ASSOCIATION FRANÇAISE

POUR L'AVANCEMENT DES SCIENCES

Congrès de Nancy. — 1886

M. DELANNOY

Sous-intendant militaire, à Orléans.

EMPLOI DE L'ÉCHIQUIER POUR LA SOLUTION DE PROBLÈMES ARITHMÉTIQUES

— Séance du 18 août 1886. —

Au congrès de Rouen (séance du 17 août 1883), M. Édouard Lucas a lu un mémoire sur l'arithmétique figurative — les permutations. — « Cette communication, disait-il, a pour but de montrer l'emploi de l'é- « chiquier dans un grand nombre de recherches arithmétiques. On par- « vient ainsi à simplifier les démonstrations de théorèmes connus et à « trouver beaucoup d'énoncés nouveaux. »

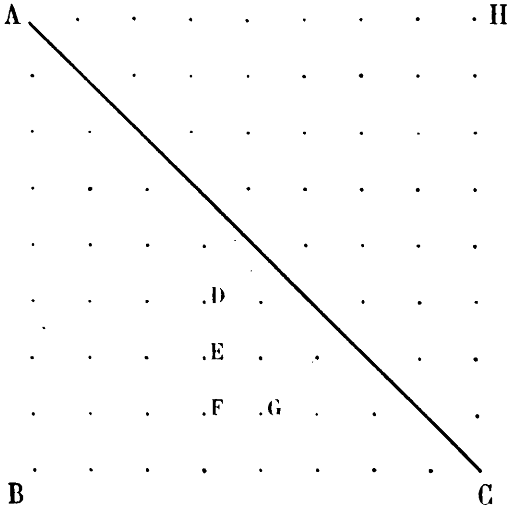
Nous allons donner un nouvel exemple de l'emploi de l'échiquier, en l'appliquant à la résolution du problème suivant :

De combien de manières peut-on disposer 2 n *nombres sur 2 rangées de* n *nombres, de telle sorte que les nombres croissent toujours de gauche à droite et de haut en bas ?*

M. Tarry a montré que ce problème revient à trouver le *nombre de manières dont une tour peut se rendre d'une extrémité à l'autre de l'hypoténuse, sans sortir du demi-échiquier* A B C *de* n + 1 *cases de côté* (fig. 1), *la tour ne marchant que dans les sens* $\rightarrow$ *et* $\downarrow$

M. Tarry a obtenu la solution pratique de cette question en construisant un triangle arithmétique (fig. 2) dans lequel un nombre quelconque est la somme des deux autres placés l'un au-dessus de lui, l'autre à sa gauche.

Fig. 1.



Pour obtenir la formule exprimant cette solution, on pourrait essayer d'appliquer à la figure 2 la méthode des séries récurrentes. Mais il ne serait pas facile de trouver ainsi la valeur du nombre à placer sur une case déterminée (x, y), x désignant l'abscisse et y l'ordonnée quand le point A est pris pour origine des coordonnées.

Fig. 2.

1							
1	1						
1	2	2					
1	3	5	5				
1	4	9	14	14			
1	5	14	28	42	42		
1	6	20	48	90	132	132	
1	7	27	75	165	297	429	429

Fig. 3.

1	1	1	1	1	1	1	1
1	2	3	4	5	6	7	8
1	3	6	10	15	21	28	36
1	4	10	20	35	56	84	120
1	5	15	35	70	126	210	330
1	6	21	56	126	252	462	792
1	7	28	84	210	462	924	1716
1	8	36	120	330	792	1716	3432

Il sera, au contraire, aisé de calculer cette valeur en fonction de celles des nombres occupant les cases d'un carré arithmétique (fig. 3) construit de la manière indiquée ci-dessus.

Comme nous le montrerons, ces derniers nombres représentent des combinaisons dont nous connaissons la formule.

Si nous comparons le carré et le triangle arithmétiques, nous voyons que pour la 2ᵉ colonne on a, en désignant respectivement par $Q_{x,y}$ et $T_{x,y}$ le nombre placé dans la case (x, y) de chacune de ces figures :

$$Q_{1,y} = T_{1,y} + Q_{0,(y+1)}.$$

On aurait de même pour la 1ʳᵉ colonne :

$$Q_{0,y} = T_{0,y} + Q_{-1,y},$$

ce dernier terme étant nul.

Je dis que la formule

$$Q_{x,y} = T_{x,y} + Q_{(x-1),(y+1)}$$

est toujours vraie.

Pour le démontrer, il suffit de prouver que si elle est exacte pour une série de colonnes successives à partir de la première, elle le sera également pour la colonne suivante.

Admettons donc l'exactitude de cette formule pour les $x+1$ premières colonnes. On pourra se rendre de A (fig. 1) sur une case G $\left[(x+1), y\right]$ de la $(x+2)^e$ colonne, d'abord sans sortir du triangle ABC, ce qui se fera de $T_{(x+1),y}$ manières, puis en allant successivement (dans le carré) de A sur les cases F, E,...., et passant de chacune d'elles sur la case à droite pour descendre ensuite sur la case G. Le nombre de manières de se rendre sur l'une quelconque (x, p) de ces cases F, E,.... est évidemment $Q_{x,p} - T_{x,p}$, car les marches contenues dans l'intérieur du triangle figurent déjà dans $T_{(x+1),y}$.

Nous aurons donc :

$$\begin{aligned} Q_{(x+1),y} = T_{(x+1),y} + Q_{x,y} - T_{x,y} + Q_{(x-1),y} - T_{(x-1),y} + \ldots \\ + Q_{1,y} - T_{1,y} + Q_{0,y} - T_{0,y}. \end{aligned}$$

Or, par hypothèse :

$$\begin{gathered} Q_{x,y} - T_{x,y} = Q_{(x-1),(y+1)}; \\ Q_{(x-1),y} - T_{(x-1),y} = Q_{(x-2),(y+1)}. \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ Q_{1,y} - T_{1,y} = Q_{0,(y+1)}; \\ Q_{0,y} - T_{0,y} = 0; \end{gathered}$$

donc

$$\begin{aligned} Q_{(x+1),y} &= T_{(x+1),y} + Q_{(x-1),(y+1)} + Q_{(x-2),(y+1)} + \ldots + Q_{0,(y+1)} \\ &= T_{(x+1),y} + Q_{x,(y+1)}. \qquad \text{C. Q. F. D.} \end{aligned}$$

Il est facile d'obtenir la formule qui donne la valeur de $Q_{x,y}$. Pour se rendre de A sur la case (x, y) de l'échiquier carré, la tour doit faire x pas b dans le sens horizontal, et y pas a dans le sens vertical; le nombre des marches de cette tour est donc égal au nombre des permutations que l'on peut former avec x lettres b et y lettres a, c'est-à-dire :

$$Q_{x,y} = \frac{1.2.3.\ldots.(x+y)}{1.2\ldots y \times 1,2\ldots x} = C_{x+y}^{x},$$

nombre des combinaisons x à x de $x+y$ lettres différentes.

Par suite :

$$T_{x,y} = C_{x+y}^{x} - C_{x+y}^{x-1} = \frac{y-x+1}{y+1} C_{x+y}^{x}.$$

Si nous faisons $y = x$, il vient :

$$T_{2x} = \frac{1}{x+1} C_{2x}^{x},$$

c'est la formule cherchée.

Ainsi nous voyons qu'*il y a* $\frac{1}{n+1} C_{2n}^{n}$ *manières de disposer* 2n *nombres sur deux rangées égales, de telle sorte que les nombres aillent toujours en croissant de gauche à droite et de haut en bas.*

L'examen du carré arithmétique fournit des remarques intéressantes :

1° Les nombres placés sur les parallèles à la diagonale BH, sont ceux du triangle arithmétique de Pascal (remarque de M. Tarry);

2° $C_{x+y}^{x} = C_{x+y-2}^{x} + 2C_{x+y-3}^{x-1} + 3C_{x+y-4}^{x-2} + \ldots + xC_{y-1}^{1} + (x+1)C_{y-2}^{0};$

3° $C_{x+y}^{x} = C_{x+y-1}^{x} + C_{x+y-1}^{x-1};$

4° $C_{x+y}^{x} - C_{x+y}^{x-1} = C_{x+y-1}^{x} - C_{x+y-1}^{x-2};$

5° $C_{x+y}^{x} = C_{x+y-1}^{x-1} + C_{x+y-2}^{x-1} + \ldots + C_{x}^{x-1} + C_{x-1}^{x-1}.$

Cette dernière formule, qui donne la somme des nombres figurés des divers ordres, se trouve dans tous les traités d'algèbre où il est question du triangle arithmétique de Pascal.

6° Parmi les permutations que l'on peut former avec x lettres b et y lettres a, il y en a C_{x+y-1}^{x} commençant par a, et C_{x+y-1}^{x-1} commençant par b;

7° Parmi les permutations commençant par a, le nombre de celles qui sont telles qu'en s'arrêtant à un point quelconque de la permutation le nombre des b n'est jamais supérieur à celui des a qui précèdent, est

$T_{x+y-1} = \dfrac{y - x}{y} C^x_{x+y-1}$ et, par suite, le nombre des permutations commençant par a, qui jouissent de la propriété opposée, est $\dfrac{x}{y} C^x_{x+y-1}$.

Ces différents théorèmes, qui résultent du mode même de construction du carré arithmétique, seraient bien plus longs et plus difficiles à trouver, soit directement, soit au moyen des formules des combinaisons.

Le triangle arithmétique de Pascal (fig. 4) représente le nombre des marches d'une reine qui ne peut se mouvoir que dans les sens $\downarrow$ et $\searrow$

Fig. 4.

1							
1	1						
1	2	1					
1	3	3	1				
1	4	6	4	1			
1	5	10	10	5	1		
1	6	15	20	15	6	1	
1	7	21	35	35	21	7	1

Si la reine était astreinte à faire p pas dans la colonne de rang p, on obtiendrait alors le triangle arithmétique représenté dans la figure 5, qui donne la solution pratique du problème suivant :

De combien de manières peut-on former un nombre N *avec des nombres non croissants ?*

Nous n'avons pu jusqu'ici trouver la formule qui exprime la solution.

Dans la figure 5 un nombre quelconque de la colonne de rang p est égal à la somme des deux nombres placés l'un p rangs au-dessus de lui dans la même colonne, et l'autre un rang au-dessus de lui dans la colonne précédente.

Des deux colonnes placées à droite du triangle, la première, qui contient la somme des nombres de la ligne correspondante, représente le nombre de manières de former le nombre N avec des nombres non croissants, et la deuxième contient les valeurs correspondantes de N.

Fig. 5.

																NOMBRE de solutions.	VALEURS de N.
1																1	1
1	1															2	2
1	1	1														3	3
1	2	1	1													5	4
1	2	2	1	1												7	5
1	3	3	2	1	1											11	6
1	3	4	3	2	1	1										15	7
1	4	5	5	3	2	1	1									22	8
1	4	7	6	5	3	2	1	1								30	9
1	5	8	9	7	5	3	2	1	1							42	10
1	5	10	11	10	7	5	3	2	1	1						56	11
1	6	12	15	13	11	7	5	3	2	1	1					77	12
1	6	14	18	18	14	11	7	5	3	2	1	1				101	13
1	7	16	23	23	20	15	11	7	5	3	2	1	1			135	14
1	7	19	27	30	26	21	15	11	7	5	3	2	1	1		176	15
1	8	21	34	37	35	28	22	15	11	7	5	3	2	1	1	231	16

Les nombres placés sur une même ligne donnent aussi le nombre des solutions commençant par les chiffres 1, 2,... N.

Ainsi pour N = 6, il y a :

1	solution	commençant par	1
3	—	—	2
3	—	—	3
2	—	—	4
1	—	—	5
1	—	—	6
Total..... 11			

Nancy, imprimerie Berger-Levrault et Cie.