

M. H. DELANNOY

Sous-intendant militaire en retraite, à Guéret.

EMPLOI DE L'ÉCHIQUIER POUR LA RÉOLUTION DE CERTAINS PROBLÈMES
DE PROBABILITÉS

[J 2 a]

— Séance du 5 août 1895 —

En 1889, au Congrès de Paris, nous avons donné les formules exprimant le nombre de marches de la tour et de la reine sur des échiquiers de forme *carrée*, *triangulaire*, *pentagonale* et *hexagonale*, ce qui nous a permis de résoudre *immédiatement* divers problèmes de probabilités.

Nous croyons devoir revenir sur cette question, à laquelle on ne paraît pas avoir accordé toute l'importance qu'elle mérite, bien que Édouard Lucas nous ait fait l'honneur de reproduire nos formules dans son ouvrage sur la *Théorie des nombres* (t. I, p. 84 à 90 et 170 à 176).

Peut-être aussi n'avons-nous pas été bien compris, faute d'avoir donné les détails nécessaires. Ainsi Catalan, en parlant d'une de nos solutions qu'il reconnaît exacte, dit dans les *Nouvelles Notes d'algèbre et d'analyse* (1889, p. 70) : « Il ne nous a pas été possible de saisir les considérations auxquelles a eu recours M. Delannoy; elles sont relatives à la marche de la tour sur un échiquier hexagonal. »

Ces considérations sont bien simples.

ÉCHIQUIER CARRÉ

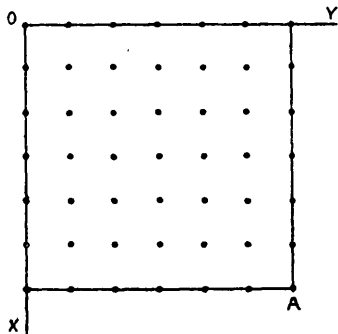


Fig. 1.

1	1	1	1	1	1	1
1	2	3	4	5	6	7
1	3	6	10	15	21	28
1	4	10	20	35	56	84
1	5	15	35	70	126	210
1	6	21	56	126	252	462
1	7	28	84	210	462	924

Fig. 2.

Supposons une tour placée à l'angle supérieur gauche de l'échiquier carré OXAY (*fig. 1*); représentons par la lettre v chaque pas vertical de la tour, et par la lettre h chaque pas horizontal. En désignant par F_x^y le nombre de manières dont cette tour peut, en marchant dans les sens \rightarrow et \downarrow , se rendre de l'origine O sur une case dont les coordonnées sont x et y , on voit que F_x^y est égal au nombre de combinaisons que l'on peut former avec x lettres v et y lettres h ; par conséquent,

$$(1) \quad F_x^y = C_{x+y}^y.$$

Si l'on écrit sur les cases les nombres représentés par F_x^y , on obtient le carré arithmétique employé par Fermat (*fig. 2*). Ce n'est autre chose que le triangle arithmétique de Pascal, mis sous une forme plus commode.

La loi de formation de ce carré arithmétique est très simple : un terme quelconque est égal à la somme du terme placé à sa gauche et du terme placé immédiatement au-dessus de lui. La même loi de formation subsiste pour les échiquiers que nous allons considérer. C'est ce qui nous a permis de trouver facilement l'expression de leurs termes en fonction de ceux du carré arithmétique de Fermat.

ÉCHIQUIER TRIANGULAIRE

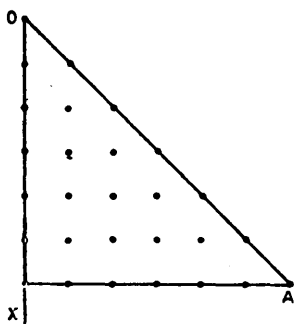


Fig. 3.

1	..	0							
1	1	0							
1	2	2	0						
1	3	5	5	0					
1	4	9	14	14	0				
1	5	14	28	42	42	0			
1	6	20	48	90	132	132	0		

Fig. 4.

Astreignons la tour à se mouvoir sur un échiquier triangulaire OXA (*fig. 3*) et cherchons le nombre de manières dont la tour peut se rendre sur les différentes cases de cet échiquier.

Dédoublons le carré arithmétique, changeons tous les signes du carré supérieur et transportons-le sur l'autre, de telle sorte que la parallèle au-dessous de la diagonale OA vienne coïncider avec la parallèle située au-dessus; nous obtenons alors une transversale formée de zéros, et, en nous bornant à la partie commune des deux

échiquiers qui est située au-dessous de cette ligne, nous avons le tableau (fig. 4).

En désignant par T_x^y le nombre de marches de la tour pour aller de l'origine O sur une case x, y , T_x^y représentera le nombre des permutations de x lettres c et de y lettres h , dans lesquelles, en s'arrêtant à un endroit quelconque à partir de la première lettre, le nombre des lettres h ne dépasse jamais le nombre des lettres c .

On a par définition

$$T_x^y = F_x^y - F_{x+1}^{y-1}$$

et par suite

$$(2) \quad T_x^y = \frac{x - y + 1}{x + 1} C_{x+y}^y$$

ÉCHIQUIER PENTAGONAL

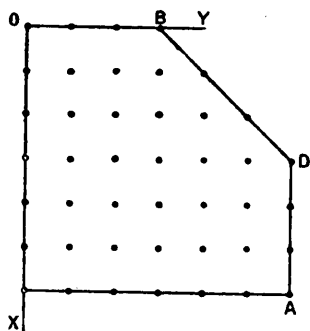


Fig. 5.

1	1	1	1	0	
1	2	3	4	4	0
1	3	6	10	14	14
1	4	10	20	34	48
1	5	15	35	69	117
1	6	21	56	125	242
1	7	28	84	209	451

Fig. 6.

Considérons un échiquier pentagonal OXADB (fig. 5), déterminé en prenant OB égal à $b - 1$ pas et menant par le point B une parallèle à la diagonale OA.

C'est une généralisation de la loi de construction de l'échiquier triangulaire. Au lieu de superposer les parallèles voisines de la diagonale des deux carrés arithmétiques, on peut superposer celles qui en sont distantes de b intervalles. Supposons, par exemple, $b = 4$, nous avons le tableau (fig. 6).

Si nous désignons par P_x^y le terme qui se trouve sur la case x, y de ce tableau, P_x^y représente le nombre des permutations de x lettres c et de y lettres h , dans lesquelles, à partir de la première lettre de la permutation, le nombre des lettres h ne dépasse pas de plus de $b - 1$ le nombre des lettres c .

En observant que ce second échiquier a été remonté de b rangs, puis avancé de b rangs vers la droite, on a

$$P'_x = P_x - F_{x+b} - b,$$

ou encore

$$(3) \quad P'_x = C_{x+y}^x - C_{x+y}^{y-b}.$$

Pour les cases dont les coordonnées satisfont à l'équation

$$y - x = b = 1,$$

on a

$$C_{x+y}^{y-b} = C_{x+y}^{x-1}.$$

On peut donc écrire, pour les cases du côté BD de l'échiquier pentagonal,

$$P'_{x,y} = C_{x+y}^x - C_{x+y}^{x-1}$$

ou bien

$$(4) \quad P'_{x,y} = \frac{y - x + 1}{y + 1} C_{x+y}^x = \frac{1}{y + 1} C_{x+y}^x.$$

ÉCHIQUIER HEXAGONAL.

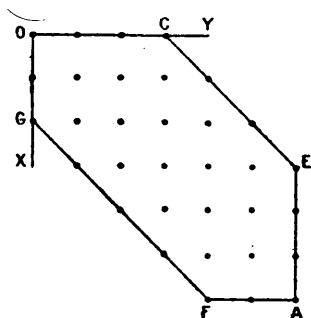


Fig. 7.

1	1	1	1	0		
1	2	3	4	4	0	
1	3	6	10	14	14	0
0	3	9	19	33	47	47
0	9	28	61	108	155	
0	28	89	197	352		
0	89	286	638			

Fig. 8.

Formons un échiquier hexagonal en prenant OC égal à $b - 1$ pas, OG égal à $a - 1$ pas et en menant par les points C et G des parallèles à la diagonale OA (fig. 7).

Sur le carré arithmétique transportons en M (fig. 9), à une distance b , un premier carré négatif; puis en H, à une distance a , un second carré négatif. Si le premier carré était seul, la ligne MR serait tout entière garnie de zéros; mais à cause du deuxième échiquier négatif, il n'y a des zéros que sur ML, et toute la partie LR est garnie de nombres négatifs; il en est de même dans la partie IS.

Pour rétablir les lignes de zéros, il faut superposer un échiquier

positif en L, à une distance de OX égale à $b + a$, et un autre échiquier positif en I, à une distance de OY égale à $a + b$. La ligne MR sera alors garnie de zéros jusqu'en K et de nombres positifs sur tout

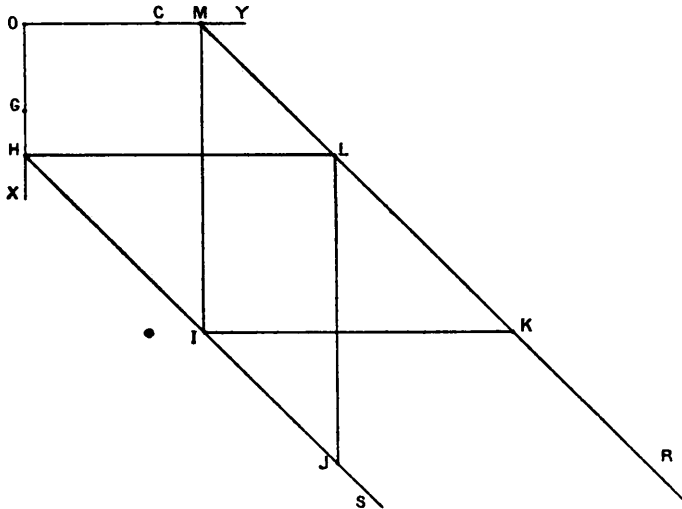


Fig. 9.

le reste de la ligne; de même LS sera garnie de zéros jusqu'en I et de nombres positifs sur tout le reste. Il faudra donc superposer encore deux nouveaux échiquiers négatifs en K à une distance $2b + a$ et en J à une distance $2a + b$, et ainsi de suite.

On obtiendra ainsi le tableau (fig. 8).

En désignant par H_x^y le nombre de manières dont la tour peut se rendre de l'origine sur une case x, y , H_x^y représente le nombre des permutations de x lettres r et de y lettres h , dans lesquelles, à partir de la première lettre de la permutation, le nombre des lettres h ne dépasse pas de plus de $b - 1$ le nombre des lettres r , et où le nombre des lettres r ne dépasse pas de plus de $a - 1$ celui des lettres h .

On a

$$H_x^y = F_x^y - F_{x+b}^{y-b} - F_{x-a}^{y+a} + F_{x-(a+b)}^{y+(a+b)} + \dots,$$

ou bien

$$(5) \quad H_x^y = \sum \left\{ \begin{array}{l} C_{x+y}^{x-h(a+b)} - C_{x+y}^{y-h(a+b)-b} \\ - C_{x+y}^{x-h(a+b)-a} + C_{x+y}^{y-(h+1)(a+b)} \end{array} \right.,$$

h variant depuis zéro jusqu'au plus grand nombre entier, qui ne rend pas les indices négatifs.

LA MARCHÉ DE LA REINE

Au lieu d'une tour marchant dans les deux sens \leftrightarrow et \updownarrow on peut considérer une reine allant dans les trois directions \leftrightarrow , \updownarrow et \searrow .

Construisons un carré arithmétique, dont la première ligne et la première colonne sont formées de 1, par la loi suivante :

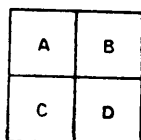


Fig. 10.

Tout nombre situé sur une case D de l'échiquier supposé indéfini est égal à la somme des trois nombres placés dans les cases voisines A, B, C. On obtient ainsi le tableau (fig. 11).

1	1	1	1	1	1	1
1	3	5	7	9	11	13
1	5	13	25	41	61	85
1	7	25	63	129	231	377
1	9	41	129	321	681	1289
1	11	61	231	681	1683	3653
1	13	85	377	1289	3653	8969

Fig. 11.

Cherchons l'expression d'un terme quelconque Φ_x^y de ce tableau.

Chaque pas diagonal équivaut à l'ensemble d'un pas horizontal et d'un pas vertical. Si, pour aller de l'origine à une case de coordonnées (x, y) , on a fait z pas diagonaux, le nombre des pas verticaux est $(x - z)$ et celui des pas horizontaux est $(y - z)$; par conséquent le nombre des solutions qui correspond à cette marche est égal au nombre des permutations avec répétition de $(x - z)$ pas verticaux \updownarrow , de $(y - z)$ pas horizontaux \leftrightarrow et de z pas obliques \searrow , c'est-à-dire

$$\frac{(x + y - z)!}{(x - z)! (y - z)! z!} = C_{x+y-z}^{y-z} C_{x+y-z}^z = C_y^z C_x^{y-z}$$

Pour les cases dont les coordonnées satisfont à l'équation

$$y - x = b - 1,$$

on a

$$C_{x+y}^{y-h(a+b)-b} = C_{x+y}^{x-h(a+b)-1}.$$

On peut donc écrire pour les cases du côté CE de l'échiquier hexagonal :

$$H'_{x,y} = \sum \left[\begin{array}{c} C_{x+y}^{x-h(a+b)} - C_{x+y}^{x-h(a+b)-1} \\ - C_{x+y}^{x-h(a+b)-a} + C_{x+y}^{x-h(a+b)-a-1} \end{array} \right],$$

ou bien

$$(6) \quad H'_{x,y} = \sum \left[\begin{array}{c} \frac{2h(a+b)+b}{y+1+h(a+b)} C_{x+y}^{x-h(a+b)} \\ - \frac{(2h+1)(a+b)+a}{y+1+h(a+b)+a} C_{x+y}^{x-h(a+b)-a} \end{array} \right].$$

Pour les cases du côté GF, il suffira de permuter dans l'équation (6) x et y , ainsi que a et b .

Dans le cas où les deux côtés de l'échiquier sont égaux, c'est-à-dire quand $a = b$, l'équation (6) se simplifie et devient

$$H''_{x,y} = \sum \left[\frac{(4h+1)a}{y+1+2ha} C_{x+y}^{x-2ha} - \frac{(4h+3)a}{y+1+(2h+1)a} C_{x+y}^{x-(2h+1)a} \right],$$

ou bien encore

$$(7) \quad H''_{x,y} = a \sum (-1)^\lambda \frac{2\lambda+1}{y+1+\lambda a} C_{x+y}^{x-\lambda a}.$$

Quand on peut représenter les ordonnées d'un problème de probabilités par des pas horizontaux et verticaux sur un échiquier, le nombre des cas possibles est représenté par le nombre de marches de la tour sur l'échiquier carré, et celui des cas favorables par le nombre des marches de la tour sur l'un des échiquiers de forme triangulaire, pentagonale ou hexagonale.

On peut donc écrire immédiatement, pour l'expression de la probabilité cherchée,

$$\frac{T_x^y}{F_x^y}, \quad \text{ou} \quad \frac{P_x^y}{F_x^y}, \quad \text{ou} \quad \frac{H_x^y}{F_x^y},$$

suivant la nature du problème.

Il ne reste qu'à remplacer F_x^y , T_x^y , P_x^y , H_x^y par les valeurs indiquées dans les formules précédentes pour avoir l'expression algébrique de la probabilité.

des probabilités; tandis que l'échiquier nous donne immédiatement, pour la probabilité cherchée,

$$\frac{T_{m-1}^n}{F_m^n} = \frac{m-n}{m} \frac{C_{n+m-1}^n}{C_{n+m}^n} = \frac{m-n}{m+n}.$$

PROBLÈME II.

Les conditions restant celles du problème précédent, on demande la probabilité que l'écart ne sera jamais inférieur à p .

Réponse :

$$\frac{T_{m-p}^n}{F_m^n} = (m-p-n+1) \frac{m!(m+n-p)!}{(m+n)!(m-p+1)!}.$$

PROBLÈME III.

Les conditions restant encore les mêmes, on demande la probabilité que, à aucun moment, les voix de A n'aient dépassé celles de B de plus de $m-n$.

Réponse :

$$\frac{P'_{m,n}}{F_m^n} = \frac{m-n+1}{m+1},$$

en faisant, dans la formule (4), $b = m - n + 1$.

PROBLÈME IV.

Pierre et Paul jouent l'un contre l'autre avec des probabilités égales. Ils possèdent chacun a francs avant d'entrer au jeu; à chaque partie le perdant donne un franc au gagnant, et le jeu ne cesse que lorsque l'un des deux joueurs est ruiné. Quelle est la probabilité P pour que le jeu se termine à la fin d'une partie de rang assigné μ ?

Catalan dit, dans les *Nouvelles Notes d'algèbre et d'analyse* (1889, p. 69 et suivantes) : « Ce problème, célèbre et difficile, a été traité par divers géomètres, parmi lesquels nous citerons Laplace, M. Rouché et M. Delannoy.

» La solution de Laplace est fondée sur les fonctions génératrices et sur des développements en séries absolument inadmissibles.

» La solution algébrique de M. Rouché, exposée avec force éloges

dans le *Calcul des probabilités* de M. Bertrand, est *illusoire* à cause de la complication du déterminant. »

Reste donc seulement la solution obtenue au moyen de l'échiquier.

Le *résumé* des calculs nécessaires pour arriver à la solution de M. Rouché remplit cinq pages de l'ouvrage de M. Bertrand. Pour obtenir la nôtre, nous avons seulement à dire :

Pour que B soit ruiné à la fin de la μ ^e partie, il faut et il suffit :

1^o Que, pendant le cours des $(\mu - 1)$ premières parties, la différence entre le nombre x de ses gains et le nombre y de ses pertes, abstraction faite du signe, n'ait jamais dépassé $(\mu - 1)$; la probabilité est

$$\frac{H''_{x,y}}{F''_x};$$

2^o Que, après les $(\mu - 1)$ premières parties, l'excès de ses pertes sur ses gains soit égal à $(\mu - 1)$; la probabilité est $\frac{F''_y}{2^{\mu-1}}$;

3^o Qu'il perde la dernière partie, la probabilité est $\frac{1}{2}$.

La probabilité que B sera ruiné à la fin de la μ ^e partie est donc

$$\frac{H''_{x,y}}{F''_x} \cdot \frac{F''_y}{2^{\mu-1}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{H''_{x,y}}{2^{\mu}}.$$

La probabilité que A sera ruiné au lieu de B est la même. Par suite on a, pour la probabilité cherchée,

$$P = \frac{H''_{x,y}}{2^{\mu-1}}.$$

On n'aura qu'à remplacer, dans la formule (7), x et y par leurs valeurs tirées des équations

$$\begin{aligned} x + y &= \mu - 1. \\ y - x &= \mu - 1. \end{aligned}$$

Il viendra

$$P = \frac{\mu}{2^{\mu-1}} \sum (-1)^{\lambda} \frac{2\lambda + 1}{\frac{\mu + \alpha}{2} + \lambda\alpha} C_{\mu-1}^{\frac{\mu-\alpha}{2}-\lambda\alpha},$$

ou bien, remarquant que $\frac{1}{k} C_{\mu-1}^{\mu-k} = \frac{1}{\mu} C_{\mu}^{\mu-k}$,

$$P = \frac{\mu}{2} \frac{1}{2^{\mu-1}} \sum (-1)^{\lambda} (2\lambda + 1) C_{\mu}^{\frac{\mu-(2\lambda+1)\alpha}{2}}$$

λ variant de 0 à E $\left(\frac{\mu-\alpha}{2\alpha}\right)$.

PROBLÈME V.

A et B jouent l'un contre l'autre avec des probabilités p et q . Ils possèdent respectivement a et b francs avant d'entrer au jeu; à chaque partie le perdant donne un franc au gagnant et le jeu ne cesse que lorsque l'un des deux joueurs est ruiné. On demande la probabilité H pour que le jeu se termine juste à la fin d'une partie de rang assigné μ .

En raisonnant comme précédemment, la probabilité H_n que B sera ruiné à la fin de la μ^e partie, est

$$H_n = p^x q^{y+1} H'_{x,y}.$$

Remplaçant, dans la formule (6), x et y par leurs valeurs tirées des équations

$$\begin{aligned} x + y &= \mu - 1, \\ y - x &= b - 1, \end{aligned}$$

il viendra, en faisant $a + b = d$,

$$H_n = p^{\frac{\mu-b}{2}} q^{\frac{\mu+1-b}{2}} \sum \left[\frac{2hd+1-b}{\frac{\mu+b}{2} + hd} C_{\mu-1}^{\frac{\mu-b}{2} - hd} - \frac{(2b+1-d+a)}{\frac{\mu-b}{2} + hd+a} C_{\mu-1}^{\frac{\mu-b}{2} - (hd+a)} \right]$$

ou bien encore

$$H_n = \frac{p^{\frac{\mu-b}{2}} q^{\frac{\mu+1-b}{2}}}{p} \sum \left\{ (2hd+1-b) C_{\mu}^{\frac{\mu-2hd-b}{2}} - [(2b+1-d+a)] C_{\mu}^{\mu-(2h+1)d-a} \right\},$$

h variant de 0 à $E\left(\frac{\mu-b}{2d}\right)$.

On obtiendra H_A en permutant dans H_n x et a , p et q , a et b .

La probabilité cherchée sera

$$H = H_A + H_n.$$

PROBLÈME VI.

Les données restent les mêmes que dans le problème précédent, sauf qu'on rend le jeu équitable en fixant les mises de A et de B à m et n , liées entre elles par la relation $pm = qn$. On demande la probabilité que l'un des joueurs ne pourra plus miser à la fin de la μ^e partie.

On aura encore

$$H = H_A + H_n.$$

et

$$H_n = p^x q^{y+1} H_x^y$$

et l'on remplacera dans la formule (5) x et y par leurs valeurs tirées des équations

$$\begin{aligned} x + y &= \mu - 1, \\ ny - mx &= b - 1. \end{aligned}$$

Si a et b ne sont pas respectivement multiples de m et de n , le jeu devra cesser quand un des joueurs ne possédera plus qu'une somme inférieure à la mise exigée.

PROBLÈME VII.

A joue avec B; à chaque partie, les probabilités qu'ils ont respectivement de gagner sont p et q , en sorte que $p + q = 1$, et le perdant donne un franc au gagnant; ils possèdent en entrant au jeu a francs et b francs. On demande la probabilité que A restera B avant le coup de rang μ .

M. Laurent a donné l'expression de cette probabilité dans le cas tout particulier où a et b sont liés par la relation

$$b = qa + pa^{-1}$$

et les calculs tiennent quatre pages de son *Traité sur le calcul des probabilités* (p. 81 à 85).

Il traite la question d'une manière plus générale dans sa *Théorie sur les jeux de hasard* (p. 42 à 48), et donne pour la probabilité cherchée

$$f(a, \mu) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t_1^a - t_2^a}{t_1^{a+b} - t_2^{a+b}} \sqrt{-1} \frac{e^{-\alpha \mu \sqrt{-1}}}{\alpha} dx.$$

Mais il ne donne pas le résultat de l'intégration, et il termine en disant :

« La solution que nous venons de présenter est, si je puis m'exprimer ainsi, *boiteuse*; elle n'est pas entièrement satisfaisante: mais la théorie des équations aux différences partielles est encore dans l'enfance, et le calcul des probabilités est en grande partie fondé sur cette théorie. »

L'échiquier nous donne immédiatement pour la probabilité demandée

$$p^b \sum_{\lambda=0}^{\lambda = \frac{\mu-b}{2} - 1} (pq)^\lambda H_b^{\lambda + \lambda - 1},$$

λ variant de 0 à $\frac{1}{2}(\mu - b) - 1$.

On voit facilement que si

λ varie de	0	à	$a - 1$,	H possède	1	terme,
»	a	à	$a - 1 + b$,	»	2	»
»	$a + b$	à	$2a - 1 + b$,	»	3	»
»	$2a + b$	à	$2a - 1 + 2b$,	»	4	»
.....					

PROBLÈME VIII.

Sur un damier présentant une largeur de c cases et une profondeur indéfinie, par combien de chemins un pion qui ne recule jamais et qui part d'une case donnée peut-il arriver sur une autre case donnée?

Dans les *Comptes rendus de la Société Mathématique* (t. VII, p. 43), M. D. André a donné une méthode générale pour déterminer le nombre des arrangements complets où les éléments consécutifs satisfont à des conditions données. Il a appliqué cette méthode à la marche du pion du jeu de dames dans le cas où le damier a six cases de longueur. Mais si la solution reste toujours *théoriquement* possible, les calculs seraient d'une longueur presque impraticable dans le cas où c aurait une valeur un peu élevée.

L'échiquier nous montre immédiatement que le nombre cherché

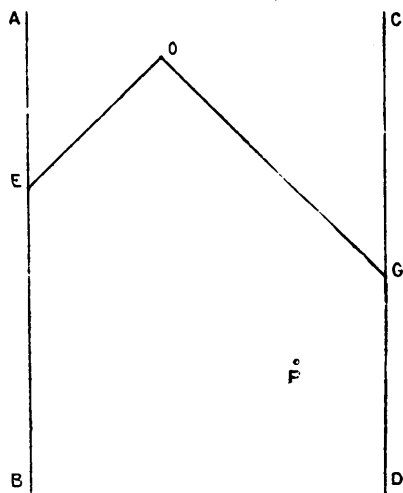


Fig. 12.

n'est autre chose que le nombre des marches de la tour sur un échiquier hexagonal.

En effet, soit ABCD (fig. 12) le damier considéré.

Admettons que la case O de départ soit la m^e d'une ligne quelconque et que la case P d'arrivée soit la p^e d'une ligne située à q rangs au-dessous de O.

Le pion devra se mouvoir suivant les directions OE et OG perpendiculaires l'une à l'autre et faisant avec les côtés du damier des angles de 45° . Sa marche est donc complètement identique à celle de la tour sur l'échiquier hexagonal BEOGD, ayant OE pour côté vertical, OG pour côté horizontal, EB et GD pour côtés obliques.

Par suite, le nombre demandé est égal à H_x^y . Pour avoir son expression, il suffit de faire dans la formule (5)

$$\begin{aligned} x &= q - (p - m), & y &= q + p - m, \\ a &= m + 1, & b &= c - m + 1. \end{aligned}$$

PROBLÈME IX.

n ménages assistent à un bal. Au moment du souper, ils se dirigent pêle-mêle vers la salle à manger. On a soin qu'il ne pénètre jamais dans la salle plus d'hommes que de femmes. On demande la probabilité qu'aucun homme ne sera entré avant sa femme.

Le nombre des cas favorables, c'est-à-dire de ceux où aucun mari n'est entré avant sa femme, est

$$\left(\frac{1}{2}\right)^n (2n)!.$$

Celui des cas possibles (avec la restriction indiquée ci-dessus) est

$$n! n! T_n^n = \frac{(2n)!}{n+1}.$$

La probabilité demandée est donc

$$\frac{n+1}{2^n}.$$

PROBLÈME X.

Un joueur possède n francs et joue à 1 franc la partie contre tous les joueurs qui se présentent, par conséquent contre un adversaire dont la fortune est infinie. On demande la probabilité qu'il sera ruiné avant la $(p+1)^e$ partie.

Il peut perdre les n premières parties, la probabilité que cela aura lieu est $P_0 = \frac{C_n^0}{2^n}$; ou bien gagner une partie et en perdre $n+1$, et

celà de C_{n+2}^1 manières différentes, la probabilité correspondante est

$P_1 = \frac{C_{n+2}^1}{2^{n+2}}$; ou bien en gagner deux et en perdre $n+2$, et cela de

C_{n+4}^2 façons différentes, la probabilité est $\frac{C_{n+4}^2}{2^{n+4}}$; ... enfin gagner

$\frac{\mu-n}{2}$ parties et en perdre $\frac{\mu+n}{2}$ et cela de $C_{\mu}^{\frac{\mu-n}{2}}$ manières diffé-

rentes, la probabilité est $P = \frac{C_{\mu}^{\frac{\mu-n}{2}}}{2^{\mu}}$.

La probabilité cherchée H est la somme des probabilités partielles P_0, P_1, \dots, P . On a donc, en réduisant un même dénominateur,

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2^{\mu}} \left(2^{\mu-n} C_n^0 + 2^{\mu-n-2} C_{n+2}^1 + \dots + C_{\mu}^{\frac{\mu-n}{2}} \right) \\ &= \frac{1}{2^{\mu}} \sum_{k=0}^{\frac{\mu-n}{2}} 2^{\mu-n-2k} C_{n+2k}^k, \end{aligned}$$

$\frac{\mu-n}{2}$ devant être entier, on voit que μ et n doivent être de même parité.

PROBLÈME XI.

Un vote de la Chambre des députés donne lieu à un pointage. Pendant le dépouillement, tantôt le nombre des votes pour l'emporte, et tantôt c'est le contraire. L'opération terminée, on constate qu'il y a p pour et q contre ($q < p$). On demande la probabilité que, à aucun moment du dépouillement, l'excès des pour sur les contre n'a dépassé $p - q$ et que l'excès des contre sur les pour n'a jamais dépassé m .

Cette probabilité est

$$\frac{H'_{p,q}}{F_p^q}$$

Il suffit de faire dans la formule (6)

$$\begin{aligned} b &= p - q + 1, \\ a &= m + 1. \end{aligned}$$

PROBLÈME XII.

Deux joueurs d'échecs marquent au fur et à mesure les parties qu'ils gagnent et celles qu'ils perdent, et, de plus, à chaque partie nulle, chacun d'eux marque une partie gagnée et une partie perdue. Après avoir ainsi marqué chacun $2n$ parties, ils se trouvent n'avoir ni gagné ni perdu. On demande la probabilité qu'ils auront joué $2n$ parties effectives, c'est-à-dire qu'il n'y aura pas eu de partie nulle.

Cette probabilité est

$$\frac{F_n^n}{\Phi_n^n} = \frac{C_{2n}^n}{\sum_{z=0}^{z=n} 2^z (C_n^z)^2}.$$

PROBLÈME XIII.

Jean a une urne contenant m boules rouges, m boules blanches et m boules noires. Pour chaque tirage de boules, il reçoit 0 fr. 70 de Pierre et 0 fr. 70 de Paul. Il donne

1 franc à Pierre si la boule tirée est blanche,

1 franc à Paul si la boule tirée est noire,

1 franc à Pierre et 1 franc à Paul si la boule tirée est rouge.

Après un certain nombre de tirages, il se trouve que Paul a reçu p francs et Pierre q francs ($p \leq q$). On demande la probabilité qu'il soit sorti r boules rouges ($r < p$).

En appelant $R_{p,q}$ le nombre de manières dont la reine peut se rendre de l'origine sur la case (p, q) en faisant r pas obliques, cette probabilité est

$$\frac{R_{p,q}}{\Phi_p^q} = \frac{C_p^r C_{p+q-r}^p}{\sum_{k=0}^{k=p} 2^k C_p^k C_q^k}.$$

PROBLÈME XIV.

Les données du problème restant les mêmes, on demande la probabilité que, à aucun moment, l'exces des noires sorties sur les blanches n'aura dépassé $q - p = n - 1$.

Cette probabilité est

$$\frac{H_p^q}{\Phi_p^q} = \frac{\sum_{k=0}^{k=n} 2^k C_p^k C_q^k - \sum_{k=0}^{k=p-n} 2^k C_{p-n}^k C_{q+n}^k}{\sum_{k=0}^{k=n} 2^k C_p^k C_q^k}.$$

Je ne sais si les problèmes pour lesquels je n'ai pas mentionné d'autre solution ont déjà été résolus par les méthodes ordinaires, mais je suis persuadé à l'avance qu'ils n'ont pu l'être aussi simplement qu'au moyen de l'échiquier.

Dans les questions de probabilité, l'emploi de l'échiquier, toutes les fois que l'on peut y avoir recours, constitue, selon moi, le meilleur de tous les procédés.

La méthode des équations aux différences partielles la plus habituellement usitée ne conduit que trop souvent à des équations qu'on ne sait pas intégrer, et par conséquent à des solutions *illusoires*.

Pour terminer, je ferai remarquer que le carré arithmétique fournit une démonstration très simple du théorème de Bernouilli dans le cas où les probabilités des événements sont égales à $\frac{1}{2}$.

Quand un joueur a joué $2n$ parties, le chiffre de ses gains n'est pas exactement égal à celui de ses pertes. Il a gagné $n \pm e$ parties et il en a perdu $n \mp e$.

e est ce que l'on nomme l'*écart moyen*.

J'ai démontré (*), au moyen du carré arithmétique, que pour $2n$ ou $2n + 1$ parties on a

$$2e = \sqrt{\frac{n}{\pi}},$$

et par suite

$$\frac{e}{2n} = \sqrt{\frac{1}{8\pi n}},$$

c'est-à-dire que le rapport entre l'écart moyen et le nombre des parties jouées tend vers zéro quand n augmente indéfiniment. C'est le théorème de Bernouilli.

Nous citerons encore trois problèmes tirés de la *Théorie des*

(*) *Comptes rendus de l'Association française pour l'avancement des sciences* (Congrès de Limoges, 1880, p. 30).

jeu de hasard, et qui nous semblent devoir donner lieu à observations.

PROBLÈME XV.

Une réussite (p. 105). *On abat successivement toutes les cartes d'un jeu de piquet, en mettant de côté deux cartes consécutives, si elles sont de même couleur. On demande la probabilité que l'on pourra mettre de côté toutes les cartes.*

M. Laurent considère un jeu composé de $2s$ cartes rouges et de $2s$ noires. Il arrive à une formule assez compliquée, contenant un très grand nombre de termes.

« Cette probabilité, dit-il, sera assez pénible à calculer si s est un grand nombre. »

Je le crois bien, avec la formule adoptée. Mais, en réalité, la valeur de cette probabilité se réduit à

$$\frac{\left(C_{2s}^s\right)^2}{C_{4s}^{2s}},$$

expression facile à calculer au moyen de la formule de Stirling, quand s est un grand nombre.

PROBLÈME XVI.

Un diner à une table ronde (p. 87). *n ménages se proposent de dîner ensemble à une table ronde. Pour ne pas froisser les susceptibilités, on convient de laisser au sort le soin de régler les places de chaque convive. On met dans une urne les noms des maris, dans une autre urne les noms des femmes; on tire alternativement un nom de chaque urne en commençant par la première; les personnes dont les noms sortent prennent successivement place à table; un homme est ainsi placé entre deux dames et une dame entre deux hommes. On demande la probabilité pour que p maris désignés soient placés à côté de leurs femmes.*

« On peut évidemment, dit M. Laurent, supposer les femmes d'abord placées au hasard et admettre que l'on range les hommes en tirant leurs noms ensuite.

» En désignant par $f(p)$ la probabilité que p maris désignés sont

placés à côté de leurs femmes, on a :

$$f(1) = \frac{2}{n},$$

$$f(2) = \frac{2(2n-1)}{n^2(n-1)},$$

$$f(3) = \frac{2(2n-1)(2n-2)}{n^3(n-1)(n-2)},$$

$$\dots\dots\dots$$

$$f(p+1) = \frac{2(2n-1)(2n-2)\dots(2n-p)}{n^{p+1}(n-1)(n-2)\dots(n-p)}.$$

Toutes ces formules, à l'exception de $f(1)$, sont inexactes.

En effet, considérons le cas le plus simple; faisons

$$n = 3 \quad \text{et} \quad p = 2.$$

Admettons que les femmes aient été placées dans l'ordre ABC, les trois maris auront l'une des six dispositions suivantes :

A	B	C		
<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	3 maris à côté de leur femme,
<i>a</i>	<i>c</i>	<i>b</i>	2 »
<i>b</i>	<i>a</i>	<i>c</i>	2 »
<i>b</i>	<i>c</i>	<i>a</i>	0 »
<i>c</i>	<i>a</i>	<i>b</i>	3 »
<i>c</i>	<i>b</i>	<i>a</i>	2 »

Il y a trois dispositions dans lesquelles *au moins* deux maris désignés, *a* et *c* par exemple, sont à côté de leur femme; la probabilité correspondante est donc $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$; tandis que si dans $f(2)$ nous faisons $n = 3$, il vient

$$f(2) = \frac{2.5}{3^2.2} = \frac{5}{9}.$$

Cette formule donne donc un résultat inexact.

M. Laurent termine en disant :

« Si, au lieu de demander que p maris désignés soient assis à côté de leurs femmes, on demandait que p maris quelconques, et *p seulement* soient assis à côté de leurs femmes, on procéderait comme il suit :

» La probabilité pour que p maris *au moins* soient à côté de leurs femmes est la somme des probabilités pour que p maris désignés d'une manière quelconque soient à côté de leurs femmes; or, cet

événement peut se produire de C_n^p manières; la probabilité en question est donc $C_n^p f(p)$. »

Demander que p maris *seulement* soient à côté de leurs femmes n'est pas du tout la même chose que de dire que p maris *au moins* soient assis à côté de leurs femmes.

Et, du reste, la formule $C_n^p f(p)$ est inexacte dans les deux cas.

Reprenons l'exemple de $n = 3$ et $p = 2$; la probabilité que deux maris *seulement* sont à côté de leurs femmes est $\frac{3}{6}$; celle que deux

maris *au moins* sont à côté de leurs femmes est $\frac{3}{6} + \frac{2}{6} = \frac{5}{6}$, tandis que

la formule de M. Laurent donne $\frac{3 \cdot 2}{2} \cdot \frac{2 \cdot 5}{3^2 \cdot 2} = \frac{5}{3}$.

Que signifie cette probabilité plus grande que 1?

On peut sans peine former le tableau suivant pour les premières valeurs de n , dans lequel nous appelons P_k la probabilité que k maris et k *seulement* sont placés à côté de leurs femmes.

n	P_0	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
1	0	1	»	»	»	»
2	0	0	1	»	»	»
3	$\frac{1}{6}$	0	$\frac{3}{6}$	$\frac{2}{6}$	»	»
4	$\frac{2}{24}$	$\frac{8}{24}$	$\frac{4}{24}$	$\frac{8}{24}$	$\frac{2}{24}$	»
5	$\frac{13}{120}$	$\frac{30}{120}$	$\frac{40}{120}$	$\frac{20}{120}$	$\frac{15}{120}$	$\frac{2}{120}$

Si l'on voulait chercher l'expression générale de P_1, P_2, \dots pour n quelconque, il faudrait faire un raisonnement analogue à celui que donne Lucas pour obtenir le nombre des dispositions dans lesquelles aucun mari n'est assis à côté de sa femme (*Théorie des nombres*, p. 491), et l'on arriverait comme lui à des formules assez compliquées qui permettraient de prolonger le tableau précédent.

PROBLÈME XVII.

Autre jeu de rencontres (p. 96). On peut considérer une urne renfermant s numéros 1, s numéros 2, ..., s numéros n , tirer suc-

cessivement tous les numéros et demander la probabilité de 0, 1, 2, ... rencontres.

La probabilité pour qu'il n'y ait pas de rencontres est

$$\frac{(s!)^n}{(ns)!} \left[n! - \frac{n}{1} (n-1)! + \frac{n(n-1)}{1.2} (n-2)! - \dots \right]^s.$$

Cette formule est incomplète. Elle ne comprend que les solutions dans lesquelles il est sorti n numéros différents à chacun des s tirages successifs.

Faisons, par exemple, $n = 3$ et $s = 2$; les dispositions qui ne donnent pas lieu à rencontre sont les suivantes :

231	231	212	331
231	312	232	311
312	231	311	232
312	312	331	212
211	332	332	211

La formule de M. Laurent donne bien les quatre premières solutions, mais elle ne tient pas compte des six dernières.

La formule générale complète paraît assez difficile à obtenir.

M. Leonardo TORRES

Ingénieur des ponts et chaussées. à Madrid.

MACHINES ALGÈBRIQUES

[X 7]

— Séance du 6 août 1895 —

DÉFINITION. — Ces machines ont pour but de calculer mécaniquement les inconnues d'une formule algébrique.

On perçoit facilement des analogies entre la machine et la formule. Celle-ci nous dit les relations qui existent entre les variables auxquelles elle se rapporte, elle indique les conditions auxquelles doivent satisfaire les valeurs simultanées de ces variables; une machine lie plusieurs mobiles et établit certaines relations entre