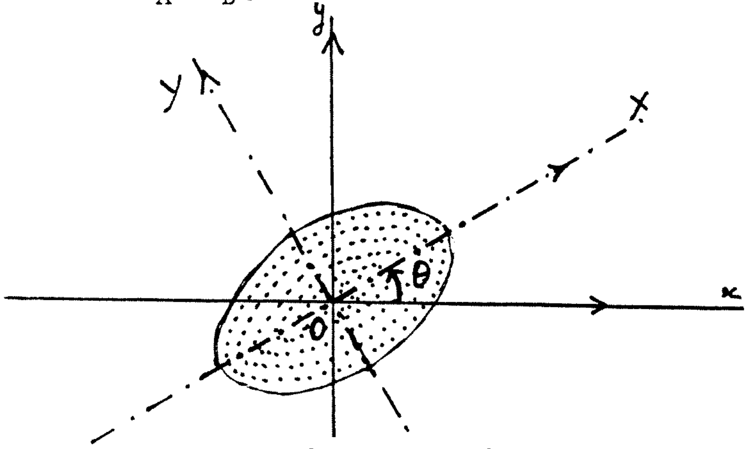
Dans le nouveau repère avec ainsi choisi la forme bilinéaire devient

$\frac{XX'}{A^2}+\frac{YY'}{B^2}$ avec $\frac{1}{A^2}=a\cos^2\theta+c\sin^2\theta-2b\cos\theta\sin\theta$

$\frac{1}{B^2}=a\sin^2\theta+c\cos^2\theta+2b\cos\theta\sin\theta$

qui sont des nombres strictement positifs puisque la forme est définie positive.

La boule unité est formée des vecteurs de norme $\leqslant 1$. Il s'agit de l'intérieur de l'ellipse d'équation $\frac{X^2}{A^2}+\frac{Y^2}{B^2}=1$ dans les nouveaux axes.



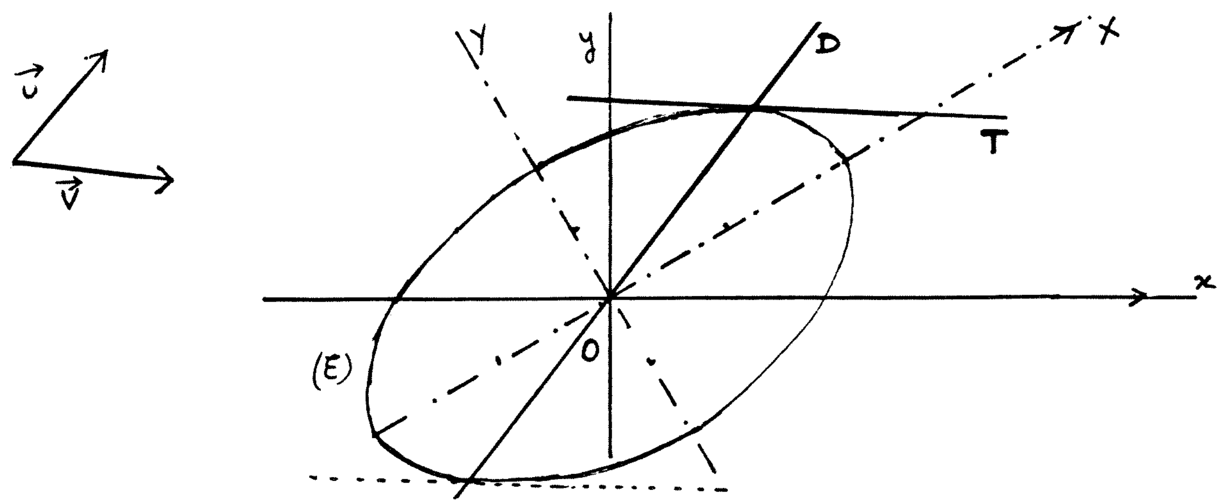
Que signifie géométriquement l'orthogonalité?

Les vecteurs u et v de coordonnées dans les nouveaux axes (X,Y) et (X',Y') sont orthogonaux par rapport à $\langle\,,\rangle$ lorsque $\frac{XX'}{A^2}+\frac{YY'}{B^2}=0$.

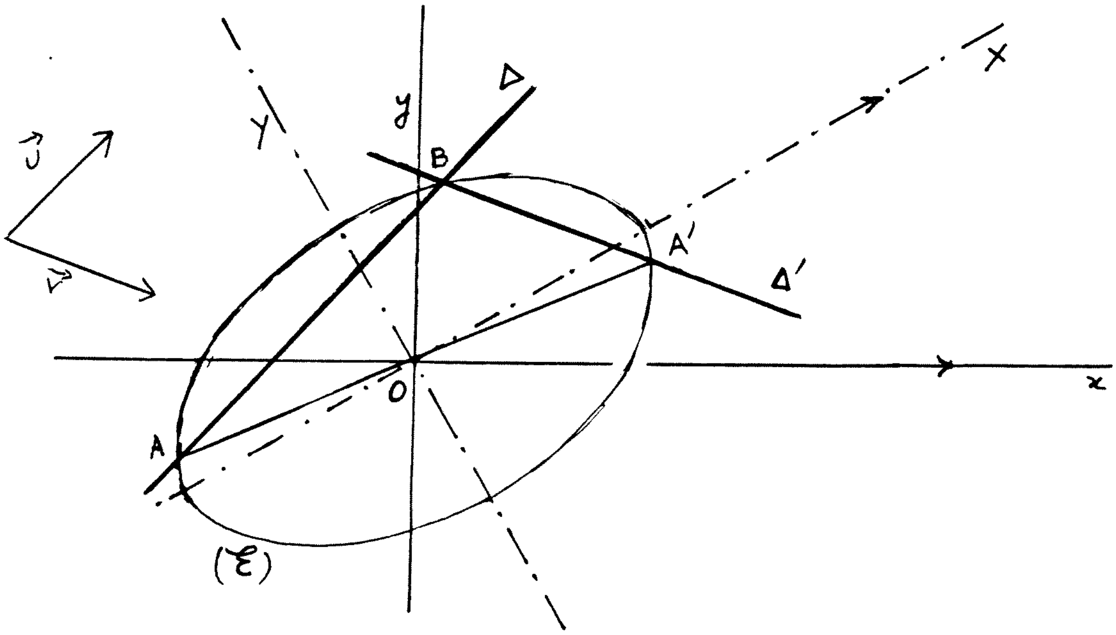
Géométriquement cela peut s'interpréter de la manière suivante.

Considérons $(\mathcal{E})$ l'ellipse d'équation $\frac{X^2}{A^2}+\frac{Y^2}{B^2}=1$.

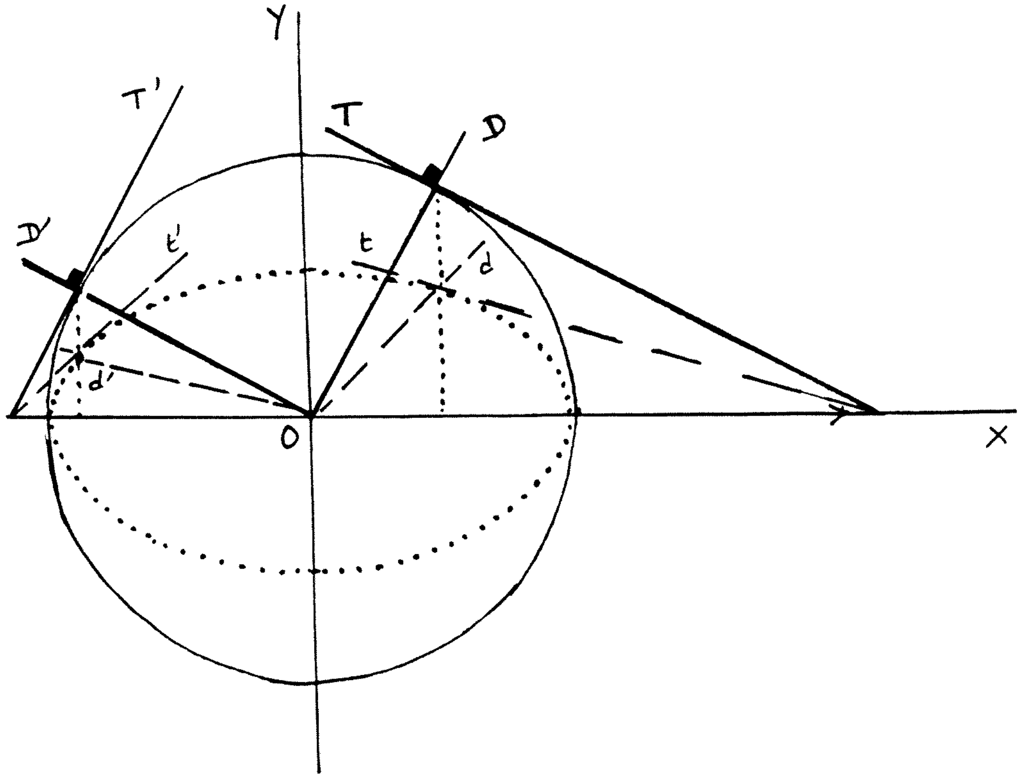
u et v sont orthogonaux par rapport à $\langle\,,\rangle$ si v est parallèle à la tangente T à $(\mathcal{E})$ menée par un point où la parallèle D à u passant par 0 coupe $(\mathcal{E})$.

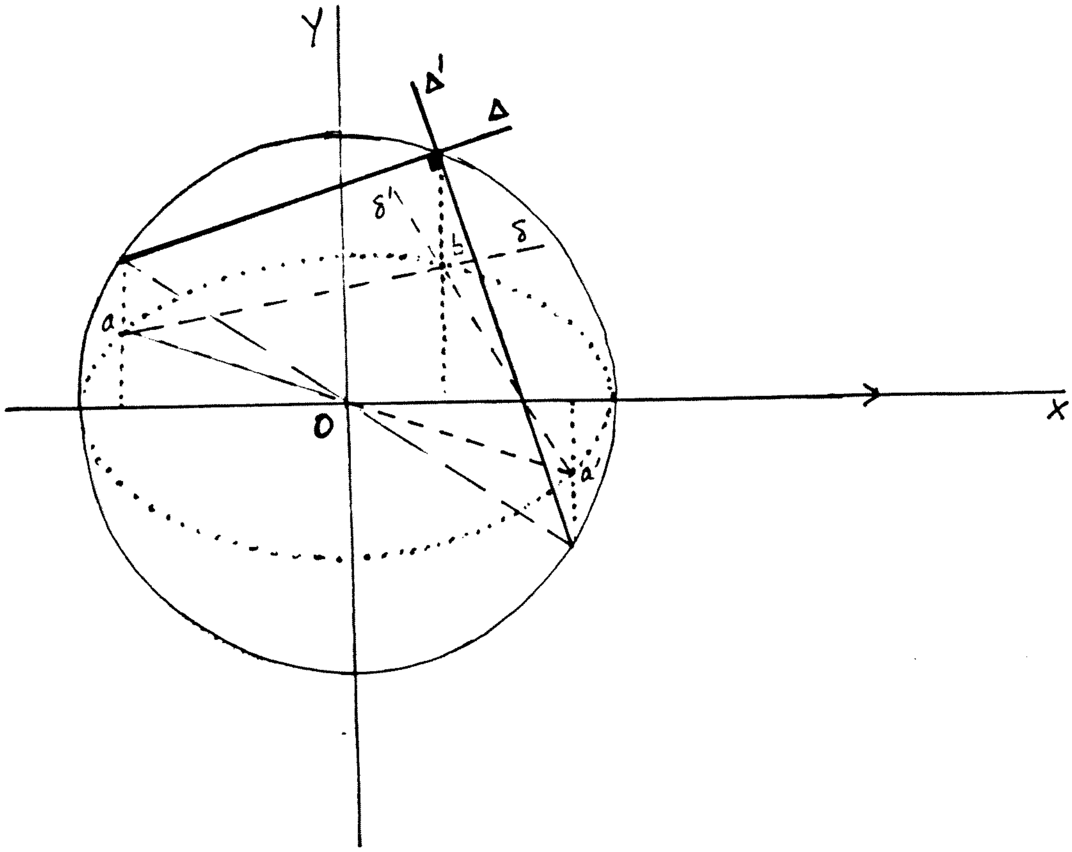


On peut aussi tracer une parallèle à u Δ coupant $(\mathcal{E})$ en deux points A et B et construire la droite Δ' qui passe par B et le point A' deuxième mpoint d'intersection de $(\mathcal{E})$ et de OA .Δ' est alors parallèle à v.



On peut vérifier ces résultats par un peu de calcul(écrire des équations de droites...).Le plus simple est encore de remarquer qu'après transformation des figures par une affinité d'axe OX parallèlement à OY de rapport $\frac{A}{B}$ l'ellipse est transformée en un cercle de rayon A,deux vecteurs orthogonaux par rapport à $\langle\ ,\ \rangle$ en deux vecteurs orthogonaux au sens usuel et que les figures précédentes deviennent:


Y
T'
T
D
D'
t'
t
d
d'
O
X


Y
Δ'
Δ
δ'
δ
a
O
X
a'

TRIPLETS PYTHAGORICIENS

On appelle "triplet pythagoricien" toute solution (x, y, z) en entiers naturels de l'équation $x^2 + y^2 = z^2$. La plupart des ouvrages scolaires destinés aux élèves de Terminale C propose en exercice la détermination effective de toutes les solutions de cette équation. Il s'agit d'un exercice très classique dont on peut formuler le résultat sous la forme suivante :

Théorème : Soit (x, y, z) une solution de l'équation $x^2 + y^2 = z^2$ avec x, y, z entiers naturels premiers entre-eux ; alors, il existe des naturels a et b , premiers entre-eux, l'un pair et l'autre impair, $a > b$ tels que l'on ait :

$$x = 2ab \qquad y = a^2 - b^2 \qquad z = a^2 + b^2$$

ou bien des relations analogues avec x et y interchangés.

A partir de ce théorème il est facile d'obtenir la description de toutes les solutions de l'équation diophantienne $x^2 + y^2 = z^2$ sous la forme

$$x = \pm 2k\,ab \qquad y = \pm k(a^2 - b^2) \qquad z = \pm k(a^2 + b^2)$$

ou bien des égalités analogues avec x et y interchangés avec k, a, b dans $\mathbb{Z}$ les signes étant choisis arbitrairement.

Il va de soi que tout ceci ne peut trouver son application complète que dans le cadre du cours d'arithmétique des terminales C. Pourtant, il est tout à fait possible de faire réfléchir les élèves sur l'équation de Pythagore dès les classes de 3e ou de 4e. Par exemple, on peut demander :

1) Trouver tous les triplets (x, y, z) de naturels consécutifs tels que $x^2 + y^2 = z^2$
l'élève est amené à écrire $x^2 + (x + 1)^2 = (x + 2)^2$ ou bien $(x - 1)^2 + x^2 = (x + 1)^2$ ou bien .... selon la façon de noter les naturels consécutifs. Il doit ensuite résoudre une équation du second degré dont une racine est évidente.

2) Pouvez-vous trouver quatre naturels consécutifs x, y, z, t tels que

$$x^2 + y^2 + z^2 = t^2 \ ?$$

Dans ce cas il n'existe aucune solution en entiers naturels ; on peut alors demander de résoudre $x^3 + y^3 + z^3 = t^3$ x, y, z étant des naturels consécutifs.

en écrivant $x^3 + (x+1)^3 + (x+2)^3 = (x+3)^3$

on trouve $x^3 - 6x - 9 = 0$ équation qui possède $x = 3$ pour racine évidente. Par identification $x^3 - 6x - 9 = (x-3)(x^2+3x+3)$ et l'on trouve la solution remarquable

$$3^3 + 4^3 + 5^3 = 6^3$$

Dans le cas de ce dernier exercice, il est peut être plus intéressant de formuler autrement l'exercice ; par exemple :

3) Calculer $3^3 + 4^3 + 5^3$ puis 6^3. Que constatez-vous ?

Existe-t-il d'autres naturels consécutifs possédant la même propriété ?

Sous cette forme plus ouverte l'élève de seconde est amené à résoudre un véritable problème.

L'exercice suivant permet de vérifier une identité ayant une utilité mathématique ** (à savoir : la recherche de certains triplets pythagoriciens) tout en permettant de se poser des questions d'histoire :

4) Dans ses oeuvres, Fermat * indique que si $(a, a+1, c)$ est un triplet Pythagoricien, alors, $(3a + 2c + 1, 3a + 2c + 2, 4a + 3c + 2)$ est aussi un triplet Pythagoricien. Fermat a-t-il raison ? et aussi :

5) $(3, 4, 5)$ est un triplet Pythagoricien. Trouver cinq autres triplets Pythagoriciens en appliquant la méthode de Fermat.

on trouve (3, 4, 5) ; (20, 21, 29) ; (119, 120, 169) ; (696, 697, 985) ; (4059 , 4060, 5471) ; (23 660, 23 661, 33 461) ; etc.
Pour continuer on peut utiliser une calculatrice. Constatant expérimentalement que les premiers termes des triplets se terminent tous par 0, 3, 6, 9 (3, 2<u>0</u> , 11<u>9</u> , 69<u>6</u> , 405<u>9</u> , 23 66<u>0</u>) on peut demander si cette propriété se vérifie sans exception.

---

* Voir Dickson, Theory of numbers, tome II p.182 note 110 et Fermat, Oeuvres II p.224-225 |Pierre Fermat (1601-1665) célèbre mathématicien français connu par ses travaux en théorie des nombres. Il fut avocat, puis magistrat de Toulouse à partri de 1631, voir Dedron et Itard, Mathématiques et mathématiciens (Magnard) p.196.

** C'est rarement le cas des identités et diverses factorisations que l'on propose en exercice aux élèves.

Si l'on a pour objet d'entraîner les élèves au calcul des puissances on peut leur proposer l'exercice suivant :

6) Pour tout entier naturel n et pour tout $k = 0, 1, 2, \dots. n-1$ $[2^{n+1} , 2^k(2^{2n-2k} - 1) , 2^k(2^{2n - 2k} + 1)]$ est un triplet Pythagoricien.

on obtient alors le résultat suivant : "Pour tout entier naturel n il existe au moins n triplets Pythagoriciens tous différents et ayant même premier terme.

7) Si n est un naturel différent de 2 peut-on avoir *

$$3^n + 4^n = 5^n$$

Ici, il s'agit d'une manipulation sur les inégalités :

sachant que $3^2 + 4^2 = 5^2$, si $n \geqslant 2$ $5^n = 5^2 . 5^{n-2}$ $= (3^2 + 4^2)\ 5^{n-2} = 3^2 . 5^{n-2} + 4^2 . 5^{n-2} > 3^2 . 3^{n-2} + 4^2 . 4^{n-2} = 3^n + 4$

donc, pour tout n naturel $\neq 2$: $5^n \neq 3^n + 4^n$.

8) (Cet exercice constitue une suite possible du n° 4) .
Dans cet exercice on appelle naturel triangulaire tout naturel, noté T_n , tel que $T_n = \frac{n(n+1)}{2}$ $[n \in \mathbb{N}]$ par exemple, $T_1 = 1$, $T_2 = 3$, $T_3 = 6$ $T_{10} = 55$.

a) On suppose que $(a, a + 1, c)$ est un triplet pythagoricien. Posons $u = c - a - 1$ et $v = \frac{2a + 1 - c}{2}$.

Montrer que v est un entier naturel tel que

$$\frac{u\ (u + 1)}{2} = v^2$$

b) Combien existe-t-il de naturels triangulaires qui sont aussi des carrés ?

---

* Voir W. Sierpinski, Elementary theory of numbers, Varsovie, 1964, p.42

9) Montrer qu'il est impossible d'avoir

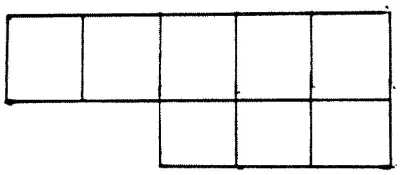
$$a^2 + (a + 1)^2 = 2b^2$$

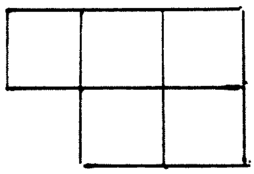
cet exercice a pour but de faire travailler sur la notion de parité.

10) Trouver tous les triplets Pythagoriciens (x, y, z) avec x, y, z formant une suite arithmétique. On trouve (sans arithmétique) $x = 3k \quad y = 4k \quad z = 5k \quad , \quad k \in \mathbb{N}$.

EXERCICES UTILISANT LA GEOMETRIE DES AIRES POLYGONALES PLANES

Les ciseaux :





Transformer chacune de ces deux figures en un carré en les découpant chacune de deux coups de ciseaux (en ligne droite) et en rassemblant les morceaux ainsi obtenus.

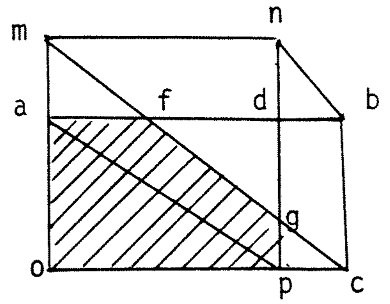
La solution de ces deux problèmes peut s'obtenir de manière logique et sans tatonnement : en effet, il suffit de rechercher dans chaque figure les segments de longeur $\sqrt{8}$ (resp. $\sqrt{5}$) les possibilités de découpage sont alors très limitées.

La quadrature du rectangle :

Etant donné un rectangle quelconque disséquer ce rectangle en n morceaux de manière à reconstituer un carré par réassemblage de ces morceaux.

Ce problème a été résolu en 1832 par F. Bolyai (mathématicien hongrois père du célèbre J. Bolyai, l'un des fondateurs des géométries non-euclidiennes). P. Gerwin, mathématicien allemand en a aussi donné une solution indépendamment de son prédécesseur en 1833. Le résultat du problème, ci-dessus s'énonce donc comme étant le théorème de Bolyai-Gerwin.

<u>Deux rectangles de même aire sont toujours équidécomposable (Boltianski pages 52 - 59</u>)



Soient oabc le premier rectangle et omnp le second (il est toujours possible de disposer 2 rectangles quelconques de cette manière).

Joignons ap , mc et nb et montrons que ap $\parallel$ mc $\parallel$ nb.

Les 2 rectangles ayant même aire on peut écrire (en longueur)

$$oc \times oa = op \times om \quad \text{et, donc :} \quad \frac{oc}{om} = \frac{op}{oa}$$

ce qui entraîne ap $\parallel$ mc .

De plus les triangles oap et dnp sont semblables car :

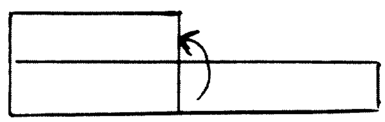
$$\frac{oc - op}{om - oa} = \frac{db}{dn} = \frac{op}{oa}$$

Il s'ensuit que ap $\parallel$ mc $\parallel$ nb.

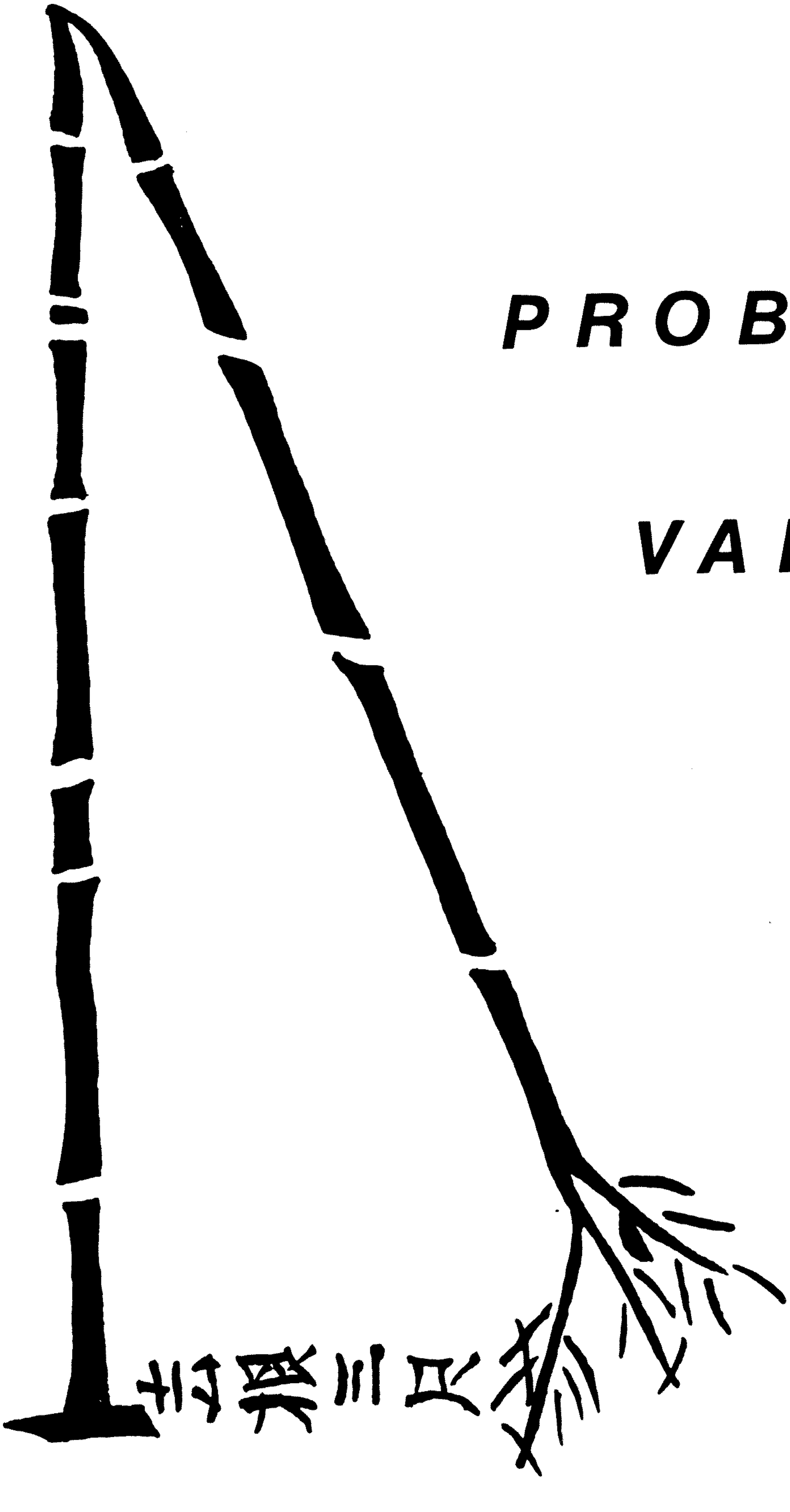
Si mc <u>traverse</u> le rectangle oadp en son intérieur comme l'indique la figure on a aisément la dissection cherchée :

par exemple, pour disséquer o a d p de manière à reconstituer o m n p il suffit de placer le triangle gpc sur maf (les 2 sont égaux) et de placer fbc sur mng (les deux sont aussi égaux).

Dans le cas ou mc ne coupe pas oadp comme indiqué on se ramène à ce cas en décomposant le "rectangle trop long" autant de fois que nécessaire, (il n'est pas difficile de préciser cette idée).



Le lecteur trouvera d'autres dissections analogues dans l'ouvrage de Fourrey "Curiosités géométriques".



PROBLEMES

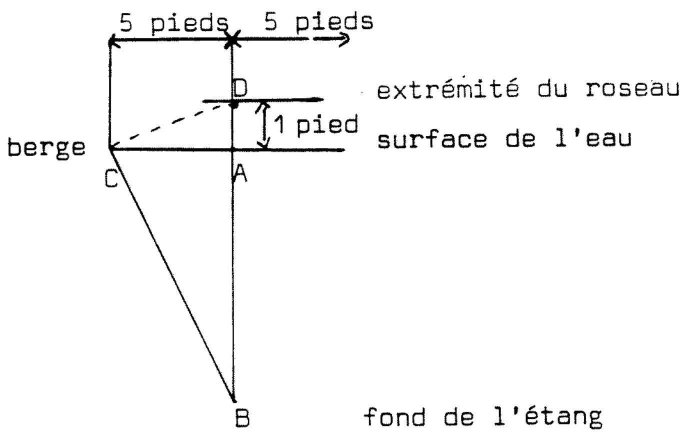
VARIES

PROBLEMES HISTORIQUES

1 - Au centre d'un étang carré de côté 1 toise pousse un roseau qui dépasse l'eau de 1 pied * . On tire sur l'extrémité du roseau en direction dela berge, elle arrive exactement au niveau de l'eau. On demande quelles sont la profondeur de l'eau et la longueur du roseau.

Réponse : Profondeur de l'eau : 1 toise 2 pieds .

Longueur du roseau : 1 toise 3 pieds .



En posant profondeur de l'étang = x ce problème revient à résoudre $(x + 1)^2 = x^2 + 25$

[Source : JZSS ** 9-6 Un problème analogue se rencontre chez Bhaskara (mathématicien indien (vers 114 - 1182)]

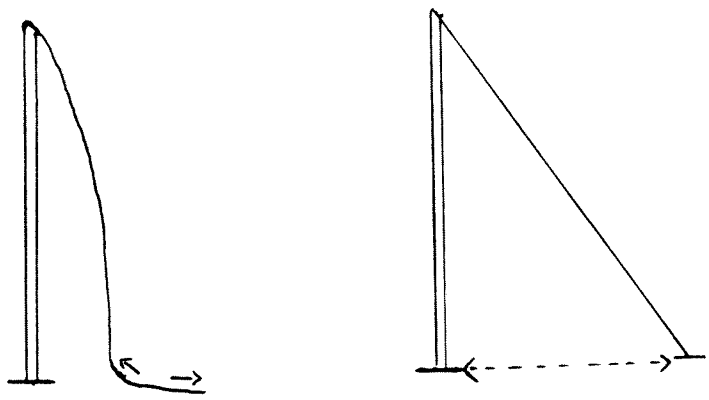
2 - Une corde qui est attachée au sommet d'un arbre vertical dépasse de 3 pieds la longueur de cet arbre (voir fig.). En tirant la corde à son maximum de manière que son extrémité touche juste le sol on s'écarte exactement de 8 pieds du pied de l'arbre. Quelle est la longueur de la corde ?

Réponse : 12 1/6 pied.

---

* toise, pied : mesures chinoises (zhang, chi, resp.) 1 toise : 10 pieds.

** Jiu Zhang Suan Shu (Neuf chapîtres sur l'Art mathématique) Chine, dynastie des Han (- 200 , + 200) .



Source : JZSS** 9-7

3 - Soit un bambou haut de 1 toise. Son extrémité se brise et touche le sol à 3 pieds du pied du bambou. Quelle est la hauteur du tronçon subsistant ?

Réponse : 4 11/20 pied.

Source : JZSS** 9-13 . Ce problème se trouve aussi dans le traité sanskrit du 9ème siècle GanitaSara (Compendium des Calculs) de Mahavira.

Un problème de Gerbert.

Connaissant l'hypoténuse et l'aire d'un triangle rectangle on demande de calculer les longueurs des côtés de ce triangle .

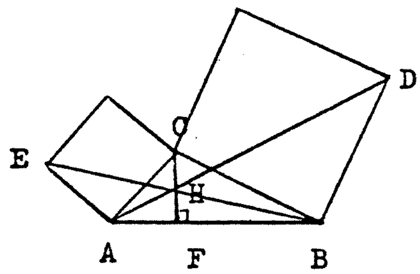
Ce problème très simple mène à une équation du second degré. Chasles, dans son Aperçu Historique (p. 505) en parle comme d'un problème remarquable pour l'époque car il dépend d'une équation du second degré. [Gerbert : né à Aurillac vers 940, mort en 1003, pape de 999 à 1003 sous le nom de Sylvestre II].

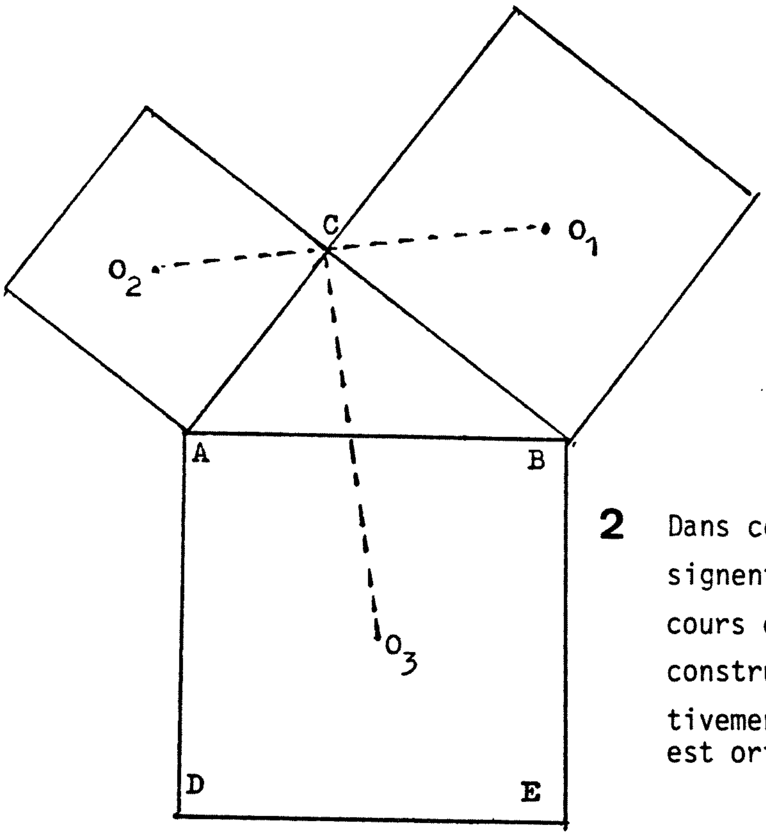
Application numérique : $S = 60$ $c = 17$

(on trouve $a = 8$, $b = 15$)

AUTRES EXERCICES DE GEOMETRIE
SUR LA FIGURE DE PYTHAGORE

1 Sur deux côtés AB, BC d'un triangle quelconque ABC, on construit des carrés. Est-il vrai que les droites AD et BE se coupent sur la hauteur CF du troisième sommet?





2 Dans cette figure O_1 , O_2 et O_3 désignent les centres (points de concours des diagonales) des carrés construits sur BC, AC et AB respectivement. Prouver ou réfuter : CO_3 est orthogonal à O_1O_2 .

3

Si, sur les côtés d'un parallélogramme et extérieurement à celui-ci, on construit des carrés, les centres de ces derniers sont-ils les sommets d'un carré ?

EXERCICES DE GEOMETRIE

par F.G.M.

Fin XIX^{e} Siècle

Ouvrage pour la préparation aux divers baccalauréats .

p740 à 744

Théorème de Clairaut 525.

1559. *Sur deux des côtés* AB, AC *d'un triangle quelconque on construit des parallélogrammes quelconques; on joint le sommet* A *au point de concours* H *des côtés* DE, FG; *on prolonge* HAM *d'une quantité* MN *égale à* AH, *et l'on construit un parallélogramme sur* BCN.

Prouver que ce parallélogramme BCN *est équivalent à la somme des parallélogrammes construits sur les autres côtés du triangle.*

Déduire de ce théorème que le carré de l'hypoténuse d'un triangle rectangle est équivalent à la somme des carrés des deux autres côtés.

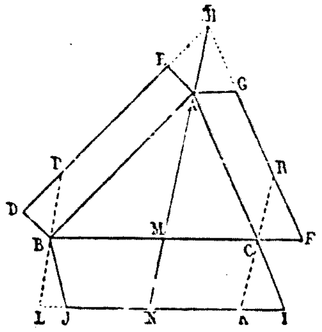


Fig. 1006.

Par les sommets B et C menons des parallèles LBP et KCR à NH.

Les parallélogrammes de même base et de même hauteur sont équivalents; donc

$$BCIJ = BCKL; \quad ABDE = ABPH; \quad ACFG = ACRH.$$

Or, par suite de l'égalité des lignes AH et MN, on a :

$$BMNL = ABPH, \quad \text{et} \quad CMNK = ACRH;$$

donc $$ABDE + ACFG = BCIJ.$$

Théorème de Pythagore 525. — I.

1560. *Le carré construit sur l'hypoténuse d'un triangle rectangle est équivalent à la somme des carrés construits sur les côtés de l'angle droit.*

On peut ramener le *théorème de Pythagore* (fig. 1007) à celui de *Clairaut* (fig. 1006); il suffit de prouver que la droite AH est égale et perpendiculaire à l'hypoténuse BC.

Or les triangles rectangles ABC, EAH sont égaux comme ayant un angle égal compris entre deux côtés égaux ; car

$$AB = AE, \quad AC = AG = EH;$$

donc $$AH = BC.$$

En outre, l'angle $EAH = ABC$; d'ailleurs les angles EAH, CAM sont égaux comme opposés par le sommet; donc

$$\text{angle } CAM = ABC;$$

donc AM est perpendiculaire sur BC.

Remarque. On peut démontrer le théorème de Pythagore de bien des manières; en voici encore quelques autres :

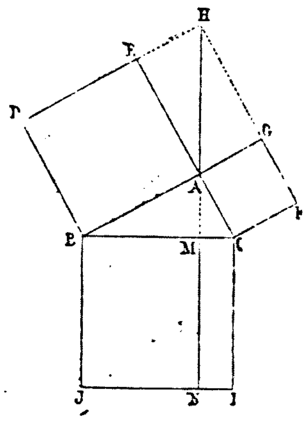


Fig. 1007.

AUTRES DÉMONSTRATIONS

1° Sur IJ (fig. 1008) on construit un triangle rectangle ILJ égal au triangle donné; mais IL correspond à AB.

Les quatre quadrilatères DBCF, DEGF, ABJL, ACIL sont égaux, car ils sont superposables; donc l'hexagone DBCFGED est équivalent à l'hexagone ABJLICA.

Mais ces deux figures ont une partie commune ABC, et

$$AEG = ILJ;$$

donc les restes sont équivalents :

$$BCIJ = ABDE + ACFG.$$

2° Menons les perpendiculaires ADE, FL (fig. 1009); les triangles BAC, FHG sont égaux, or ABFH est équivalent au carré M et ACGH au carré N; donc...

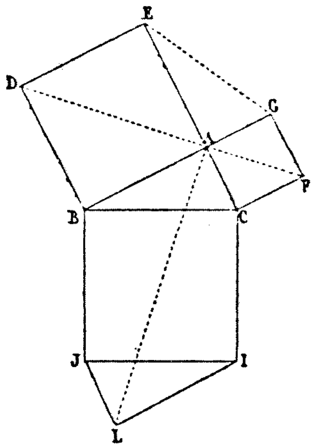


Fig. 1008.

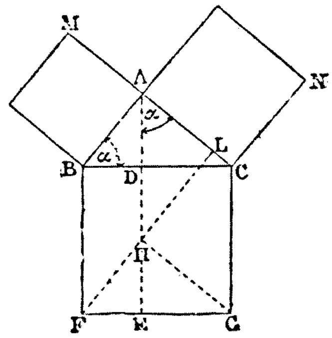


Fig. 1009.

3° Soit ABC le triangle rectangle donné (fig. 1010) et BCDE le carré construit sur l'hypoténuse.

En menant les perpendiculaires DF, EG sur AB, puis CM, EN sur DF, on obtient quatre triangles rectangles égaux.

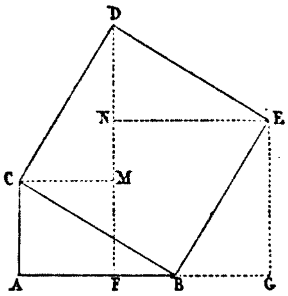


Fig. 1010.

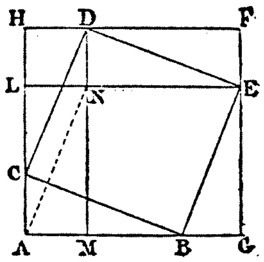


Fig. 1011.

Or, si du pentagone AGEDC on retranche deux de ces triangles, on obtient le carré de l'hypoténuse; tandis que si l'on retranche les triangles CMD et DNE, on obtient pour reste les carrés des côtés de l'angle droit; donc...

4° Soit BCDE le carré construit sur l'hypoténuse (fig. 1011), GN et NH les carrés construits sur les côtés de l'angle droit; or la somme de ces carrés, augmentée de quatre triangles rectangles égaux entre eux, donne le même carré AGFH, que le carré de l'hypoténuse augmenté de quatre triangles égaux aux premiers.

Voici encore trois démonstrations par décomposition.

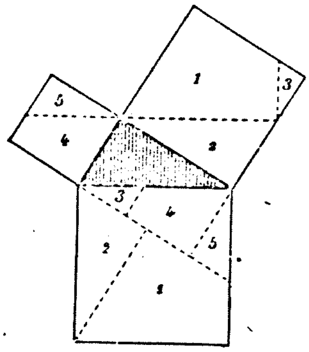


Fig. 1012.

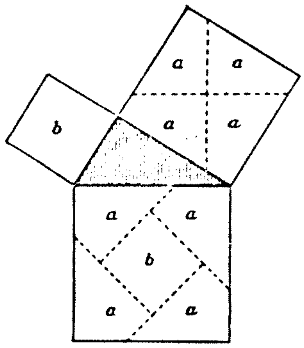


Fig. 1013.

5° (fig. 1013) est de M. G. Lehr, professeur au lycée Ingres. (*Bulletin des Sciences mathématiques et physiques élémentaires*, de MM. Gérard et Michel.)

6° (fig. 1012) est de M. S. de la Campa (Las Palmas). (*Intermédiaire des Mathématiciens*, 1902, page 68, n° 2303.)

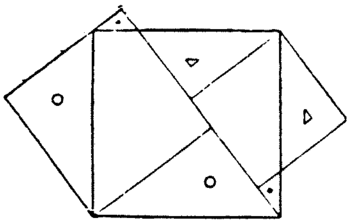


Fig. 1014.

7° (fig. 1014) est du Japonais Yoshinosi Isomura, en 1684. (*I. des M.*, 1903, p. 315.)

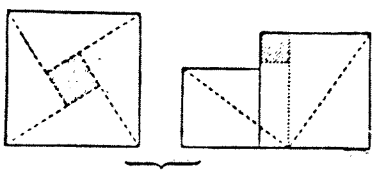


Fig. 1015.

8° La solution de Bhascara (fig. 1015) est accompagnée du simple mot : *regarde*. (Voir à ce sujet *I. des M.*, 1902, n° 2406, page 320, article par P.-F. Teilhet.)

9o Soit le triangle rectangle ABC (fig. 1016); d'une extrémité B de l'hypoténuse, avec le côté c pour rayon, décrivons une circonférence; on a :

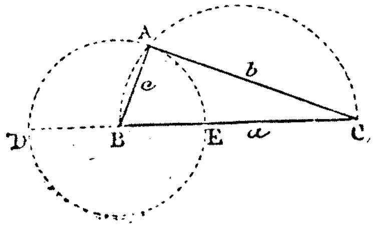


Fig. 1016.

$$AC^2 = CD \cdot CE,$$
$$b^2 = (a + c)(a - c),$$
$$b^2 = a^2 - c^2.$$

10o Le double de l'aire est donné par bc et par pr; mais $r = p - a$ (no 743) ou $r = \frac{b + c - a}{2}$;

donc
$$2bc = (a + b + c)(- a + b + c);$$
d'où
$$a^2 = b^2 + c^2.$$

(Mollmans et Thiry, *Mathesis*, 1902, p. 17, no 3, et p. 42, 1er renvoi.)

1561. Note. La démonstration 1o est de Terquem. Pour 3o, on peut voir le traité suivant, p. 80 : *Lehrbuch der Geometrie* von Dr Rudolf Sonndorfer, director der akademischen Handelsmittelschule in Wien (1873-1877). Cet ouvrage, remarquable à divers titres, est fait pour les écoles qui correspondent à notre *Enseignement moderne*.

La démonstration donnée par M. Volkow, professeur à l'école reale de Saint-Pétersbourg, est aussi remarquable par sa simplicité : elle consiste à construire le carré de l'hypoténuse du même côté que les carrés des côtés de l'angle droit, qui se trouvent ainsi recouverts en grande partie, et la compensation se reconnait facilement. (*Journal de M. de* Longchamps, 1897, p. 107.) — On peut lire aussi l'étude intitulée : *Le cas général du carré de l'hypoténuse*, par G. Arnoux, ancien officier de marine. — Cette étude a été publiée à Digne, en 1889. — L'*Intermédiaire des Mathématiciens* donne d'ailleurs un assez grand nombre d'autres démonstrations, 1903, p. 172, no 2496; 1905, pp. 124, 216, 284, no 3105, et 1909, p. 79.

* Bhascara, vers 1114, géomètre hindou (voir *Aperçu historique*, p. 447).

p 750 à 752

1577. *Si, sur les trois côtés d'un triangle rectangle* ABC *pris comme diamètres, on décrit des demi-circonférences, la somme des surfaces des deux croissants* M *et* N*, compris entre les demi-circonférences, est égale à la surface du triangle rectangle* T.

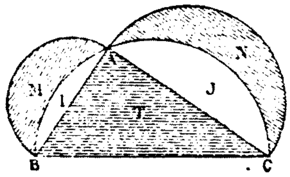


Fig. 1028.

En effet, les trois demi-cercles sont semblables : ils sont donc entre eux comme les carrés des diamètres, c'est-à-dire comme les carrés des côtés du triangle T. Ainsi le demi-cercle construit sur l'hypoténuse égale la somme des demi-cercles décrits sur les côtés de l'angle droit.

On a donc: $$M + I + N + J = T + I + J.$$

D'où $$M + N = T.$$

1577 a. Note. Le *théorème des Lunules* a été complété par G. DOSTOR, comme il suit :

Étant donné un triangle rectangle ABC, *sur l'hypotenuse* $BC = a$ *et sur les côtés* $CA = b$, $AB = c$ *pris pour diamètres, on décrit trois circonférences* πa, πb, πc. *Les trois demi-circonférences supérieures comprennent entre elles deux lunules que nous désignons par* l *et* l'; *les trois demi-circonférences inférieures forment entre elles un triangle curviligne* t *et un segment biconvexe* s.

Prouver les propositions suivantes :

1° *La somme* $l + l'$ *est équivalente à la surface* $\frac{bc}{2}$ *du triangle donne.*

2° *La différence* $t - s$ *est aussi équivalente à* $\frac{bc}{2}$.

3° *Les centres de gravité des deux surfaces* $l + l'$ *et* $t - s$ *sont situés sur la perpendiculaire élevée par le milieu de l'hypoténuse* a, *symétriquement placés par rapport à cette droite, et à une distance d'elle égale à* $\frac{\pi a}{8}$.

Nouvelles Annales Mathématiques, années 1896, p. 296, et 1899, p. 191, question 1732 (DOSTOR et AUDIBERT).

2° La *Théorie des lunules géométriquement carrables*, d'après TH. CLAUSEN, d'Altona, indique cinq lunules. (*N. A.*, 1849, p. 395). Voir aussi à ce sujet la *Géométrie grecque* de P. TANNERY, p. 118, n° 8. — Avant CLAUSEN, les cinq lunules carrables avaient été signalées en 1766, par WALLENIUS de Finlande. (D'après M. ENESTRÖM, de Stockholm. *I. M.* 1896, p. 201, n° 908.)

On peut voir aussi une note de M. BROCARD, dans *l'Intermédiaire des Mathématiciens*, 1898, p. 180, n° 908, sur la *Géométrie des Lunules*; ainsi que les notes ci-après, n° 1579 a et n° 1768 a.

* HIPPOCRATE de Chios, qu'il ne faut pas confondre avec le célèbre médecin de même nom, est né vers 450 avant l'ère chrétienne. Par l'étude de la *lunule* (n° 1578) il donna le premier exemple de quadrature d'une figure curviligne.

Autre lunule d'Hippocrate 534. — I.

1578. *Dans une demi-circonférence* ACB, *on inscrit un triangle rectangle isocèle* MON, *dont la base* MN *est parallèle à* AB; *sur* MN *comme diamètre on décrit une circonférence; la lunule* MCND *est équivalente au triangle* MON. *La figure curviligne* AOEM + BOFN *égale le triangle* MON.

On pourrait opérer une vérification de formule; on peut aussi se borner à comparer entre elles les différentes parties de la figure.

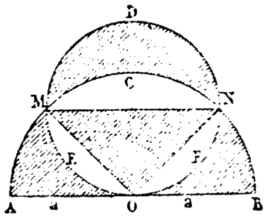


Fig. 1029.

MN étant le côté du carré inscrit dans le cercle dont AB serait le diamètre, on a :

$$MN^2 = 2r^2 = {}^1/_2\, AB^2,$$

et le triangle $MON = \frac{r^2}{2}$.

Ainsi le demi-cercle MDN est la moitié du demi-cercle ACB.

Le segment OEM est la moitié du segment MCN; donc

1° *Lunule* MCND ou demi-cercle MND — segment MCN = demi-cercle MON — segments (OEM + OFN).

Ainsi *lunule* MCND = triangle MON.

2° AOEM + BOFN = secteurs (AOM + BON) — segments (OEM + OFN); par suite, AOEM + BOFN = secteur MONC — segment MCN;

donc AOEM + BOFN = triangle MON.

Théorème 535.

1579. *On donne un demi-cercle ayant* AB *pour diamètre; d'un point* C *pris sur ce diamètre, on élève une perpendiculaire* CM *jusqu'à la circonférence, et on décrit deux demi-circonférences ayant* AC *et* CB *pour diamètres.*

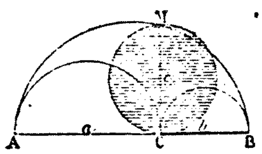


Fig. 1030.

Démontrer que le demi-cercle AB, *diminué des demi-cercles* AC *et* CB, *égale la surface du cercle qui a* CM *pour diamètre.* (ARCHIMÈDE, *Lemme* 4.)

C'est une simple vérification de formule. On arrive à l'identité $2ab = 2c^2$.

1579 a. **Note.** L'espace curviligne compris entre les trois demi-circonférences a été nommé *arbelos* par Archimède, et celui du théorème suivant (n° 1580) a été nommé *salinon*. (BALTZER, *Planimétrie*, § XII, n° 3, page 84 de l'édition allemande et page 110 de l'édition italienne.)

Salinon, bouclier: *arbelos*, serpe. L'*Intermédiaire des Mathématiciens*, 1897, page 279, n° 982, donne aussi pour *arbelos* le sens de *tranchet de cordonnier*. — Voir aussi *La Géométrie grecque*, de Paul TANNERY, p. 162.

* ARCHIMÈDE (287-212 avant J.-C.) naquit en Sicile; il s'occupa surtout de la *géométrie des mesures;* il donna la *quadrature de la parabole*, étudia les *spirales*, détermina le rapport de la circonférence au diamètre. Les procédés qu'il employa constituent la *méthode d'exhaustion* ou *d'épuisement*. Il ordonna que l'on plaçât sur son tombeau une sphère inscrite dans un cylindre, comme pour rappeler un de ses plus beaux théorèmes. (G., n° 574.)

Archimède fut tué par un soldat romain lors de la prise de Syracuse. — Environ un siècle et demi plus tard, Cicéron retrouva le tombeau du grand géomètre. (Voir aussi n° 1547.)

de E. FOURREY Vuibert 1938

curiosités géométriques

I. *Un bambou mesurant* 32 *coudées et s'élevant sur un terrain plat est brisé en un point par la force du vent; son extrémité vient rencontrer la terre à* 16 *coudées [de son pied]; dis, mathématicien, à combien de coudées du pied il a été brisé?* (Bhâskara, *Lilâvati* et *Vija Ganita*, 12ᵉ s.).

II. *A la surface d'un lac où des flamants et des grues se montrent en grand nombre, émerge l'extrémité d'une tige de lotus qu'on aperçoit à une main au-dessus de l'eau. Sous l'action du vent, la tige se penche graduellement et est submergée à la distance de* 2 *coudées. Calcule vivement, mathématicien, la profondeur de l'eau [une main équivaut à une demi-coudée]* (Bhâskara, *Lilâvati* et *Vija Ganita*).

Réponse : $\frac{15}{4}$.

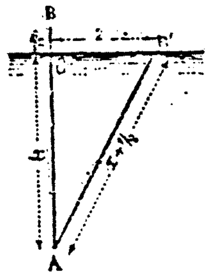


Fig. d.

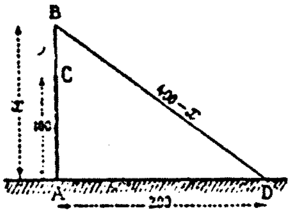


Fig. e.

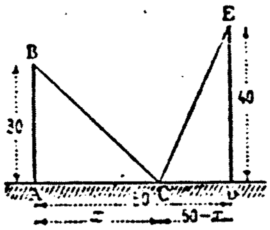


Fig. f.

III. *D'un arbre haut de* 100 *coudées un singe est descendu et se rend à un étang distant de* 200 *coudées, pendant qu'un autre singe, sautant d'une certaine hauteur au-dessus de l'arbre, se rend rapidement au même point par la diagonale. Si l'espace parcouru par les deux singes est le même, dis-moi vivement, homme savant, la hauteur du saut, si tu as appris à calculer rapidement* (Bhâskara, *Lilâvati* et *Vija Ganita*) (*fig. e*).

Réponse : 50. [$x = 150$.]

IV. *Deux tours élevées l'une de* 30 *pas, l'autre de* 40, *sont distantes de* 50 *pas; entre les deux se trouve une fontaine vers le centre de laquelle deux oiseaux descendant des sommets des deux tours se dirigent du même vol et parviennent dans le même temps; quelles sont les distances horizontales du centre de la fontaine aux deux tours?* (Léonard de Pise, *Liber Abaci*, 1202) (*fig. f*).

Réponse : 32 et 18.

BIBLIOGRAPHIE

Mohammed ben Musa. — *Algebra*. Édition Rosen. Londres, 1831, in-8°.
Berson. — *Sur l'emploi des figures géométriques par les Japonais pour la résolution des problèmes d'arithmétique*. Mém. de l'Ac. des Inscr. et Bel. Let. de Toulouse, 1891.

BIBLIOGRAPHIE RELATIVE A PYTHAGORE

Peter Gorman ; Pythagoras A life , Routlege and Kegan Paul , Londres 1979 .

Chaignet A.E ; Pythagore et la philosophie pythagoricienne , Paris 1873 .

Delatte A. ; Essai sur la littérature pythagoricienne , Paris 1915 .

Iamblichus, Life of Pythagoras , trans. T. Taylor , London 1818 .

Rougier, L. ; La religion astrale de Pythagoriciens , Paris 1959 .

Diogenes Lertuis ; La vie de Pythagore , ed. A. Delatte , Bruxelles 1922 .

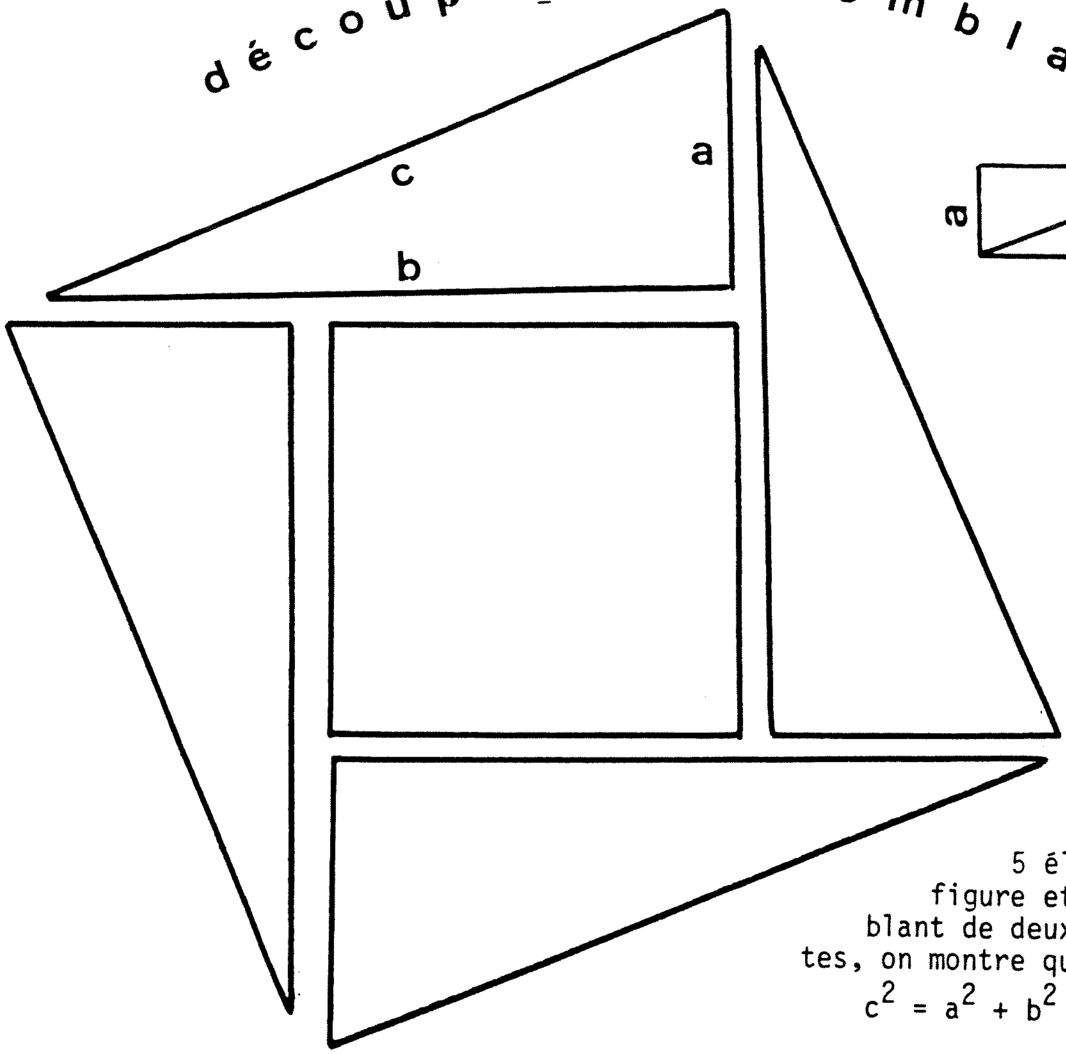
Ernest G. Mac Clain ; The Myth of invariance shambhale , Boulderard , London 1978 .
(the Origin of the goes , Mathematics and Music from the Rg Veda To Plato) .

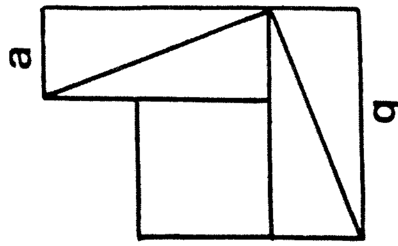
Fourrey ; Curiosités géométriques , Vuibert . (nombreuses démonstrations du théorème de Pythagore).

Fanane ; Qui est Abu' l' Wafa ? (inédit , 1980) .

Boltianskii ; Hilbert's third problem (trad.) Wiley , New-York , 1978 , (traité du problème des démonstrations par dissection , en géométrie plane et dans l'espace , selon Hilbert .

découpage assemblage





1

en découpant les 5 éléments de cette figure et en les assemblant de deux façons différentes, on montre que

$$c^2 = a^2 + b^2$$

2

Même travail avec les trois éléments ci-joints