I.R.E.M. Paris-Nord

LE PRINCIPE

D'EXCLUSION-INCLUSION

et ses applications à quelques problèmes combinatoires

Avant-propos : la combinatoire dans l'Enseignement Secondaire.

R. CUCULIERE

Décembre 1975

LE PRINCIPE D'
INCLUSION - EXCLUSION

et ses applications à quelques problèmes combinatoires

R. CUCULIERE

Novembre 1975

AVANT-PROPOS

LA COMBINATOIRE DANS L'ENSEIGNEMENT SECONDAIRE

Si l'étude que l'on va lire n'est pas née d'une activité dans l'I.R.E.M., elle procède toutefois d'une certaine expérience : cinq ans d'enseignement de la Combinatoire et du Calcul des Probabilités (1) dans diverses classes du second cycle de l'Enseignement Secondaire et notamment en 1ère B.

Comme beaucoup de collègues, j'ai été forcé d'étudier cette discipline juste avant de l'enseigner. En effet, tout le monde n'a pas étudié le Calcul des Probabilités en Faculté. Pour ceux qui l'ont fait, le problème reste entier : d'abord, c'est loin, et ensuite, même si l'on retrouve ses notes ou ses polys, ce qu'on y lit ne servira pas forcément à expliquer la chose dans une classe de 1ère de 1975 !

Il fallait donc s'y remettre : je m'y suis remis, et je me suis aperçu assez vite que ce travail était fructueux et compensait (ou remplaçait) avantageusement l'enseignement reçu (ou non) en Faculté.

Je me suis aperçu que la Combinatoire occupe une place à part dans l'enseignement mathématique du Second Degré : c'est la seule part de cet enseignement où l'on doive et où l'on puisse faire systématiquement appel -même dès l'exposé du cours- à des exemples concrets d'utilisation des notions mathématiques.

---

(1) On me fera peut-être remarquer que ces deux disciplines sont bien distinctes et ont chacune son objet et ses méthodes qui lui sont propres. Je veux bien, mais au niveau du Secondaire elles vont assez bien ensemble. D'ailleurs quand on dénombre des configurations, c'est en général que l'on s'intéresse à certaines d'entre-elles : leur pourcentage devient assez naturellement objet d'intérêt.

Témoin France Soir spécial Tiercé du 23/10.75 titrant sur cinq colonnes : "12144 Combinaisons", parce que 24 pouliches étaient au départ. Ce qui était important, c'était l'une de ces 12144"combinaisons". Ce nombre venait naturellement en dénominateur ...

On devrait le faire dans d'autres classes, paraît-il, mais chacun sait qu'on n'a pas le temps. Et chaque fois qu'au B.E.P.C. l'énoncé s'écarte de l'Enoncé Habituel avec le Polynôme-à-Factoriser, la Fraction-Rationnelle-à-Simplifier, le tout terminé par la Fonction-Affine-à-Représenter-Graphiquement, alors c'est Borodino, je veux dire la Bérézina. Exemples : les résultats catastrophiques de l'épreuve de Math. du B.E.P.C. dans l'Académie de Grenoble en 1974 (Bulletin A.P.M. N° 296, décembre 1974 , p. 931) ou de Clermont-Ferrand en 1975, résultats consécutifs à des énoncés trop originaux, trop "concrets" .

Pour la Combinatoire, c'est différent. Le cours comprend un nombre limité d'exemples de configurations privilégiées à dénombrer : les Arrangements, les Permutations, les Combinaisons. Ces exemples sont utiles, et même indispensables pour deux raisons :

Premièrement : les configurations en question sont très fréquentes dans les situations usuelles. Savoir les formules évite des énumérations directes, fastidieuses dans les meilleurs (et rares) cas, impossibles dans tous les autres.

Deuxièmement : les méthodes utilisées pour établir ces formules, l'arbre pour les arrangements et le "principe des bergers" (2) pour les combinaisons, donnent des schémas de méthodes de dénombrement qui s'avèreront utiles dans la plupart des situations.

---

(2) "Principe des Bergers" : on compte les pattes et on divise par 4. On compte les arrangements, on trouve A_n^p et on divise par p! . Bien sûr, seuls des plaisantins ont attribué aux bergers cette méthode de dénombrement ; mais en Combinatoire, ça marche.

Je voudrais placer ici une remarque. Il vaut mieux, à mon avis présenter d'abord les arrangements comme des suites d'éléments "dans l'ordre", les permutations comme telles suites qui épuisent tout l'ensemble considéré, et les combinaisons comme des paquets, des tas d'éléments "dans le désordre", car c'est ainsi qu'ils se présentent dans les applications pratiques. Mieux vaut ne pas chercher à tout prix à placer les marchandises qui s'appellent "injections" et "bijections". Si l'on ne peut vivre sans ces objets "modernes" on peut les présenter en exercice, et vérifier qu'ils sont en même nombre que les arrangements et les permutations. C'est ainsi que procèdent par exemple L. GUEBER et P.L. HENNEQUIN [Biblio. 3]. De même il n'est pas indispensable de se livrer à un exposé magistral sur le nombre d'applications d'un ensemble vers un autre, qui d'ailleurs ne figure pas au programme, mais que certains manuels se croient tenus de présenter. Mieux vaut traiter en exercice des situations (cadenas à chiffres, dés) où interviennent des choix indépendants, que l'on peut dénombrer grâce à un arbre. Donc, avec un arsenal assez limité, on peut aborder toute une série de situations concrètes : cartes, dés, urnes, cadenas à chiffres, mots, hombres, immatriculations, trajets, réseaux, codes (Braille Morse ou autres), etc.

Ensuite, pour le Calcul des Probabilités, c'est à peu près pareil. Pourvu que l'on ne se perde pas dans les subtiles, mais austères, splendeurs des Anneaux Booléens, on trouvera un noyau fait de deux ou trois idées et formules telles que :

$$A \text{ et } B \text{ incompatibles} \Longrightarrow p(A \cup B) = p(A) + p(B)$$

$$A \text{ et } B \text{ indépendants} \Longrightarrow p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B)$$

En signalant bien soigneusement qu'il faut éviter de confondre ces deux énoncés .... et en le répétant non moins soigneusement chaque fois que la confusion sera faite ! "C'est par une douleur qu'il faut tout découvrir" : l'élève se souviendra sans doute mieux d'un échec personnel que d'une mise en garde ex cathedra.

Et alors, les exemples d'applications sont encore plus nombreux. Il s'ouvre encore un nouveau monde de situations concrètes et même usuelles, à analyser, à débroussailler ... à mathématiser, comme on dit.

Voilà ce qui fait la spécificité et (outre son charme... discret !) l'intérêt de la Combinatoire dans l'enseignement secondaire.

Mais on m'objectera : pourquoi privilégier la "mathématisation des situations" par rapport aux autres domaines de l'activité pédagogique en mathématiques ?

Pour trois séries de raisons : historiques, philosophiques, pédagogiques.

Raisons historiques :

la Combinatoire et le Calcul des Probabilités sont très précisément pour résoudre des problèmes concrets qui se posaient dans les jeux. Ce sont Pascal et Fermat qui les premiers se sont penchés sur le problème de la "règle des partis" c'est-à-dire sur la manière la plus équitable de répartir l'enjeu (le "parti") lorsque les joueurs, d'un commun accord, interrompent la partie avant sa fin [Biblio. 2 pp. 75 sq.] . Pour la plupart des branches des Mathématiques on peut citer des origines analogues [Biblio. 1]

Et même si, en retour, des découvertes mathématiques antérieures viennent parfois expliquer un phénomène nouvellement observé (exemple habituel entre cent : les coniques, étudiées dès l'Antiquité, se sont trouvées, au 17ème Siècle, être la trajectoire des corps célestes) cela ne témoigne que d'une chose : l'unité de la réalité, dont rend compte l'unité des sciences qui la représentent.

Raisons philosophiques :

En ces temps où l'axiomatique domine, l'apriorisme sévit. Qu'est-ce-que l'apriorisme ? C'est une attitude de pensée qui considère les concepts scientifiques comme des données a-priori de notre entendement et non comme des reflets de la réalité objective. C'est une conception qui nie systématiquement tout le lent travail qu'il a fallu faire pour dégager ces concepts, toutes les expérimentations, les réussites et les échecs, les tâtonnements et les erreurs, tous les travaux successifs de divers ordres qu'il a fallu accumuler avant d'arriver au résultat bien élaboré : le concept, l'exposé axiomatique. C'est donc une conception qui se place dans l'après-coup, quand tout est fait, qui nie les conditions réelles de l'invention et du progrès scientifique. L'accord entre les théories scientifiques et les données sensibles de l'expérience paraît alors purement fortuit, les axiomes dépendant du bon vouloir du mathématiciens et les théorèmes en découlant logiquement. Contre cette caricature de "liberté", il faut affirmer avec force ce qui est, il faut montrer que toute oeuvre scientifique authentique, d'aussi haut niveau soit-elle, vise en dernier ressort à faire mieux connaître la réalité, pour agir sur elle. La rigueur de l'exposé, qui a ses mérites, n'est qu'un moyen d'atteindre ce but. Cela, les plus grands scientifiques de tous les temps, par leur travail et leurs écrits nous l'ont indiqué, on ne peut plus clairement.

C'est cela, le contenu réaliste qu'il faut, selon moi, transmettre à nos élèves.

Raisons pédagogiques :

De plus en plus les jeunes posent la question du pourquoi : Ils demandent : "A quoi cela sert-il ?", et pas seulement dans le Second Cycle. Il ne s'agit pas là d'un utilitarisme à courte vue, mais d'un utilitarisme social : les élèves veulent contrôler que tout ce qu'on leur enseigne est vraiment utile.

De plus, l'exercice qui consiste à mathématiser une situation est deux fois plus éducatif car le travail qu'il nécessite est double : il faut reformuler le problème en termes mathématiques et puis résoudre ce problème. La première de ces deux opérations est de loin la plus difficile, la plus intéressante, la plus formatrice.

Devant un problème déjà formulé mathématiquement, l'élève peut avoir l'impression d'un certain caractère conventionnel et presque incantatoire - le problème ne consistant pas à découvrir ce qui est, mais ce qu'il faut dire pour faire plaisir à l'examinateur.

Devant une situation concrète, on est son propre juge. On est face à un défi exaltant et beaucoup plus "motivant" qu'un problème abstrait.

Par exemple, l'attitude d'une classe de 1$^{\text{ère}}$B devant un problème combinatoire n'est pas du tout la même que devant un exercice consistant à chercher si une certaine application f de R^2 vers R est ou n'est pas une forme-bilinéaire-symétrique-définie-positive, ce dont, en général, ils ne voient pas l'intérêt.

A ces trois séries de raisons, s'en ajoute une quatrième : ces exercices de mathématisation sont en général refoulés de l'Enseignement Secondaire actuel. C'est un fait.

On me dira que les Programmes prévoient parfois la nécessité de tels exercices.

Classe de 3$^{\text{ème}}$: "mise en équation de problèmes variés, mathématiques ou non"

Classe de 2$^{\text{ème}}$ C (programmes de 1973) , NB : "les problèmes proposés aux élèves et dont les origines pourront être empruntées à d'autres disciplines que les mathématiques ,...
Portant sur des phénomènes connus des élèves, ils pourront être présentés de façon à nécessiter un travail simple de mathématisation (...)".

On pourra même me mettre sous les yeux cette "instruction complémentaire de 1957" que les actuels textes officiels maintiennent, et qui contient d'excellentes considérations sur les rapports entre la théorie et l'expérience.

Mais justement, dans la plupart des cas tout cela n'est pas appliqué, ce qui semblerait prouver que, dans les conditions actuelles, c'est inapplicable.
On me permettra de citer ici une anecdote personnelle.

L'an passé, ayant à meubler des "10%" par "autre chose" que l'habituel, j'avais voulu faire avec mes élèves de la programmation linéaire -discipline qui figurerait sans doute au programme de 1ère B plus légitimement que les rotations vectorielles ! C'était un problème tiré de Fletcher (Didactique). On avait 3 combustibles : A, B, C dont les teneurs en soufre étaient respectivement 2,3% , 1,8% et 1,3% . Moins il y en avait, plus c'était cher : il fallait trouver le mélange idoine, le moins cher possible et avec au plus 2% de soufre.

Je prends donc comme variables les pourcentages de A et de B dans le mélange : soient x et y . Le pourcentage de C est donc 100 - x - y : cela n'a déjà pas été simple à établir. Mais quand il s'est agi d'exprimer en fonction de x et y le pourcentage de soufre dans ce mélange, alors là, personne n'a su le faire ! (le lecteur aura trouvé :

$\frac{2,3}{100}\,x + \frac{1,8}{100}\,y + \frac{1,7}{100}\,(100-x-y)$, qui doit être posé inférieur ou égal à 2).

Pourtant, la programmation linéaire, c'est intéressant. C'est concret, cela pose de vrais problèmes, cela fait intervenir nombre de notions qui figurent au programme, comme l'équation cartésienne d'une droite. Mais voilà, les élèves étaient arrêtés par une difficulté imprévue, étrangère à l'objet propre du travail que nous faisions : un calcul de pourcentage !
Ce n'est pourtant pas leur faute !

Et essayez de demander, en 2ème C, combien pondent 6 poules en 6 jours, sachant qu'une poule et demie pond un oeuf et demi en un jour et demi. Vous m'en direz des nouvelles !

Alors, on pourrait en déduire que quelque chose ne va pas dans les actuels programmes. Mais je n'ose m'arrêter à une telle conclusion . Ceux qui ont élaboré ces programmes sont tellement plus "intelligents" que moi ! j'ai dû me tromper quelque part, et je suis dans l'erreur. Ce qui me console un peu, c'est que je n'y suis pas seul.

Et après tout, ces nouveaux programmes ont introduit quelque chose de positif : la Combinatoire dans l'Enseignement Secondaire. Profitons-en !

Tel est donc, pour moi, l'intérêt de la Combinatoire, que j'ai découvert en l'enseignant et en tentant d'approfondir ce que j'enseignais.

En me posant des problèmes, en cherchant les solutions, en étudiant ici et là -notamment les articles mathématiques du bulletin de l'A.P.M., qui en font un excellent moyen de formation permanente- j'ai pris connaissance de cette formule simple, simple mais si féconde qu'on l'a appelée un principe : <u>le principe d'inclusion-exclusion</u> .

Ce "principe" me semble en général peu connu. S'il ne figure pas au programme, il peut toutefois fournir des thèmes d'exercices, surtout en Terminale. Ses applications peuvent servir à préciser nos connaissances sur certaines questions : surjections, partitions, dérangements.

Les lignes qui suivent ne prétendent donc à aucun caractère d'originalité. Elles visent seulement à remettre en mémoire une formule souvent peu connue et à en montrer quelques applications utiles.

Si l'étude que l'on va lire n'est pas née d'une activité dans l'I.R.E.M., elle ne pouvait être conçue ni rédigée (ni bien sûr publiée) que dans l'I.R.E.M., car l'I.R.E.M. est un moyen indispensable de réflexion permanente sur notre enseignement. C'est l'institution permettant d'organiser cette réflexion collective, par l'échange continu d'expériences, d'idées, d'informations mathématiques.

Il va sans dire que toute critique, venant de la part de ceux qui liront ces lignes, est bienvenue et très-souhaitée. Ainsi que toute suggestion concernant des travaux ultérieurs sur la Combinatoire et son enseignement.

§ 1 LE PRINCIPE ET SA DEMONSTRATION

Dans toute la suite, on considère des ensembles finis. On notera $|E|$ le cardinal (nombre d'éléments) de l'ensemble E.

A et B étant deux ensembles finis quelconques, on sait que $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \quad B|$

Si l'on a 3 ensembles A, B, C, on en déduit :

$$|A \cup B \cup C| = |(A \cup B) \cup C| = |A \cup B| + |C| - |(A \cup B) \cap C|$$

$$= |A \cup B| + |C| - |(A \cap C) \cup (B \cap C)$$

$$= |A \cup B| + |C| - \Big[|A \cap C| + |B \cap C| - |(A \cap C) \cap (B \cap C)| \Big]$$

$$= |A| + |B| - |A \cap B| + |C| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

$$\boxed{|A \cup B \cup C| + |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |B \cap C| - |A \cap C| + |A \cap B \cap C|}$$

Posons : $S_1 = |A| + |B| + |C|$

$S_2 = |A \cap B| + |B \cap C| + |A \cap C|$

$S_3 = |A \cap B \cap C|$

$S = S_1 - S_2 + S_3$ on a : $S = |A \cup B \cup C|$

Généralisons. Soient n ensembles finis : $A_1, A_2, \ldots A_n$

Soit $S_1 = |A_1| + |A_2| + \ldots + |A_n| = \sum_{1 \leq i \leq n} |A_i|$

$S_2 = |A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| + \ldots = \sum_{1 \leq i < j \leq n} |A_i \cap A_j|$

$S_3 = \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} |A_i \cap A_j \cap A_k|$

Et ainsi de suite jusqu'à $S_n = |A_1 \cap A_2 \ldots \cap A_n|$

Pour tout entier k tel que $1 \leq k \leq n$,

$$S_k = \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 \ldots < i_k \leqslant n} \left| A_{i_1} \cap A_{i_2} \ldots \cap A_{i_k} \right|$$

est la somme des cardinaux des intersections des n ensembles A_i pris k à k . Ces intersections sont d'ailleurs au nombre de C_n^k .

Soit $\qquad S = S_1 - S_2 + S_3 + \ldots + (-1)^{k-1} S_k + \ldots + (-1)^{n-1} S_n$

Le principe d'inclusion-exclusion dit que

$$\boxed{S = |A_1 \cup A_2 \ldots \cup A_n|}$$

On peut en donner plusieurs démonstrations :

- On peut le démontrer par récurrence, en adjoignant à ces n ensembles un $n+1$-ième, A_{n+1}, et en procédant de la même façon qui nous a amenés à calculer $|A \cup B \cup C|$.

- On peut aussi considérer un élément x appartenant exactement à p ensembles parmi les A_i $(1 \leqslant p \leqslant n)$.

  Dans S_1 , cet élément est compté p fois (ou C_p^1)

  Dans S_k , il sera compté C_p^k fois.

  Dans S_p , il sera compté une fois (ou C_p^p)

  Dans S_{p+1} il ne sera plus compté, puisqu'il n'appartient qu'à p des n ensembles A_i .

Donc dans S il sera compté un nombre de fois égal à :

$$C_p^1 - C_p^2 + C_p^3 \ldots + (-1)^{p-1} C_p^p = r$$

Or ce nombre est égal à 1. En effet, on a, puisque $p \geqslant 1$:

$$0 = (1-1)^p = 1 - C_p^1 + C_p^2 - C_p^3 + \ldots + (-1)^p C_p^p = 1 - r$$

Tout élément x de la réunion $A_1 \cup A_2 \ldots \cup A_n$ est donc compté exactement <u>une</u> fois dans S, ce qui prouve qu'on a bien : $|A_1 \cup A_2 \ldots \cup A_n| = S$

Remarque :

Toute mesure m sur un anneau booléen unitaire vérifie la relation $m(A \cup B) = m(A) + m(B) - m(A \cap B)$. Elle vérifie donc aussi le principe d'inclusion-exclusion. Mais alors, on ne peut utiliser la deuxième démonstration ci-dessus.

On peut remarquer aussi que l'anneau dual de l'anneau usuel $\mathcal{P}(E)$ donne une formule duale encore vraie :

Si l'on pose $S_k = \Sigma \left|A_{i_1} \cup A_{i_2} \ldots \cup A_{i_k}\right|$

$$S = |A_1 \cap A_2 \ \ldots \ \cap A_n|$$

on a bien encore $S = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} S_k$

§ 2 DEUX APPLICATIONS

Premier exemple :

Chacun connaît les problèmes du type suivant :

Dans une classe, chaque élève étudie au moins l'une des trois langues suivantes : anglais, italien, espagnol.

Le nombre des élèves qui étudient	l'anglais	est :	21
" " "	l'espagnol	est :	14
" " "	l'italien	est :	18
" " "	l'anglais et l'espagnol	est :	7
" " "	l'espagnol et l'italien	est :	5
" " "	l'italien et l'anglais	est :	9
" " "	les 3 langues	est :	3

Combien la classe compte-t-elle d'élèves ? (1)

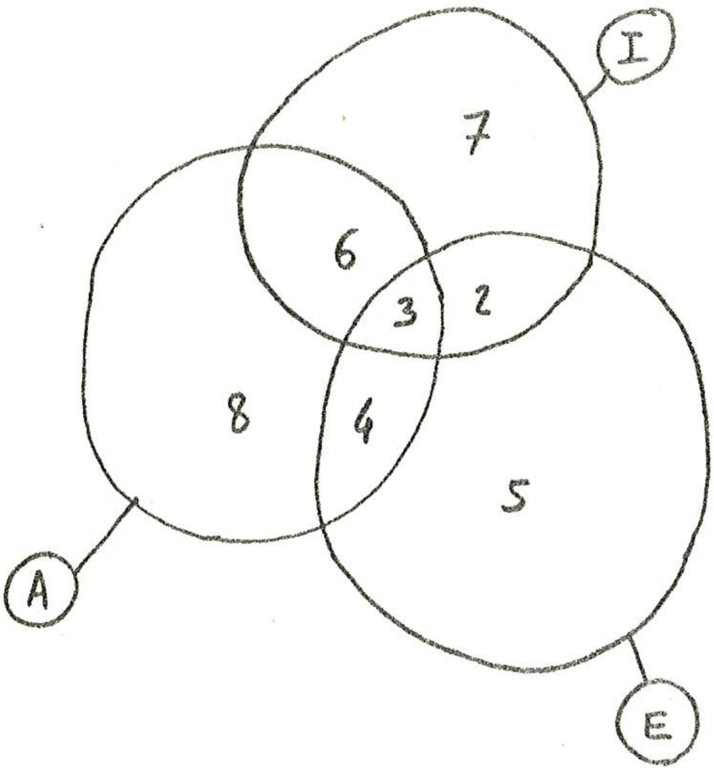
La difficulté, on le sait, vient du fait que les élèves comptés dans l'une des catégories (par exemple "anglais") peuvent être comptés aussi dans une autre (par exemple "anglais et espagnol").

---

(1) Dans un article intitulé "Algèbre de Boole et publicité" (Bulletin A.P.M. N° 251, janvier-février 1966), article dont on ne peut que recommander vivement la lecture, A. WARUSFEL et P. ROSENSTHIEL affirment (p. 33, note) que de tels "exemples scolaires ... n'enthousiasment plus au-delà de l'âge de 9 ans". J'ai pu constater au contraire qu'un tel exercice, posé en 1ère B, permet aux élèves d'essayer leurs forces sur une question à l'énoncé simple, mais qui demande une certaine attention. C'est peut-être l'exercice qui a suscité le plus d'initiative des élèves, l'un proposant un procédé de dénombrement qui s'est avéré erroné, mais dont la critique n'était nullement évidente, et qui a suscité des débats assez suivis.

L'exemple contenu dans l'article cité plus haut est bien plus évolué, bien plus intéressant, c'est un fait, mais il a été posé à des étudiants de H.E.C., non à des élèves de 1ère B.

La méthode "classique" consiste à remplir de proche en proche un diagramme, en partant de la zone centrale qui contient 3 éléments.



On trouve en tout 35 élèves.

On peut procéder autrement, en utilisant le principe d'inclusion-exclusion en posant $S = |A \cup I \cup E|$.
On a alors :

$S_1 = 18 + 14 + 21 = 53$

$S_2 = 9 + 5 + 7 = 21$

$S_3 = 3$

on trouve bien

$S = S_1 - S_2 + S_3 = 53-21+3 = 35$

Deuxième exemple :

On extrait au hasard 15 cartes d'un jeu de 32 .

Quelle est la probabilité d'obtenir au moins un carré (4 as ou 4 rois, etc.) ?

On appelle A_1 le nombre de "mains" (2) de 15 cartes contenant le carré d'as

On appelle A_2 le nombre de "mains" de 15 cartes contenant le carré de rois

. . . .

On appelle A_8 le nombre de "mains" de 15 cartes contenant le carré de septs

(2) Les énoncés de combinatoire faisant intervenir des cartes appellent traditionnellement "main" tout paquet de cartes (dans le désordre) qu'on peut extraire du jeu c'est-à-dire, pour parler correctement, tout sous-ensemble, toute partie de l'ensemble des cartes du jeu. Le nombre total de mains différentes de p cartes qu'on peut extraire d'un jeu de 32 est donc C_{32}^{p}

Le nombre de mains contenant au moins un carré est :

$$S = |A_1 \cup A_2 \ldots \cup A_8|$$

On a $|A_i| = C_{28}^{11}$ (quel que soit i, compris entre 1 et 8)

$$|A_i \cap A_j| = C_{24}^{7} \text{ (quels que soient } i \text{ et } j \text{ distincts)}$$

$$|A_i \cap A_j \cap A_k| = C_{20}^{3} \text{ (idem)}$$

Et c'est tout : une main de 15 cartes ne peut contenir 4 carrés.

On a donc $S_1 = \Sigma\, |A_i| = 8 \,.\, C_{28}^{11} = C_8^1\, C_{28}^{11}$

$$S_2 = \Sigma\, |A_i \cap A_j| = C_8^2\; C_{24}^7$$

$$S_3 = C_8^3\, C_{20}^3$$

Donc $S = C_8^1\, C_{28}^{11} - C_8^2\, C_{24}^7 + C_8^3\, C_{20}^3$

La probabilité cherchée est, bien sûr : $\dfrac{S}{C_{32}^{15}}$

Nous avons ici un exemple de cas particulier important et fréquent dans les applications habituelles : celui où le cardinal de $A_{i_1} \cap A_{i_2} \ldots \cap A_{i_k}$ ne dépend que de k et non du choix des indices $i_1, i_2, \ldots, i_k$. La famille $(A_1, A_2, \ldots A_k)$ est alors dite échangeable, et on peut poser :

$$|A_{i_1} \cap A_{i_2} \ldots \cap A_{i_k}| = I_k$$

Le nombre de termes de la somme $S_k = \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 \ldots < i_k \leqslant n} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \ldots A_{i}$ étant toujours C_n^k et ces termes étant ici tous égaux à I_k, on aura :

$$S_k = C_n^k\, I_k \,.$$

Et donc $\boxed{S = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1}\, C_n^k\, I_k}$

§ 3 SURJECTIONS, PARTITIONS

Le nombre de surjections d'un ensemble fini E à n éléments vers un ensemble $F = \{x_1, x_2, \ldots, x_p\}$ à p éléments est plus délicat à déterminer que le nombre d'injections, de bijections, d'applications ... ou de <u>fonctions</u>.

Soit donc $\mathcal{S}$ l'ensemble de ces surjections, $|\mathcal{S}|$ leur nombre.

Ce nombre est lié au nombre de <u>partitions</u> de E (1) en p classes, que l'on note ordinairement $S(n,p)$. En effet, à chaque surjection $f : E \to F$, on peut associer la partition de E : $\{f^{-1}(x_1), f^{-1}(x_2), \ldots f^{-1}(x_p)\}$

On remarque que cette correspondance surjections-partitions associe exactement, à chaque partition, $p!$ surjections de E vers F. On passe donc des surjections aux partitions comme des arrangements aux combinaisons, en appliquant le "principe des bergers" :

$$S(n,p) = \frac{|\mathcal{S}|}{p!}$$

Si l'on a l'un des deux nombres $|\mathcal{S}|$ et $S(n,p)$, on a aussi l'autre. Calculons donc $|\mathcal{S}|$.

Récapitulons :

E est un ensemble à n éléments

F est un ensemble à p éléments : $F = \{x_1, x_2, \ldots x_p\}$

$\mathcal{S}$ est l'ensemble des surjections de E vers F.

---

(1) Sur le nombre de partitions, signalons une expérience de travail d'élèves réalisé en 1ère B et paru dans le Bulletin du G.E.P.-Math. N° 18, 4ème trimestre 1973. Une telle expérience mériterait d'être discutée.

Soit $\mathcal{A}$ l'ensemble de toutes les applications de E vers F : $|\mathcal{A}| = p^n$.

L'ensemble $\mathcal{A} \setminus \mathcal{S}$, complémentaire de $\mathcal{S}$ dans $\mathcal{A}$, est l'ensemble des applications de E vers F qui ne sont pas des surjections, c'est-à-dire qui n'atteignent pas l'un au moins des éléments de F.

Appelons donc $\mathcal{A}_i$ l'ensemble des applications $f : E \to F$, qui n'atteignent pas x_i (c'est-à-dire telles que $x_i \notin f(E)$)

$$\mathcal{A} \setminus \mathcal{S} = \mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2 \cup \ldots \cup \mathcal{A}_p$$

Donc $$|\mathcal{A}| - |\mathcal{S}| = p^n - |\mathcal{S}| = |\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2 \cup \ldots \cup \mathcal{A}_p| = S$$

On peut appliquer le principe . On a :

$$|\mathcal{A}_1| = |\mathcal{A}_2| = \ldots = |\mathcal{A}_p| = (p-1)^n$$
$$|\mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2| = \ldots = |\mathcal{A}_i \cap \mathcal{A}_j| = \ldots = |\mathcal{A}_{p-1} \cap \mathcal{A}_p| = (p-2)^n$$

En général, pour tout k tel que $1 \leqslant k \leqslant p$:

$I_k = \left|\mathcal{A}_{i_1} \cap \mathcal{A}_{i_2} \cap \ldots \cap \mathcal{A}_{i_k}\right| = (p-k)^n$ ne dépend que de k

et non du choix des indices i_1 , i_2 , i_3 , ..., i_k :

Nous sommes dans le cas particulier d'une famille $(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \ldots \mathcal{A}_p)$ échangeable.

L'application du principe donne

$$S = \sum_{k=1}^{p} (-1)^{k-1} C_p^k I_k$$

Soit $$p^n - |\mathcal{S}| = \sum_{k=1}^{p} (-1)^{k-1} C_p^k (p-k)^n$$

Donc $$|\mathcal{S}| = p^n - \sum_{k=1}^{p} (-1)^{k-1} C_p^k (p-k)^n$$

$$\boxed{|\mathcal{S}| = \sum_{k=o}^{p} (-1)^k C_p^k (p-k)^n}$$

Soit, en posant $p-k = j$:

$$\boxed{|\mathcal{S}| = \sum_{j=o}^{p} (-1)^{j+p} C_p^j j^n}$$

Car; $(-1)^{p-j} = (-1)^{p+j}$ et $C_p^{p-j} = C_p^j$

Cette formule, on le sait, a d'importantes conséquences.

On en déduit que :

$\boxed{n < p \Rightarrow \sum_{j=o}^{p} (-1)^j C_p^j j^n = 0}$ (il n'y a pas de surjection)

et si $n = p$: $\boxed{\sum_{j=o}^{p} (-1)^j C_p^j j^p = p!\ (-1)^p}$ (les surjections sont alors des bijections).

Revenons aux partitions. On a vu que le nombre de partitions de n objets en p classes est égal à $S(n,p) = \dfrac{|\mathcal{S}|}{p!}$

On a donc :

$$\boxed{S(n,p) = \frac{(-1)^p}{p!} \sum_{j=o}^{p} (-1)^j C_p^j j^n}$$

qui se trouve donc être un entier.

Ces nombres s'appellent nombres de Stirling de $2^{\text{ème}}$ espèce.

On peut dresser le tableau à double entrée des $S(n,p)$, style Triangle de Pascal, on peut chercher des relations de récurrence. Tout cela est traité par exemple dans deux articles du bulletin de l'A.P.M. . Le premier, de <u>M. GLAYMANN</u>, intitulé "quelques aspects de la Combinatoire"

(Bulletin N° 277 - janvier - février 1971), calcule d'abord $S(n,p)$ par un procédé récurrent, expose plusieurs propriétés des $S(n,p)$, et en déduit $|\mathcal{S}|$. Le second, de J. LEGRAND, intitulé "nombre de surjections d'un ensemble fini sur un ensemble fini" (Bulletin N° 297, février 1975), calcule d'abord $|\mathcal{S}|$ par une méthode qui faisait l'objet d'un exercice dans : Biblio. 3 p. 31 .

Cet article donne aussi des propriétés des nombres $S(n,p)$ mais l'auteur éprouve le curieux besoin de changer des notations généralement admises, appelant par exemple ψ l'opérateur "différence finie", que depuis au moins deux siècles on appelle Δ .

On peut noter enfin une propriété que les $S(n,p)$ partagent avec les C_n^p : si n est premier, il divise tous les $S(n,p)$ tels que $2 \leqslant p \leqslant n-1$ (Problèmes de l'A.P.M. N° 12 : Bulletin 281 p. 756 et 286 p. 995). Mais je ne crois pas que n divise $S(n,p)$ dès que n est premier avec p alors que ceci est vrai pour C_n^p .

§ 4 DERANGEMENTS

On peut formuler ainsi le problème : j'écris, mettons, 10 lettres et leurs 10 enveloppes. Distrait, je mets ensuite au hasard les lettres sous-enveloppe.

Quelle estla probabilité pour qu'aucune lettre ne soit dans son enveloppe ? (1) .

C'est-à-dire : probabilité que l'on n'ait aucune "rencontre" où "coïncidence" entre les lettres et les enveloppes ? Ce problème s'appelle le "problème des rencontres".

Pour y répondre, numérotons les lettres et les enveloppes correspondantes de 1 à 10 .

On peut reformuler ainsi le problème :

Les diverses éventualités possibles sont les diverses permutations des 10 lettres : il y en a 10 !, elles sont équiprobables . Les éventualités "favorables" sont les permutations de l'ensemble des 10 premiers entiers qui n'en laissent aucun à sa place : on les appelle dérangements (ou permutations strictes ou permutations sans coïncidences), et ce sont elles qu'il nous faut dénombrer.

---

(1) Je préfère cette formulation à une autre qu'on voit parfois : 10 personnes vont au spectacle, remettent leur chapeau à la dame du vestiaire, mais celle-ci les leur rend au hasard.

Il y a aussi l'histoire de ce commis de librairie qui, si j'en crois l'énoncé posé au Bac. A à Rennes en 1971, avait à envoyer, à chacun des 3 clients, un exemplaire d'un dictionnaire en 2 tomes. Une fois faits les 6 paquets, le bougre, il envoie tout cela au hasard, 2 paquets à chacun ! Et l'auteur de demander, bien sûr, la probabilité pour que chaque client reçoive un dictionnaire complet et non deux tomes identiques. De tels énoncés en disent long sur l'estime dans laquelle leurs auteurs tiennent la conscience professionnelle du "petit personnel" !

Plus généralement, considérons un ensemble E à n éléments : $E = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$

On appelle dérangement de E une permutation σ de E qui ne laisse fixe aucun élément de E, c'est-à-dire une bijection σ de E telle que, pour tout $x \in E$, $\sigma(x) \neq x$.

Soit $\mathcal{B}$ l'ensemble de toutes les permutations (bijections) de E. On a bien sûr $|\mathcal{B}| = n!$

Soit $\mathcal{D}$ l'ensemble des dérangements. On pose $|\mathcal{D}| = d(n)$.

L'ensemble $\mathcal{B} \setminus \mathcal{D}$, complémentaire de $\mathcal{D}$ dans $\mathcal{B}$, est l'ensemble des permutations de E qui laissent fixe au moins un des éléments de E.

Soit donc $\mathcal{B}_i$ l'ensemble des permutations de E qui laissent fixe l'élément x_i . On a :

$$|\mathcal{B} \setminus \mathcal{D}| = |\mathcal{B}| - |\mathcal{D}| = n! - d(n) = |\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2 \dots \cup \mathcal{B}_n| = S$$

Mettons en route la machine :

$$|\mathcal{B}_1| = |\mathcal{B}_2| = \dots = |\mathcal{B}_n| = (n-1)!$$

$$|\mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2| = \dots = |\mathcal{B}_i \cap \mathcal{B}_j| = (n-2)!$$

etc.

En général, si $1 \leqslant k \leqslant n$: $|\mathcal{B}_{i_1} \cap \mathcal{B}_{i_2} \cap \dots \cap \mathcal{B}_{i_k}| = (n-k)! = I_k$, ne dépend que de k : la famille $(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \dots \mathcal{B}_n)$ est encore échangeable.

Donc: $S = n! - d(n) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} C_n^k \, I_k$

$$= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{n!}{k!\,(n-k)!} (n-k)!$$

$$= -(n!) \cdot \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$$

Donc $$d(n) = n! \left[1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} \right]$$

$$d(n) = n! \sum_{k=o}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} \quad , \text{ou :} \quad d(n) = n! \left[1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{(-1)^n}{n!} \right]$$

Par exemple : $d(o) = 1$, $d(1) = o$, $d(2) = 1$, $d(3) = 2$, $d(4) = 9$.

Ces nombres $d(n)$ vérifient diverses formules de récurrence, qui peuvent servir à établir les formules ci-dessus. On pourra lire à ce propos l'article de M. EHRHART : "Permutations strictes et coïncidences" (Bulletin A.P.M. N° 273, Mars-Avril 1970) .

Si l'on revient au problème initial tel qu'il était posé, la probabilité qu'une permutation prise au hasard soit un dérangement est

$$p_n = \frac{d(n)}{n!} = 1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{(-1)^n}{n!}$$

Ce qui est très curieux, c'est que cette probabilité tend très rapidement vers $\frac{1}{e}$

On pourrait croire que, lorsque n augmente indéfiniment, le "degré de désordre" des situations possibles augmente aussi et donc que la probabilité de n'avoir pas de coïncidence augmente aussi. Il n'en est rien au dix-millième près, cette probabilité reste pratiquement stationnaire à 0,6321 dès que $n \geqslant 7$.

Nous avons ici un exemple de probabilité "paradoxale", c'est-à-dire très différente de la valeur qu'on pourrait chercher à estimer "au pif", a priori .

Mais le plus curieux, c'est encore le résultat suivant, mis en lumière encore par M. EHRHART dans son article "Une généralisation du problème des rencontres" (Bulletin A.P.M. N° 283, Avril 1972).

Si je reprenais mes 10 lettres et mes 10 enveloppes, et que je mette les lettres dans les enveloppes mais cette fois "avec remise" ? C'est-à-dire : j'ai un tas de 10 lettres, un tas de 10 enveloppes, je prends au hasard une lettre et une enveloppe, je note le résultat et puis je remets la lettre dans son tas et l'enveloppe dans le sien. La probabilité que la lettre n'aille pas avec l'enveloppe est bien sûr $1 - \frac{1}{10} = \frac{9}{10}$.

Je recommence l'expérience 10 fois : 10 expériences indépendantes. La probabilité de n'avoir aucune "rencontre" de la lettre avec son enveloppe est $\left(\frac{9}{10}\right)^{10} = \left(1 - \frac{1}{10}\right)^{10}$. En général, cette probabilité est $\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n}$. Elle tend vers la même limite que précédemment : $\frac{1}{e}$ (quoique plus lentement)

On peut donc dire que, dès que le nombre d'épreuves est "assez grand", la probabilité de n'avoir pas de rencontre est "à peu près" $\frac{1}{e}$ que les expériences se fassent avec remise ou non. Et même si ces expériences se font au choix, certaines avec remise, certaines sans : c'est ce qu'a montré M. EHRHART, qui d'ailleurs chiffre précisément ces "assez grand" et "à peu près" .

Pour finir sur ce sujet, et revenir à la question considérée, on pourra chercher combien, parmi les $n!$ permutations possibles de E, laissent fixes exactement p éléments.

On pourra étudier aussi la variable aléatoire égale au nombre de dérangements dans une permutation prise au hasard .

§ 5 FONCTION INDICATRICE D'EULER

N étant un entier naturel non nul, on note $\phi(N)$ le nombre des entiers naturels inférieurs (ou égaux) à N et premiers avec N.

Par exemple $\phi(1) = 1$, $\phi(2) = 2$, $\phi(3) = 2$, $\phi(4) = 2$, etc.

La fonction $N \longmapsto \phi(N)$ s'appelle la fonction indicatrice d'Euler.

On peut calculer $\phi(N)$ de plusieurs manières : voici la manière combinatoire. (1) .

Soit donc N un entier naturel tel que $N \geqslant 2$. Soit

$$N = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_n^{\alpha_n}$$

Sa décomposition en facteurs premiers.

Soit E l'ensemble des entiers x tels que $1 \leqslant x \leqslant N$

On a bien sûr $|E| = N$.

Soit F l'ensemble des entiers x tels que $1 \leqslant x \leqslant N$ et tels que x soit premier avec N . L'objet du problème est de calculer $|F| = \phi(N)$.

L'ensemble $E \setminus F$, complémentaire de F dans E, est formé des entiers x , compris entre 1 et N, et ayant au moins un diviseur premier commun avec N, c'est-à-dire divisibles par p_1 , p_2 , ... ou p_n .

---

(1) On trouvera une autre manière d'aborder cette question, et des propriétés de la fonction ϕ, dans l'article de J. DAUTREVAUX "A propos de la fonction indicatrice d'Euler" (Bulletin A.P.M. N° 274, juin-juillet 1970) .

Soit donc, pour tout k tel que $1 \leq k \leq n$, A_k l'ensemble des entiers x tels que $1 \leq x \leq N$ et $p_k | x$.

On a $E \setminus F = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$

Et donc $|E| - |F| = N - \phi(N) = |A_1 \cup A_2 \ldots \cup A_n| = S$

On a : $|A_1| = \frac{N}{p_1}$, $|A_2| = \frac{N}{p_2}$, ... $|A_n| = \frac{N}{p_n}$

On a $|A_1 \cap A_2| = \frac{N}{p_1 p_2}$ et en général $|A_i \cap A_j| = \frac{N}{p_i p_j}$

En général $\left|A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k}\right| = \frac{N}{p_{i_1} p_{i_2} \ldots p_{i_k}}$

Nous ne sommes pas dans le cas où ce cardinal ne dépendrait que de k : la famille $(A_1, A_2, \ldots A_n)$ <u>n'est pas échangeable.</u>

On a : $S_k = \sum_{1 \leq i_1 < \ldots \leq i_k \leq n} \frac{N}{p_{i_1} p_{i_2} \ldots p_{i_k}}$

Donc $N - \phi(N) = \Sigma \, (-1)^{k-1} \frac{N}{p_{i_1} p_{i_2} \ldots p_{i_k}} = S$

Donc $\phi(N) = N + \Sigma \, (-1)^k \frac{N}{p_1 \, p_2 \ldots p_k}$

$$= N \left[1 - \Sigma \frac{1}{p_i} + \Sigma \frac{1}{p_i p_j} + \ldots + (-1)^k \, \Sigma \frac{1}{p_{i_1} p_{i_2} \cdots p_{i_k}} + \ldots + (-1)^n \frac{1}{p_1 p_2 \cdots p_n} \right]$$

$$= N \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \ldots \left(1 - \frac{1}{p_k}\right) \ldots \left(1 - \frac{1}{p_n}\right)$$

C'est-à-dire la formule bien connue.

On en déduit immédiatement que, si a et b sont premiers entre eux, on a : $\phi(ab) = \phi(a)\,\phi(b)$. La fonction ϕ a beaucoup d'applications en Arithmétique.

A titre d'exercice, on pourrait déterminer le nombre $\psi(N)$ de couples d'entiers (x,y) tels que $1 \leq x \leq N$, $1 \leq y \leq N$, et x premier avec y.

§ 6 UN PROBLEME DE DENOMBREMENT

p étant un entier naturel, on tire simultanément p cartes d'un jeu normal de 32. On s'intéresse aux mains de p cartes "multicolores", c'est-à-dire contenant au moins une carte de chacune des 4 couleurs (Coeur, Carreau, Trèfle, Pique).

On veut calculer le nombre T_p de ces mains.
On trouve directement $T_4 = 8^4$ et bien sûr : $T_0 = T_1 = T_2 = T_3 = 0$

T_5 est déjà plus délicat à calculer. On peut raisonner ainsi : on peut choisir les 4 cartes "multicolores" de 8^4 manières différentes, et il reste alors 28 choix possibles pour la cinquième. Cela ferait donc $8^4 \times 28$. Mais ce faisant, on a compté 2 fois chaque main. Donc $T_5 = \dfrac{8^4 \times 28}{2}$

Ce raisonnement s'avère inapplicable à T_6. Comment donc, en général, calculer T_p ?

Plus généralement encore, considérons une urne contenant km boules, de k couleurs différentes (m de chaque couleur). On en tire p, simultanément, sans remise.

On veut calculer le nombre $T(k,m,p)$ de tirages "k-colores", c'est-à-dire comprenant au moins une boule de chacune des k couleurs.

Soit $\mathcal{C}$ l'ensemble de tous les tirages : $|\mathcal{C}| = C_{km}^p$

Soit $\mathcal{M}$ l'ensemble des tirages "k-colores" : $|\mathcal{M}| = T(k,m,p)$

Soit $\mathcal{C}_j$ l'ensemble des tirages ne contenant aucune boule de la couleur numéro j $(1 \leq j \leq k)$

On a :

$$\mathcal{C} \setminus \mathcal{M} = \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2 \ldots \cup \mathcal{C}_k$$

$$C_{km}^p - T(k,m,p) = |\mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2 \cup \ldots \cup \mathcal{C}_k| = S$$

On a $|\mathcal{C}_1| = |\mathcal{C}_2| = \ldots = |\mathcal{C}_k| = C^p_{km-m} = C^p_{(k-1)m}$

$$|\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2| = \ldots = |\mathcal{C}_{k-1} \cap \mathcal{C}_k| = C^p_{km-2m} = C^p_{(k-2)m}$$

etc.

En général pour tout j tq. $1 \leqslant j \leqslant k$:

$$\left|\mathcal{C}_{i_1} \cap \mathcal{C}_{i_2} \cap \ldots \cap \mathcal{C}_{i_j}\right| = C^p_{(k-j)m} = I_j \qquad \text{(famille échangeable)}$$

Donc $$S = \sum_{j=1}^{k} (-1)^{j-1} C^j_k \, I_j = \sum_{j=1}^{k} (-1)^{j-1} C^j_k \, C^p_{(k-j)m}$$

Donc $$T(k,m,p) = C^p_{km} + \sum_{j=1}^{k} (-1)^j C^j_k \, C^p_{(k-j)m}$$

$$T(k,m,p) = \sum_{j=o}^{k} (-1)^j C^j_k \, C^p_{(k-j)m}$$

Soit, en posant $k-j = i$:

$$\boxed{T(k,m,p) = \sum_{i=o}^{k} (-1)^{k+i} C^i_k \quad C^p_{im}}$$

On peut en tirer des conséquences :

Si $p < k$, on a bien sûr $T(k,m,p) = o$. Donc

$$\boxed{p < k \Rightarrow \sum_{i=o}^{k} (-1)^i C^i_k \, C^p_{im} = 0}$$

et ce, quel que soit l'entier naturel m .

De plus, si $p = k$, on a $T(k,m,p) = m^k$

Donc $$\boxed{\sum_{i=o}^{k} (-1)^i \, C_k^i \, C_{im}^k = (-1)^k \, m^k}$$

Si quelqu'un a déjà vu exposer ce problème et les identités qui en découlent, je lui serais reconnaissant de bien vouloir m'en donner la référence.

NOTES BIBLIOGRAPHIQUES

- En général, comme on a pu le voir au cours du texte, les articles mathématiques du Bulletin de l'A.P.M.E.P. (29, rue d'Ulm Paris 5ème), contiennent des renseignements indispensables sur toutes sortes de questions mathématiques.

- J'ajouterai quelques ouvrages se rapportant aux questions abordées ici, ou cités plus haut :

1. Maurice FRECHET Les Mathématiques et le concret (PUF, 1955)

2. PASCAL oeuvres complètes (Bibliothèque de la Pléiade, Gallimard 1954) .

3. L. GUERBER et PL. HENNEQUIN Initiation aux Probabilités (Bibliothèque d'Enseignement Mathématique, A.P.M.E.P. , 1968)

4. L. COMTET Analyse Combinatoire - tomes 1 et 2 (PUF, 1970)

5. C. BERGE Principes de Combinatoire (Dunod 1968) .

UNIVERSITÉ PARIS-NORD

I.R.E.M.

Avenue Jean-Baptiste Clément

93430 VILLETANEUSE

☎ 01 49 40 36 40