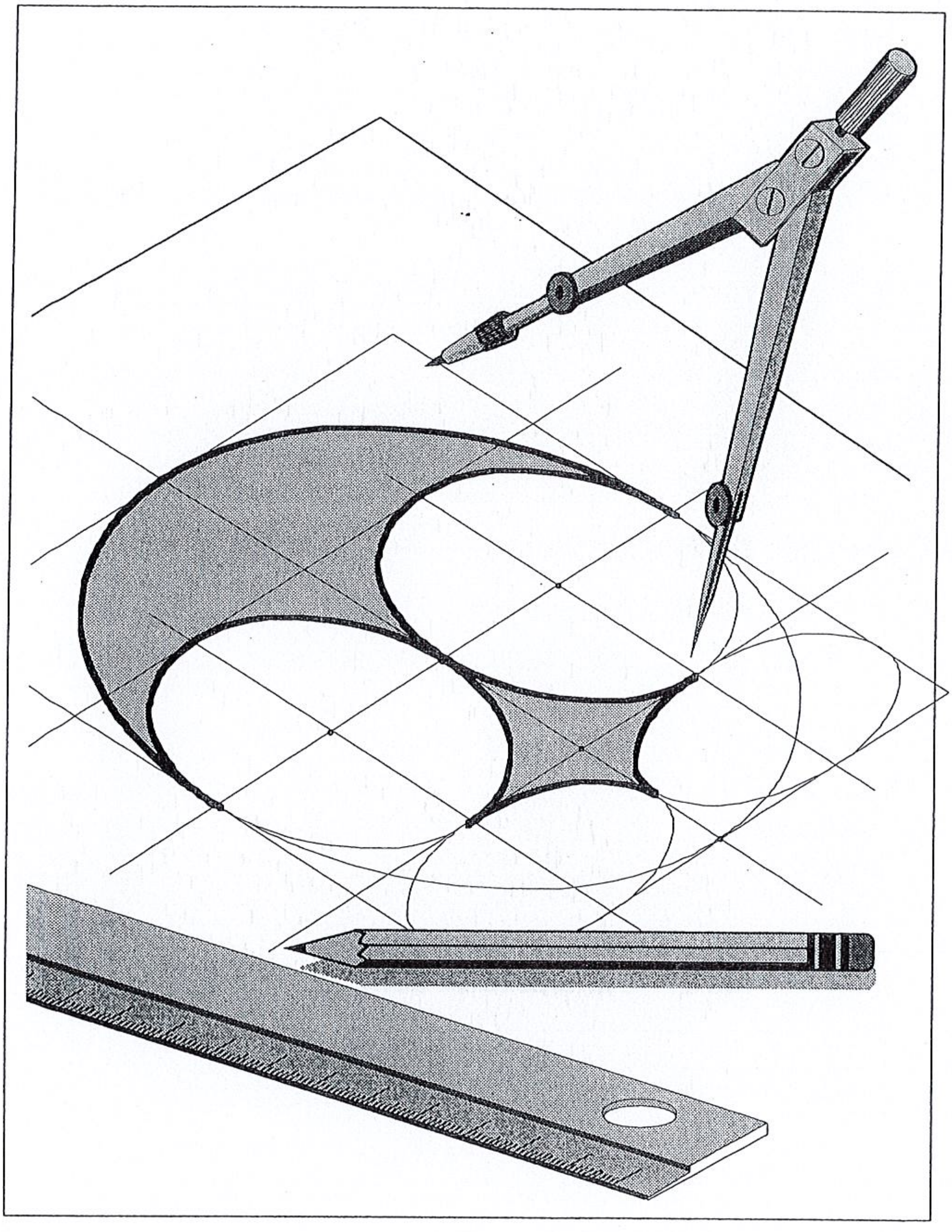
Carnets de stages

# Activités mathématiques au Collège



Fascicule 4

**IREM Paris-Nord**

**UNIVERSITE PARIS-NORD**
**IREM**

*Carnets de stages*

**Activités mathématiques au Collège**

Fascicule 4
54 pages, A4

ISBN 2 86240 108 0

Dépot légal: 2ème Trimestre 1999

200 exemplaires
**25,00 Francs**

# Avant-propos

Cette brochure témoigne des stages proposés dans les plans académiques de formation de la MAFPEN de Créteil et animés par l'IREM Paris-Nord depuis 1995.

Les participants aux stages "Activités géométriques au Collège", "Aide aux élèves en difficulté",..., sont invités à élaborer des séquences d'enseignement portant sur des thèmes choisis par eux, en s'appuyant sur leur pratique enseignante et sur l'analyse critique des diverses publications existantes et disponibles à l'IREM.

Pour ce faire, différents outils sont mis en œuvre : dessins géométriques, situations-problèmes, logiciels informatiques ...

L'une des finalités du stage est de produire des documents directement utilisables en classe.

Faisant suite aux trois premiers fascicules parus en 95, 96 et 97, cette quatrième publication regroupe quelques unes des activités mises au point lors de l'étude des thèmes :

- Autour du cercle
- Géométrie dans l'espace : le cube
- La géométrie, le collège et Cabri

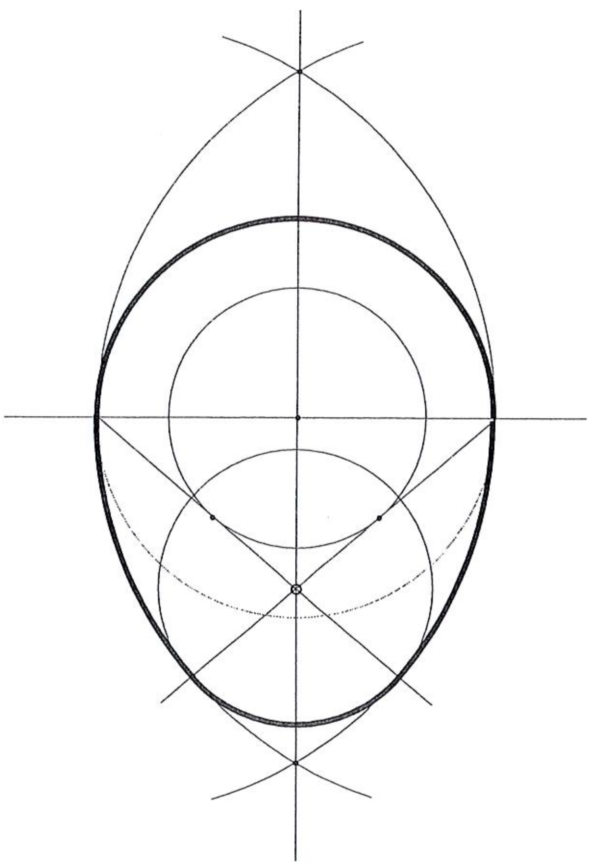
Elle constitue le quatrième volet du dossier "**Carnets de stages**" ouvert pour recevoir d'autres thèmes.

Afin de donner une certaine cohésion à l'ensemble, nous avons cru bon d'adopter une démarche type de présentation pour chacun des thèmes, à savoir :

- la place du thème dans les programmes et commentaires officiels,
- les éléments bibliographiques qui ont semblé les plus pertinents parmi toute la documentation relevée,
- les points retenus après analyse des articles et du vécu des participants,
- des activités éclairant ces points, en précisant l'objectif visé pour chacune d'elles.

Précisons enfin que cette modeste brochure ne saurait constituer un quelconque *rapport de stage*. Elle prétend simplement restituer le plaisir partagé d'une réflexion avec d'autres collègues l'espace d'un stage, en souhaitant qu'elle en inspire d'autres.

# AUTOUR DU CERCLE



# AUTOUR DU CERCLE

## 1 . Dans les programmes :

### • Sixième (1996)

| | |
|---|---|
| Sur papier blanc et sans que la méthode soit imposée :<br>- reporter une longueur;<br>- reproduire un angle, un arc de cercle de centre donné,<br>...<br>Tracer et reproduire sur papier blanc les figures suivantes : triangle, triangle isocèle, triangle équilatéral, triangle rectangle, losange, rectangle, carré, cercle.<br><br>Calculer la longueur d'un cercle. | Les travaux de reproduction et de construction pourront consister en :<br><br>- la copie conforme d'un modèle concret ou d'un dessin,<br>- un dessin à partir de données graphiques et numériques,<br>- un dessin à partir d'un énoncé décrivant la figure. |

### • Cinquième (1997)

| | |
|---|---|
| Construire le cercle circonscrit à un triangle.<br><br>Calculer l'aire d'un disque de rayon donné. | |

### • Quatrième (1998)

| | |
|---|---|
| Tangentes à un cercle<br>Bissectrices. Cercle inscrit dans un triangle. | |

## 2 . Bibliographie :


- ALLONSIUS D.J. - Créer avec un compas - DESSAIN et TOLRA (1986)
- J. et L. DENIERE - La géométrie pour le plaisir, Tomes 1 & 2 - Editions KIM-DUNKERQUE
- PAPADOPOULOS J. - J'apprends la géométrie en dessinant - CM2/Cycle des approfondissements - CDDP des Pyrénées Orientales (1994)
- T. ROTHMAN - H. FUKAGAWA - Géométrie et religion au japon - in POUR LA SCIENCE (juillet 1998)
- DELAHAYE J.P. - Le fascinant nombre $\pi$ - Bibliothèque Pour la science - Diffusion BELIN (Oct. 1997)

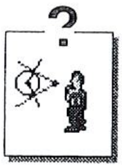
## Points retenus

### 1. Raccordements d'arcs

Chaque fiche propose : un modèle, des consignes codées et quelques repères pour démarrer le tracé devant aboutir à un dessin plaisant.

### 2. Tangentes à un cercle

• Trois constructions sont proposées pour mener, d'un point extérieur à un cercle donné, les tangentes à ce cercle.



Cette étiquette qui figure sur chacune des trois fiches, suggère qu'il serait bon de donner une justification de la construction …

• Suivent trois problèmes de constructions mettant l'accent sur les propriétés de la bissectrice d'un secteur angulaire.

### 3. Cercles tangents

Des dessins de vitraux servant de supports à des problèmes de constructions de cercles tangents entre-eux et inscrits dans une figure élémentaire : carré, triangle équilatéral, cercle.

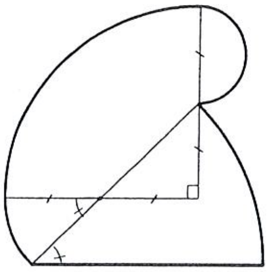
### 4. Calculer pour construire

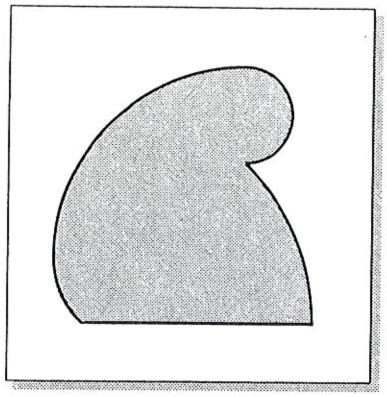
Les constructions proposées ici dépassent les compétences d'un élève de Collège (usage de l'homothétie en particulier), mais le recours au numérique fournit des mesures permettant d'accéder aux points à construire. Encore des occasions de dire : "Merci Monsieur PYTHAGORE ! "

THÉOREME JAPONAIS

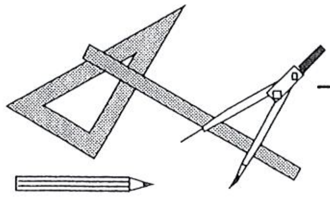
Un polygone convexe inscrit dans un cercle est partagé en triangles adjacents deux à deux. La somme des rayons de tous les cercles inscrits est indépendante de la triangulation choisie.

# Le bonnet phrygien

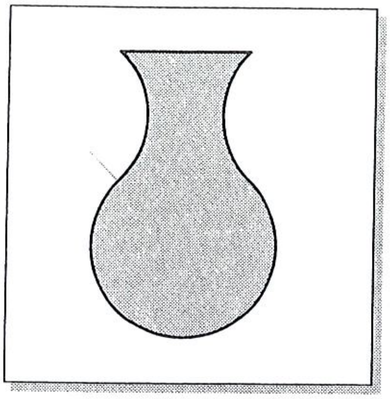


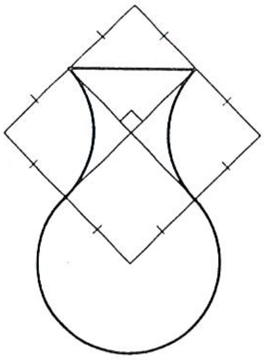


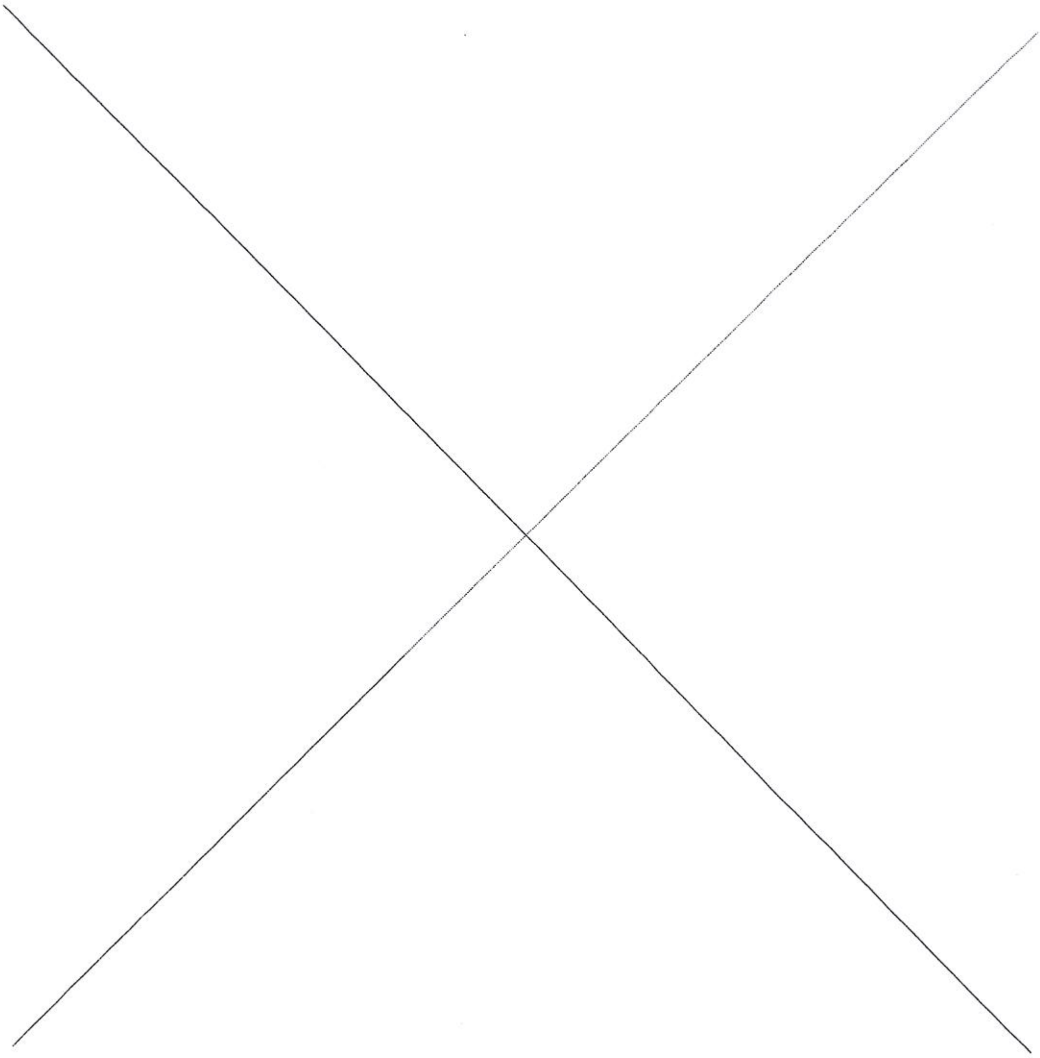
Reproduis le bonnet en t'aidant de la figure codée

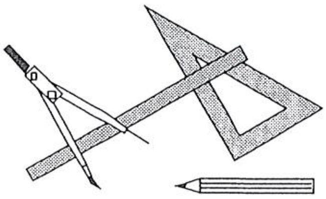


# Le vase



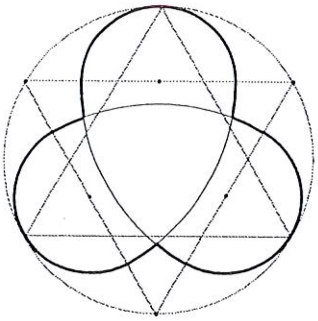


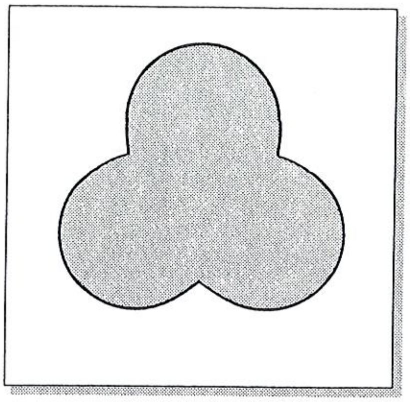


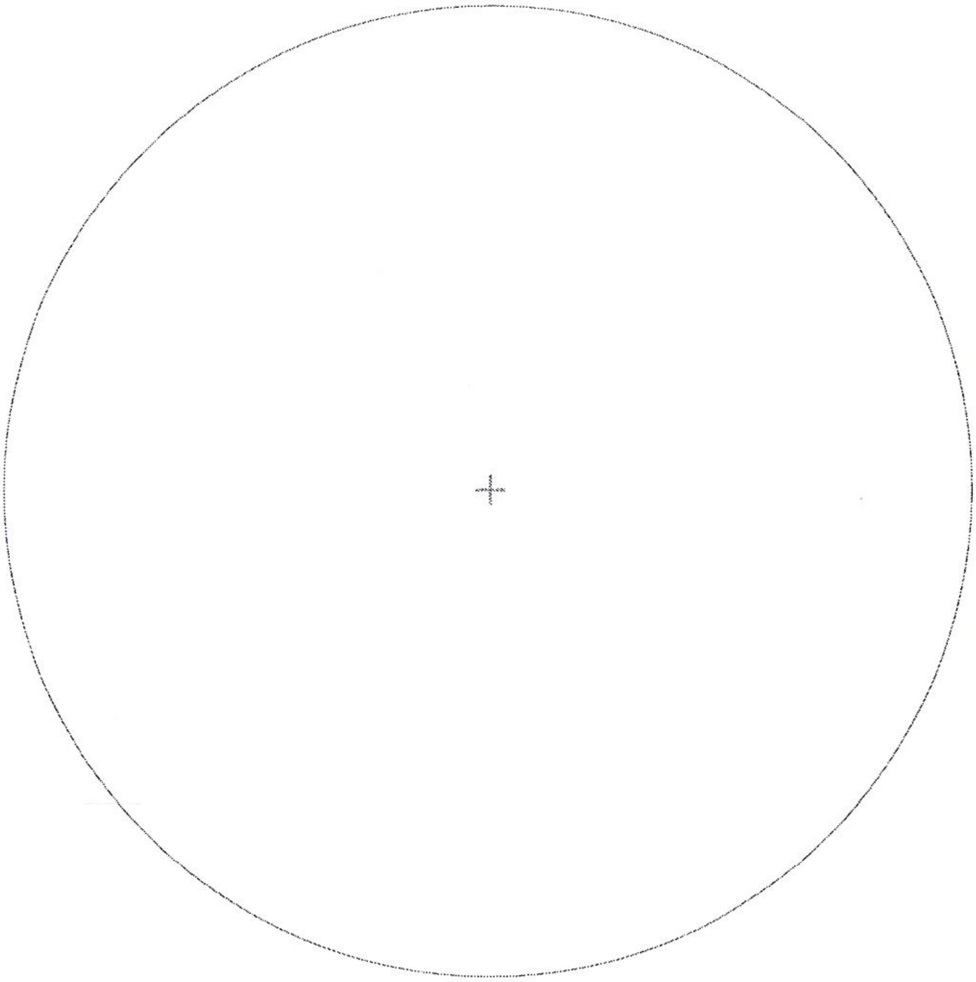


Reproduis le vase en t'aidant de la figure codée

# Le trèfle

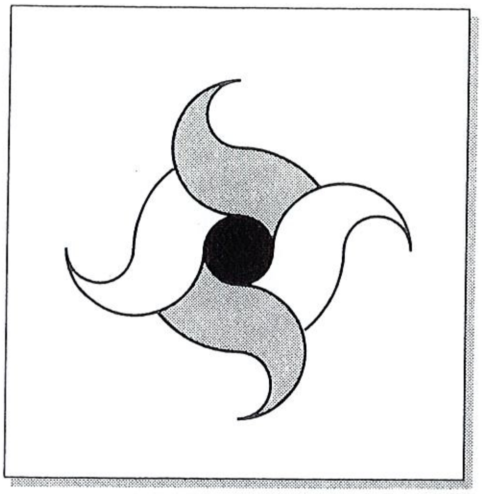


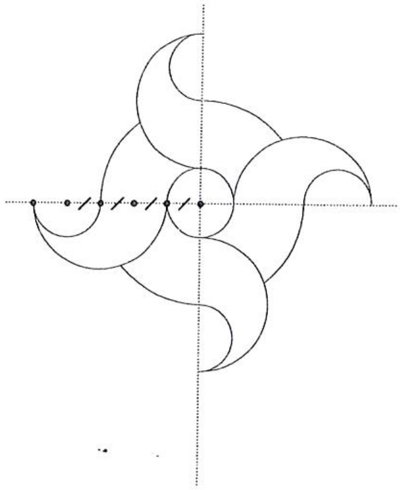


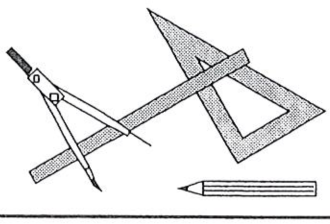


Reproduis le bonnet en t'aidant de la figure codée

# Le moulin

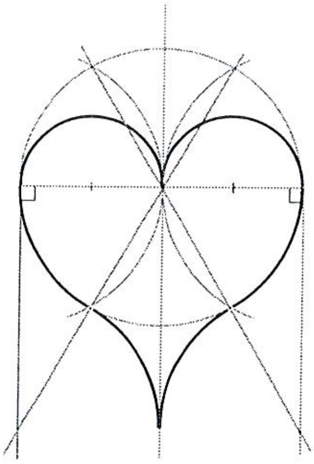


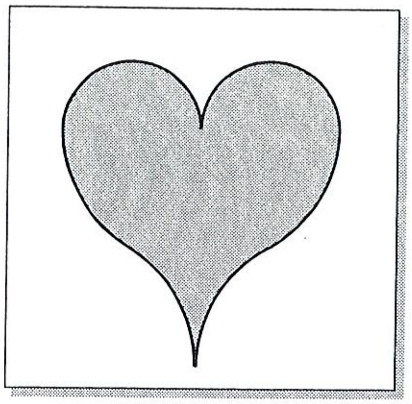




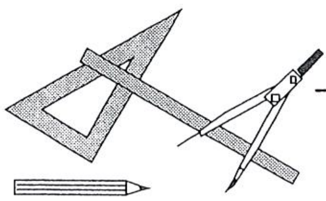
Reproduis le moulin en t'aidant de la figure codée

# Le cœur

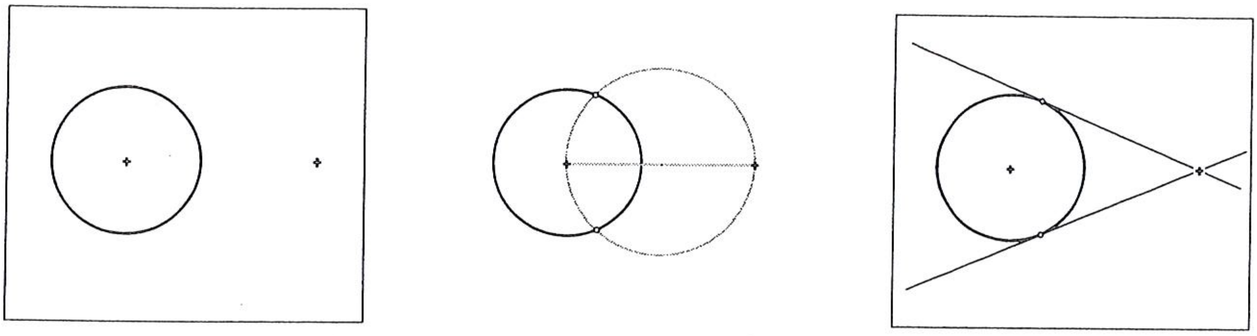


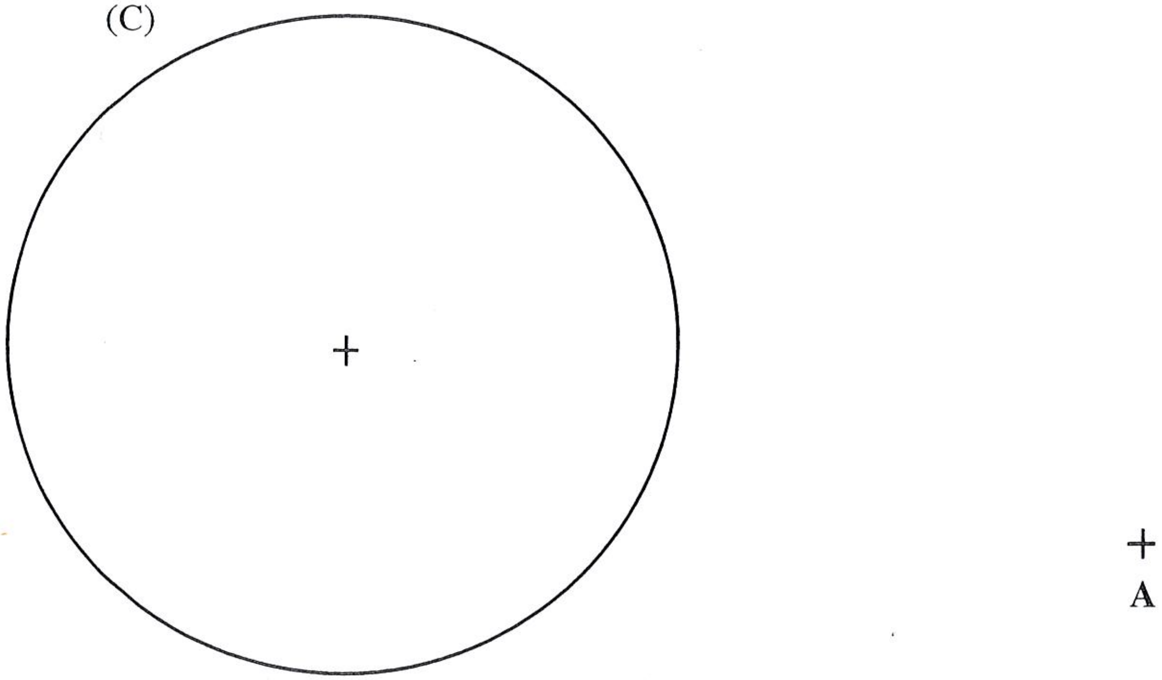


Reproduis le cœur en t'aidant de la figure codée



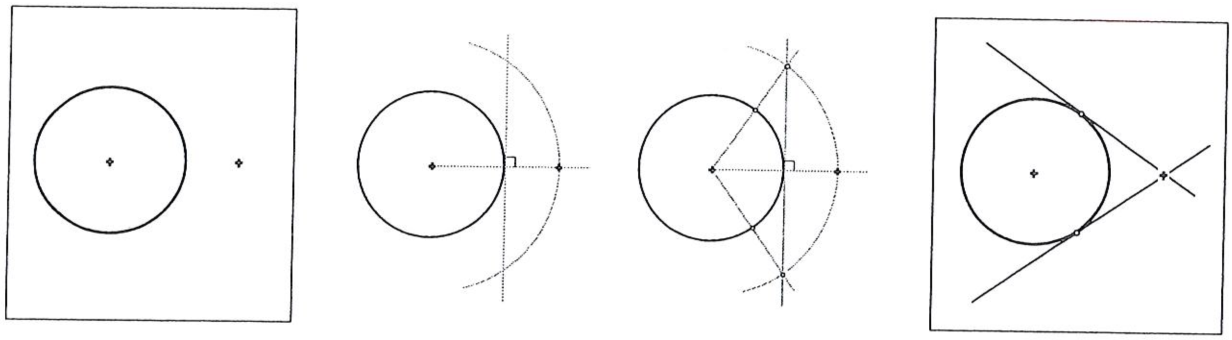
# Tangentes à un cercle - *Construction 1*

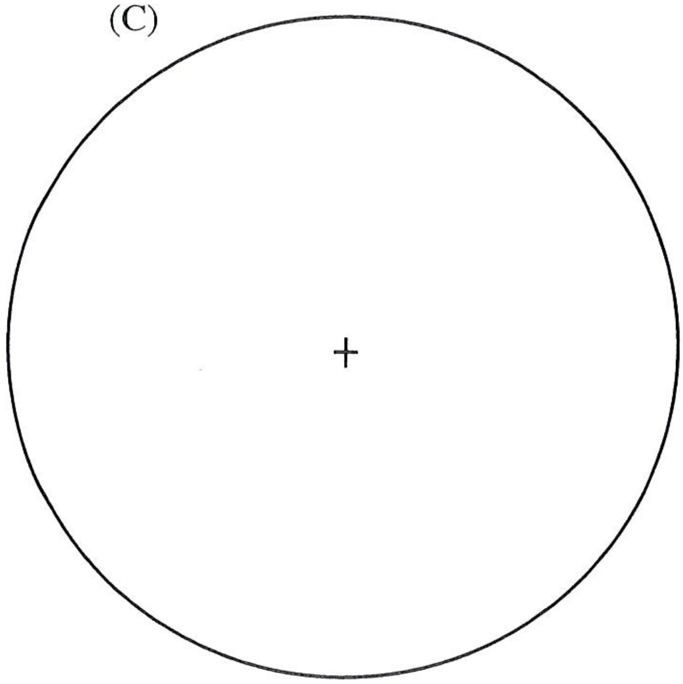





Construis les tangentes au cercle (C) passant par le point **A** selon la méthode indiquée.

# Tangentes à un cercle - Construction 2

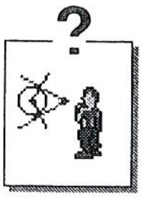




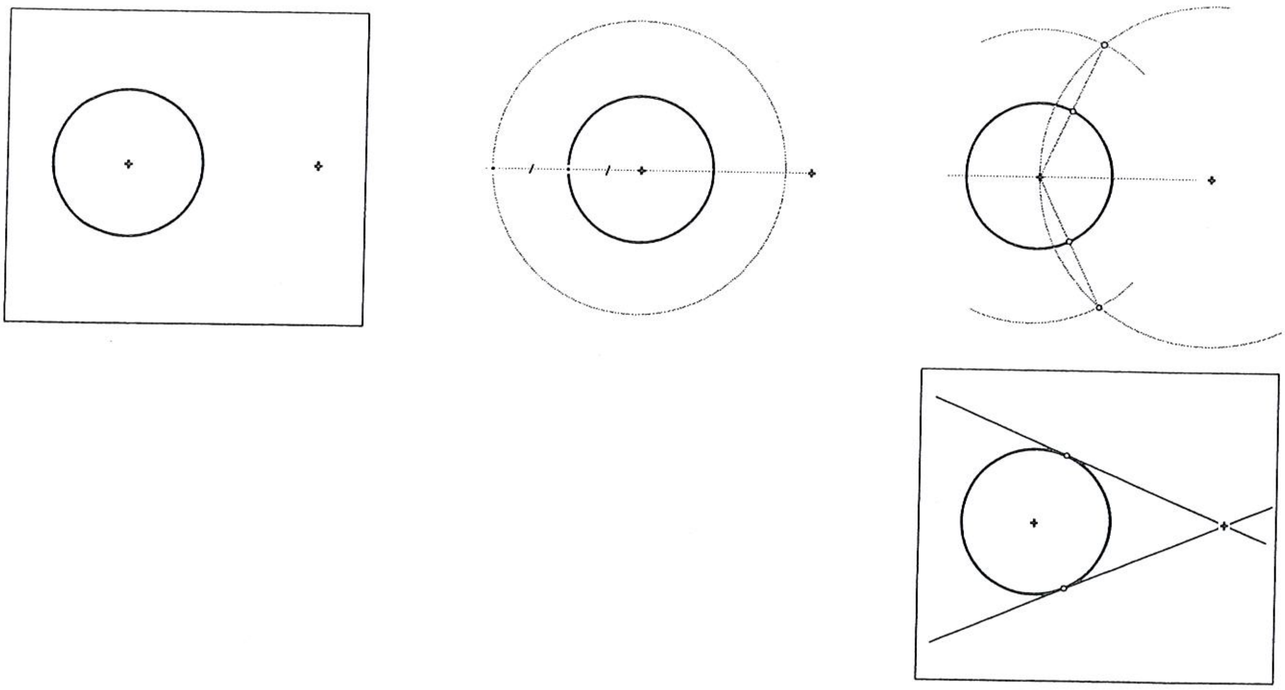
(C)

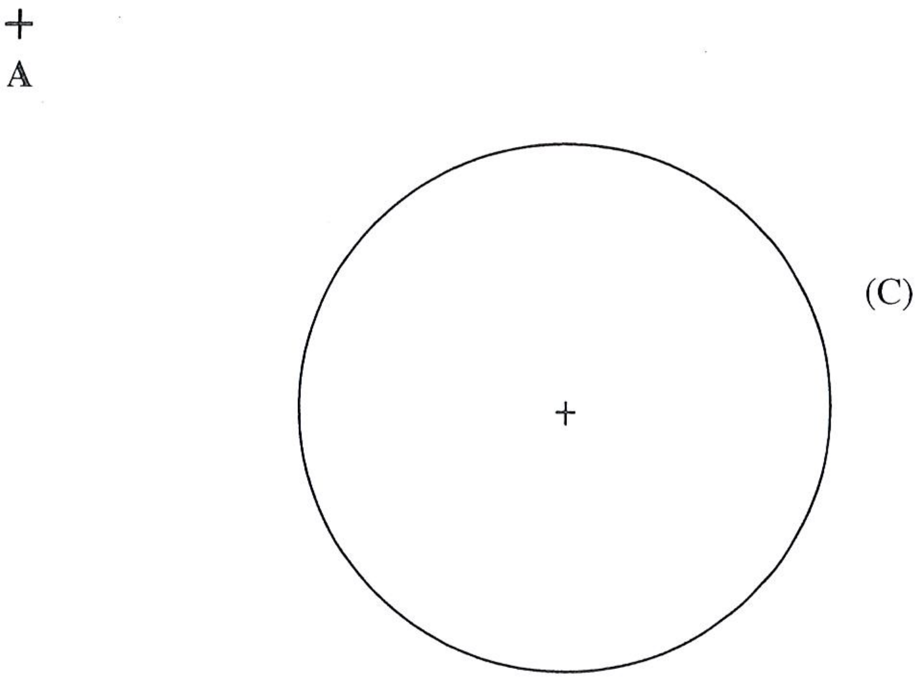
A

Construis les tangentes au cercle (C) passant par le point **A** selon la méthode indiquée.



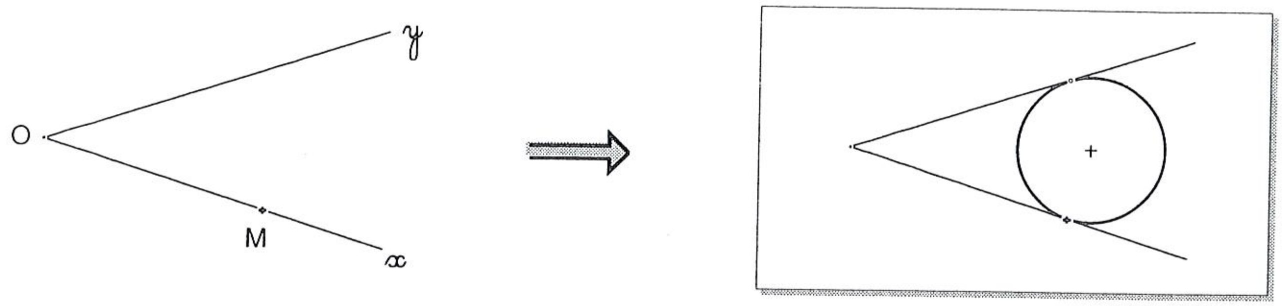
# Tangentes à un cercle - *Construction* 3

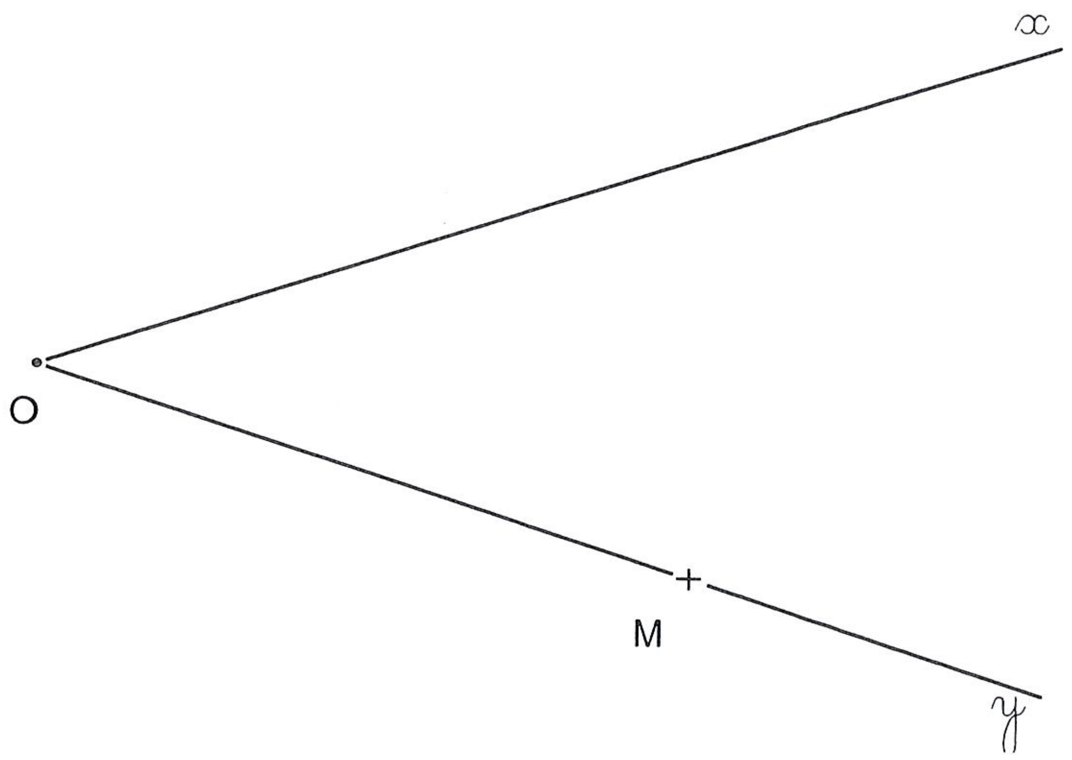





Construis les tangentes au cercle (C) passant par le point **A** selon la méthode indiquée.

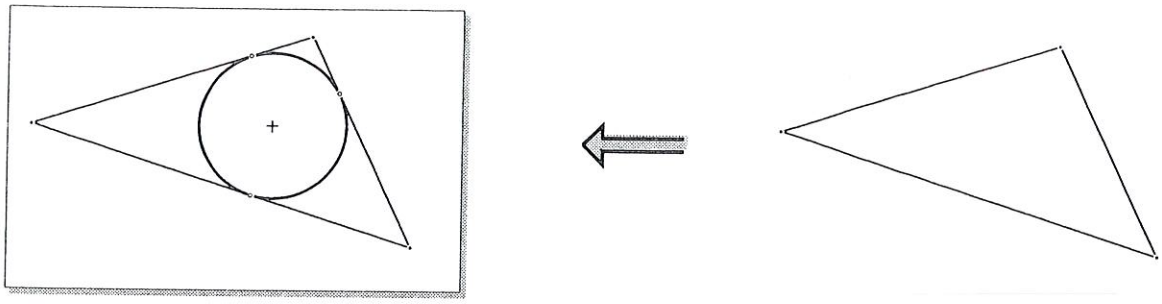
# Cercle tangent... /1

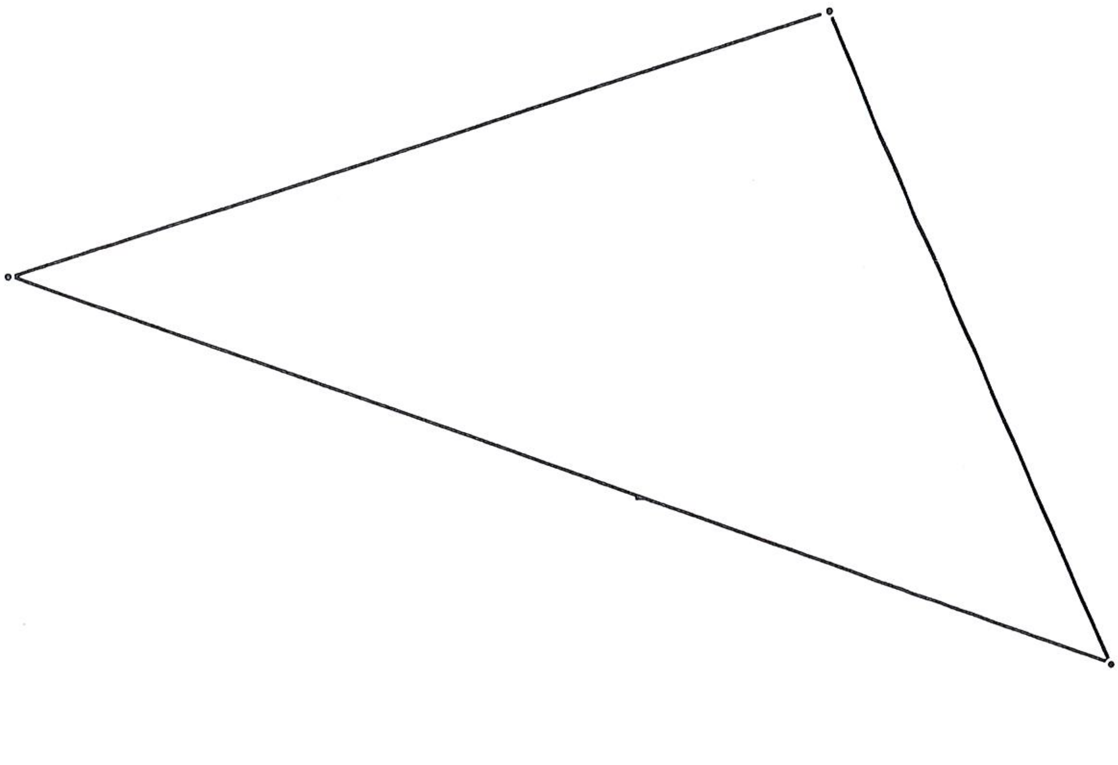



Construis le cercle tangent à la demi-droite [Ox) en M
et tangent à la demi-droite [Oy)

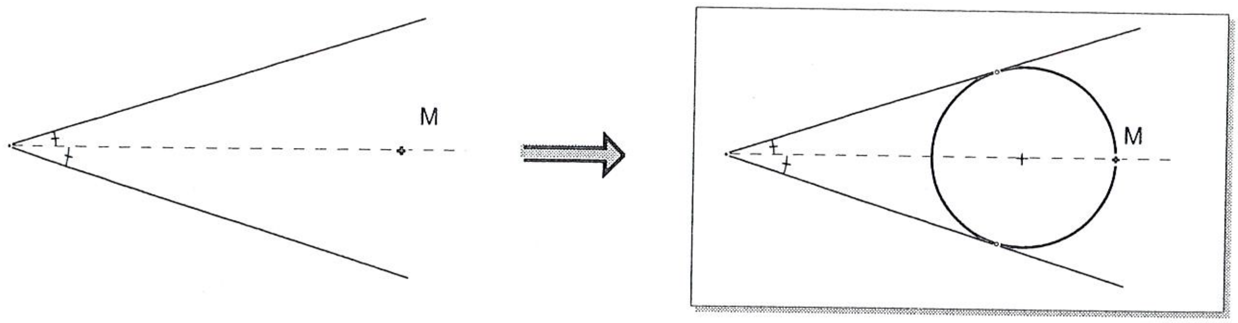
# Cercle tangent... / 2

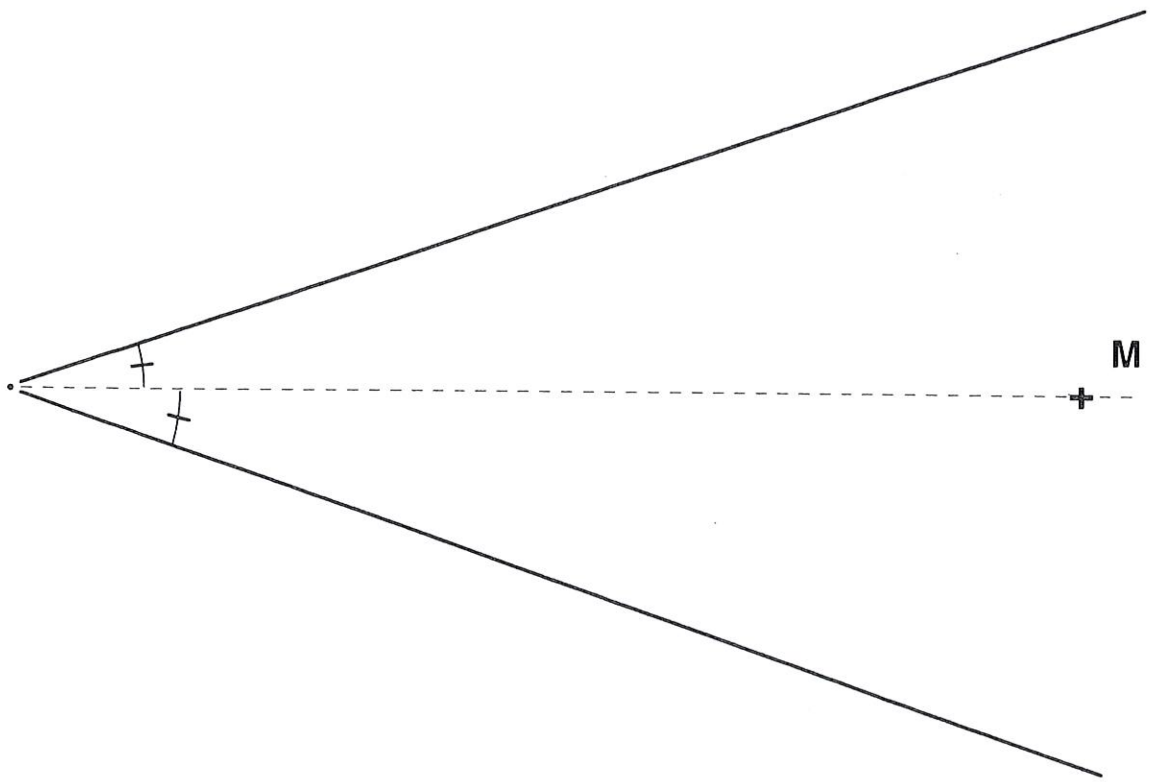




Construis le cercle inscrit dans le triangle donné

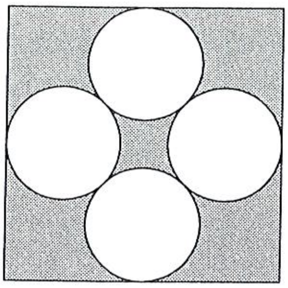
## Cercle tangent… / 3

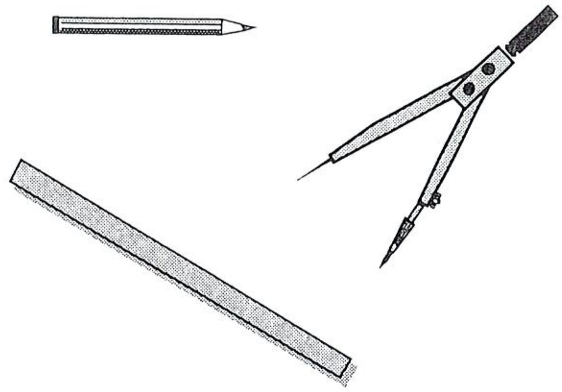


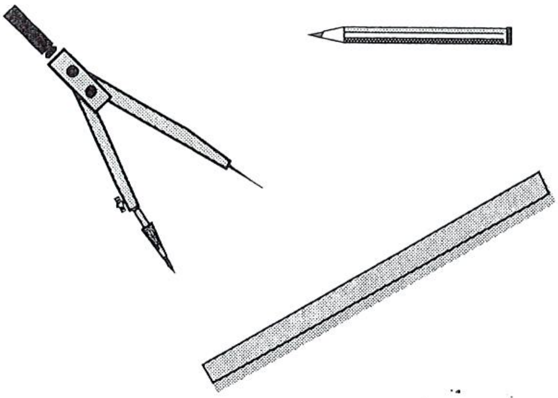

Construis le cercle tangent aux deux demi-droites
et passant par le point M de la bissectrice.

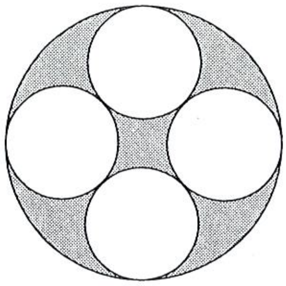
# Vitrail 1

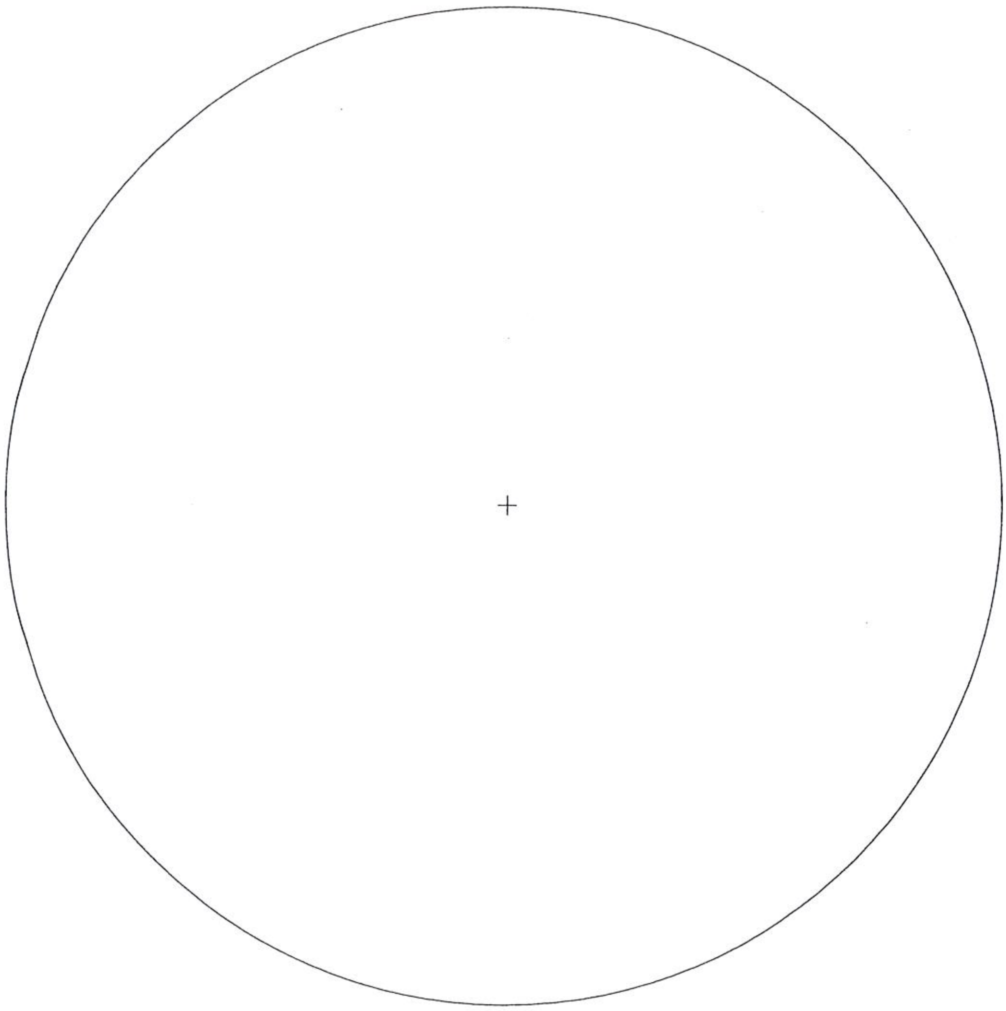




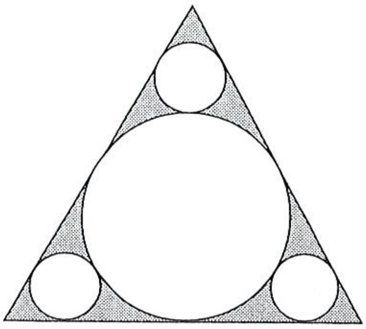
# Vitrail 2

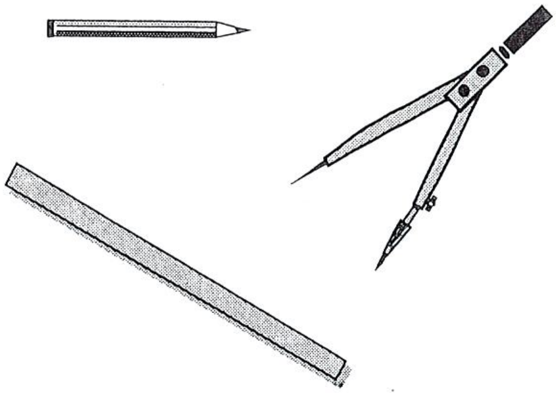


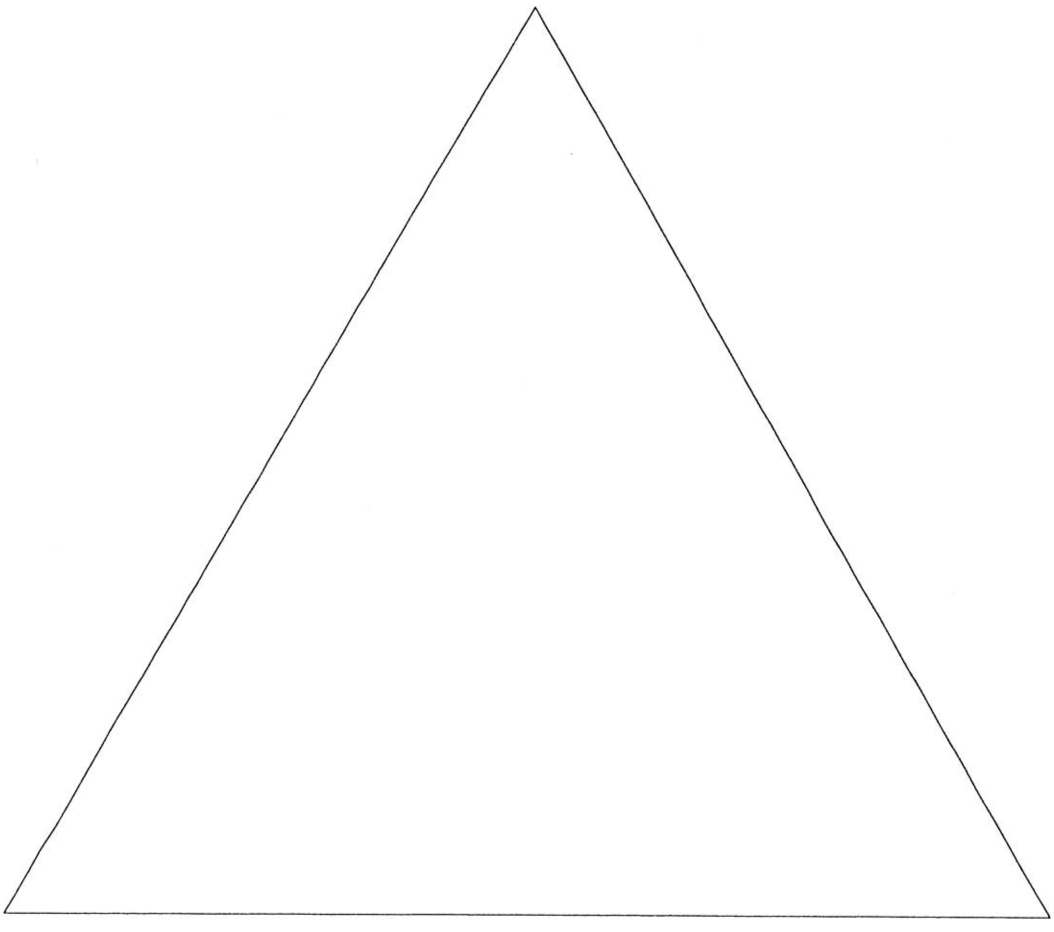




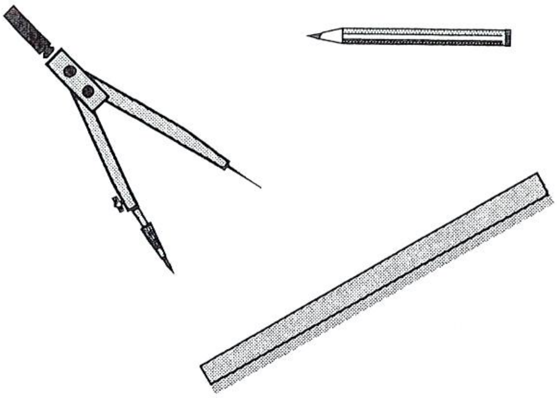
# Vitrail 3

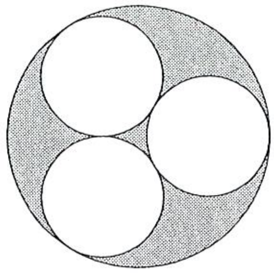


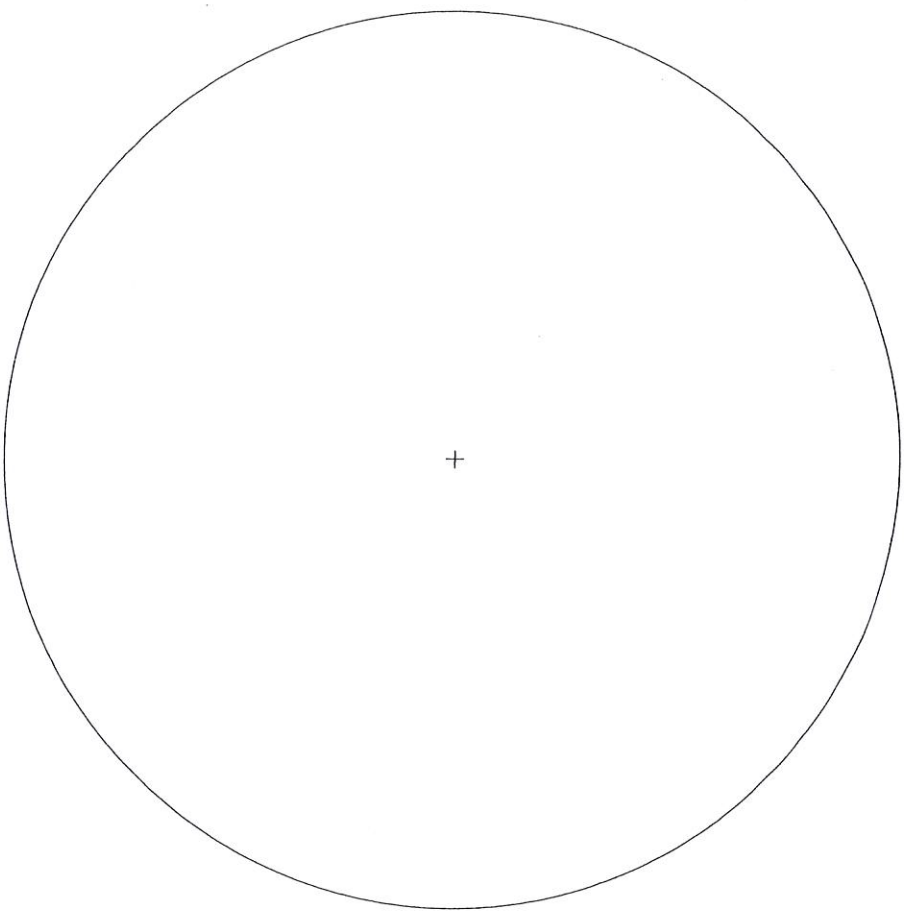




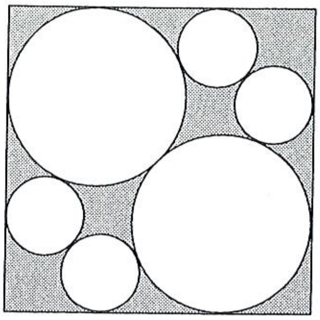
# Vitrail 4

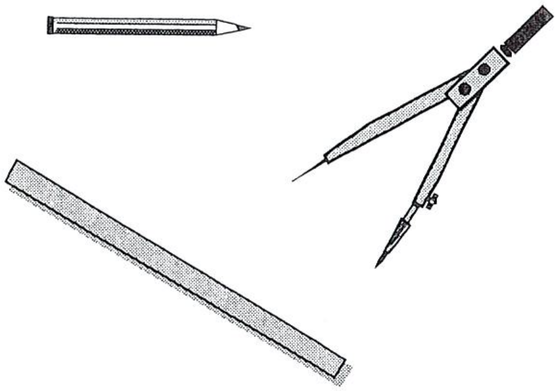




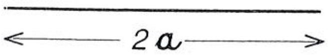


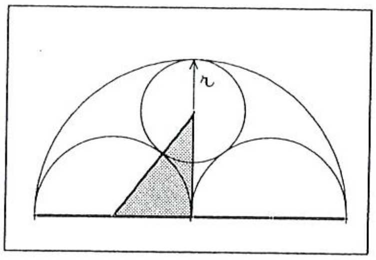
# Vitrail 5



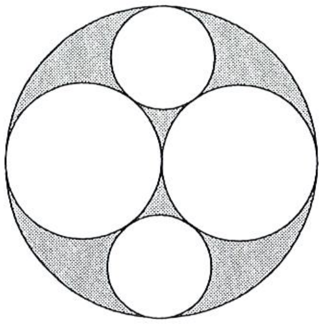


## Sur un segment de longueur 2a ... ( 1 )



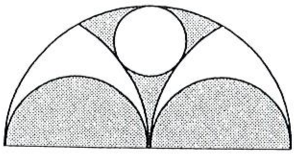



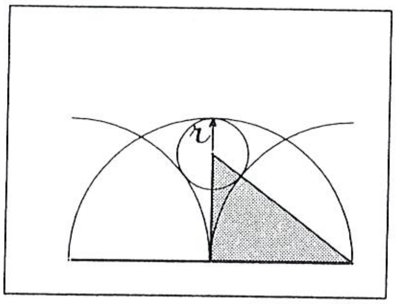

*Exprimer r en fonction de a*

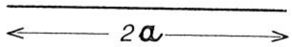


Pour reproduire le vitrail à partir du segment donné, un calcul préliminaire est nécessaire.

## Sur un segment de longueur 2a ...  ( 2 )



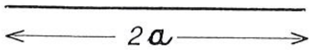


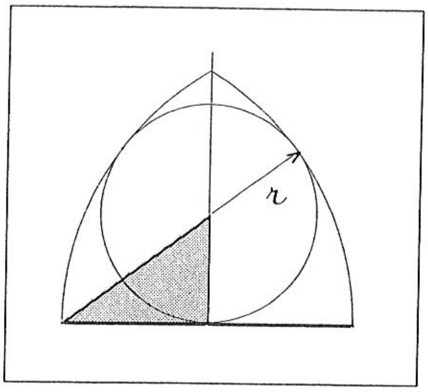




*Exprimer r en fonction de a*

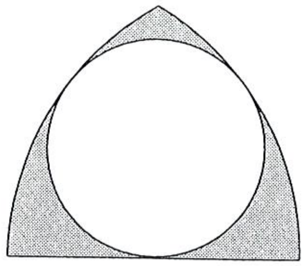
Pour reproduire le vitrail à partir du segment donné, un calcul préliminaire est nécessaire.

## Sur un segment de longueur 2a ... ( 3 )



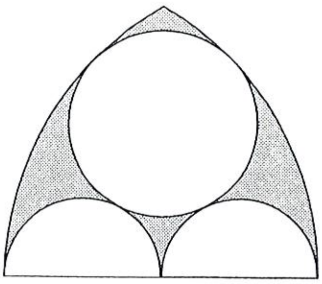



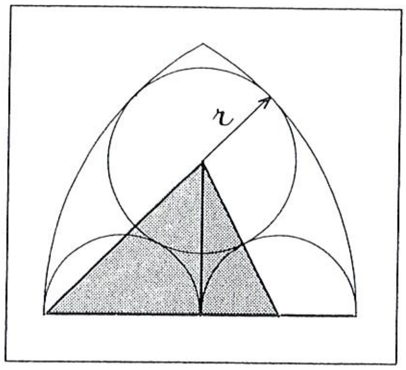

Exprimer $r$ en fonction de $a$

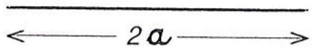


Pour reproduire le vitrail à partir du segment donné, un calcul préliminaire est nécessaire.

## Sur un segment de longueur 2a ... ( 4 )





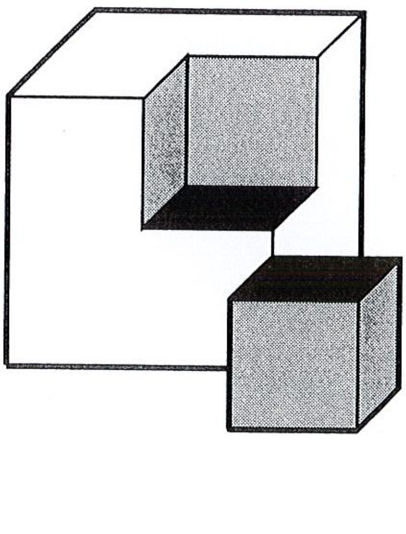




*Exprimer* $r$ *en fonction de* $a$

Pour reproduire le vitrail à partir du segment donné, un calcul préliminaire est nécessaire.

# GEOMETRIE DANS L'ESPACE

## LE CUBE



**(2)**

# GEOMETRIE DANS L'ESPACE : LE CUBE (II)

Cette nouvelle série d'activités prolonge et complète celle proposée dans le fascicule 2 des ***carnets de stages***.

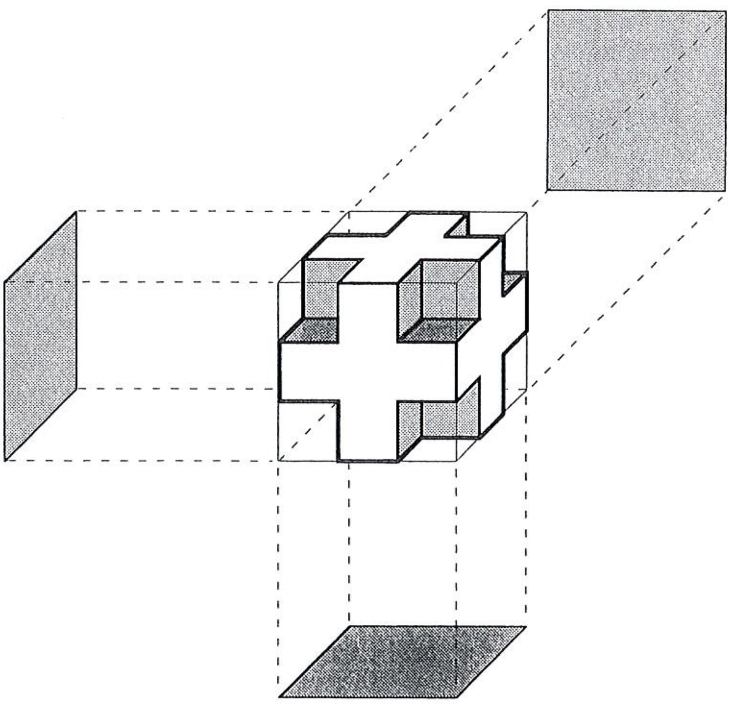
Les activités des six premières fiches renforcent le lien entre : Patrons du cube et Représentations en perspective. Elles proposent de dessiner des motifs qui apparaissent sur les faces d'un cube, tantôt sur des patrons, tantôt sur des représentations en perspective.

Les six activités suivantes font le lien entre représentation en perspective et projection sur un plan, d'un objet constitué d'un assemblage de cubes.

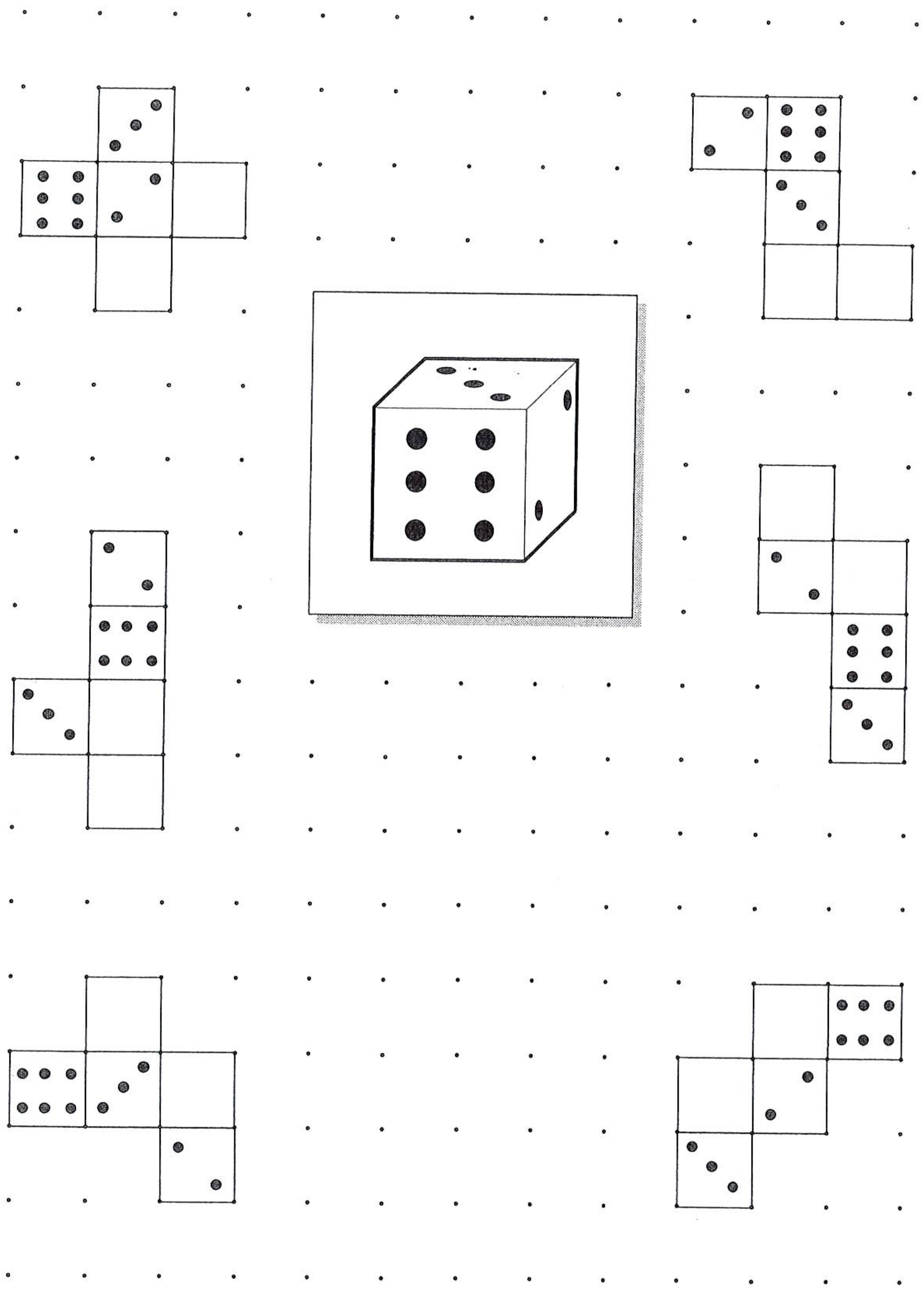
- Les deux premières ne présentent pas de difficultés majeures; Il s'agit d'établir une correspondance univoque entre le Plan : *l'empreinte* et l'Espace : *le solide.*

- Les suivantes veulent attirer l'attention de l'élève sur les "pièges" des représentations en perspective : des éléments peuvent être cachés. Une projection plane permet parfois de lever les ambigüités.

- Les deux dernières activités sont affaire de "point de vue" : position de l'œil par rapport au solide.

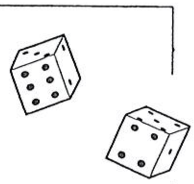


# On a perdu la face

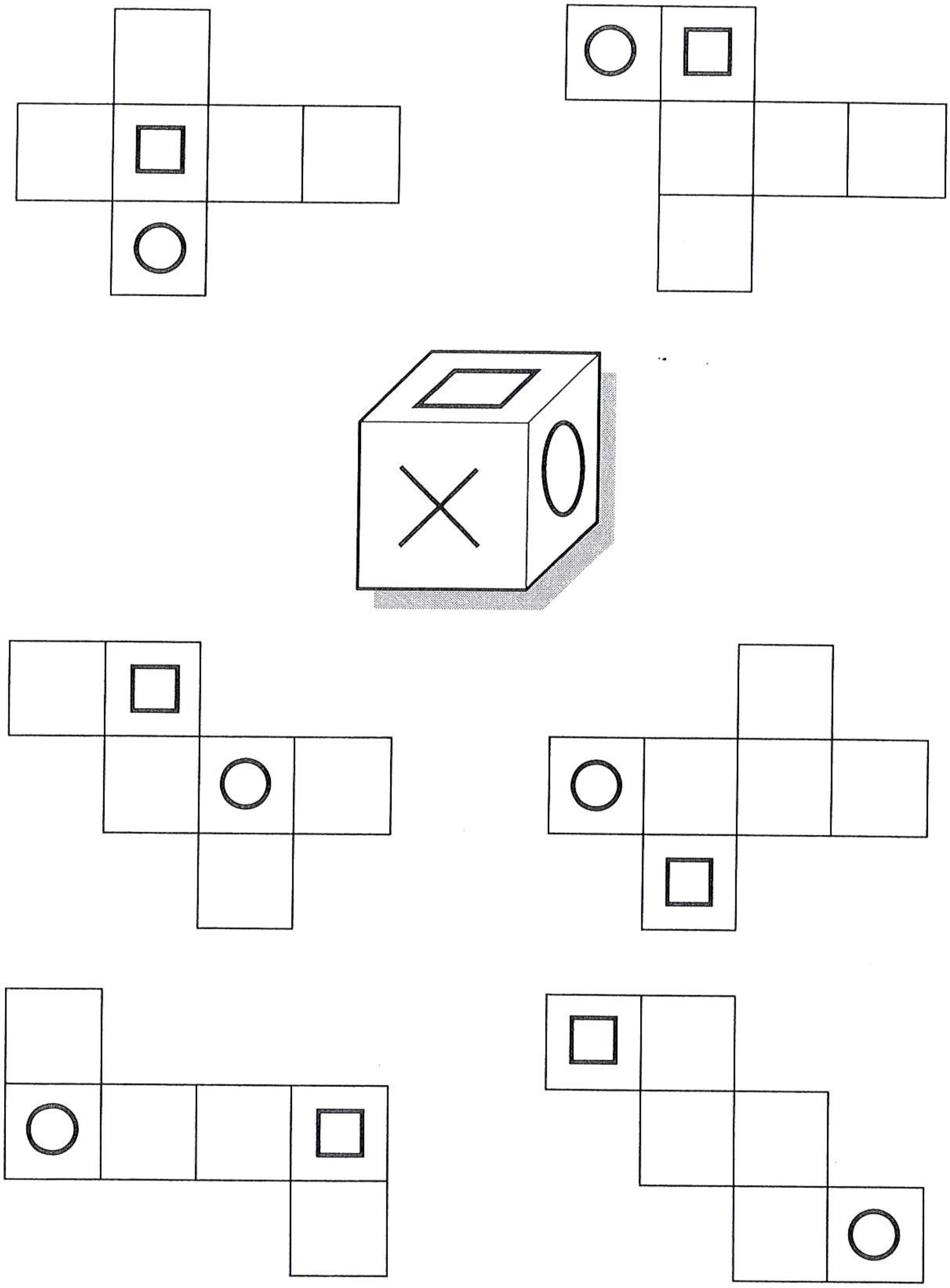


Complète chacun des patrons pour qu'il permette de réaliser
le dé représenté en médaillon.

*(On rappelle que sur un dé, la somme des points de deux faces opposées est constante)*

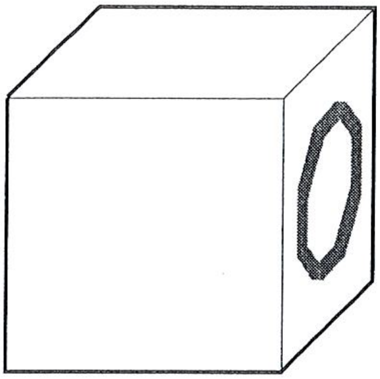


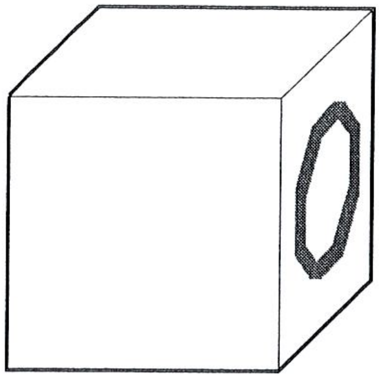
# Face à face

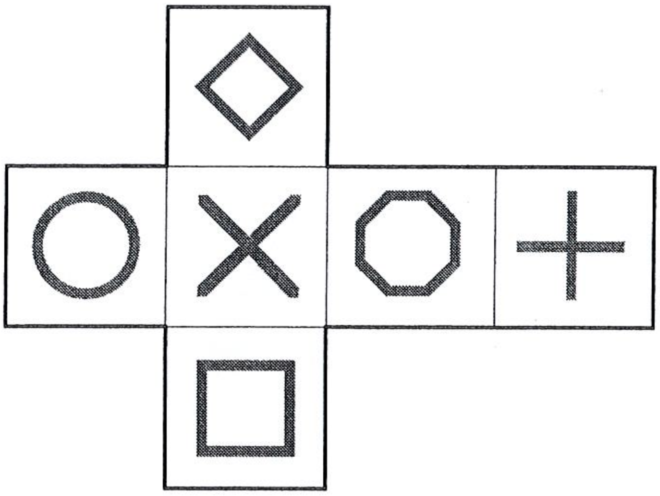


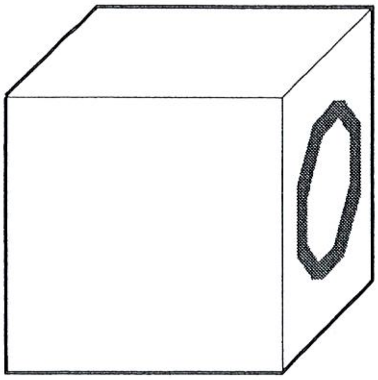
Dessine les mêmes signes sur les faces parallèles.

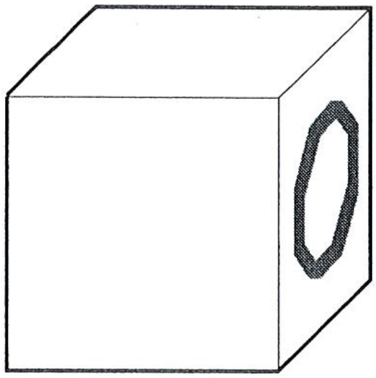
# Quels motifs ? / 1







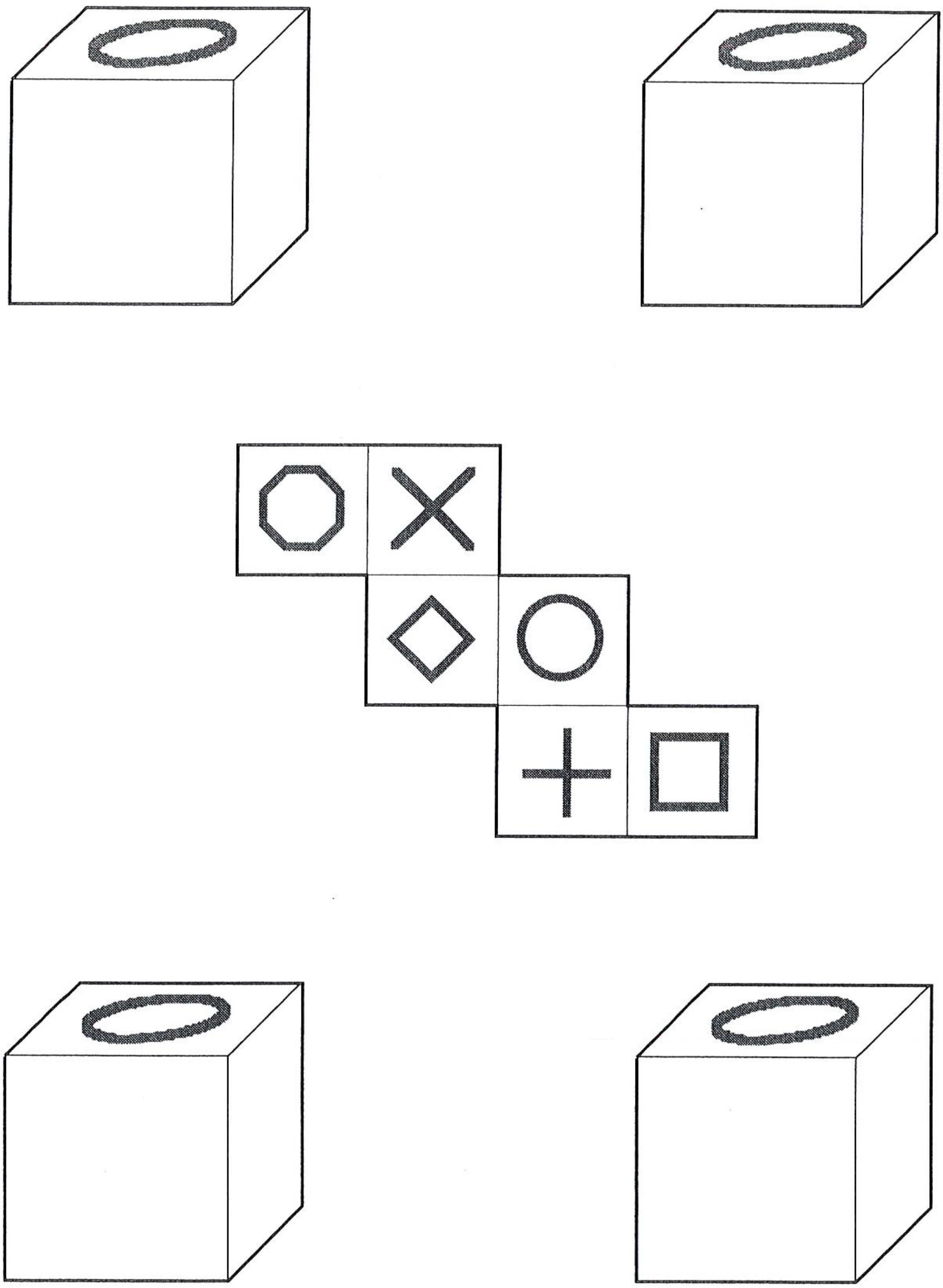




Dessine sur le cube les motifs qui figurent sur les faces

(Plusieurs cubes sont dessinés car il y a peut-être plusieurs solutions ?...)

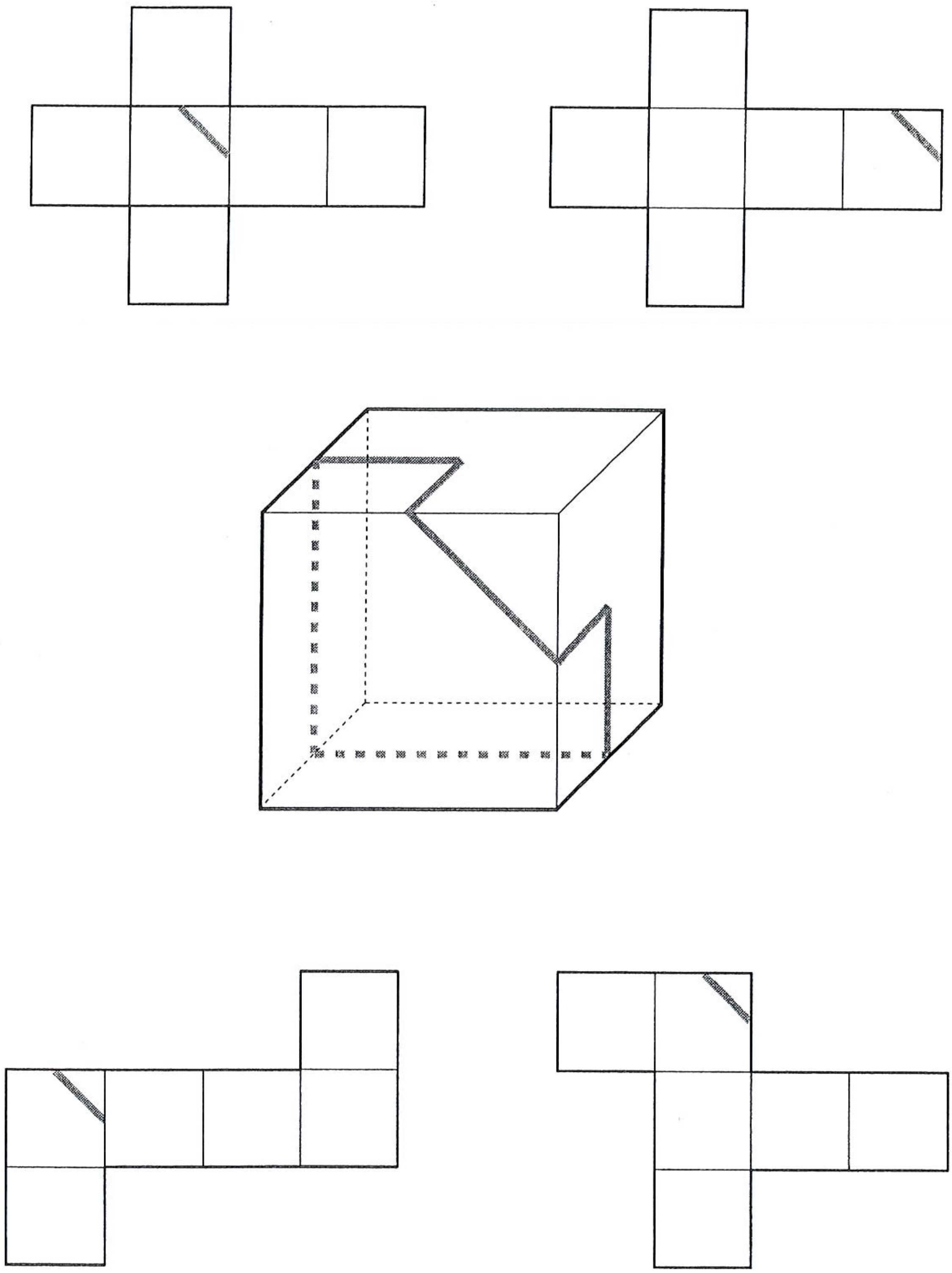
# Quels motifs ? / 2



Dessine sur le cube les motifs qui figurent sur les faces

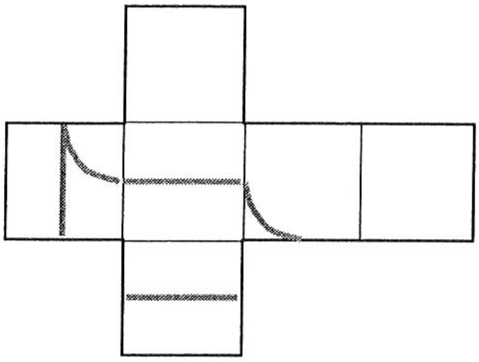
(Plusieurs cubes sont dessinés car il y a peut-être plusieurs solutions ?...)

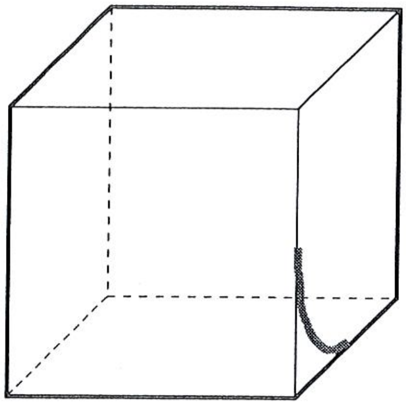
## Des traces sur un cube / 1

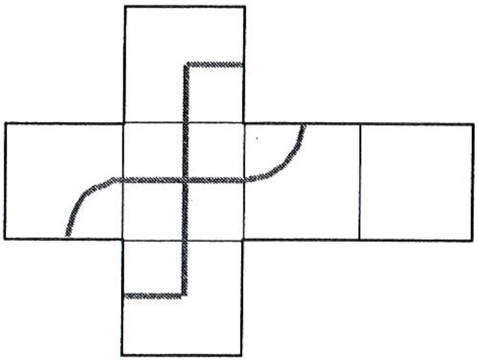


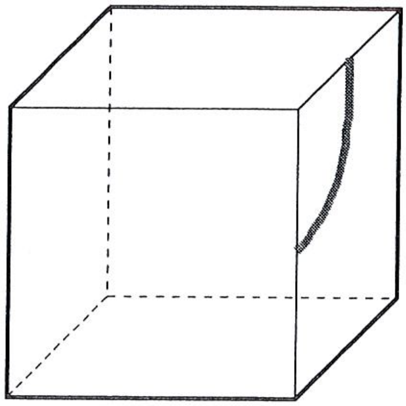
Retrouve sur chacun de ces patrons,
la trace qui a été dessinée sur le cube.

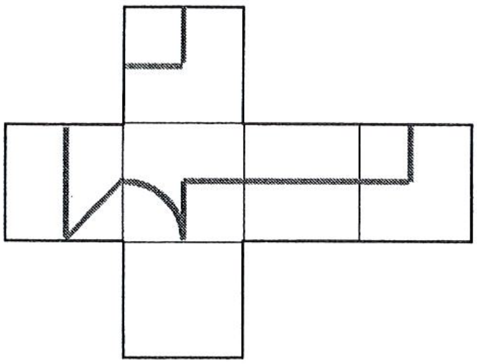
# Des traces sur un cube / 2

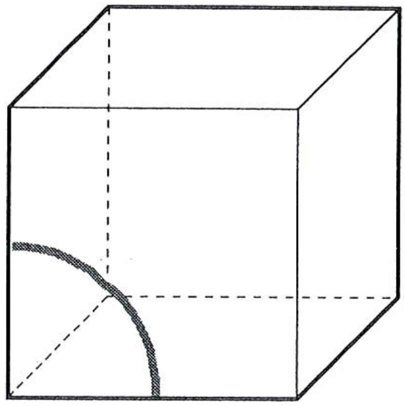






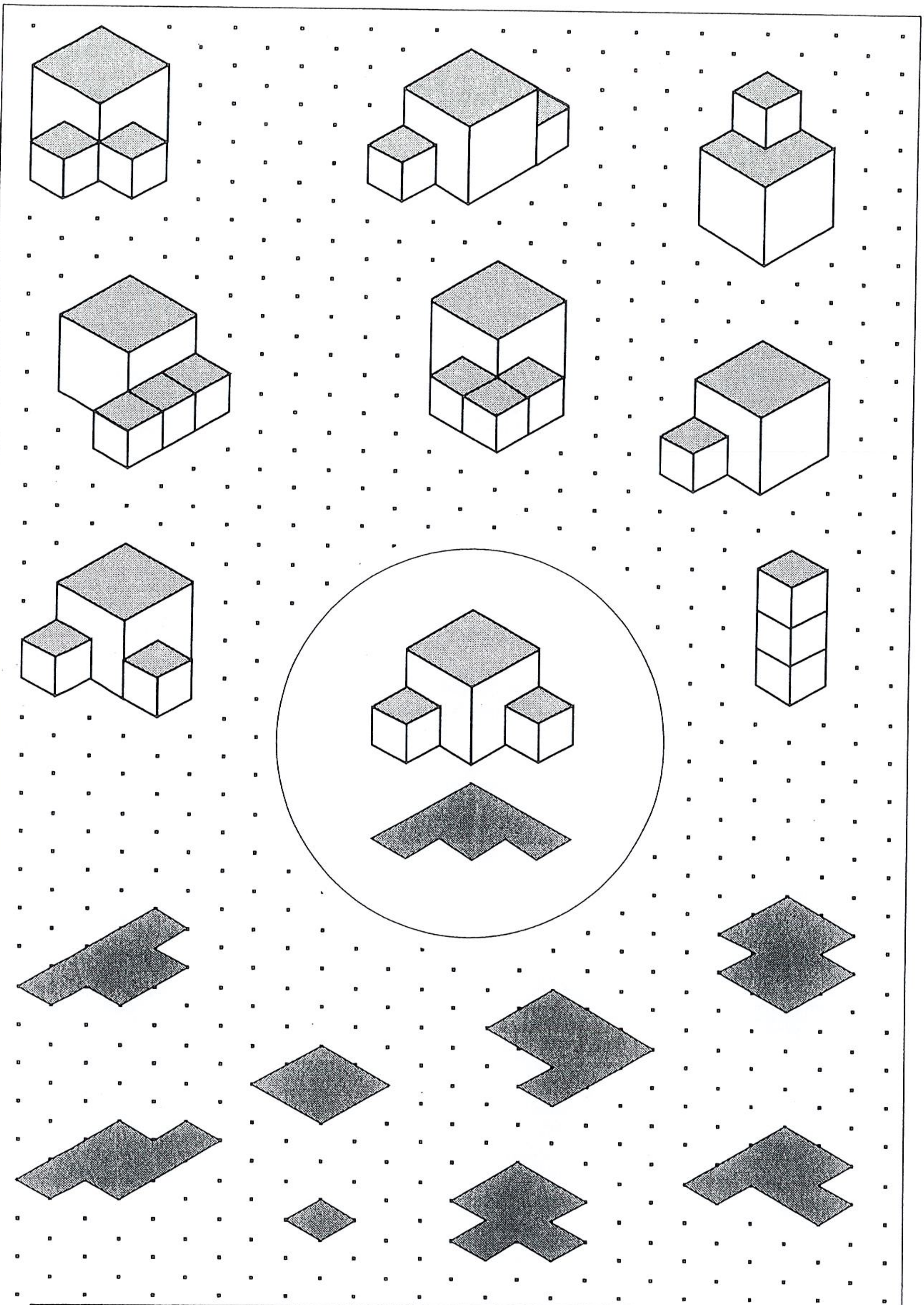






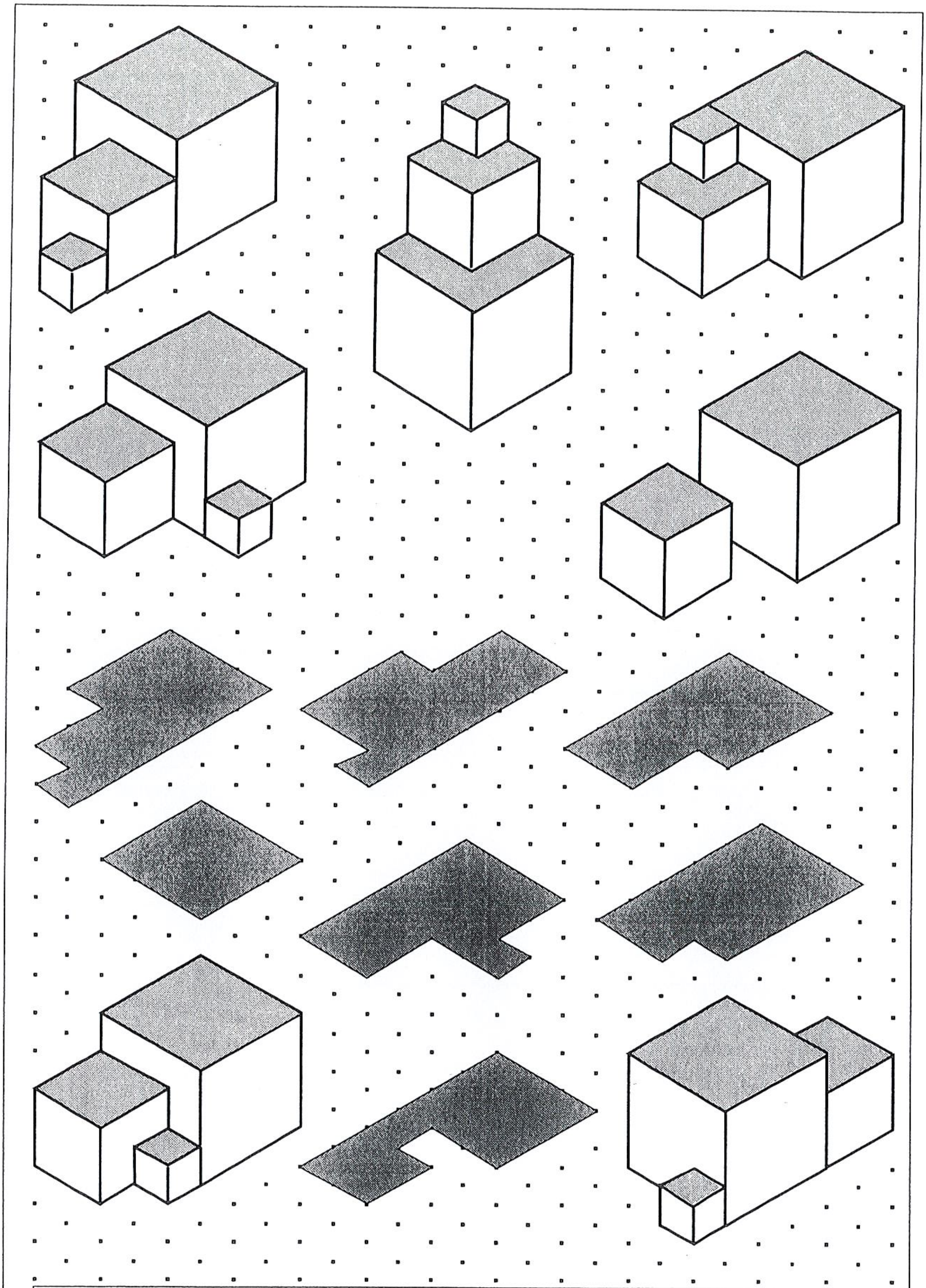
Dessine sur le cube la trace qu'on observe sur le patron

# Empreintes de cubes / 1



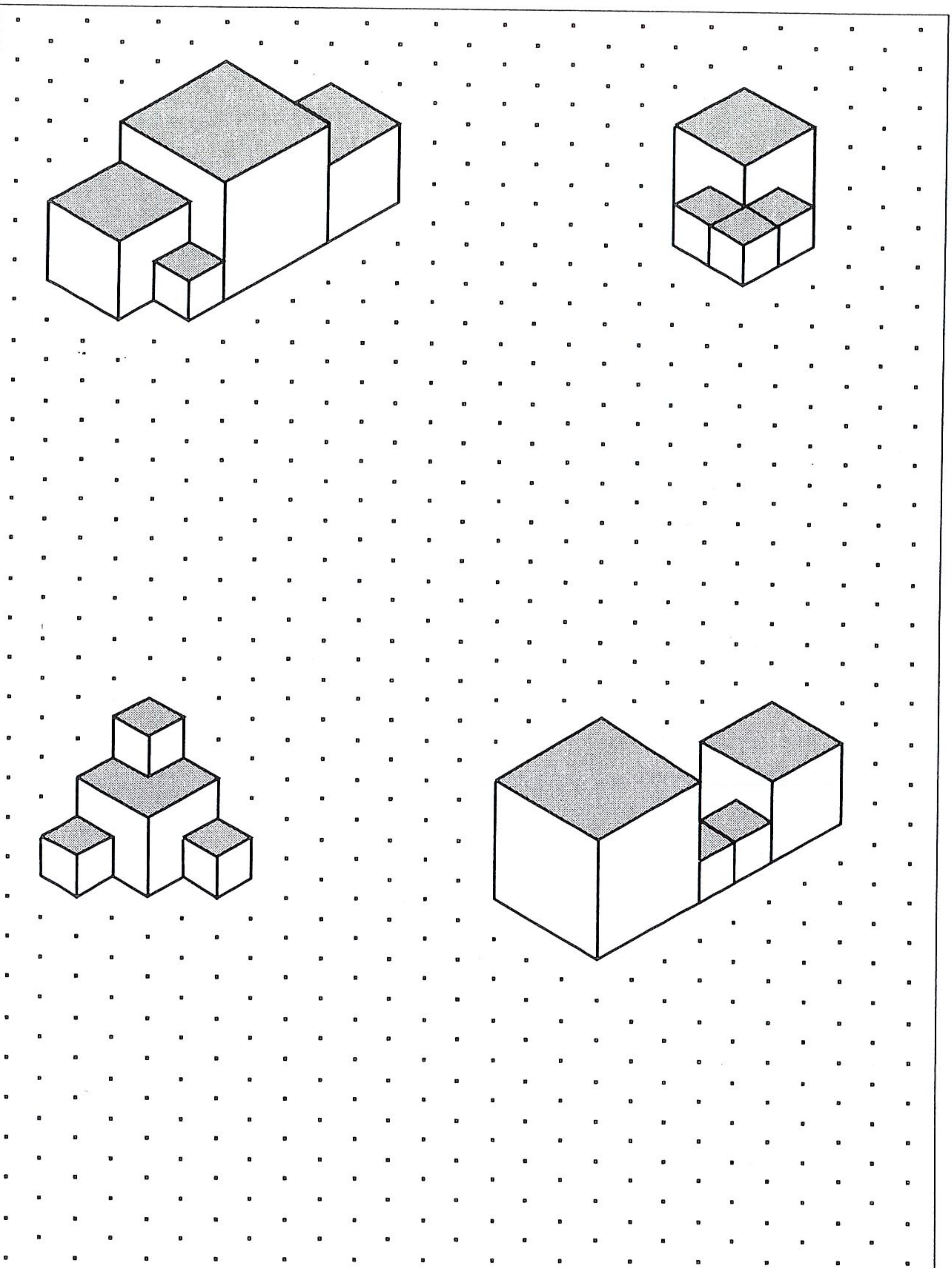
Associe à chaque volume son empreinte

# Empreintes de cubes / 2



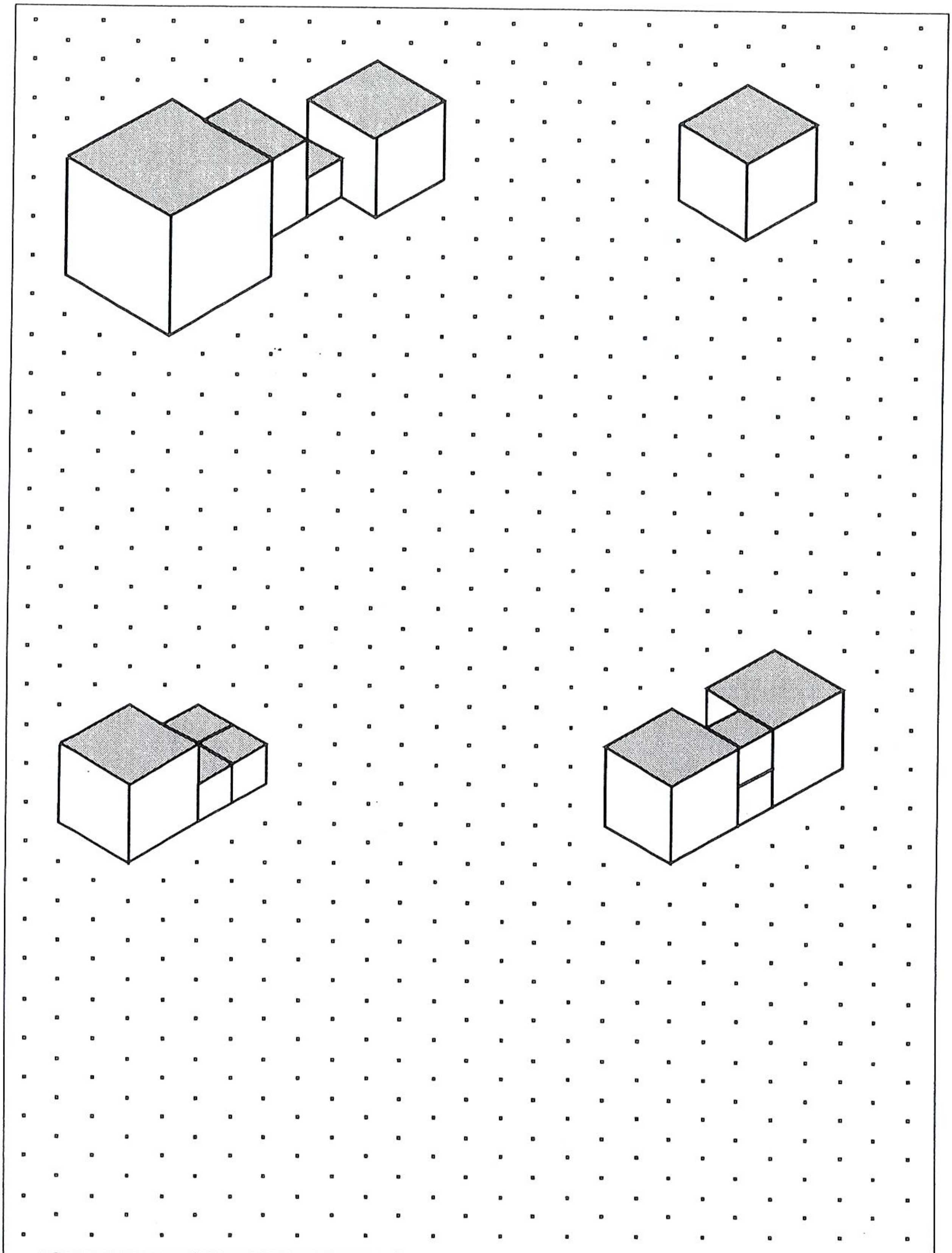
Associe à chaque volume son empreinte

# Fortes impressions



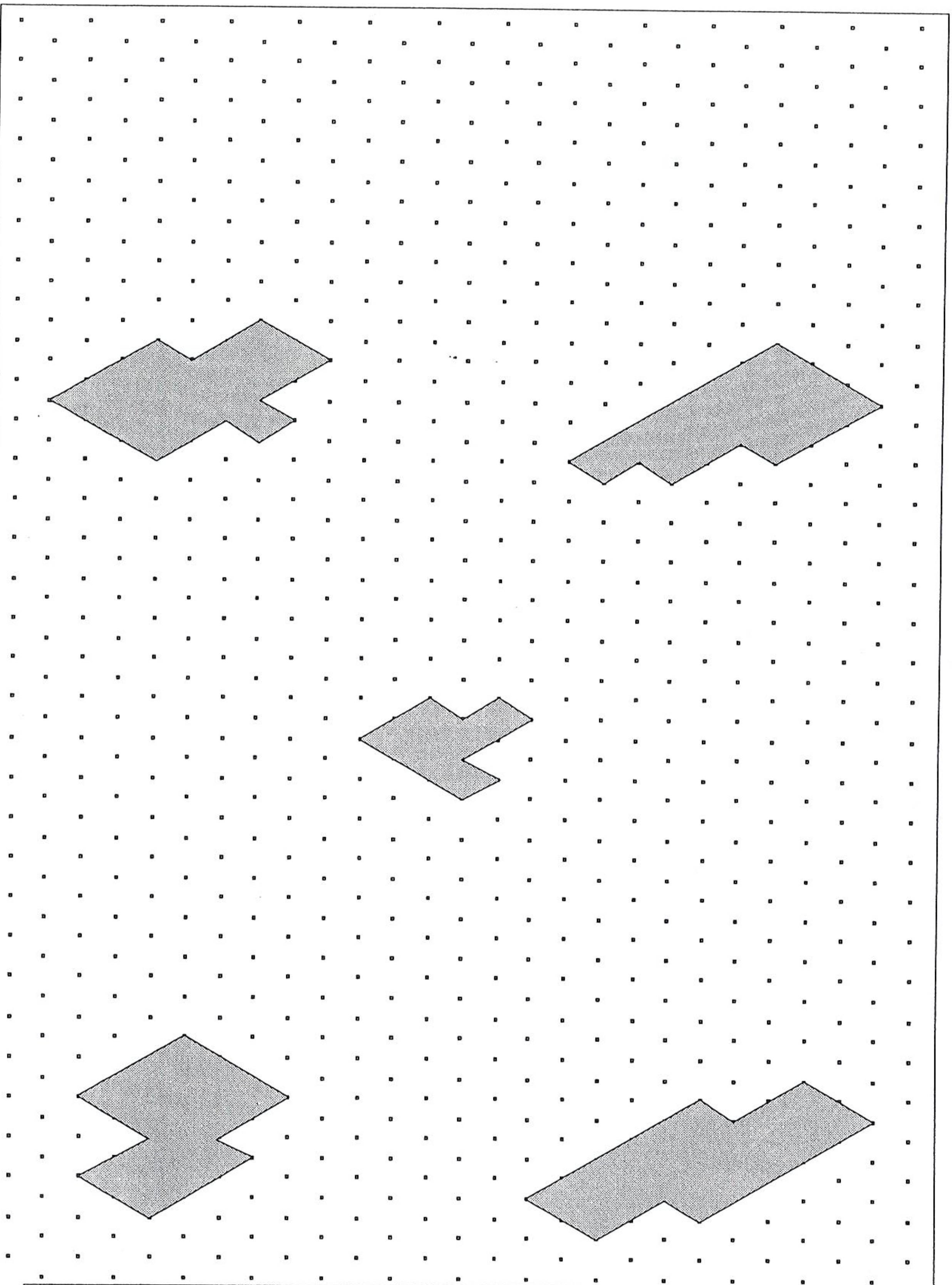
Tous ces volumes sont constitués de 4 cubes exactement.
Dessine leurs empreintes sous chacun d'eux.

## Impressions fortes



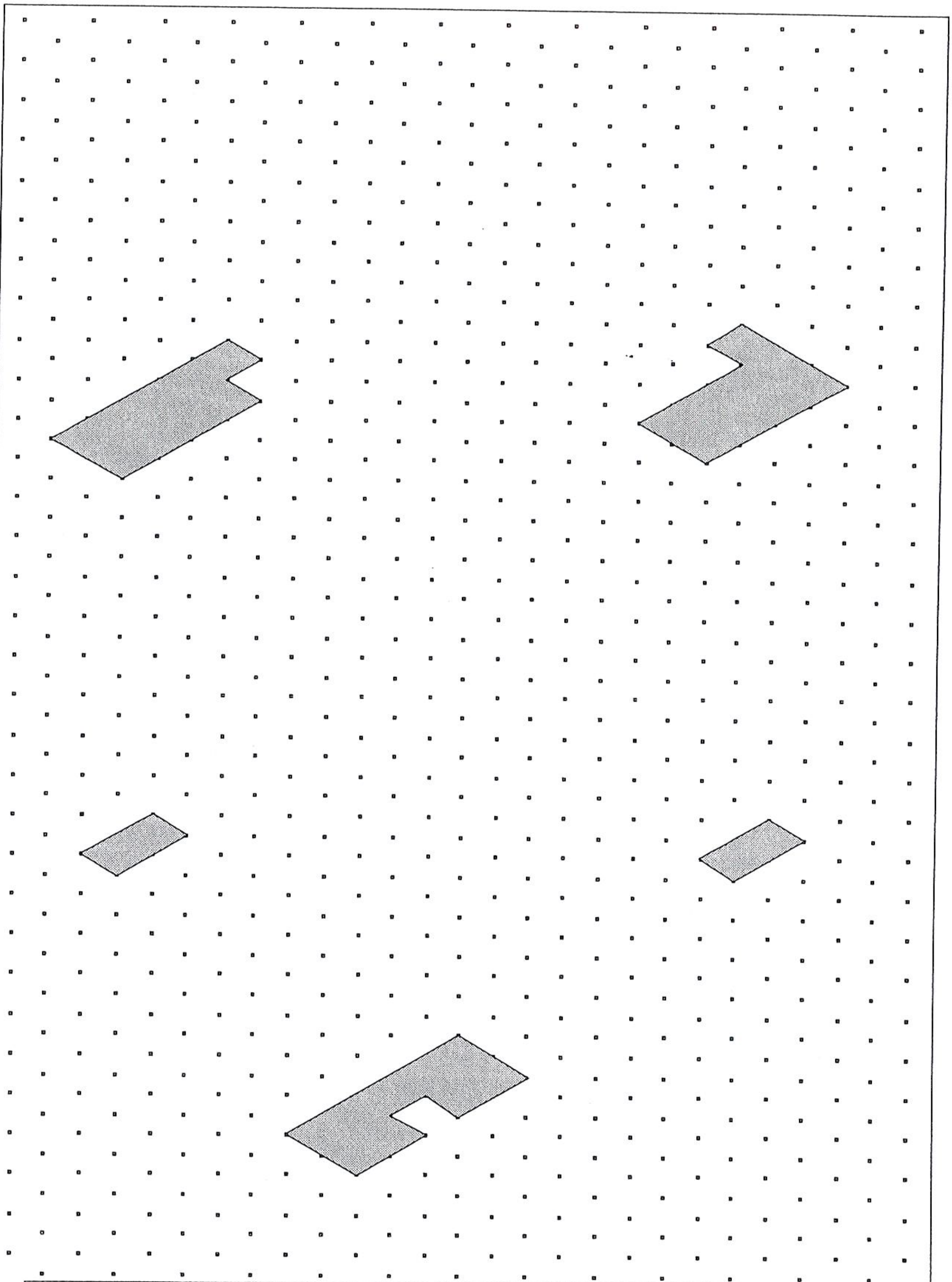
Tous ces volumes sont constitués de 4 cubes exactement.
Dessine leurs empreintes sous chacun d'eux.

# A vos marques... / 1



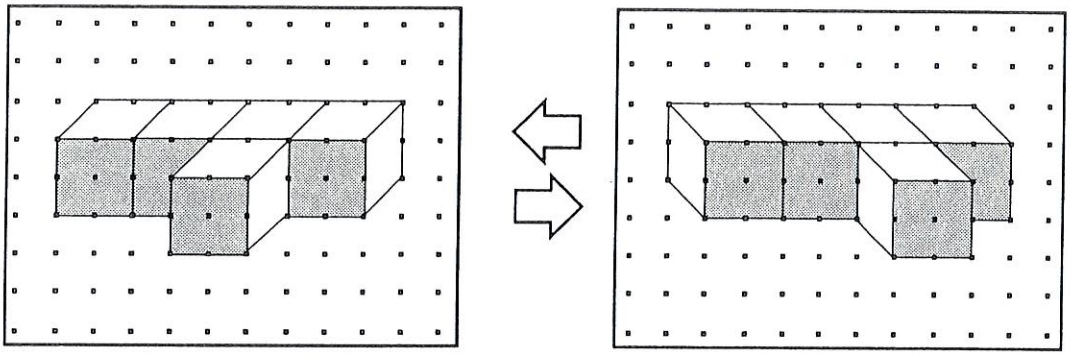
Des objets constitués d'un assemblage de 3 cubes exactement, ont laissés ces empreintes.
Dessine les volumes correspondant au-dessus de chacune d'elles.

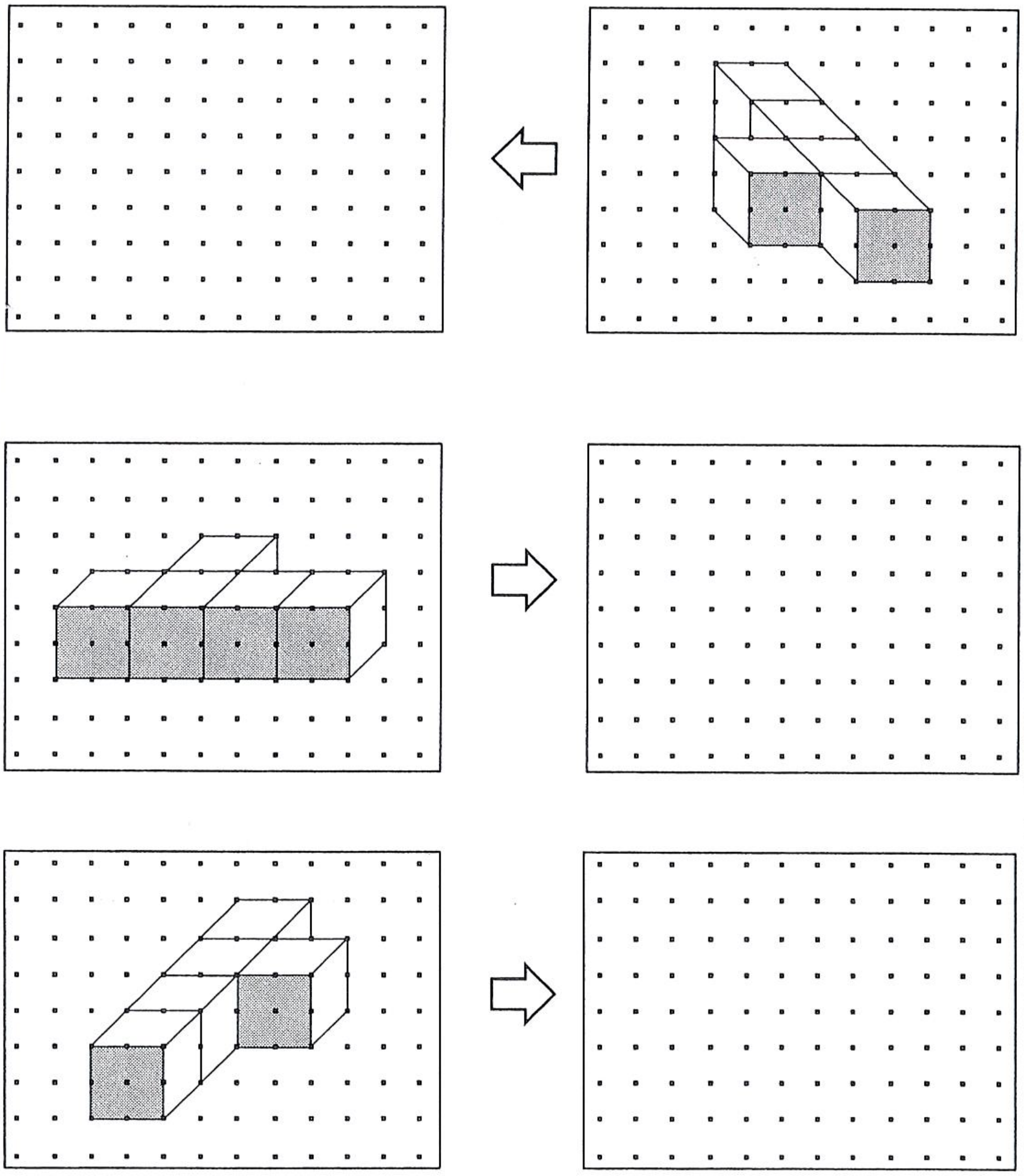
# A vos marques ... / 2



Des objets constitués d'un assemblage de 3 cubes exactement, ont laissés ces empreintes.
Dessine les volumes correspondant au-dessus de chacune d'elles.

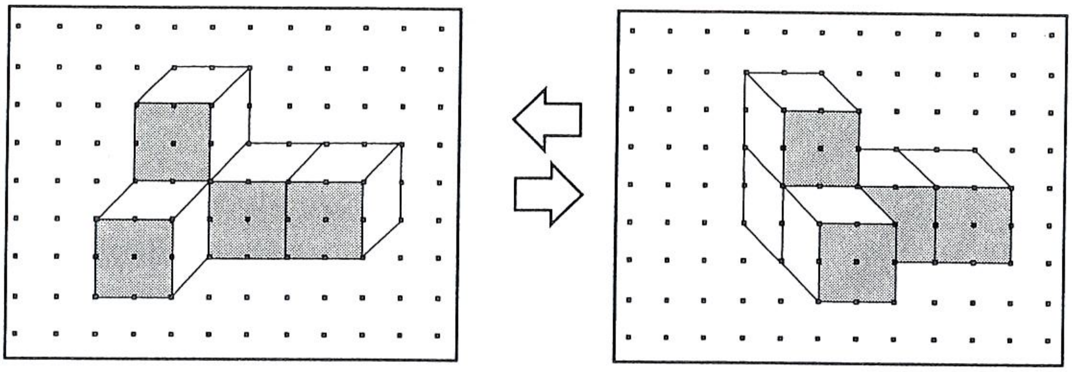
# Le tour de la question

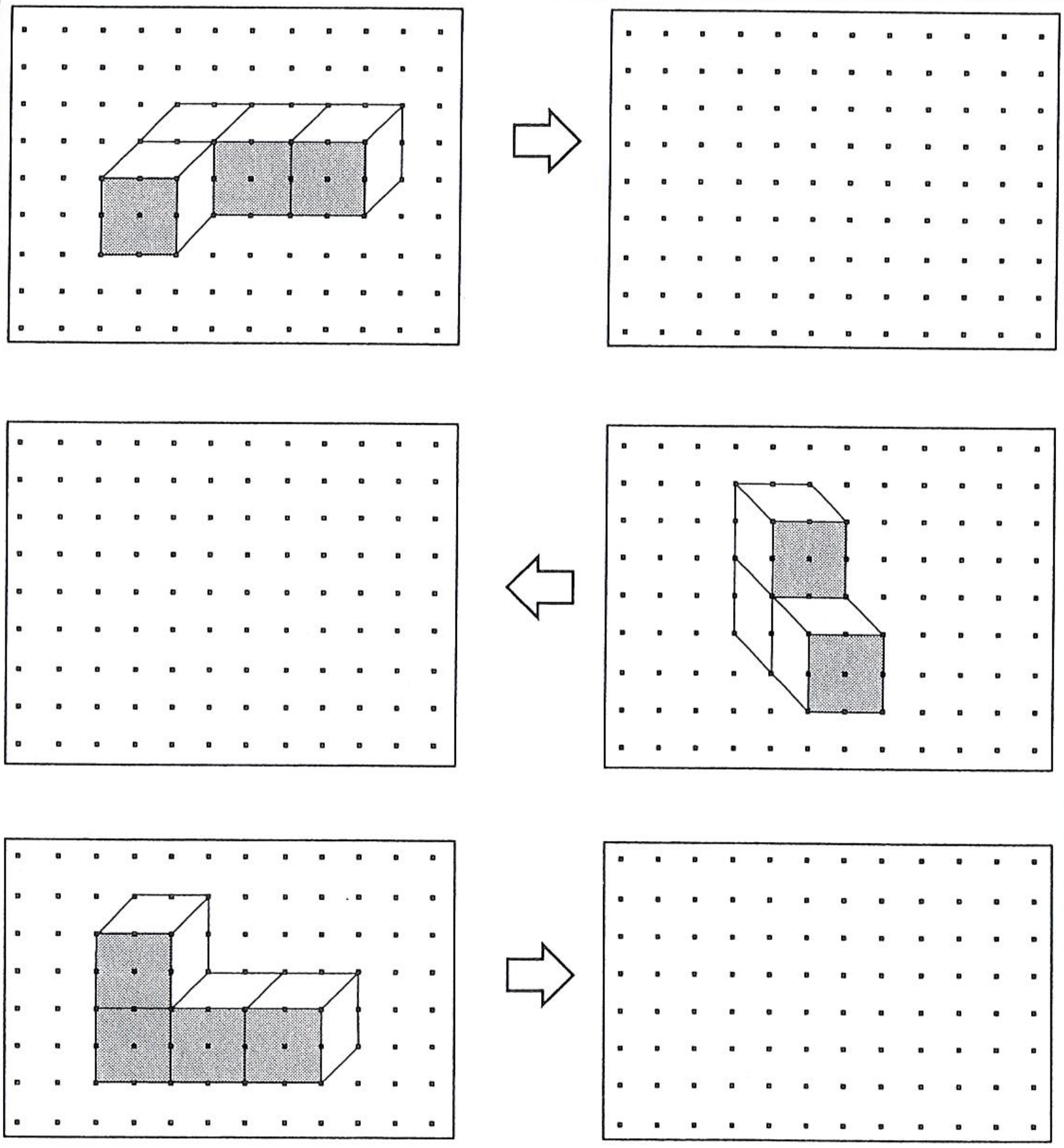




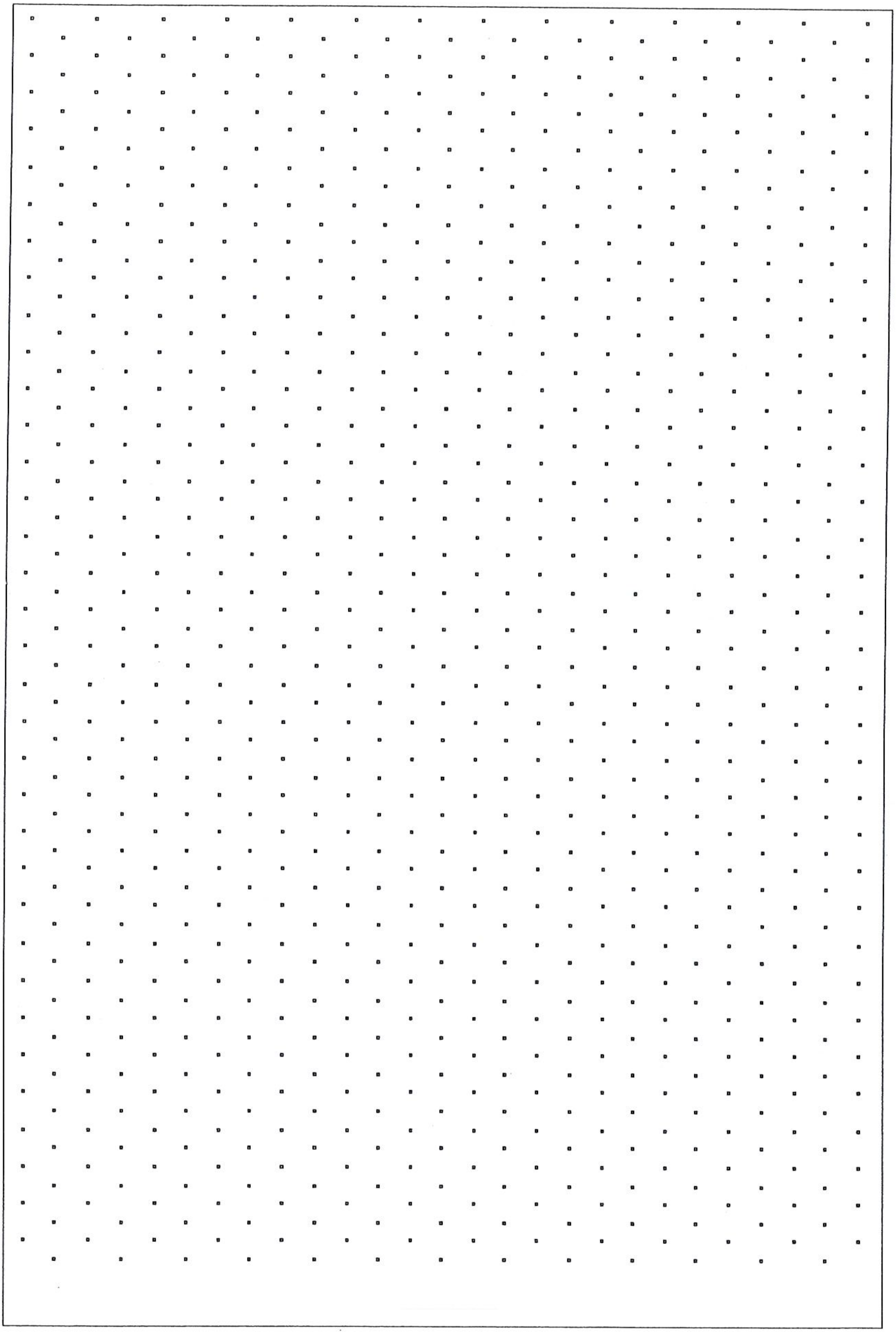
Dessine les figures manquantes.

# Faut voir ...

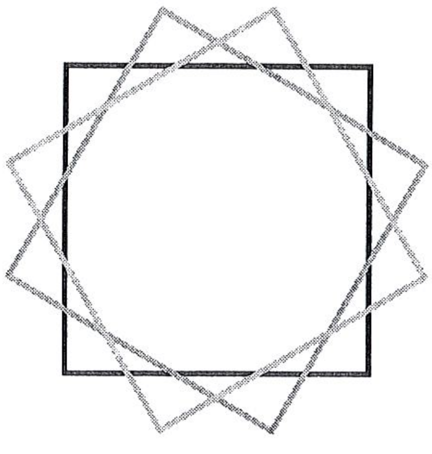




Dessine les figures manquantes.



# LA GEOMETRIE LE COLLEGE ET CABRI



# UN STAGE D'INITIATION À CABRI

Les pages qui suivent décrivent une progression d'apprentissage proposée lors d'un stage d'inititiation au logiciel Cabri.
L'objectif est de faire découvrir, rapidement, à des utilisateurs débutants, les principales fonctionnalités du logiciel. A cette fin nous proposons de résoudre des problèmes simples (de la Sixième à la Seconde), permettant une prise en charge rapide des outils et mettant en œuvre les idées directrices de la démarche Cabri.
L'originalité de la progression présentée ici réside dans l'existence d'un leitmotiv qui nous sert de fil conducteur : **le carré**.

Ce choix est un clin d'œil en direction d'un autre logiciel de la même famille des "Micro-Monde" que Cabri et qui connut son heure de gloire dans les années 80 : LOGO. L'idée de micro-monde est celle d'un environnement construit autour d'un ensemble d'outils primitifs, mis à la disposition de l'utilisateur, lui permettant de créer d'autres outils plus performants pour réaliser des expériences, explorer un univers particulier et en découvrir les propriétés.

Pour avoir été des pionniers de la démarche Logo, nous restons très attachés à ces approches originales, convaincus qu'elles induisent des démarches pédagogiques innovantes dans la mesure où elles placent l'élève en situation d'acteur et de bâtisseur de ses propres connaissances.

Comme l'évocation de LOGO déclenche en général la réaction unanime :

*"LOGO ?... Ah oui, la tortue qui dessine des carrés!"*

nous n'avons pu résister au plaisir de faire dessiner des carrés par un cabri !

# PROGRESSION RETENUE

**I. Cabri "light" : une barre de menus allégés.**

se munir des quelques outils jugés indispensables pour la suite.

**II. Construire avec ces outils**

par exemple, tracer un carré …

**III. Réinvestir un savoir-faire**

ce qui a été fait une fois, peut toujours être répété : tracer des configurations comportant des carrés.

**IV. Créer des nouveaux outils**

apprendre à l'ordinateur à faire ce que je sais faire : enrichir l'environnement de départ.

**V. Faire face aux situations nouvelles**

créer des outils adaptés aux besoins.

**VI. Résoudre des problèmes de géométrie**

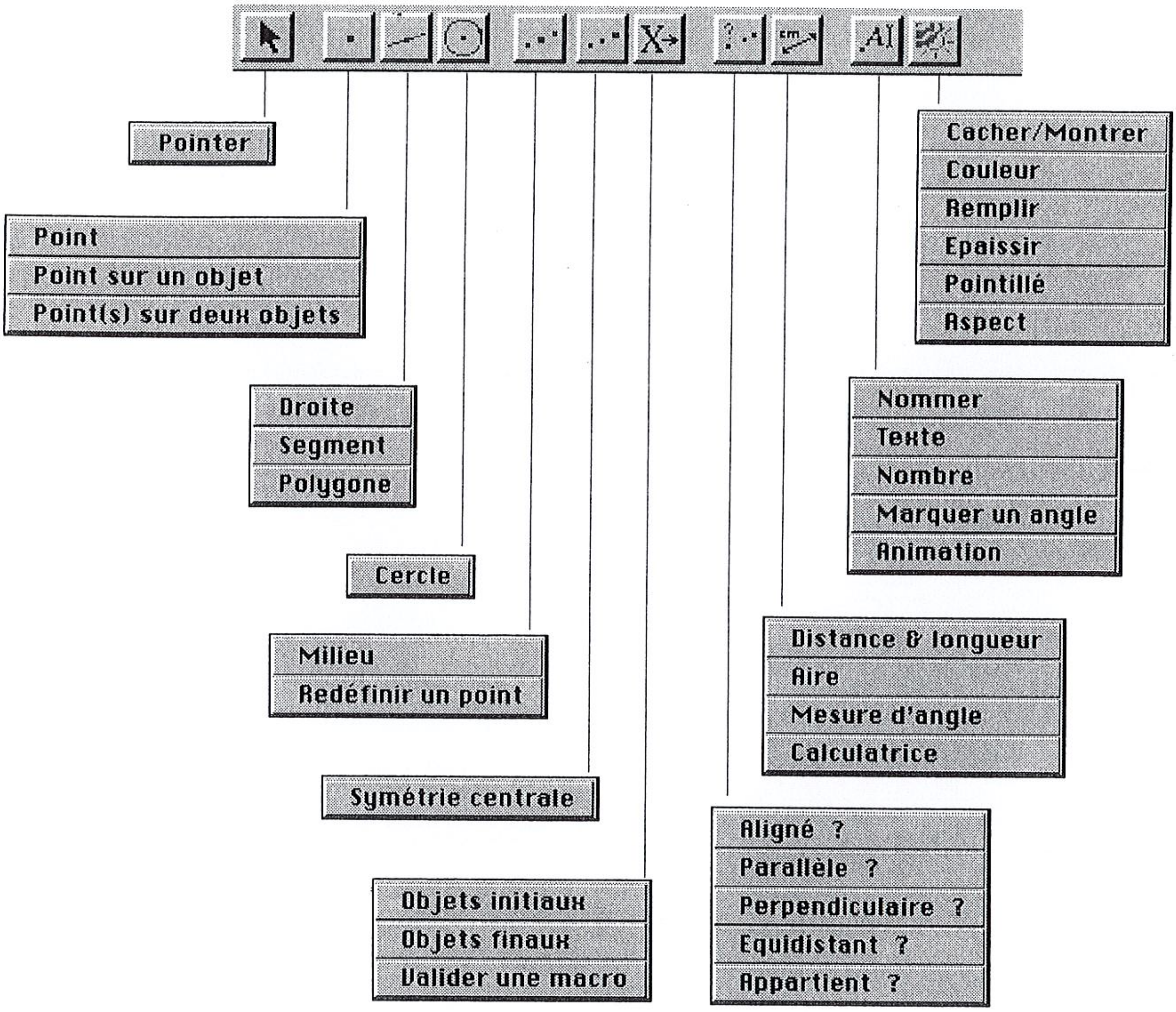
la routine mais avec un logiciel : dessiner, conjecturer, chercher,…

■

## I. Des Menus allégés

S'agissant de mettre en évidence le caractère évolutif de l'environnement, il est naturel de se doter au départ d'un ensemble réduit d'objets et de propriétés géométriques, toutefois suffisamment performant pour permettre l'évolution souhaitée.

La barre de Menus suivante est donc proposée :



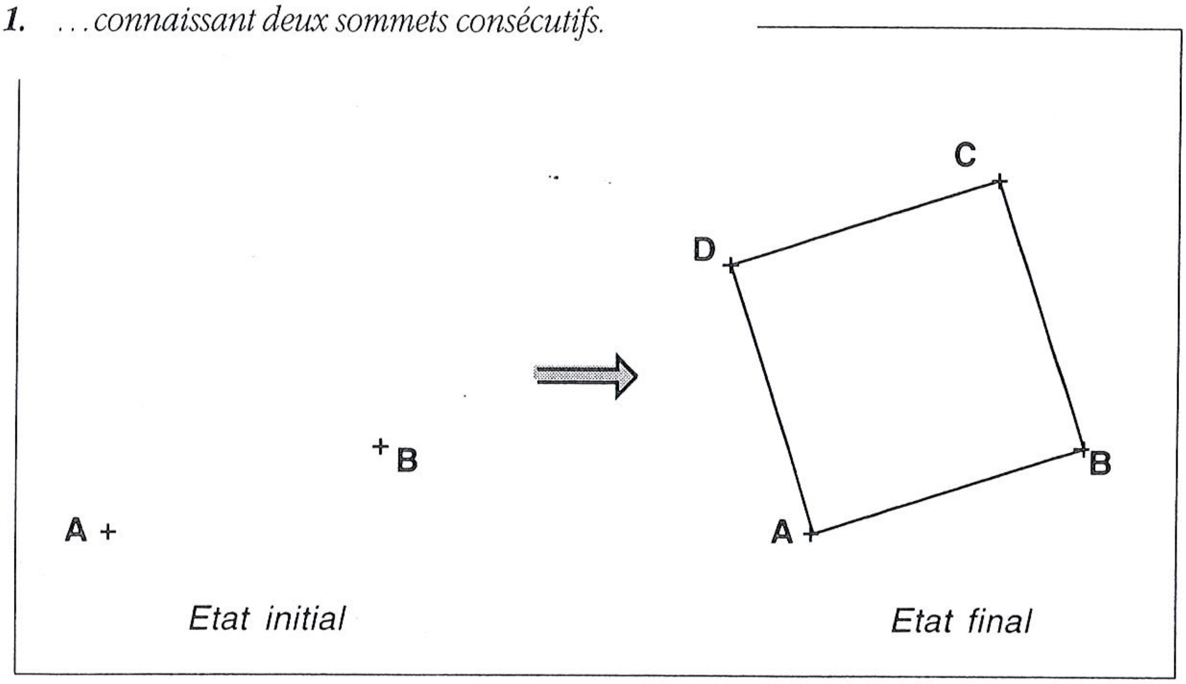

*NB : Comme tout choix ... ça se discute !*

## II. Construire

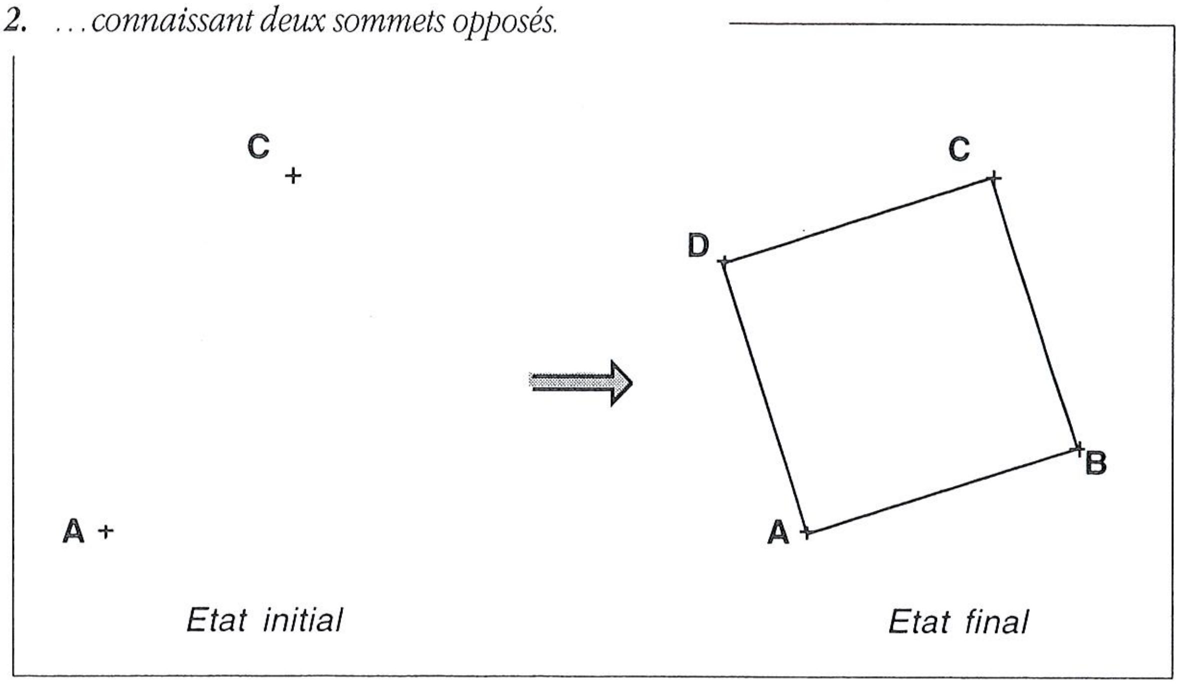
Où l'on constate à l'évidence qu'une construction avec Cabri suppose que nous saurions la faire avec crayon, règle et compas.

***Avec les outils disponibles, construire un carré :***

***1.*** *...connaissant deux sommets consécutifs.*




*2.* *...connaissant deux sommets opposés.*

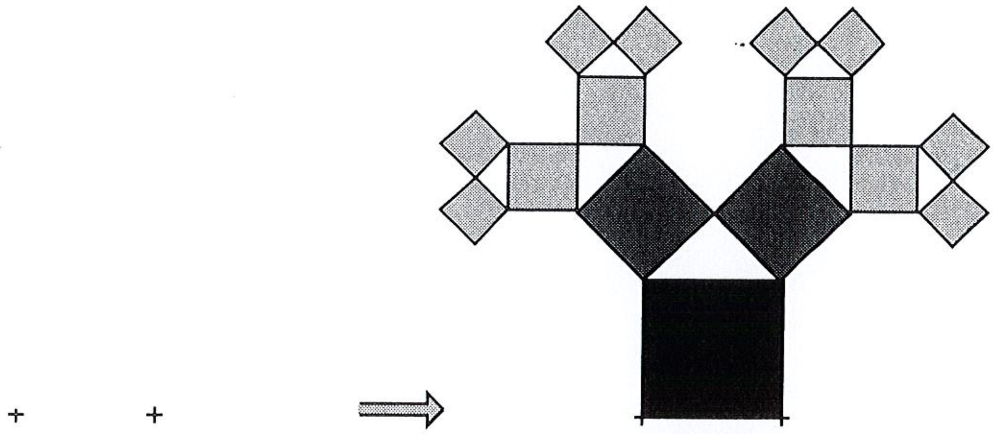


# III. Réinvestir un savoir-faire

Où il apparaît qu'on aimerait ne pas avoir à refaire plusieurs fois de suite la même série de constructions,... d'où la nécessité de fabriquer de nouveaux outils.

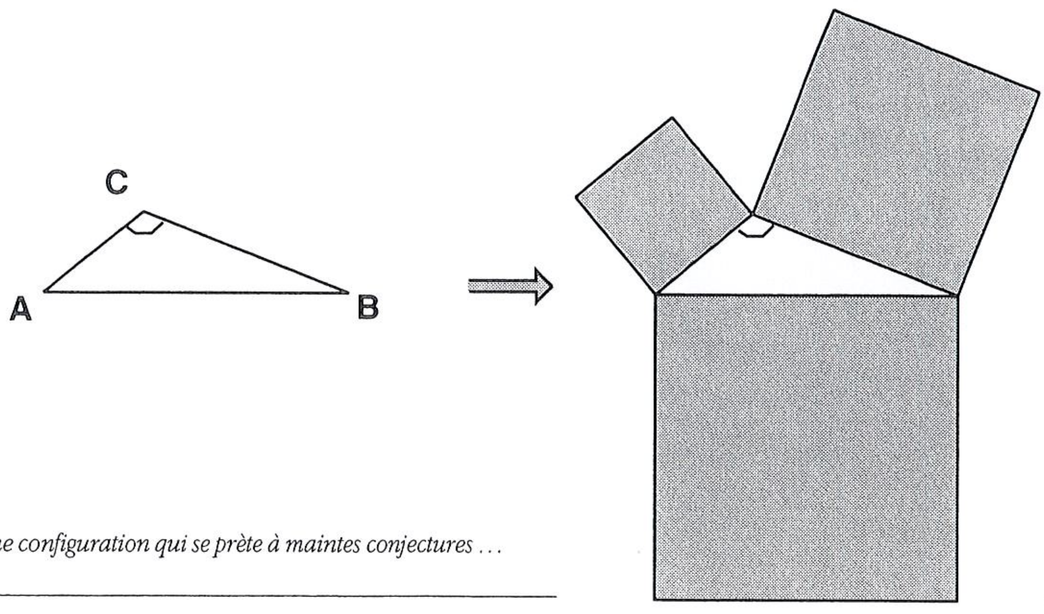
## *1. Pour dessiner simplement*

*A partir de deux points donnés, dessiner "l'arbre à carrés"*



## *2. Pour faire de la géométrie*

*A partir du triangle donné, dessiner la configuration suivante*

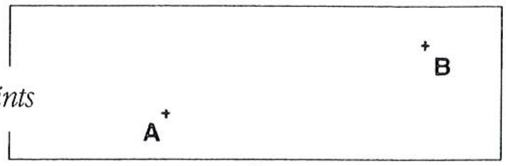



*Une configuration qui se prête à maintes conjectures ...*

## IV. Créer des outils : macro-constructions

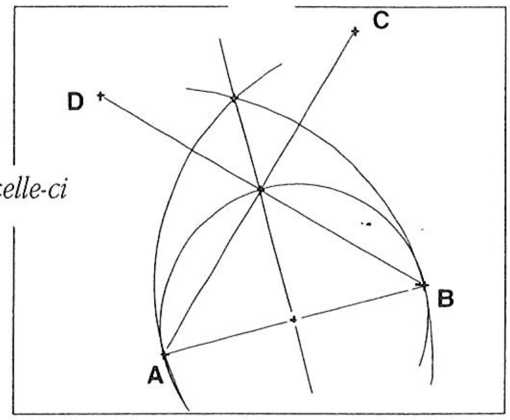
**1.** A partir d'objets initiaux :

*deux points*



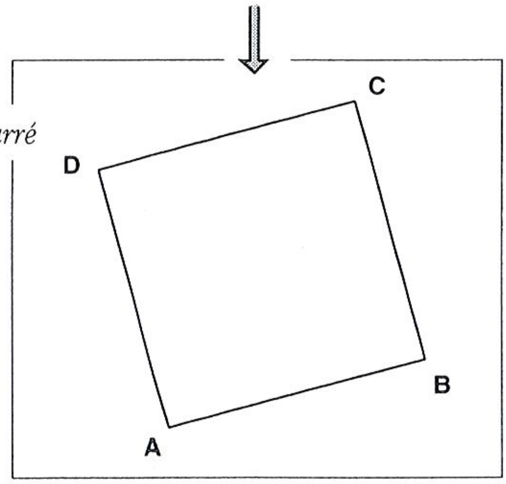

**2.** Réaliser **<u>une</u>** construction :

*par exemple celle-ci*




**3.** Obtenir un objet final :

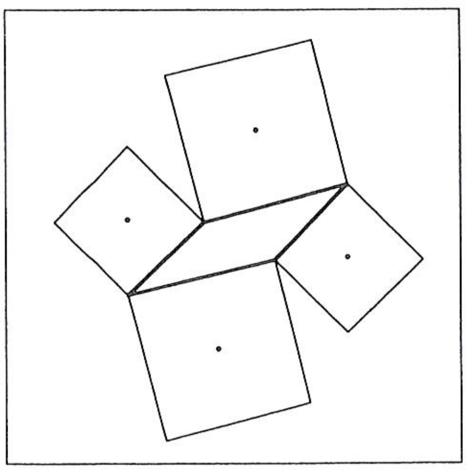
*ce carré*



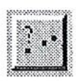

**4.** Nommer la construction :

*par exemple* **CARRE.COTE**

Pour se convaincre de l'intérêt d'une macro-construction **CARRE.COTE**, on peut redessiner un arbre à carrés ou réaliser la configuration ci-dessous (*) à partir d'un parallélograme.



S'intéresser au quadrilatère qui joint les centres des carrés peut être l'occasion d'activer le menu des **Propriétés géométriques**

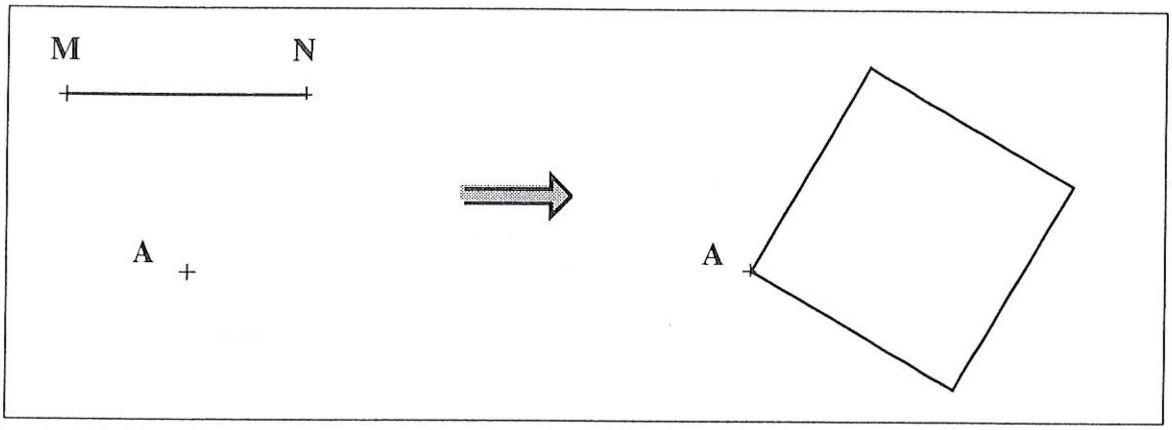


(*) configuration de Victor THÉBAULT (1882-1960)

# V. Des outils adaptés aux situations-problèmes

## 1. Problème

Construire un carré dont on connaît un sommet et dont le côté a pour longueur celle d'un segment donné.




Cette situation conduit nécessairement à se poser la question : "Comment reporter une longueur lorsqu'on n'a pas de compas ?"
Plus généralement : " Comment faire lorsqu'on ne dispose pas de l'outil adéquat ?"

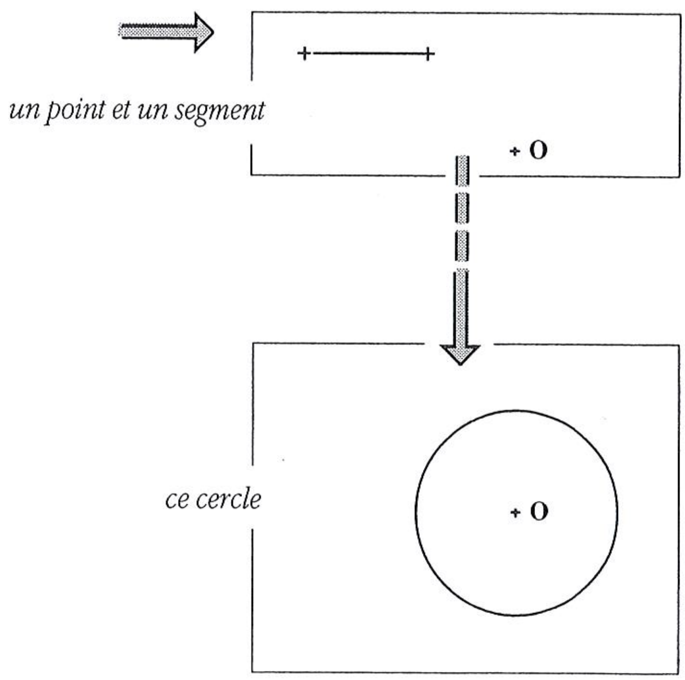
***Réponse :En fabriquer un !***

## 2. Une Macro **COMPAS**

- Objets initiaux :
- Construction :

  . . .

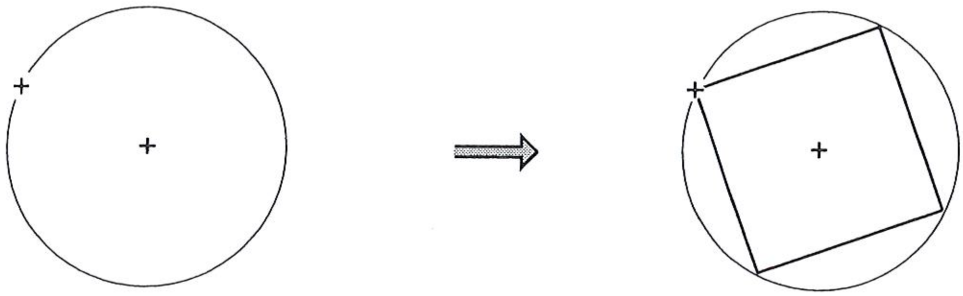
- Objet final :



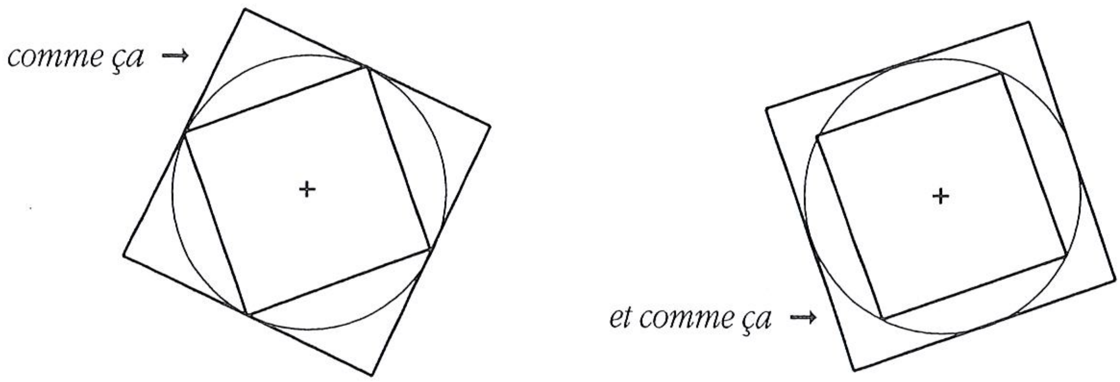
# VI. Carrés à problèmes

**1.** Tracer et dessiner

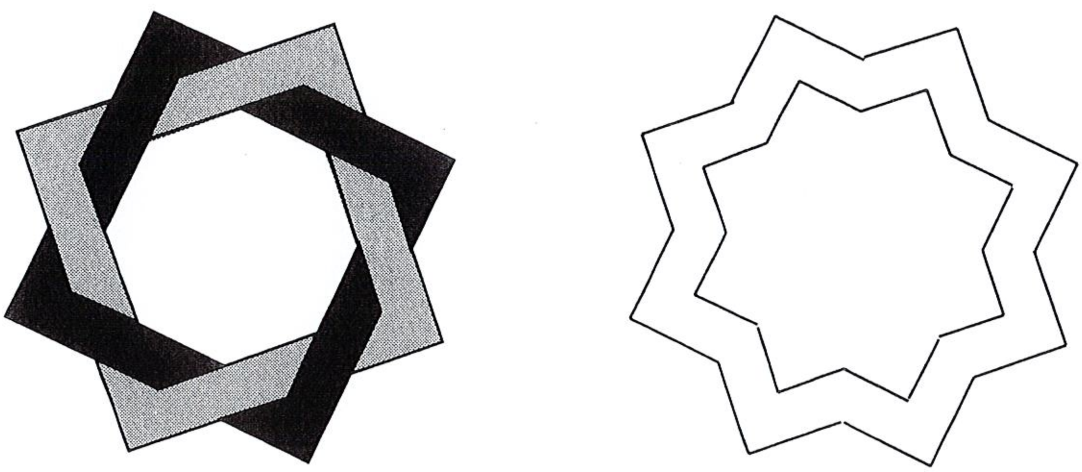
- *Construire un carré inscrit dans un cercle donné.*



- *Construire les carrés circonscrits au cercle précédent...*

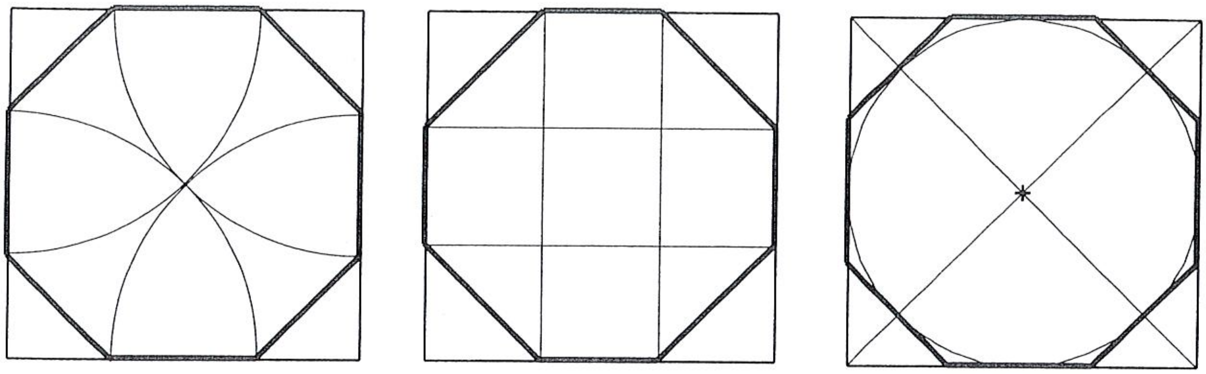



- *En déduire une construction de l'entrelac et de l'étoile ci-dessous.*



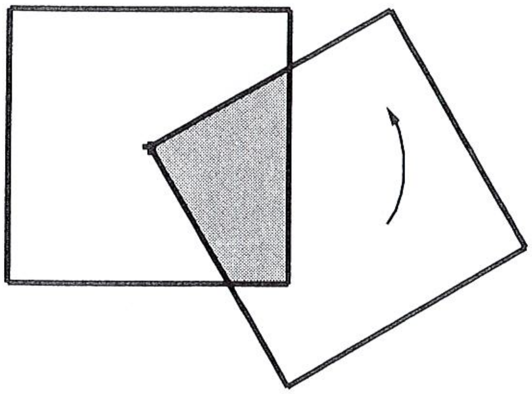
## 2. Conjecturer et calculer

- *A partir d'un carré donné, tracer les octogones ci-dessous :*



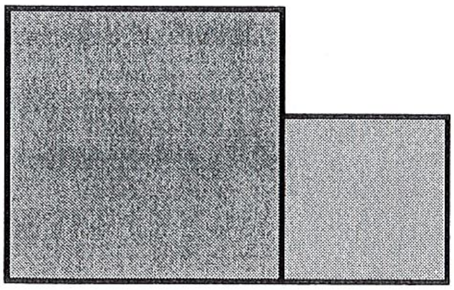
*Sont-ils réguliers ?*

- *Etant donné un carré de centre O, réaliser l'animation suivante :*
  *un second carré ayant un sommet en O tourne autour de ce point en recouvrant le carré initial selon le polygone indiqué en gris sur la figure.*



*Calculer l'aire du polygone en fonction de celle du carré donné.*

- *Les deux carrés ci-dessous ont pour aires respectives : S et S' (S >S')*

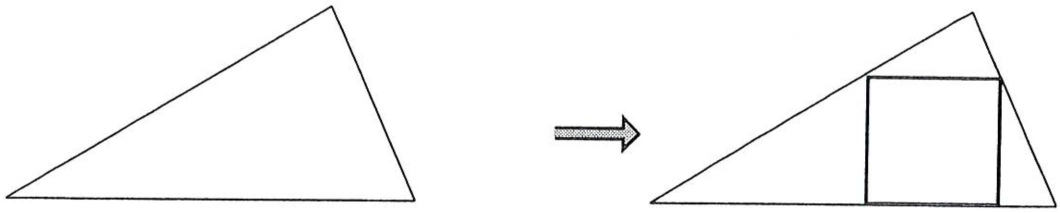


- *Construire un carré d'aire* $S = S + S'$
- *Construire un carré d'aire* $S = S - S'$
- *Construire un carré d'aire* $S_2 = 2.S$
- *Construire un carré d'aire* $S_3 = 3.S$

## 3. Résoudre des problèmes

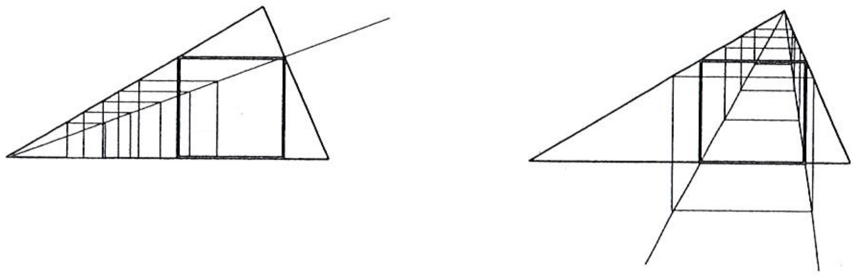
- *Problème de construction*

Construire un carré inscrit (*) dans un triangle donné.

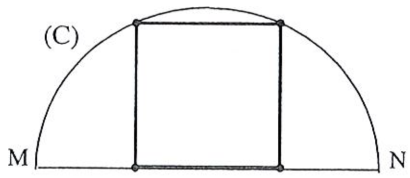


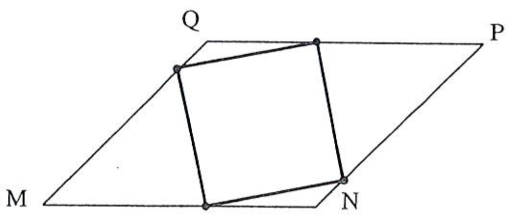
(*) au sens suggéré par la figure.

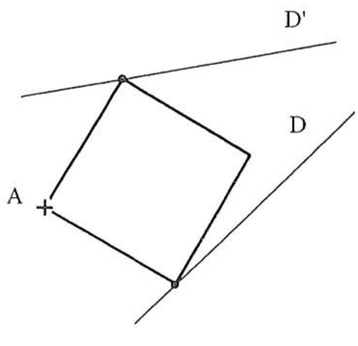
Problème classique et incontournable dans lequel le caractère dynamique de Cabri éclaire la méthodologie de résolution dite de "réduction des contraintes".
La possibilité de visualiser les familles de carrés qui sont "presque" solutions du problème fait tout naturellement apparaître **LA** solution.

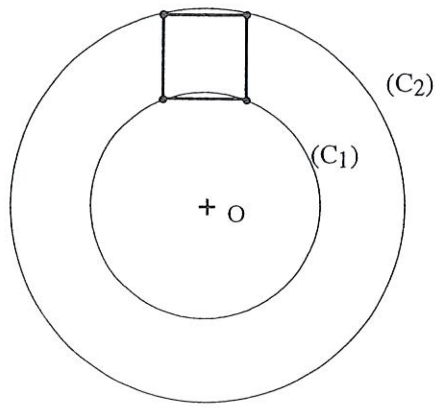


*Variantes : avec d'autres contraintes.*

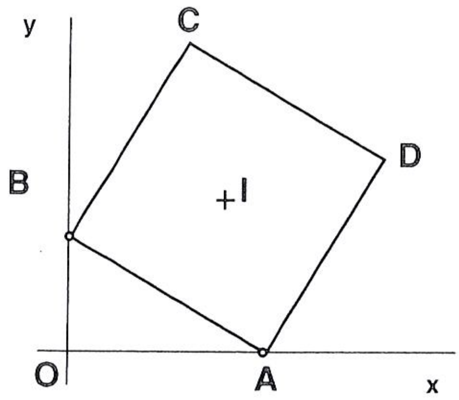


• *Problèmes de lieux géométriques*

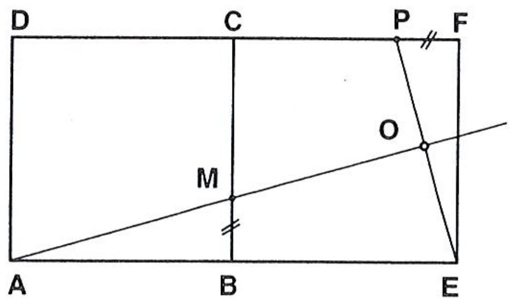



**1.** Le carré ABCD de côté donné est mobile dans le plan de telle sorte que les sommets A et B se déplacent respectivement sur les demi-droites [Ox ) et [Oy ).

Déterminer les lieux géométriques des sommets C et D ainsi que celui du centre I du carré.

**2.** Un point M se déplace sur le côté BC d'un carré ABCD tandis qu'un point P se déplace sur le côté FC d'un carré BEFC de telle sorte que : MB = FP.

Déterminer le lieu géométrique du point O intersection des droites (AM) et (EP).

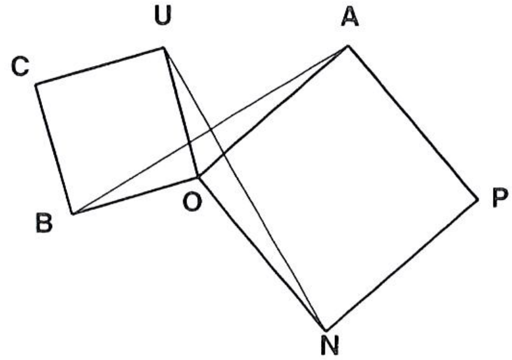


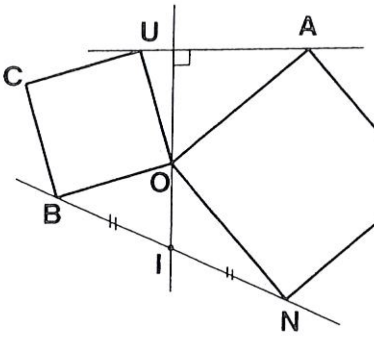

• *Problème sur des propriétés géométriques*

**1.** BOUC et PAON sont des carrés.
Montrer que :

• AB = UN

• (AB) et (UN) sont perpendiculaires.






2. BOUC et PAON sont des carrés.
Si I est le milieu de [BN] alors :

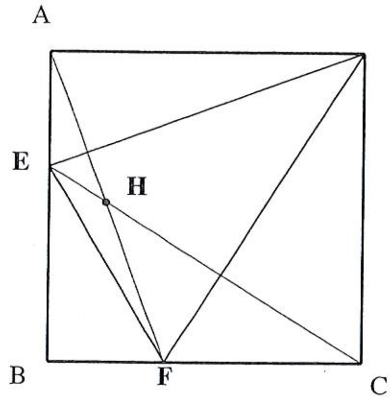
- (OI) est perpendiculaire à (AU)
- et réciproquement.

*Pour la suite des aventures de BOUC, PAON et de leurs amis BOA, GNOU... voir "La géométrie plane au Lycée" IREM de Poitiers - 1989*

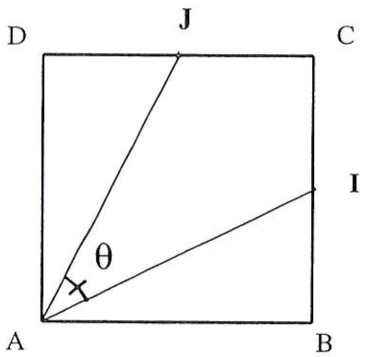
3. Sur les côtés [AB] et [BC] d'un carré ABCD, on place les points E et F tels que : AE = BF.

Soit H le point d'intersection de (CE) et(AF).

Montrer que H est l'orthocentre du triangle DEF.




- *Problème de trigonométrie*




ABCD est un carré.
I et J sont les milieuxdes côtés BC et CD.

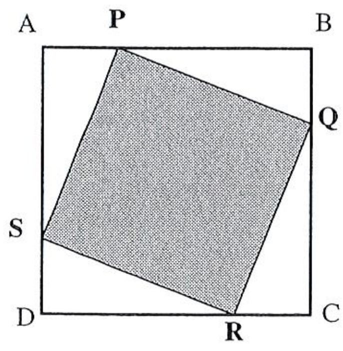
Calculer l'angle θ

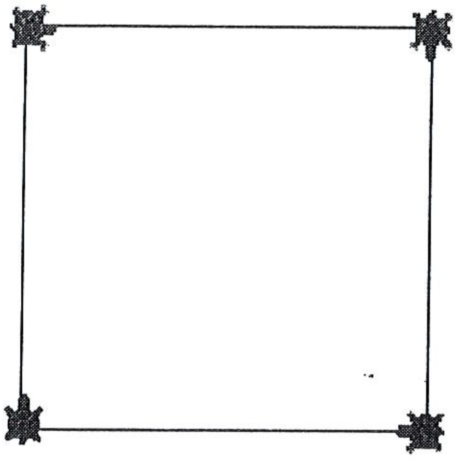
- *Problème d'extrémum*

PQRS sont quatre points pris sur les côtés respectifs du carré ABCD tels que : AP = BQ = CR = DS.

1. Montrer que PQRS est un carré.

2. Pour quelle position de P l'aire de PQRS est-elle minimum ?





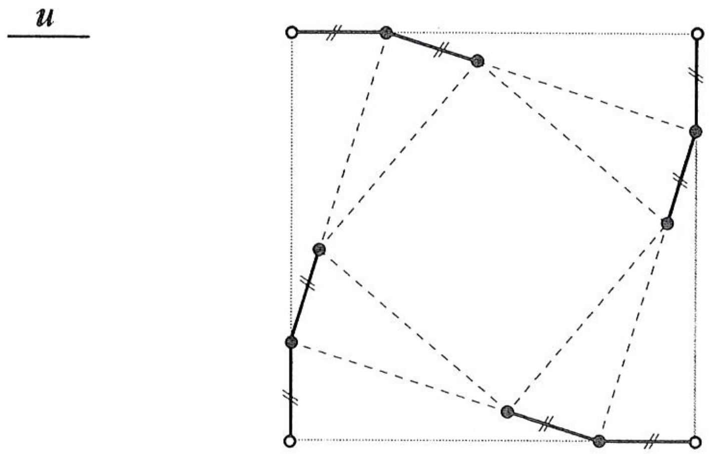
## Les quatres tortues

Quatre tortues sont situées aux quatre coins d'un carré. Chacune se dirige vers sa voisine comme l'indique le dessin ci-contre.
Les quatre tortues progressent à la même vitesse.

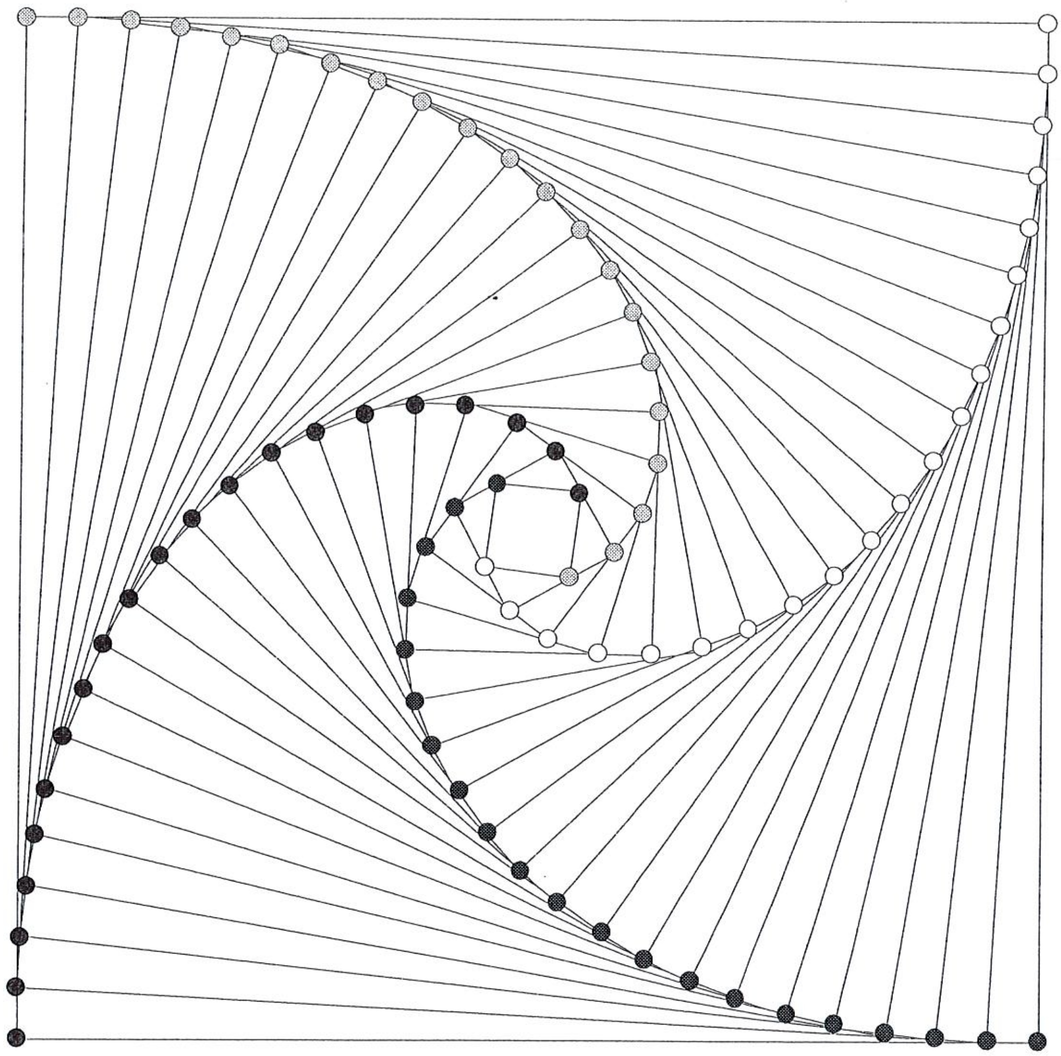
Quelle est leur trajectoire ?

*Indications :*

1. *On fait choix d'un segment dont la longueur représente la distance parcourue par chaque tortue, pendant une unité de temps.*
2. *Quelle est la configuration définie par les quatre tortues au bout d'une unité de temps ?*
3. *Une Macro construite à partir d'un carré et du "segment unité" permet de visualiser, étape par étape, la trajectoire des tortues.*

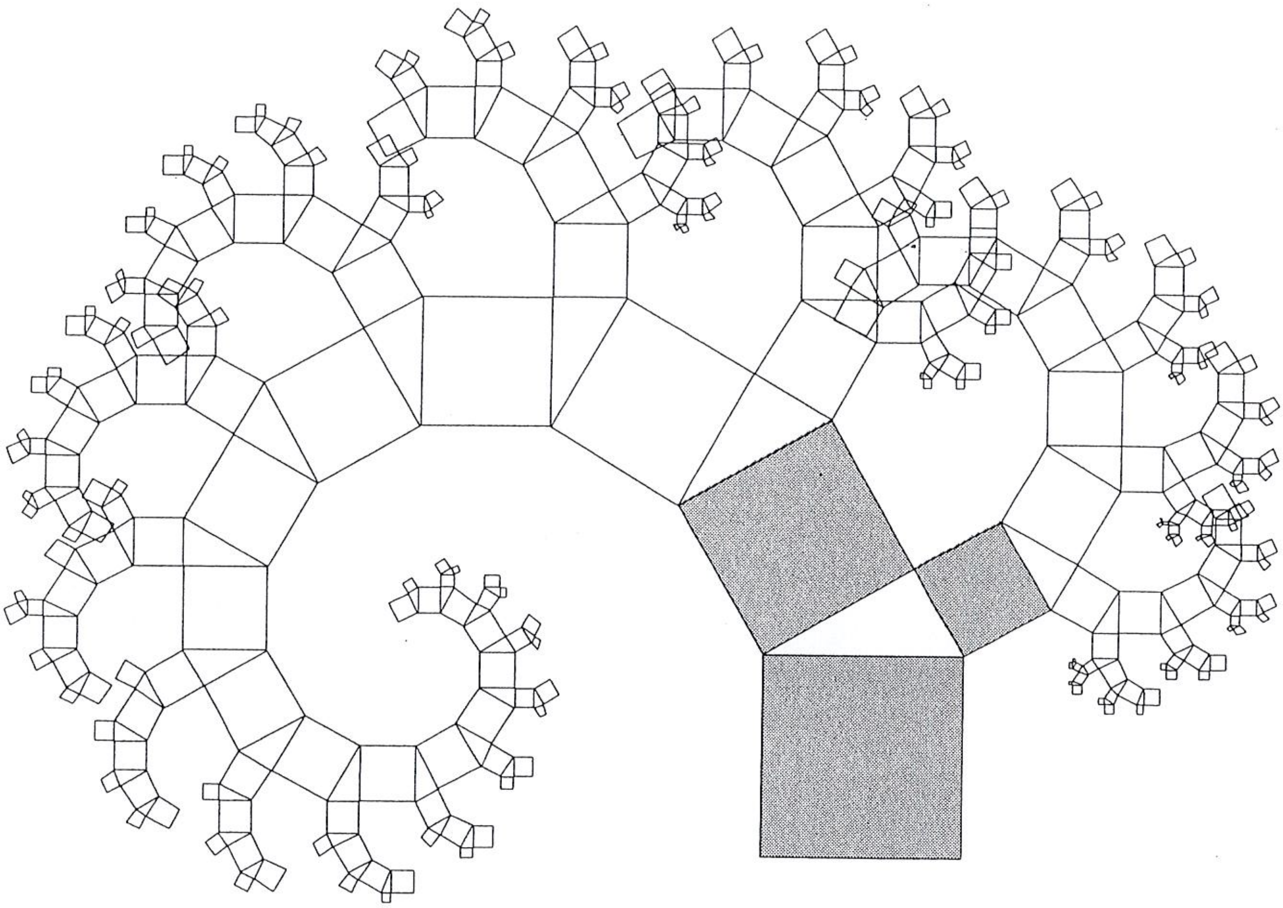


# Les quatre tortues



Il s'agit d'un problème type de la famille des problèmes dits de poursuites. On le retrouve sous différents habillages dans la littérature mathématico- ludique. Citons par exemple :

Martin GARDNER - *"haha" ou l'éclair de la compréhension mathématique* - Bibliothèque POUR LA SCIENCE - Diffusion BELIN




Pff!
Fastoche!
C'est récursif

**Auteurs :** Groupe Elémentaire - Collège

Bernard DA COSTA
Jacques ENGELHARDT
Nicole PANNETIER
Jean François JAMART

**Editeur :** IREM Paris-Nord

**Date :** Février 1999

**Niveau :** Elémentaire - Collège

**Mots clés :** Géométrie - Activités géométriques - Collège - Espace - Cube - Dessin - Cabri - Informatique - Cercle - Tangente

**Résumé :** Ce document se présente sous forme de fiches, supports d'activités élaborées lors de stages programmés par la MAFPEN de Créteil. Il se situe dans le cadre d'une exploration de thèmes géométriques abordés au collège.

---

**UNIVERSITE PARIS - NORD**

**IREM**

**Avenue Jean-Baptiste Clément**
**93430 VILLETANEUSE**
**49 40 36 40**
**Télécopie : 01 49 40 36 36**

**e_mail : iremp13@upn.univ-paris13.fr**

**http://www-irem.univ-paris13.fr**