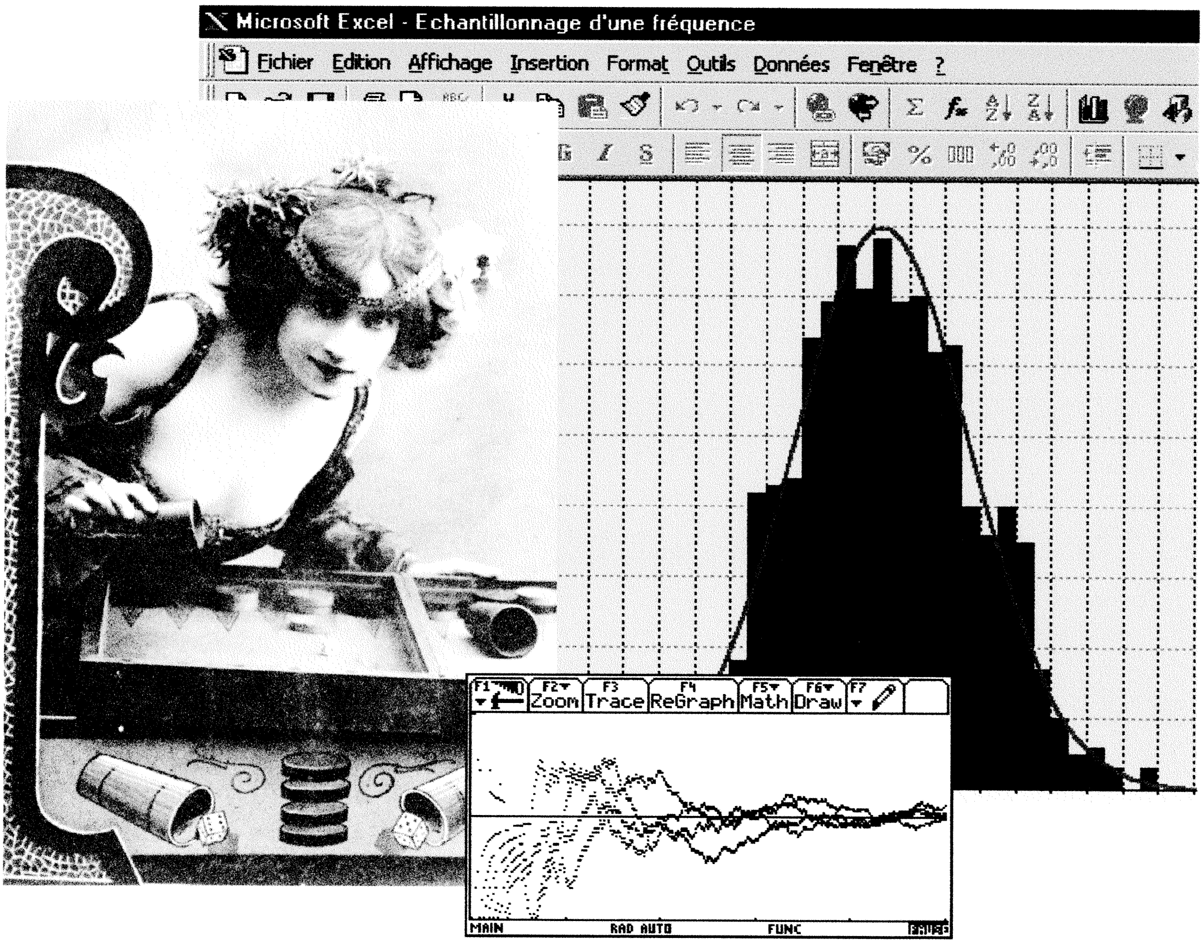
PUBLICATION DU GROUPE INTER-IREM «LYCEES TECHNIQUES »

SIMULATION

D'EXPÉRIENCES ALÉATOIRES



UNE EXPERIMENTATION DU HASARD DE LA PREMIERE AU B.T.S. SUR CALCULATRICE ET ORDINATEUR

Commission Inter-IREM
Lycées technologiques
Institut Galilée
Avenue J.B. Clément
93430 VILLETANEUSE

Publication n° 93
Deuxième édition
Janvier 2001

Université Paris-Nord.-I.R.E.M.
SIMULATIONS D'EXPERIENCES
ALEATOIRES .- 162 pages.

ISBN 286240 093 2

Dépôt légal : 4ème trimestre 1998

70.00 F

Cette brochure a été réalisée dans le cadre de travaux de recherche lancés conjointement par l'ADIREM (Assemblée des Directeurs d'IREM), la Direction de l'enseignement scolaire (Bureau A11) et l'Inspection générale de mathématiques.

Elle fait partie d'une série de publications pour 1998-1999 du thème 3 de la convention DLC - ADIREM : «Suivi de l'enseignement des mathématiques en lycées professionnels et en lycées technologiques».

Les enseignants participant à ces travaux ont bénéficié d'un financement de la Direction de l'enseignement scolaire.

Cette brochure a été réalisée par

Philippe DUTARTE

Christian KERN

de la CII Lycées technologiques

avec la participation de :

Marie-France	NOUGUES	de l'IREM de MONTPELLIER
Geneviève	SAINT-PIERRE	de l'IREM de PARIS-NORD
Bernard	VERLANT	responsable de la CII LP-LT.

Les auteurs remercient vivement Françoise JUHEL de la Bibliothèque Nationale de France qui a autorisé la reproduction de plusieurs illustrations.

Sommaire

"Comment oser parler des lois du hasard ? Le hasard n'est-il pas l'antithèse de toute loi ?"
J. Bertrand – Calcul des probabilités – 1889.

Avant-propos

Depuis Pascal "stupéfait" du paradoxe d'une "géométrie du hasard" jusqu'à Bertrand s'étonnant encore que le hasard puisse se soumettre à des lois, la force séduisante des probabilités réside dans son pouvoir d'organisation dans le domaine chaotique de l'imprévisible. C'est ce que l'on a d'abord voulu faire vivre aux élèves par les moyens modernes de la simulation.

Organisation de la brochure :
Les activités sur **calculatrice** sont proposées sous forme de **fiches de travaux pratiques photocopiables**, contenant des programmes à saisir par les élèves.
Les développements sur **Excel** sont conçus pour être des **produits finis**, directement utilisables pour illustrer la leçon.

AVERTISSEMENT A LA PREMIERE ET A LA DEUXIEME EDITION

Par cette brochure nous souhaitons, au-delà d'un apport d'idées ou d'informations, susciter un **échange** entre enseignants, sur un thème que vous avez peut-être déjà expérimenté. Aussi présentons-nous, en les signalant, des activités qui n'ont pas encore été testées en classe et sur lesquelles nous aimerions avoir des avis. Enfin, bien qu'ayant fait l'objet d'une relecture soigneuse, cette brochure (et certains de ses programmes) peut contenir des erreurs, que vous voudrez bien nous signaler.

Vos critiques, suggestions ou expériences nous intéressent !

Pour contacter les auteurs

⇨ A propos des activités sur calculatrices :
Philippe DUTARTE
Professeur au lycée E. BRANLY
33, rue du Petit Bois
94000 CRETEIL
Courrier électronique : **dutarte@club-internet.fr**

⇨ A propos des activités sur Excel 97 :
Christian KERN
Professeur au lycée ALAIN
27, Bd Mézeray
61014 ALENCON cedex
Courrier électronique : **kernch@club-internet.fr**

JACOBI BERNOULLI,
Profeff. Bafil. & utriufque Societ. Reg. Scientiar.
Gall. & Pruff. Sodal.
MATHEMATICI CELEBERRIMI,

ARS CONJECTANDI,

OPUS POSTHUMUM.

Accedit

TRACTATUS
DE SERIEBUS INFINITIS,

Et EPISTOLA Gallicè fcripta
DE LUDO PILÆ
RETICULARIS.

BASILEÆ,
Impenfis THURNISIORUM, Fratrum.
cIↃ IↃcc XIII.

"Cette manière empirique de déterminer par expérience les nombres des cas n'est ni neuve ni insolite."

Iacob Bernoulli

L'Art de conjecturer – 1713.

1 Introduction

A – INTERET PEDAGOGIQUE DE LA SIMULATION

⇨ L'approche fréquentiste :
Les instructions officielles insistent sur la nature expérimentale qu'il est souhaitable de donner à l'enseignement des statistiques et probabilités. Dans cet objectif, il s'agit de lier la notion de probabilité à celle de fréquence observée après la répétition un grand nombre de fois d'une expérience. La simulation permet, à peu de frais, d'y parvenir, donnant ainsi plus de sens aux concepts théoriques.
⇨ L'épreuve de l'expérience :
La simulation permet de mettre à l'épreuve de l'expérience certains résultats (parfois admis) du cours. Elle favorise le débat scientifique, obligeant les élèves à confronter leurs observations et à les analyser. Dans le cadre de travaux pratiques (un peu au sens de la physique), on constate l'efficacité de la théorie, on donne une réalité aux formules. On peut également, en sens inverse, expérimenter d'abord, pour émettre des conjectures ou introduire une notion.
⇨ Le hasard et l'ordre :
Un des principaux effets des activités de cette brochure est de réintroduire le "hasard" au cœur de notre enseignement de probabilité, lequel devient trop souvent du "dressage" aux techniques de résolution de problèmes (simple application de formules). Les probabilités ne consistent-elles pas à mettre un peu d'ordre là où le néophyte ne voit que l'intervention du "hasard" ? Dès que l'on a décelé un certain ordre, on peut prévoir. C'est la force insolente des probabilités, et certaines activités de simulation permettent d'en prendre conscience.
⇨ La modélisation :
Entre l'expérimentation et la théorie, se situe la modélisation. C'est une démarche scientifique qui est fréquemment celle de l'ingénieur en entreprise. La simulation, en fournissant des échantillons des distributions réelles, permettra parfois de trancher entre deux modèles concurrents, mais, le plus souvent, elle nécessitera, pour être mise en œuvre, une réflexion préalable sur le modèle mathématique. On comprendra également mieux le rôle des probabilités par rapport à un historique statistique (articulation statistiques/probabilités).
⇨ L'attrait de la nouveauté :
On "accroche" les élèves par une pratique nouvelle, utilisant une technologie récente pour laquelle ils ont de l'attrait. Cela donne une autre image des maths et motive parfois les plus récalcitrants à leur égard.
⇨ La simulation pour elle-même :
On initie les élèves aux techniques de simulation de plus en plus utilisées par les professionnels des statistiques, les ingénieurs, mais aussi dans d'autres domaines scientifiques, où l'on exploite la

puissance de calcul des ordinateurs pour étudier des distributions, soit inconnues, soit trop "rares", soit pour lesquelles le calcul analytique est impossible.

B – DEUX STRATEGIES POUR LA SIMULATION

Suivant les objectifs, les contraintes matérielles, deux stratégies sont utilisées.

	"Le hasard en direct"	"Simulation globale"
PRINCIPE	Afficher l'évolution "en temps réel" des simulations successives jusqu'à l'état final.	N'afficher que l'état final d'un nombre de simulations fixé.
INTERET	Observer les fluctuations du hasard et la convergence vers le modèle probabiliste testé : • soit sous forme d'une courbe gardant la trace du passé (type oscillographe), • soit sous forme ; cumulative mais en perdant la trace de la chronologie.	Réduire la durée d'exécution lorsqu'on a besoin d'un très grand nombre de simulations dont le détail et la chronologie ont peu d'intérêt.
COMMENTAIRE	Stratégie plus vivante, plus ludique et ménageant un certain suspens.	Stratégie plus aride mais nécessaire, en particulier dans les questions d'échantillonnage.

C - SUR CALCULATRICES

L'avantage des calculatrices est la grande souplesse de leur utilisation, ne nécessitant ni changement de salle, ni apprentissage particulier (les programmes sont souvent simples et ne constituent pas un réel obstacle). Les élèves sont souvent très heureux d'exploiter le matériel puissant dont ils disposent et qui, généralement, leur sert essentiellement à stocker des "antisèches".
L'utilisation des calculatrices favorise le débat et le travail de groupe. Les élèves comparant leurs résultats, essayant de les interpréter. La présentation des activités sous forme de T.P. favorise l'autonomie, même si des synthèses sont parfois nécessaires.
Une initiation à la programmation, même si ce n'est pas l'objectif, est possible, pour ceux qui le désirent (élève ou professeur) à partir des activités qui suivent.
L'aspect pénible est la grande diversité des modèles. Cependant, en se limitant aux marques <u>CASIO</u> et <u>TEXAS INSTRUMENTS</u>, on touche au moins 80% des élèves, et un tableau résumant les principales procédures suffit alors à aider ceux qui sont en difficulté.
Les programmes de cette brochure ne sont donnés que pour les marques CASIO et T.I. . Les calculatrices <u>SHARP</u> ont un langage très proche des T.I. . Comme on le sait, les <u>H.P.</u> sont très spécifiques mais leurs propriétaires sont souvent des passionnés, qui peuvent se débrouiller seuls. Ils devront toutefois se passer des instructions Lbl et Goto, ce qui demande une refonte du programme dont ils ne sont pas toujours capables.
En tout état de cause, pour qu'une activité fonctionne, il n'est pas nécessaire que toutes les calculatrices tournent. On peut se contenter d'une dizaine.
La gestion de l'hétérogénéité du parc de calculatrices peut être facilitée avec l'aide des fiches de l'IREM de Lyon "36 élèves, 36 calculatrices", ou les tableaux fournis en annexe.

D – SUR ORDINATEUR P.C. AVEC EXCEL 97

Avantages :

- Tirer profit de la rapidité, de la puissance de calcul et des possibilités de visualisation de cet outil.
- Utiliser des programmes prêts à l'emploi sans qu'**aucune connaissance sur Excel** ne soit nécessaire de la part de l'utilisateur.

Utilisation en classe :
Contrairement aux manipulations sur calculatrice, toutes conçues pour être des séances de TP, ces programmes sont plutôt destinés à être des supports du cours. Leur utilisation peut cependant être intégrée dans une séance de TP ou compléter une séance sur calculatrice.

Objectif général des programmes :
Confronter des résultats expérimentaux obtenus par simulation et un modèle probabiliste.
Le plus souvent, il s'agit de comparer numériquement et-ou graphiquement une série statistique obtenue par simulation avec une ou plusieurs distributions théoriques probabilistes. Certes, la méthode de comparaison n'est guère scientifique et un test du χ^2 serait plus probant pour...les profs! L'adjonction de tests du χ^2 aux programmes est envisagée pour une réédition ultérieure.

Durée :

- Les **simulations globales** ne prennent que quelques secondes.
- Les **simulations en direct**, s'écoulant dans le temps, le professeur peut continuer son cours et faire observer l'évolution de l'expérience quand il veut.

Types d'installation :

- Poste unique muni d'un grand écran, où le professeur est le manipulateur (utilisation en cours).
- Réseau où chaque étudiant expérimente à son gré avec possibilité de comparaison des résultats de chacun (utilisation en TP).

Matériel requis :

- Les programmes ont été conçus sur un micro équipé d'un Pentium 233 et de 32 Mo de RAM. Cette configuration permet une utilisation optimale. Une configuration inférieure engendrera un temps d'attente plus long au lancement de certains programmes voire des messages d'Excel avertissant l'utilisateur de cette lenteur. Le fonctionnement de certains programmes peut aussi être ralenti.
- Il est **indispensable** qu'**Excel 97** (ou version ultérieure) soit installé sur votre ordinateur.

Configuration de l'affichage :
Les programmes ont été conçus sur un espace de bureau de 800 par 600 pixels. Le cas où vous utiliseriez une configuration différente est en principe prévu : une macro-commande qui s'exécute à l'ouverture des programmes est chargée d'ajuster la zone utile à la taille de votre écran. Si le résultat ne donne pas satisfaction, vous pouvez y remédier:

- soit sous Windows en reconfigurant l'affichage
- soit sous Excel avec le menu Affichage / Zoom / Personnalisé, par tâtonnement sur la taille du zoom

Avertissement :
Un soin particulier a été apporté à la protection des programmes contre toute modification volontaire ou non de la part des élèves ou toute fausse manœuvre mais il n'est pas exclu que certaines faiblesses aient échappé à notre vigilance. Nous prions, par avance, nos lecteurs d'excuser les éventuelles maladresses d'un produit qui n'a pas été conçu par des professionnels de l'informatique et de nous faire part des défauts rencontrés afin de nous permettre d'y remédier dans

les éditions ultérieures. Nous invitons également nos lecteurs à nous communiquer leurs critiques, leurs suggestions pour améliorer les programmes actuels ou leurs idées de nouveaux programmes...

Installation sur le disque dur de votre ordinateur :
La disquette jointe à cette publication comprend 11 développements sur Excel contenus dans un dossier nommé **Simulation**. Il est conseillé de copier ce dossier sur votre (vos) disque(s) dur(s).
Mettre l'ordinateur en route
Insérer la disquette dans votre lecteur (A: ou autre)
Ouvrir Poste de travail
Ouvrir le lecteur de disque dur (C: ou autre)
Ouvrir le dossier dans lequel vous voulez installer **Simulation**
Ouvrir le lecteur de disquette 3 ½ (A: ou autre)
Sélectionner le dossier **Simulation**
Déplacer le dossier **Simulation** de (A: ou autre) vers le dossier destination en maintenant le bouton gauche de la souris appuyé (tirer-lâcher)

Lancement des programmes :

- Chaque programme porte dans le dossier **Simulation** le même nom que l'activité correspondante dans le paragraphe C des chapitres.
- Sous Windows, ouvrir le dossier **Simulation** puis le programme choisi.
- Les programmes étant protégés contre l'enregistrement de modifications, avant l'ouverture, Excel affiche une boîte de dialogue demandant de "taper un mot de passe" ou "ouvrir en lecture seule". Choisissez l'option **ouvrir en lecture seule**. (Par la suite, si vos élèves essaient d'enregistrer, Excel leur demandera de donner un nouveau nom au fichier, il vous restera donc à faire le ménage, mais le fichier d'origine sera intact).

Remarques techniques :

- Certains fichiers (Echantillonnage d'une moyenne, d'une fréquence, Intervalles de confiance d'une moyenne, d'une fréquence...) ont une taille très importante lorsqu'ils sont en fonctionnement. Pour les inclure sur une seule disquette, il a fallu les réduire : une macro-commande se déclenchant automatiquement à leur ouverture reconstitue la totalité du fichier. Ceci explique un temps d'attente plus long au lancement de ces programmes.
- Les programmes ont été réalisés sur des feuilles de calcul d'Excel dont ils utilisent les fonctions. Certaines manipulations font intervenir des boutons. Ceux-ci déclenchent des macro-commandes écrites en langage Excel 4 pour les programmes les plus anciens ou en VBA pour les plus récents.
- Des messages d'aide apparaissent dans certains programmes lorsque le pointeur de la souris passe sur les cellules marquées d'un petit triangle rouge dans le coin supérieur droit.

Quelques informations sur les fonctions d'Excel utilisées en simulation :
La simulation de la distribution uniforme sur [0 , 1] s'obtient avec le générateur de nombres aléatoires d'Excel à l'aide des fonctions :

ALEA() sur les feuilles de calcul et dans le langage Macro d'Excel 4
Rnd dans les procédures VBA

Les fonctions **ALEA()** ou **Rnd** étant toujours initialisées à partir de la même valeur, l'instruction VBA **Randomize** permet de les réinitialiser à partir d'autres valeurs. Cette instruction est exécutée automatiquement au lancement de tous les programmes afin de ne pas toujours retrouver les mêmes valeurs, en particulier lors d'une utilisation en réseau, ce qui permettra aux étudiants de comparer leurs résultats.
Une autre fonction d'Excel permet de générer des nombres entiers aléatoires entre des bornes. C'est la fonction **ALEA.ENTRE.BORNES()**. Mais elle n'a pas été utilisée ici car elle nécessite l'installation de la macro complémentaire Utilitaire d'analyse qui n'a peut-être pas été effectuée sur votre ordinateur.

"Joignant la rigueur des démonstrations de la science à l'incertitude du sort, et conciliant ces deux choses en apparence contradictoires, [cette matière] peut s'arroger à bon droit ***ce titre stupéfiant de géométrie du hasard.****"*

PASCAL – 1654

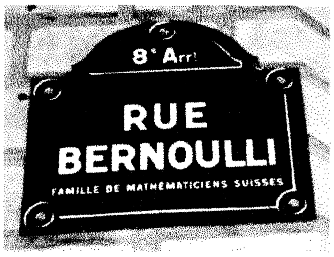
2 Présentation théorique de la simulation

Lors d'une promenade (aléatoire ?) dans les rues de Paris, nous verrons qu'il est assez simple de simuler, à partir du générateur de nombres pseudo-aléatoires, les principales "lois du hasard".

1. Distribution uniforme sur [0 ; 1]

La simulation de cette distribution correspond au générateur de nombres aléatoires présent dans toutes les calculatrices sous la forme : $\boxed{\text{Ran\#}}$ (CASIO) ou $\boxed{\text{rand}}$ (TEXAS I.).
Ce générateur fonctionne selon une formule de récurrence, du type $x_{n+1} = ax_n \bmod m$, par exemple, choisie pour ses qualités statistiques, constatées de façon empirique (voir [1]).
Sur Excel 97, on le trouve sous la forme $\boxed{\text{ALEA()}}$ dans les feuilles de calcul et $\boxed{\text{Rnd}}$ dans les macro-commandes en VBA.

2. Distribution de Bernoulli

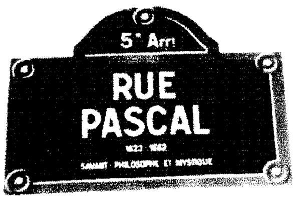


Les résultats d'une variable aléatoire X suivant la loi de Bernoulli de paramètre p (c'est à dire telle que $P(X = 1) = p$ et $P(X = 0) = 1-p$, avec $p \in [0 ; 1]$) sont simulés par l'instruction :

$$\boxed{\text{Int(Ran\# + p)}}\ .$$

En effet, l'instruction Ran# + p correspond à une distribution uniforme sur [p ; 1 + p] et la partie entière d'un nombre choisi dans cet intervalle est 0 s'il appartient à [p ; 1[et 1 s'il appartient à [1 ; 1 + p]. L'amplitude de l'intervalle conduisant au "succès" 1 est p tandis que celle de celui conduisant à "l'échec" 0 est 1 - p.

3. Distribution binomiale $\mathscr{B}$(n ; p)



Cette distribution peut s'obtenir à l'aide de la somme de n variables de Bernoulli indépendantes de même paramètre p. Il suffit donc de répéter et de sommer n fois l'instruction précédente.

Exemple de simulation d'une réalisation de variable aléatoire suivant la loi $\mathscr{B}$(10 ; 0,2) :

CASIO (sans "For") (anciens modèles de la fx 7000G à la CFX 9900Gc)	CASIO (fx 6910G - CFX 9930GT - 9960GT - 9990)	TI 81	TI 80 - 82 – 85 - 92(*)
0 → S ↵ 1 → I ↵ Lbl 1 ↵ Int(Ran# + 0.2) + S → S↵ I + 1 → I ↵ I ≤ 10 ⇒ Goto 1 ↵ S	0 → S ↵ For 1 → I To 10 ↵ Int(Ran# + 0.2) + S → S↵ Next ↵ S	:0 → S :1 → I :Lbl 1 :Int(rand + 0.2) + S → S :I + 1 → I :If I ≤ 10 :Goto 1 :Disp S	:0 → S :For (I,1,10) :Int(rand + 0.2) + S → S :End :Disp S

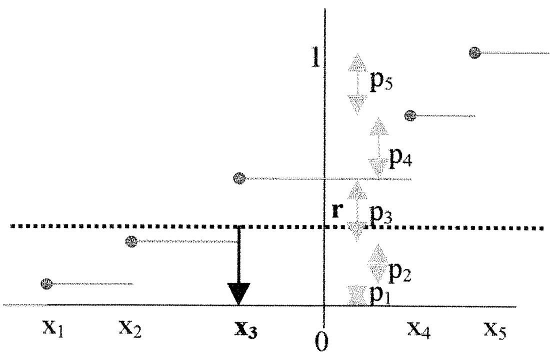
Remarques : Sur **TI 83**, il suffit de faire randBin(10,0.2) (par MATH PRB 7). (*) Sur **TI 92**, la syntaxe est rand( ).

4. Simulation théorique d'une distribution discrète à partir de la loi $\mathscr{U}$([0;1])

Le principe suivant permet, en théorie, la simulation de n'importe quelle distribution discrète à partir de la loi uniforme sur [0;1] en utilisant la *fonction de répartition*. Son importance réside dans le fait qu'il pourra être étendu au cas de distributions continues.
On veut simuler les réalisations d'une variable aléatoire X de loi définie par $P(X = x_i) = p_i$ avec $i \in I$, partie de $\mathbb{N}$ et $\Sigma p_i = 1$. On désigne par F la fonction de répartition de X et l'on définit une "pseudo-inverse" de F sur [0;1] par $F^{-1}(t) = \inf\{x \in \mathbb{R} \,/\, F(x) > t\}$.
Une réalisation de X est alors simulée par F^{-1}(Ran#) c'est à dire un programme donnant :

$$\boxed{x_i \text{ avec } i \in I \text{ le plus petit tel que } \sum_{k \le i} p_k > \text{Ran\#}}$$

Ceci est plus clair sur un dessin.



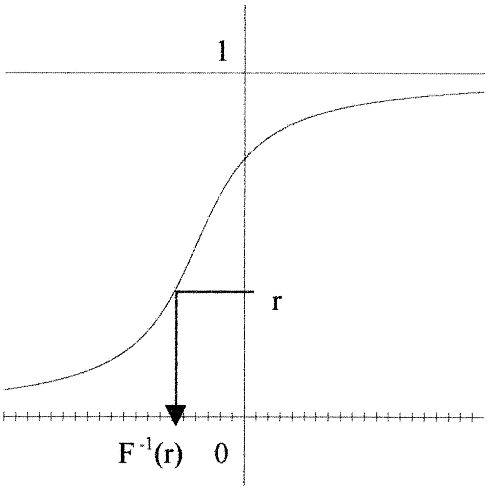
La valeur r fournie par Ran# correspond à la réalisation $x_3 = F^{-1}(\,r\,)$ de la variable aléatoire X.
Il suffit en fait de partager l'intervalle [0 ; 1] proportionnellement aux probabilités p_i , puis, selon la subdivision à laquelle appartient la valeur r donnée par Ran#, prendre la valeur x_i correspondante comme réalisation de X.
Comme seules les proportions importent, on peut remplacer [0;1] par tout autre intervalle. Ainsi, une réalisation de la variable aléatoire X définie par $P(X=x_i) = \dfrac{1}{6}$ avec $x_i \in \{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6\}$ (jet d'un dé) pourra être simulée par $\boxed{\text{Int(6Ran\#+1)}}$.

5. Simulation théorique d'une distribution continue à partir de la loi $\mathcal{U}([0;1])$

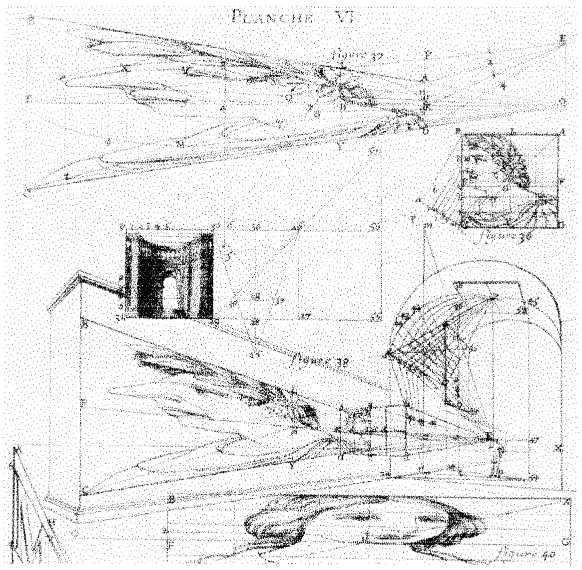
Celle-ci repose sur le résultat suivant (où l'on reprend l'idée précédente).

Si X est une variable aléatoire réelle, de fonction de répartition F continue, strictement croissante, alors la variable aléatoire Y = F(X) est uniformément distribuée sur [0 ; 1].

En effet, F étant continue strictement croissante, c'est une bijection d'un intervalle de $\mathbb{R}$ dans (0 ; 1).
Pour tout $y \in [0\,;\,1]$, $P(Y \le y) = P(F(X) \le y) = P(X \le F^{-1}(y)) = F[F^{-1}(y)] = y$ car F^{-1}, tout comme F, est croissante.
Si $y < 0$, $P(Y \le y) = P(F(X) \le y) = 0$ et si $y > 1$, $P(Y \le y) = 1$ car $0 \le F(X) \le 1$.
On constate donc que la fonction de répartition de Y est celle de la loi uniforme sur [0 ; 1].



Ainsi, si l'on tire n nombres au hasard r_i, parmi des nombres uniformément répartis sur [0 ; 1], un échantillon de la distribution de X sera donné par $F^{-1}(r_i)$.



Cette méthode, où l'on retrouve l'idée d'une déformation de la loi uniforme, est dite "*de l'anamorphose*".
Elle est praticable chaque fois que F^{-1} possède une expression analytique simple.

Epure de construction d'anamorphose (1670) © BnF - Paris (Voir Ph. COMAR - "La perspective en jeu" - Découvertes Gallimard).
L'anamorphose est un procédé de perspective qui, par projection sur un plan oblique, simule une image inintelligible, si on ne la regarde pas du point précis ayant servi à sa construction.

6. Distribution exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$

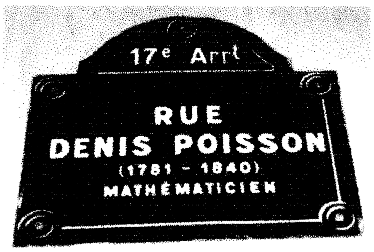
Considérons la situation où l'on dispose de matériels identiques. Lorsque le taux d'avarie est constant, on montre que la variable aléatoire T qui à tout matériel tiré au hasard associe son temps de bon fonctionnement avant défaillance, suit la loi exponentielle de paramètre λ (voir "Fiabilité"), de fonction de répartition F définie sur [0 ; +∞[par :

$$F(t) = P(T \le t) = \int_0^t f(t)\,dt = \int_0^t \lambda e^{-\lambda t}\,dt = 1 - e^{-\lambda t}.$$

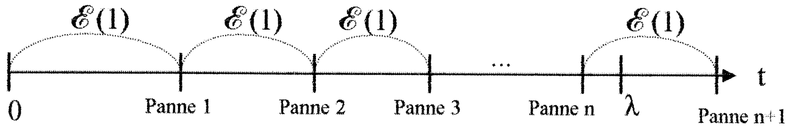
Pour simuler les réalisations de T, il suffit, d'après la méthode de l'anamorphose, de calculer $-\frac{1}{\lambda}\ln(1 - r_i)$ où les valeurs r_i sont données par Ran#. Et comme les nombres $1 - r_i$ sont également uniformément distribués sur [0 ; 1], on peut dire que :
Les réalisations d'une variable aléatoire suivant la loi exponentielle $\mathscr{E}(\lambda)$ sont simulées par l'instruction :

$$\boxed{(-\ln \text{Ran\#}) \div \lambda}.$$

7. Distribution de Poisson $\mathscr{P}(\lambda)$



La méthode suivante consiste à simuler un processus de Poisson.
On dispose de plusieurs matériels identiques. Supposons que la variable aléatoire T correspondant au temps de bon fonctionnement d'un appareil suive la loi exponentielle de paramètre 1. Chaque appareil est réparé instantanément à chaque panne. On suppose les pannes indépendantes les unes des autres.
La variable aléatoire X associant, à chaque appareil tiré au hasard, le nombre de pannes intervenues dans l'intervalle de temps [0 ; λ] suit la loi de Poisson $\mathscr{P}(\lambda)$.



Réalisation de la valeur n de la variable aléatoire X suivant la loi $\mathscr{P}(\lambda)$.

En effet, soit $E_1, E_2, \ldots, E_n, \ldots$ une suite de variables aléatoires indépendantes de loi $\mathscr{E}(1)$.
On a $P(X = n) = P(E_1+E_2+\ldots+E_n \le \lambda < E_1+E_2+\ldots+E_n+E_{n+1})$

$$= \int_{\mathbb{R}_+^n \cap \{x_1+\ldots+x_n \le \lambda < x_1+\ldots+x_{n+1}\}} e^{-x_1}e^{-x_2}\ldots e^{-x_{n+1}}dx_1\ldots dx_{n+1} \text{ d'après l'indépendance des } E_i$$

$$= \int_{\mathbb{R}_+^n \cap \{x_1+\ldots+x_n \le \lambda\}} \left(\int_{\lambda-(x_1+\ldots+x_n)}^{+\infty} e^{-x_{n+1}}dx_{n+1}\right) e^{-x_1}e^{-x_2}\ldots e^{-x_n}dx_1\ldots dx_n$$

d'où $$P(X = n) = \int_{\mathbb{R}_+^n \cap \{x_1+\ldots+x_n \le \lambda\}} e^{-(\lambda-x_1-\ldots-x_n)}e^{-x_1}e^{-x_2}\ldots e^{-x_n}dx_1\ldots dx_n$$

$$= e^{-\lambda}\int_{\mathbb{R}_+^n \cap \{x_1+\ldots+x_n \le \lambda\}} dx_1\ldots dx_n = \frac{e^{-\lambda}\lambda^n}{n!}.$$

On simule donc la distribution de la loi $\mathscr{P}(\lambda)$ en recherchant le plus grand entier n tel que $\sum_{i=1}^{n} -\ln r_i < \lambda \Leftrightarrow \prod_{i=1}^{n} r_i > e^{-\lambda}$ où les r_i sont donnés par le générateur de nombres aléatoires.

Exemple de simulation d'une réalisation de variable aléatoire suivant la loi $\mathcal{P}$ (4) :

CASIO anciens modèles de la fx 7000G à la CFX 9900Gc	CASIO fx 6910G CFX 9930GT - 9960 - 9990	TI 81 - 80	TI 82 - 83 - 85 - 92
1 → P ↵ 0 → N ↵ Lbl 1 ↵ N + 1 → N ↵ P Ran#→ P ↵ P > e-4 ⇒ Goto 1 ↵ N - 1	1 → P ↵ 0 → N ↵ While P > e(-4) ↵ N + 1 → N ↵ P Ran#→ P ↵ WhileEnd ↵ N - 1	:1 → P :0 → N :Lbl 1 :N + 1 → N :P rand→ P :If P > e(-4) :Goto 1 :Disp N - 1	:1 → P :0 → N :While P > e(-4) :N + 1 → N :P × rand → P :End :Disp N - 1

8. Distribution normale $\mathcal{N}$ (m ; σ)

⇨ **Simulation approchée :**

Une réalisation d'une variable aléatoire suivant la loi normale $\mathcal{N}$ (m ; σ) peut être simulée par l'instruction

$$\boxed{\sigma(\text{Ran\#}+\text{Ran\#}+\text{Ran\#}+\text{Ran\#}+\text{Ran\#}+\text{Ran\#}+\text{Ran\#}+\text{Ran\#}+\text{Ran\#}+\text{Ran\#}+\text{Ran\#}+\text{Ran\#}-6)+m}$$

(où l'on répète 12 fois l'instruction Ran#).

Ce résultat repose sur le théorème limite central.
La somme de n variables aléatoires X_i uniformes sur [0 ; 1] et indépendantes suit approximativement, pour n assez grand, une loi normale. En pratique, ceci est acquis dès que n = 12.

Soit $Y = \sum_{i=1}^{12} X_i$ *alors* $E(Y) = 12\,E(X) = 12\int_0^1 x\,dx = 6$

et $V(Y) = 12\,V(X) = 12[E(X^2) - (E(X))^2] = 12\frac{1}{12} = 1$ *. Donc Y suit approximativement la loi* $\mathcal{N}$ *(6 ; 1) et* $\sigma(Y - 6) + m$ *suit approximativement la loi* $\mathcal{N}$ *(m ; σ).*

⇨ **Simulation "exacte" :**

Une simution "exacte" de la loi $\mathcal{N}$ (m ; σ) est possible sous la forme de l'instruction suivante (en mode Degrés) :

$$\boxed{m + \sigma\cos(360\ \text{Ran\#})\sqrt{\ }(-2\ \ln \text{Ran\#})}$$

Sur **TI 83 et TI 92**, il suffit de faire randNorm(m,σ).
Cette simulation est plus difficile à justifier. On pourra consulter [1] et [6].

NOUVEAUTÉS DE L'EDITION 2001 : FONCTIONS DE SIMULATION SUR EXCEL

En standard, EXCEL ne fournit que deux fonctions de simulation : ALEA() et ALEA.ENTRE.BORNES(). La disquette d'accompagnement de l'édition 2001 contient des fonctions de simulation de lois usuelles que nous avons créées, et qui peuvent être ajoutées à votre installation d'Excel. Elles seront alors disponibles dans les menus d'EXCEL.

Pour en savoir plus, consulter l'annexe 2, page 163.

Carte postale datée de 1903.

"Il n'est pas possible à l'esprit humain d'imiter parfaitement le hasard, c'est à dire de substituer un mécanisme rationnel quelconque à la méthode empirique qui consiste à effectuer une suite indéfinie d'épreuves répétées. Telle est la raison essentielle pour laquelle [...] il est nécessaire d'introduire la notion de probabilité d'un événement isolé."

E. BOREL – Valeur pratique et philosophie des probabilités – 1938.

3 Générateurs de nombres aléatoires

S'il n'est toujours pas possible "d'imiter parfaitement le hasard" par des techniques algorithmiques, celles ci permettent cependant de s'en approcher de façon satisfaisante. Le générateur de nombres "pseudo-aléatoires" autorise ainsi des simulations que n'osait espérer Emile Borel.

A - OBJECTIFS

- Avoir une idée de la façon dont on peut obtenir une suite de nombres pseudo-aléatoires.
- Expérimenter statistiquement les qualités d'un générateur de nombres aléatoires.

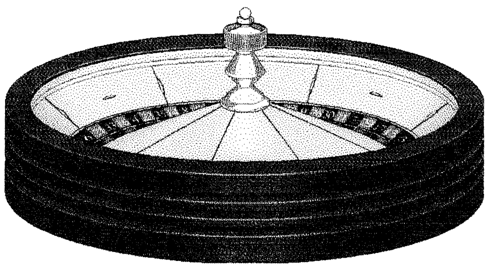
B – ACTIVITES SUR CALCULATRICES

Niveau	A partir de la première.
Situation dans la progression	Avant le cours de probabilité.
Durée	2 h.
Nature des activités	$\boxed{1}$ Exemple de génération, par récurrence, d'une suite de nombres pseudo-aléatoires. $\boxed{2}$ Etude du "random" de la calculatrice par simulation de tirages de nombres entiers entre 0 et 9. Fréquence d'apparition du 0 (puis des différents chiffres) sur un grand nombre d'expériences. Test du "poker" : expérimentation statistique et comparaison aux résultats théoriques.

TRAVAUX PRATIQUES

GENERATEURS DE NOMBRES ALEATOIRES

1 Simuler le hasard avec une calculatrice. Comment est-ce possible ?



Comment une calculatrice qui est faite pour calculer, selon des programmes précis qui ne doivent rien au hasard, peut-elle fournir des nombres choisis "au hasard" ?
Bien sûr, ce n'est pas possible, le hasard n'habite pas la calculatrice. En revanche, on peut calculer des nombres qui "ont l'air" d'arriver au hasard et ceci n'est pas nécessairement compliqué.

En mode habituel de calcul, effectuer :

CASIO	TEXAS INSTRUMENTS
0.5 → X EXE Frac (9821X + 0.211327) → X EXE Puis appuyer plusieurs fois sur EXE.	0.5 → X ENTER fPart (9821X + 0.211327) → X ENTER Puis appuyer plusieurs fois sur ENTER.

Frac ou **fPart** désigne la partie fractionnaire du nombre (on ne conserve que les décimales). Cette fonction se situe dans le fichier **NUM** (généralement par **OPTN** sur CASIO et par **MATH** sur T.I.).
Etes-vous capable de prévoir le prochain résultat ?

....

On effectue pourtant toujours le même calcul, assez simple, en boucle. Les nombres étranges, 9821 et 0,211327, ont été choisis (par tâtonnements) pour le caractère imprévisible des résultats.
Le générateur de nombres aléatoires de votre calculatrice fonctionne selon un principe semblable. Il ne suffit cependant pas d'être imprévisible pour simuler le hasard, encore faut-il satisfaire à certains critères statistiques.

2 Etude du "random" de votre calculatrice

1) La fonction "Random" :
En anglais, "Random" signifie hasard. Votre calculatrice contient un programme générateur de nombres aléatoires qui correspond à la touche **Ran#** sur CASIO (généralement par **OPTN PROB)** ou **rand** sur T.I. (généralement par **MATH PRB**, syntaxe rand( ) sur TI92).
a) Appuyer sur Ran#, puis plusieurs fois de suite sur EXE. Que constate-t-on ?

....

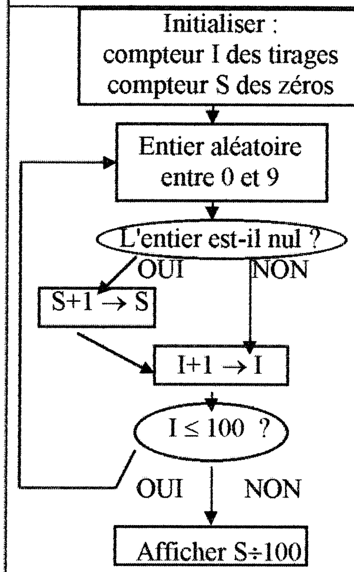
b) Pour obtenir des nombres entiers "aléatoires" entre 0 et 9, on utilise en plus la fonction "partie entière" **Int** sur CASIO (par **OPTN NUM)** ou **int** sur T.I. (par **MATH NUM**).
Effectuer Int(10 Ran#), puis appuyer plusieurs fois sur EXE. Que constate-t-on ?

....

2) Fréquence d'apparition du 0 :
Afin de tester la qualité d'un générateur de nombres aléatoires, on lui fait passer de nombreuses épreuves statistiques.

Examinons par exemple, dans le cas de nombres entiers entre 0 et 9, fournis par votre calculatrice, quelle est la proportion (ou fréquence) des 0.
Théoriquement, pour un hasard "parfait", quelles chances a-t-on d'obtenir le nombre 0 à un tirage ? ....

Entrer le programme suivant, qui permettra de compter le nombre de 0 obtenus pour 100 tirages :

Organigramme	CASIO anciens modèles sans l'instruction For	CASIO 6910 → 9990 avec l'instruction For	T.I. 80 81(*) 82 83 85(*) 92(*)
	0 → S ↵ 1 → I ↵ Lbl 1 ↵ Int (10 Ran#) = 0 ⇒ 1 + S → S ↵ I + 1 → I ↵ I ≤ **100** ⇒ Goto 1 ↵ S ÷ **100**	0 → S ↵ For 1 → I To **100** ↵ Int (10 Ran#) = 0 ⇒ 1 + S → S ↵ Next ↵ S ÷ **100**	:0 → S :For (I , 1 , **100**) :If int (10 rand) = 0 :1 + S → S :End :Disp S ÷ **100**

⇨ Pour obtenir certaines instructions :
- CASIO 6910 → 9990 : **For To Next** par PRGM COM ; **Int** par OPTN NUM ; **Ran#** par OPTN PROB ; = par PRGM REL (ou clavier) ; ⇒ par PRGM JUMP.
- TI 80 → 92 : Sur TI 83 85 92 possibilité d'utiliser **CATALOG** ; → s'obtient avec la touche STO ▸ ; **For If End** par PRGM CTL ; **int** par MATH NUM ; **rand** par MATH PRB ; = par 2nd TEST ; **Disp** par PRGM I/O.

✳ Particularités sur certains modèles :
- TI 81 : Remplacer For(I,1,100) par :1 → I puis :Lbl 1 et End par :I+1 → I puis :If I ≤ 100 puis :Goto 1.
- TI 85 : La syntaxe du test est = = par TEST.
- TI 92 : La syntaxe est For I,1,100 puis rand( ) et remplacer End par EndFor.

Compléter le tableau de résultats suivant, pour des simulations de 100 tirages :

100 tirages	simulation 1	simulation 2	simulation 3
Fréquence des 0 apparus			

Les écarts observés entre les simulations viennent du fait que 100 tirages sont assez peu pour faire des statistiques sérieuses. Remplacer dans le programme précédent **100** par 1000.
Fréquence des 0 sur 1000 tirages : ....

3) Répartition des apparitions des différents chiffres :

Pour ceux disposant du matériel indiqué dans le tableau suivant, et suffisamment habiles, le programme affichera sur un graphique le nombre d'apparitions de chacun des entiers de 0 à 9, sur 100 tirages.

CASIO 6910G - 9930 - 9940 - 9960 - 9990	TI 80 82 83	TI 92
ClrList ↵ Seq(I , I , 0 , 9 , 1) → List 1 ↵ Seq(0 , I , 1 , 10 , 1) → List 2 ↵ For 1 → I To **100** ↵ 1 + Int(10 Ran#) → N ↵ List 2[N] + 1 → List 2[N] ↵ Next ↵ S-WindMan ↵ ViewWindow 0,9,1,0,**20**,**10** ↵ Graph Y= **10** ↵ S-Gph1 DrawOn , Scatter , List 1 , List 2 ↵ DrawStat	:ClrList L_1 , L_2 :seq(I , I , 0 , 9 , 1) → L_1 :seq(0 , I , 1 , 10 , 1) → L_2 : For (I , 1 , **100**) :1 + int(10 rand) → N :L_2(N) + 1 → L_2(N) :End :Plot1 (Scatter , L_1 , L_2) :PlotsOn 1 :0 → Xmin :9 → Xmax :1 → Xscl :0 → Ymin :**20** → Ymax :**10** → Yscl :DrawF **10** :DispGraph	:DelVar L1 , L2 :seq(i , i , 0 , 9 , 1) → L1 :seq(0 , i , 1 , 10 , 1) → L2 :For i , 1 , **100** :1 + int(10×rand( )) → n :L2[n] + 1 → L2[n] :EndFor :0 → xmin :9 → xmax :1 → xscl :0 → ymin :**20** → ymax :**10** → yscl :DrawFunc **10** :PlotsOn :NewPlot 1 , 1 , L1 , L2

⇨ Pour obtenir certaines instructions :

- CASIO 6910 9940 : **ClrList** par PRGM CLR List ; **Seq** par OPTN LIST ; **List** par OPTN LIST ; **[** et **]** au clavier ; **S-Wind Man** par SET UP Man ou SHIFT SET UP S-WIN ; **Graph Y=** par Sketch puis GRPH puis Y= ; **S-Grph1** par F4(MENU) STAT GRPH GPH1 ; **Draw On** par F4(MENU) STAT DRAW ON ; **Scatter** par F4(MENU) STAT GRPH ; **DrawStat** par PRGM DISP Stat.
- TI 80 82 83 : **ClrList** par STAT ; **Seq** par 2^nd^ LIST OPS ; **L_1 L_2** au clavier par 2nd ; **Plot 1(Scatter,L_1,L_2)** par 2nd STAT PLOT PLOTS puis TYPE (scatter correspond au nuage de points) ; **Xmin** par VARS Window ; **DrawF** par 2nd DRAW puis DRAW ; **Dispgraph** par PRGM I/O.

Il est probable que vous constatez des fluctuations encore importantes entre les différents chiffres. C'est le contraire qui serait étonnant (même avec un hasard "parfait") car on a vu que 100 tirages était assez peu.
Comparer aux résultats pour 1000 tirages, en ajoutant un 0 aux nombres en **gras** puis en relançant le programme.

....

4) Test du poker :

Bien sûr, étudier la proportion de chaque résultat possible n'est pas suffisant. Le programme pourrait donner des résultats du type : 000111222333444555666777888999000111....
Les proportions sont respectées !
Un autre test statistique consiste à faire des groupes de 4 chiffres consécutifs et à examiner la proportion de résultats où tous les nombres sont différents (5819), où on a une paire (1518), trois chiffres identiques (1151) etc. C'est le test du poker.

Etudions le cas des groupes de 4 chiffres différents :

a) Etude théorique :
On choisit au hasard, avec ordre et remise, 4 chiffres parmi les 10 (de 0 à 9).
Combien y a-t-il de résultats possibles ?

....

Combien y a-t-il de résultats où les 4 chiffres sont différents ?

....

Quelles chances a-t-on, théoriquement, d'obtenir, à un tel tirage, un nombre de 4 chiffres différents?

....

b) Simulation statistique :
Le programme suivant permet, sur 100 tirages consécutifs de 4 chiffres aléatoires, de comptabiliser les groupes constitués de 4 chiffres différents.

Commentaires	CASIO anciens modèles sans l'instruction For	CASIO 6910 → 9990 avec l'instruction For	T.I. 80 82 83 85(*) 92(*)
I compteur des groupes de 4 chiffres. S compteur des groupes de 4 chiffres différents. Les 4 chiffres sont rangés dans les mémoires A, B, C et D. Si les contenus des mémoires A, B, C, D sont deux à deux différents, on augmente S d'une unité. 100 groupes de 4.	1 → I↵ 0 → S↵ Lbl 1↵ Int (10 Ran#) → A↵ Int (10 Ran#) → B↵ Int (10 Ran#) → C↵ Int (10 Ran#) → D↵ A = B ⇒ Goto 2↵ A = C ⇒ Goto 2↵ A = D ⇒ Goto 2↵ B = C ⇒ Goto 2↵ B = D ⇒ Goto 2↵ C = D ⇒ Goto 2↵ 1 + S → S↵ Lbl 2↵ I + 1 → I↵ I ≤ 100 ⇒ Goto 1↵ S ÷ 100 ◢	0 → S↵ For 1 → I To 100↵ Int (10 Ran#) → A↵ Int (10 Ran#) → B↵ Int (10 Ran#) → C↵ Int (10 Ran#) → D↵ A = B ⇒ Goto 1↵ A = C ⇒ Goto 1↵ A = D ⇒ Goto 1↵ B = C ⇒ Goto 1↵ B = D ⇒ Goto 1↵ C = D ⇒ Goto 1↵ 1 + S → S↵ Lbl 1↵ Next↵ S ÷ 100↵ Stop	:0 → S :For (I , 1 , 100) :int (10 rand) → A :int (10 rand) → B :int (10 rand) → C :int (10 rand) → D :If A = B :Goto 1 :If A = C :Goto 1 :If A = D :Goto 1 :If B = C :Goto 1 :If B = D :Goto 1 :If C = D :Goto 1 :1 + S → S :Lbl 1 :End (EndFor) :Disp S ÷ 100

⇨ Pour obtenir certaines instructions :
- CASIO 6910 → 9990 : **Stop** par PRGM CTL.

✳ Particularités sur certains modèles :
- TI 81 : Remplacer For(I,1,100) par :1 → I puis :Lbl 0 et End par :I+1 → I puis :If I ≤ 100 puis :Goto 0.
- TI 85 : Remplacer Goto 1 par Goto A1 et Lbl 1 par Lbl A1. La syntaxe du test est = = par TEST.
- TI 92 : Remplacer Goto 1 par Goto a1 et Lbl 1 par Lbl a1. La syntaxe est For I,1,100 puis rand( ) et remplacer End par EndFor.

Compléter le tableau ci-dessous par les fréquences de groupes de 4 chiffres différents observés sur 5 simulations de 100 groupes de 4 chiffres.

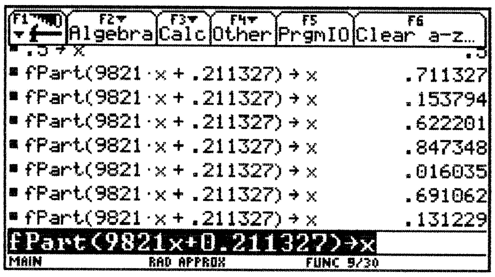
Simulations	n° 1	n° 2	n° 3	n° 4	n° 5
fréquences					

Faire la moyenne des résultats : ....
Comparer avec le résultat théorique :
....
....

Description et compte-rendu de l'activité "Générateurs de nombres aléatoires"

1 Simuler le hasard avec une calculatrice.

Le générateur donné était celui utilisé sur un ancien modèle de calculette H.P., dont voici les premiers termes :



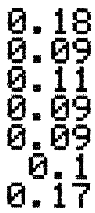
2 Etude du "Random" :

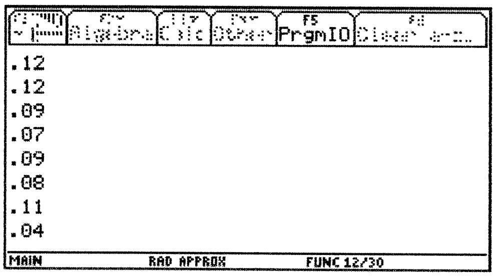
2) Fréquence d'apparition du 0 :

D'après la théorie de l'échantillonnage, pour des échantillons de taille n = 100 prélevés avec remise dans une population où la fréquence de 0 est p = 0,10, on doit observer un écart type, pour la proportion de 0 entre les différents échantillons, d'environ $\sigma = \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} = 0{,}03$.

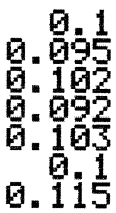
En revanche si l'on simule n = 1000 tirages, l'écart type entre les différents échantillons simulés tombera à $\sigma \approx 0{,}01$. Exemples de résultats sur CASIO 9940 et TI92 :

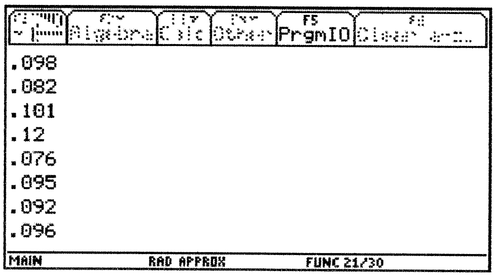
Avec n = 100 :





Avec n = 1000 :





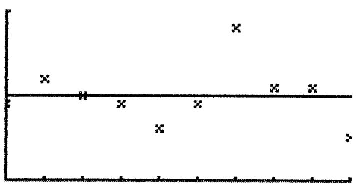
3) Répartition des apparitions des différents chiffres :

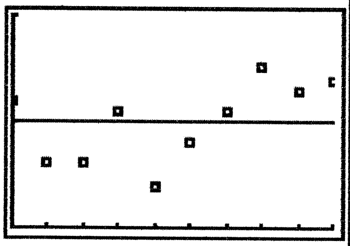
Ces programmes étant plus longs à saisir et plus "techniques", on pourra profiter des possibilités de rétroprojection pour en interpréter les résultats en commun.

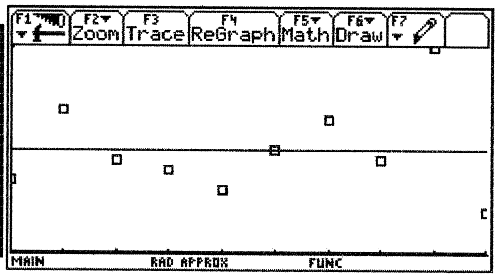
Images d'écrans de CASIO 9940, TI 83 et TI 92.

En abscisses les différents entiers de 0 à 9, en ordonnées leur nombre d'apparitions entre 0 et 20 pour n = 100, entre 0 et 200 pour n = 1000.

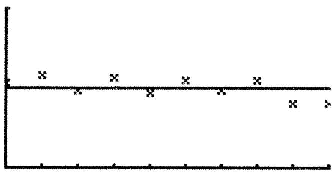
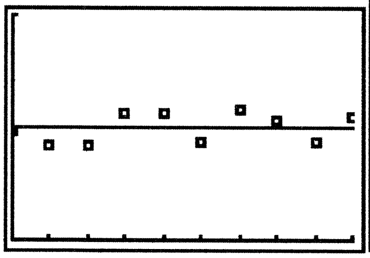
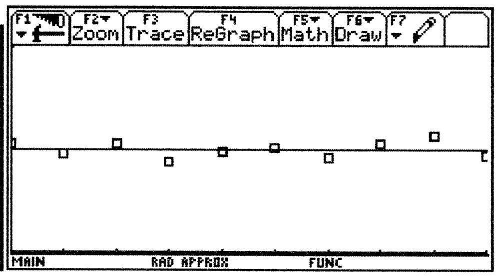
Avec n = 100 :







Avec n = 1000 (même échelle relative) :

4) Test du poker :
La probabilité théorique d'obtenir 4 chiffres consécutifs différents est

$$p = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7}{10^4} = 0{,}504.$$

Sur des simulations portant sur n = 100 groupes de 4 chiffres, on doit observer un écart type entre les échantillons d'environ $\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \approx 0{,}05$.

Exemples de résultats obtenus sur CASIO 9940 et TI 83 :

```
0.5
0.47
0.52
0.52
0.61
0.49
0.52
```

```
prgmGENERATE
             .37
            Done
              .5
            Done
             .54
            Done
```

Ce programme, contenant de nombreux tests, est plus long. Plutôt que de passer à n = 1000, on pourra faire une moyenne des résultats obtenus dans la classe.
Sur les 10 résultats précédents la moyenne est de 0,504 (le hasard ...).

⇨ PROLONGEMENT :
En section de B.T.S., en introduction aux variables aléatoires continues, on peut, dans le cadre de l'étude de la loi uniforme sur [0 ; 1], comparer aux valeurs théoriques de l'espérance et de l'écart type, les résultats statistiques obtenus sur le random (si l'espérance de 0,5 est intuitive, l'écart type de $\sqrt{\frac{1}{12}} \approx 0{,}29$ ne l'est pas).

CASIO	T.I.
ClrList ↵	:ClrList L_1
Seq(0 , I , 1 , 100 , 1) → List 1	:seq(0 , I , 1 , 100 , 1) → L_1
For 1 → I To 100 ↵	:For(I , 1 , 100)
Ran# → List 1 [I] ↵	:rand → L_1(I)
Next ↵	:End
1-Variable List 1,1	:Disp mean(L_1)
	:stdDev(L_1)

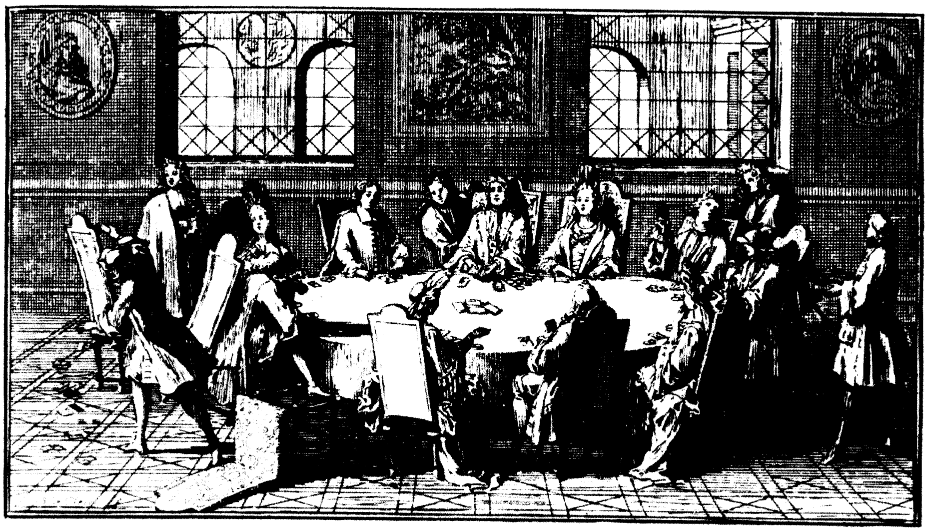
3 simulations, sur CASIO 9940 puis TI 83 :

```
1-Variable
x̄      =0.45899861
Σx     =45.8998619
Σx²    =29.7681342
xσn    =0.29496035
xσn-1  =0.2964463
n      =100
```

```
1-Variable
x̄      =0.48739784
Σx     =48.7397844
Σx²    =31.6045586
xσn    =0.28015875
xσn-1  =0.28157014
n      =100
```

```
1-Variable
x̄      =0.51323098
Σx     =51.3230989
Σx²    =34.0819172
xσn    =0.27823214
xσn-1  =0.27963382
n      =100
```

```
prgmRANDOM
   .5366676521
   .2759143204
   .4985662182
   .2914831876
    .503073168
   .2990281878
```



PROBLÊMES
SUR
LES JEUX DE HAZARD.

J'ai donc cru qu'il ſeroit utile, non ſeulement aux Joueurs, mais aux hommes en general, de ſçavoir que le hazard á des regles qui peuvent être connues, & que faute de connoître ces regles ils font tous les jours des fautes, dont les ſuites fâcheuſes leur doivent être imputées avec plus de raiſon qu'au deſtin qu'ils accuſent.

Pierre REMOND DE MONTMORT
Essay d'analyse sur les jeux de hazard - 1708.

"Ce qu'il n'est pas donné d'obtenir a priori l'est du moins a posteriori, c'est à dire qu'il sera possible de l'extraire en observant l'issue de nombreux exemples semblables."

Jacques BERNOULLI – 1713.

4

Approches de la notion de probabilité

A - OBJECTIFS

• Montrer deux approches possibles de la notion de probabilité et les liens qu'elles entretiennent :
Pour la première approche, la probabilité est une donnée *a priori*. Pour des raisons de symétrie, de régularité..., on attribuera une certaine probabilité à un événement (c'est essentiellement le cas de l'*équiprobabilité* : nb cas favorables / nb cas possibles).
Pour la seconde approche, issue de l'expérience, la probabilité est une valeur *a posteriori* vers laquelle se stabilise la fréquence (*loi des grands nombres*).
Cette dualité est omniprésente en probabilité.
• Tester, par simulation, la validité d'un modèle choisi a priori.

B – ACTIVITES SUR CALCULATRICE page 30

Niveau	A partir de la première.
Situation dans la progression	Avant le cours de probabilités. Introduction à la notion de probabilité.
Durée	2 h, l'activité $\boxed{3}$ n'étant terminée que par quelques-uns.
Nature des activités	$\boxed{1}$ Observation graphique de la convergence des fréquences au jeu de pile ou face. $\boxed{2}$ Importance de l'hypothèse d'équiprobabilité dans le problème du Duc de Toscane. Validation d'un modèle par simulation. $\boxed{3}$ Obtention, par simulation, d'un résultat étonnant (non intuitif) à propos du jeu du loto.

C – ACTIVITES SUR EXCEL page 38

Lancers de dés.

TRAVAUX PRATIQUES

DEUX APPROCHES DE LA NOTION DE PROBABILITE

Prévoir et calculer des résultats dus au hasard, tel est le but des probabilités.

passé →	**STATISTIQUES** Analyse, classement et représentation des données.	recherche d'un modèle →	**PROBABILITES** Théorie mathématique servant de modèle et permettant le calcul prévisionnel.	Prévisions pour le **futur** →

Les jeux de hasard sont à l'origine des premiers écrits sur les probabilités ($17^{\text{ème}}$ siècle). Le mot "hasard" vient de l'arabe "az-zar" et "aléatoire" vient du latin "alea", deux mots qui signifient "dé à jouer".

1 A PROPOS DU JEU DE PILE OU FACE

Il peut y avoir deux façons de trouver un modèle probabiliste.
Considérons, au jeu de pile ou face, la "probabilité" d'apparition de "pile" à un lancer :

• **Approche théorique "équiprobabiliste" :**
On considère que la pièce est "parfaite" et que les deux résultats possibles ("pile" ou "face") sont équiprobables. On a alors "une chance sur deux" d'obtenir "pile". On évaluera la "probabilité" d'obtenir "pile" à un lancer à 1/2.

• **Approche statistique par les fréquences :**
La "loi des grands nombres" veut que, *plus on fait d'expériences, plus la fréquence d'apparition* de "pile" *s'approche de la probabilité* de l'événement. On va en faire l'expérience : le programme suivant permet de visualiser, sur 500 lancers, l'évolution de la proportion (fréquence) de "piles".

CASIO anciens modèles sans l'instruction For	CASIO 6910G - 9930 - 9940 - 9960 - 9990	T.I. 81	T.I. 80 - 82 - 83 - 85(*)	T.I. 92
0 → P ↵ 1 → I ↵ Lbl 1 ↵ Int(Ran#+0.5) →A↵ A ≠ 0 ⇒ Goto 2 ↵ P + 1 → P ↵ Lbl 2 ↵ Plot I , P ÷ I ↵ I + 1 → I ↵ I ≤ 500 ⇒ Goto 1 ↵ "FIN"	ViewWindow 0,500 ,100,0.4,0.6,0.1↵ Graph Y= 0.5 For 1 → J To 4 ↵ 0 → P ↵ For 1 → I To 500 ↵ Int(Ran#+0.5) →A↵ A ≠ 0 ⇒ Goto 1 ↵ P + 1 → P ↵ Lbl 1 ↵ Plot I , P ÷ I ↵ Next ↵ Next	:0 → P :1 → I :Lbl 1 :Int(Rand+0.5) → A :If A ≠ 0 :Goto 2 :P + 1 → P :Lbl 2 :Pt-On (I , P ÷ I) :I + 1 → I :If I ≤ 500 :Goto 1 :Disp "FIN"	**:FnOff** **:PlotsOff** :0 → Xmin :500 → Xmax :100 → Xscl :0.4 → Ymin :0.6 → Ymax :0.1 → Yscl **:DrawF 0.5** :For(J ,1 , 4) :0 → P :For (I , 1 , 500) :int(rand+0.5) → A :If A = 0 :P + 1 → P :Pt-On (I , P / I) :End :End	:FnOff :PlotsOff :0 → xmin :500 → xmax :100 → xscl :0.4 → ymin :0.6 → ymax :0.1 → yscl :DrawFunc 0.5 :For j , 1 , 4 :0 → p :For i , 1 , 500 :int(rand( )+0.5) → a :If a = 0 :p + 1 → p :PtOn i , p/i :EndFor :EndFor
Commentaires	P : compteur des "piles". ; I : compteur des lancers. Simulation d'un lancer : 0 = "pile" et 1 = "face". Graphique : en abscisses, nb de lancers, en ordonnées, fréquence des "piles".			

⇨ Pour obtenir certaines instructions (voir page suivante) :

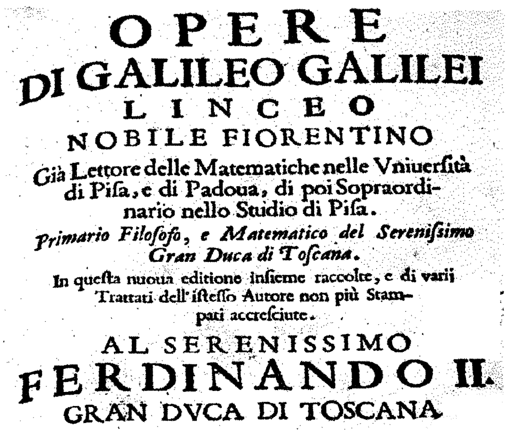
• CASIO 6910 → 9990 : **ViewWindow** par V-Window puis V.Win ; **Graph Y=** par Sketch GRPH Y= ; **For To Next** par PRGMpuis COM ; **Int** par OPTN NUM ; **Ran#** par OPTN PROB ; ≠ par PRGM REL ; ⇒ **Lbl Goto** par PRGM JUMP ; **Plot** par Sketch PLOT puis Plot.
• TI 80 → 92 :
Utilisation possible de la fonction **CATALOG** (sur TI 83 – 85 – 92).
FnOff par Y-VARS On/Off... ou VARS Y-VARS puis Off ; **PlotsOff** par 2nd STATPLOT puis PLOTS ; **Xmin** par VARS Window ; **DrawF** par 2nd DRAW puis DRAW ; **For** par PRGM CTL ; **int** par MATH NUM ; **rand** par MATH PRB ; **If** par PRGM CTL ; = par 2nd TEST (2nd MATH TEST sur TI 92) ; **Pt-On** par 2nd DRAW POINTS.
✳ Particularités sur certains modèles :
TI 85 : Les instructions en gras sont facultatives. Le test s'écrit avec = = (par TEST) : If A = = 0.

1) Qu'observe-t-on sur le graphique de la machine ? ....

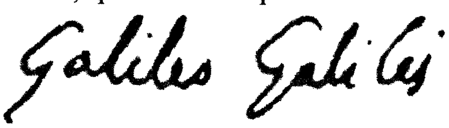
....

2) Lancer à nouveau, une ou deux fois, le programme, en superposant les graphiques.
Observations : ....

2 A PROPOS DES JEUX DE DES
Le problème du Duc de Toscane, résolu par Galilée


OPERE
DI GALILEO GALILEI
LINCEO
NOBILE FIORENTINO
Già Lettore delle Matematiche nelle Vniuersità di Pisa, e di Padoua, di poi Sopraordinario nello Studio di Pisa.
Primario Filosofo, e Matematico del Serenissimo Gran Duca di Toscana.
In questa nuoua editione insieme raccolte, e di varii Trattati dell'istesso Autore non più Stampati accresciute.
AL SERENISSIMO
FERDINANDO II.
GRAN DVCA DI TOSCANA

Le Grand Duc de Toscane aurait remarqué, à force de jouer, qu'en lançant trois dés et en totalisant les points obtenus, il était plus fréquent d'obtenir 10 que 9.
Une telle constatation l'étonnait beaucoup puisque 10 et 9 se décomposent tous deux de 6 manières différentes :
$9 = 1+2+6 = 1+3+5 = 1+4+4 = 2+2+5 = 2+3+4 = 3+3+3$
$10 = 1+3+6 = 1+4+5 = 2+2+6 = 2+4+4 = 2+3+5$
$= 3+3+4$.
Les deux événements devraient donc avoir les mêmes "chances" de se produire.
C'est Galilée (1564/1642) qui élucida ce problème.



• **Un premier modèle probabiliste :**
On suppose que les dés sont de trois couleurs différentes : bleu, blanc, rouge. On note d'abord le résultat du dé bleu, puis celui du blanc et enfin le rouge.
1) Dans ce modèle, combien y a-t-il de résultats possibles ?

....

....

....

....

....

2) Montrer que, parmi les résultats possibles précédents, 25 conduisent à la somme 9 et 27 à la somme 10.

....

....

....

....

....

3) En faisant le rapport du "nombre de cas favorables" au "nombre de cas possibles", quelles sont les probabilités, dans ce modèle, de l'événement "la somme est 9" et de l'événement "la somme est 10" ?

....

....

• **Un second modèle probabiliste :**

On considère qu'on lance les trois dés en même temps et qu'ils sont indiscernables, les résultats précédents (1 ; 2 ; 6) et (6 ; 1 ; 2) sont donc maintenant les mêmes : la somme vaut 9.

On ne comptabilise plus, dans ce second modèle, que 56 cas possibles.

4) En supposant l'équiprobabilité et en faisant le rapport du "nombre de cas favorables" au "nombre de cas possibles", quelles sont les probabilités, dans ce modèle, de l'événement "la somme est 9" et de l'événement "la somme est 10" ?

....

....

....

• **Approche statistique par les fréquences :**

Vous allez observer statistiquement le phénomène grâce au programme suivant :

Commentaires	CASIO anciens modèles sans l'instruction For	CASIO 6910G - 9930 - 9940 - 9960 - 9990	T.I. 81	T.I. 80 - 82 - 83 - 85$^{(*)}$ - 92$^{(*)}$
N : compteur des sommes égales à 9. D : compteur des sommes égales à 10. I : compteur des expériences. Somme des 3 dés dans A. Affichage tous les multiples de 100. 1000 expériences maxi.	0 → N ↵ 0 → D ↵ 1 → I ↵ Lbl 1 ↵ Int(1+6Ran#)+Int(1+6Ran#)+Int(1+6Ran#) → A ↵ A ≠ 9 ⇒ Goto 2 ↵ N + 1 → N ↵ Lbl 2 ↵ A ≠ 10 ⇒ Goto 3 ↵ D + 1 → D ↵ Lbl 3 ↵ Int(I÷100)-I÷100 ≠ 0 ⇒ Goto 4 ↵ I ◢ N ÷ I ◢ D ÷ I ◢ Lbl 4 ↵ I + 1 → I ↵ I ≤ 1000 ⇒ Goto 1↵ "FIN"	0 → N ↵ 0 → D ↵ For 1 → I To 1000↵ Int(1+6Ran#)+Int(1+6Ran#)+Int(1+6Ran#) → A ↵ A=9⇒N + 1 → N ↵ A=10⇒D + 1 → D↵ If Int(I÷100)-I÷100 = 0 ↵ Then I ◢ N ÷ I ◢ D ÷ I ◢ I-End ↵ Next ↵ "FIN"	:0 → N :0 → D :1 → I :Lbl 1 :Int(1+6Rand)+Int(1+6Rand)+Int(1+6Rand) → A :If A ≠ 9 :Goto 2 :N + 1 → N :Lbl 2 :If A ≠ 10 :Goto 3 :D + 1 → D :Lbl 3 :If Int(I÷100)-I÷100≠0 :Goto 4 :Disp I :Disp N ÷ I :Disp D ÷ I :Lbl 4 :I + 1 → I :If I ≤ 1000 :Goto 1 :Disp "FIN"	:0 → N :0 → D :For (I , 1 , 1000) :int(1+6rand)+int(1+6rand)+int(1+6rand) → A :If A = 9 :N + 1 → N :If A = 10 :D + 1 → D :If int(I/100) - I/100 = 0 :Then :Disp I :Disp N / I :Disp D / I :Pause :End (EndIf) :End (EndFor) :Disp "FIN"

⇨ Pour obtenir certaines instructions :

• CASIO 6910 → 9990 : ◢ par PRGM.

• TI 80 → 92 : **Disp** par PRGM I/O ; **Pause** par PRGM CTL.

✳ Particularités sur certains modèles :

• TI 85 : Tests d'égalités en = = comme If A = = 9.

• TI 92 : Syntaxe For i , 1 , 1000 et rand( ) .

5) Compléter, à l'aide de la simulation, le tableau statistique suivant (à 10^{-3} près) :

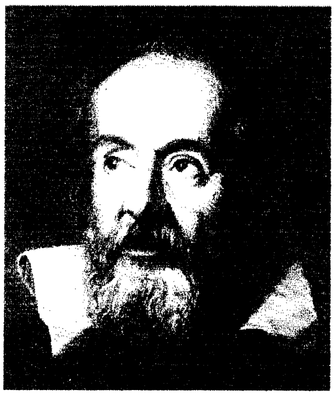
nombre d'expériences	100	200	300	400	500	600	700	800	900	1000
fréquence d'apparition de 9										
fréquence d'apparition de 10										

Constatation : ....

6) La répétition de 1000 expériences n'étant pas toujours suffisante pour confirmer la tendance observée par le Grand Duc de Toscane (qui devait jouer vraiment beaucoup), faire la moyenne des résultats de la classe pour les fréquences d'apparition, sur 1000 expériences, des sommes 9 et 10 :

....

A quelles "probabilités" conduit, approximativement, cette étude statistique ? ....
....



• Conclusion

7) Quel est le modèle le plus proche des valeurs observées par simulation ?

....

....

Quelle erreur théorique commet-on dans l'autre modèle ? ....

....

....

Galilée - © BnF - Paris

3 A PROPOS DU JEU DU LOTO

Sur ces 8 grilles, combien en remplissez-vous contenant, au moins, deux numéros consécutifs ?

Après avoir programmé votre calculatrice pour simuler le tirage du loto, vous déterminerez statistiquement, par l'étude des fréquences, la **probabilité d'avoir un tirage du loto comportant deux numéros consécutifs** au moins (numéro complémentaire excepté).

Il s'agit en effet d'une question dont l'approche théorique est plus difficile.

Entrer dans votre calculatrice le programme suivant, puis vérifier qu'il simule le tirage du loto (numéro complémentaire excepté) :

Commentaires	CASIO anciens modèles (mémoires indicées)	CASIO 6910G - 9930 - 9940 - 9960 – 9990	TI 80 82 83 85(*)	TI 92
Tirage au hasard, avec remise, de 6 numéros parmi 49.	Lbl 0 ↵ 1 → I ↵ Lbl 1 ↵ Int(1 + 49 Ran#) → A[I]↵ I + 1 → I ↵ I ≤ 6 ⇒ Goto 1 ↵	ClrList ↵ Seq(0,I,1,6,1) → List 1 ↵ Lbl 0 ↵ For 1 → I To 6 ↵ Int(1 + 49 Ran#) → List 1[I] ↵ Next ↵	:ClrList L_1 :seq(0,I,1,6,1) → L_1 :Lbl 0 :For (I , 1 , 6) :int(1 + 49 rand) → L_1(I) :End	:DelVar L1 , L2 :seq(0,I,1,6,1) → L_1 :Lbl a :For i , 1 , 6 :int(1 + 49 rand( )) → L1[i] :EndFor
Elimination des tirages contenant deux fois le même numéro.	0 → I ↵ Lbl 2 ↵ I + 1 → I ↵ I ≥ 6 ⇒ Goto 4 ↵ I + 1 → J ↵ Lbl 3 ↵ J > 6 ⇒ Goto 2 ↵ A[I] - A[J] = 0 ⇒Goto 0↵ J + 1 → J ↵ Goto 3 ↵	For 1 → I To 5 ↵ I + 1 → J ↵ Lbl 1 ↵ List 1 [I] - List 1 [J] = 0 ⇒ Goto 0 ↵ J + 1 → J ↵ J ≤ 6 ⇒ Goto 1 ↵ Next ↵	:For (I , 1 , 5) :For (J , I + 1 , 6) :If L_1 (I) – L_1 (J)= 0 :Goto 0 :End :End	:For i , 1 , 5 :For j , i + 1 , 6 :If L1[i] – L1[j] = 0 :Goto a :EndFor :EndFor
Affichage du tirage du loto.	**Lbl 4 ↵** **1→ I ↵** **Lbl 5 ↵** **A[I] ◢** **I + 1 → I ↵** **I ≤ 6 ⇒ Goto 5 ↵** **"FIN"**	**List 1** **Stop**	**:Disp L_1**	**:Disp L1**

⇨ Pour obtenir certaines instructions :
• CASIO 6910 → 9990 : **ClrList** par PRGM CLR List ; **Seq** par OPTN LIST ; **List** par OPTN LIST ; **Int** par OPTN NUM ; **Ran#** par OPTN PROB ; **[** au clavier ; = et ≤ par PRGM REL ; **Stop** par PRGM CTL.
• TI 80 → 83 : **Clrlist** par STAT ; **L_1** au clavier par 2nd ; **Seq** par 2nd LIST OPS.
✳ Particularités sur certains modèles :
• TI 85 : Etiquettes Lbl A0 puis Goto A0, Test noté = = dans TEST.

Modifions le programme précédent pour dénombrer, sur 100 tirages du loto, les tirages contenant au moins deux numéros consécutifs.
Ajouter en début de programme :

0 → S (initialisation du compteur du nombre de tirages)

0 → T (initialisation du compteur des tirages contenant au moins deux numéros consécutifs).

Remplacer le "module" d'affichage (en gras dans le programme précédent) par le suivant :

Commentaires	CASIO anciens modèles (mémoires indicées)	CASIO 6910G - 9930 - 9940 - 9960 – 9990	TI 80 82 83 85(*)	TI 92
Recherche de deux numéros consécutifs (de différence +1 ou -1).	S + 1 → S ↵ 0 → I ↵ Lbl 5 ↵ I + 1 → I ↵ I ≥ 6 ⇒ Goto 8 ↵ I + 1 → J ↵ Lbl 6 ↵ J > 6 ⇒ Goto 5 ↵ $(A[I]-A[J])^2$ =1⇒Goto 7↵ J + 1 → J ↵ Goto 6 ↵ Lbl 7 ↵ T + 1 → T ↵ Lbl 8 ↵ S ≤ 99 ⇒Goto 0 ↵ T ÷ S ◢	S + 1 → S ↵ For 1 → I To 5 ↵ I + 1 → J ↵ Lbl 2 ↵ If (List 1 [I] - List 1 $[J])^2$ = 1 ↵ Then T + 1 → T ↵ Goto 3 ↵ I-End ↵ J + 1 → J ↵ J ≤ 6 ⇒ Goto 2 ↵ Next ↵ Lbl 3 ↵ S ≤ 99 ⇒Goto 0 ↵ T ÷ S ↵ Stop	:S + 1 → S :For (I , 1 , 5) :For (J , I+1 , 6) :If L_1 (I) – L_1 $(J))^2$ = 1 :Then :T + 1 → T :Goto 1 :End :End :End :Lbl 1 :If S ≤ 99 :Goto 0 :Disp T / S	:s + 1 → s :For i , 1 , 5 :For j , i+1 , 6 :If (L1[i] – L1[j])^2 = 1 :Then :t + 1 → t :Goto b :EndIf :EndFor :EndFor :Lbl b :If s ≤ 99 :Goto a :Disp t / s

✳ Particularités sur certains modèles :
• TI 85 : Lbl A1 ; Goto A0 ; Goto A1.

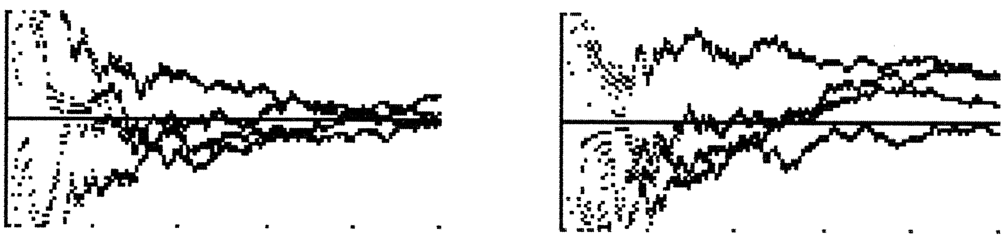
Quelle est la fréquence, sur 100 tirages, des tirages avec numéros consécutifs ? ....
Faire la moyenne des fréquences obtenues dans la classe : ....
Estimer la probabilité de l'événement : "le tirage des 6 numéros du loto comporte au moins deux numéros consécutifs".
....

Description et compte-rendu de l'activité "Deux approches de la notion de probabilité"

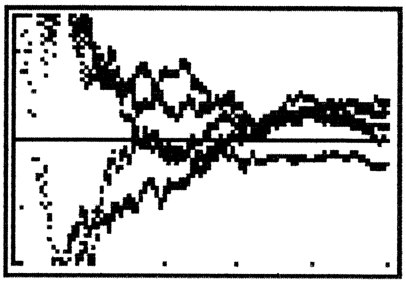
⇨ DEROULEMENT :

1 Pile ou Face :

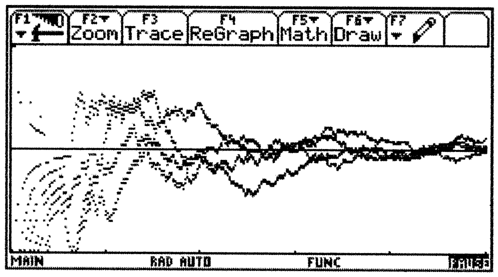
L'échelle est choisie de sorte que la "convergence" soit la mieux visible. On y voit suffisamment les errances des premiers lancers puis un début de "stabilisation" :
Quelques images d'écran (les programmes utilisés superposent 4 simulations) :



CASIO CFX-9940GT



TI 83



TI 92

2 Le Duc de Toscane :

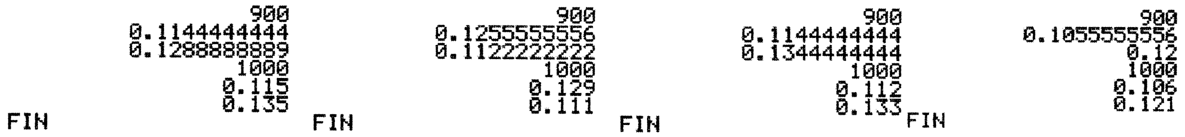
Il s'agit d'un exercice que l'on trouve dans de nombreux manuels. La définition des événements élémentaires équiprobables est au cœur du problème. On présente ici l'exercice sous la forme de deux modèles possibles en concurrence. La simulation aidera au choix du modèle le plus performant.

• Le "bon" modèle, où l'on distingue les dés, n'est pas le plus proche de l'expérience.
1) On pourra aider les élèves en ébauchant un arbre de dénombrement.
3) P(somme 9) ≈ 0,116 et P(somme 10) ≈ 0,125.

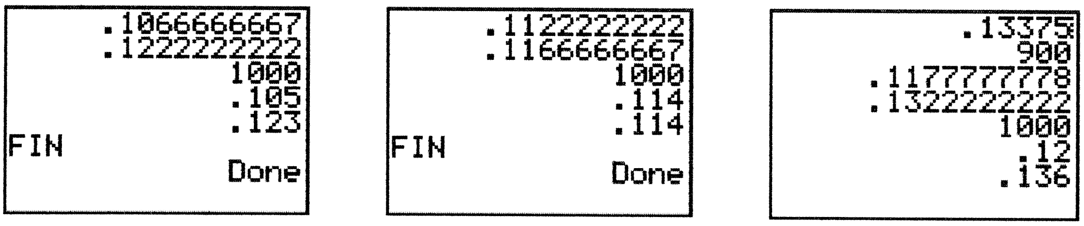
• Le second modèle, plus proche de l'expérience, pose des difficultés de dénombrement et, surtout, met en jeu des événements non équiprobables (ce que montrera la simulation).
On donne le nombre de résultats possibles sans ordre : 120 résultats du type (1;2;6) avec 6 ordres possibles, 90 résultats du type (1;2;2) avec 3 ordres possibles et 6 résultats du type (1;1;1) donne en effet $120 \div 6 + 90 \div 3 + 6 = 56$.
4) P(somme 9) = P(somme 10) ≈ 0,107.

• La simulation permet de retrouver, expérimentalement, la constatation du Grand Duc. Mais attention, les fréquences théoriques d'apparition des sommes 9 et 10 étant respectivement d'environ 0,1157 et 0,125 , la simulation de 1000 expériences n'est pas toujours probante (on peut d'ailleurs raisonnablement se demander si le Grand Duc, tout joueur qu'il fût, pouvait se rendre compte de cet écart).

La distribution d'échantillonnage de la fréquence de la somme 10, sur des échantillons de taille n, a en effet un écart-type de $\sqrt{\dfrac{p(1-p)}{n}} = \sqrt{\dfrac{0{,}125 \times 0{,}875}{1000}} \approx 0{,}010$.
En revanche si l'on possède les simulations de 10 élèves, on a alors n = 10 000 et $\sqrt{\dfrac{p(1-p)}{n}} \approx 0{,}003$. C'est alors généralement suffisant pour retrouver la constatation du Grand Duc. Pour n = 20000, on a $\sqrt{\dfrac{p(1-p)}{n}} \approx 0{,}002$ qui est plus sûr.
Exemples de résultats obtenus sur CASIO 9940 et TI 83 :



ici, le 9 est en avance sur le 10 !

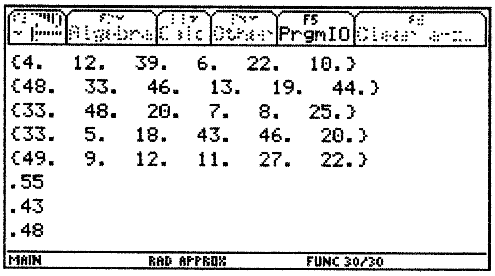


égalité !

Remarque : On pourra consulter l'activité sur Excel correspondante (comparer à la puissance de calcul de l'ordinateur).
7) L'erreur théorique commise dans le premier modèle est bien sûr de considérer les résultats possibles comme équiprobables.

$\boxed{3}$ LE LOTO :
Le jeu du loto passionne évidemment nos élèves. Quant au résultat que l'on obtient ici (théoriquement : $1 - \frac{C_{44}^6}{C_{49}^6} \approx 0{,}495$), il est assez surprenant. L'astuce consiste à établir une bijection entre l'ensemble des tirages de 6 numéros non consécutifs de {1; ... ; 49} (sans remise, puis rangés en ordre croissant) et celui des tirages de 6 numéros quelconques de {1 ; ... ; 44} (sans remise, puis rangés en ordre croissant) :
$(n_1, n_2, \dots, n_6) \mapsto (n_1, n_2 - 1, \dots, n_6 - 5)$.
Cependant, les programmes étant plus longs, ils pourront être laissés aux élèves motivés.

Tirages du Loto puis fréquences, sur 100 tirages du Loto, des tirages avec au moins deux n^{os} consécutifs :



⇨ PROLONGEMENT :

On pourra souligner, après ce TP, les insuffisances de ces approches (approche classique limitée aux cas finis, approche fréquentiste limitée aux cas répétables et insoutenable du point de vue logique, puisque la loi des grands nombres, qui la justifie, fait appel à la notion de probabilité) de façon à introduire les définitions correspondant à la vision "moderne" des probabilités.

La théorie des probabilités, axiomatisée par Kolmogorov, ne prétend pas correspondre à une réalité. Le choix d'une (mesure de) probabilité constitue une démarche de modélisation, validée par l'expérience.

SIMULATION

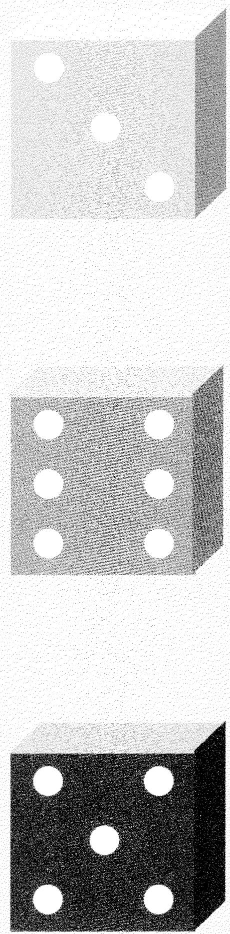
LANCERS DE DÉS

effectif total: 1168

fréquences

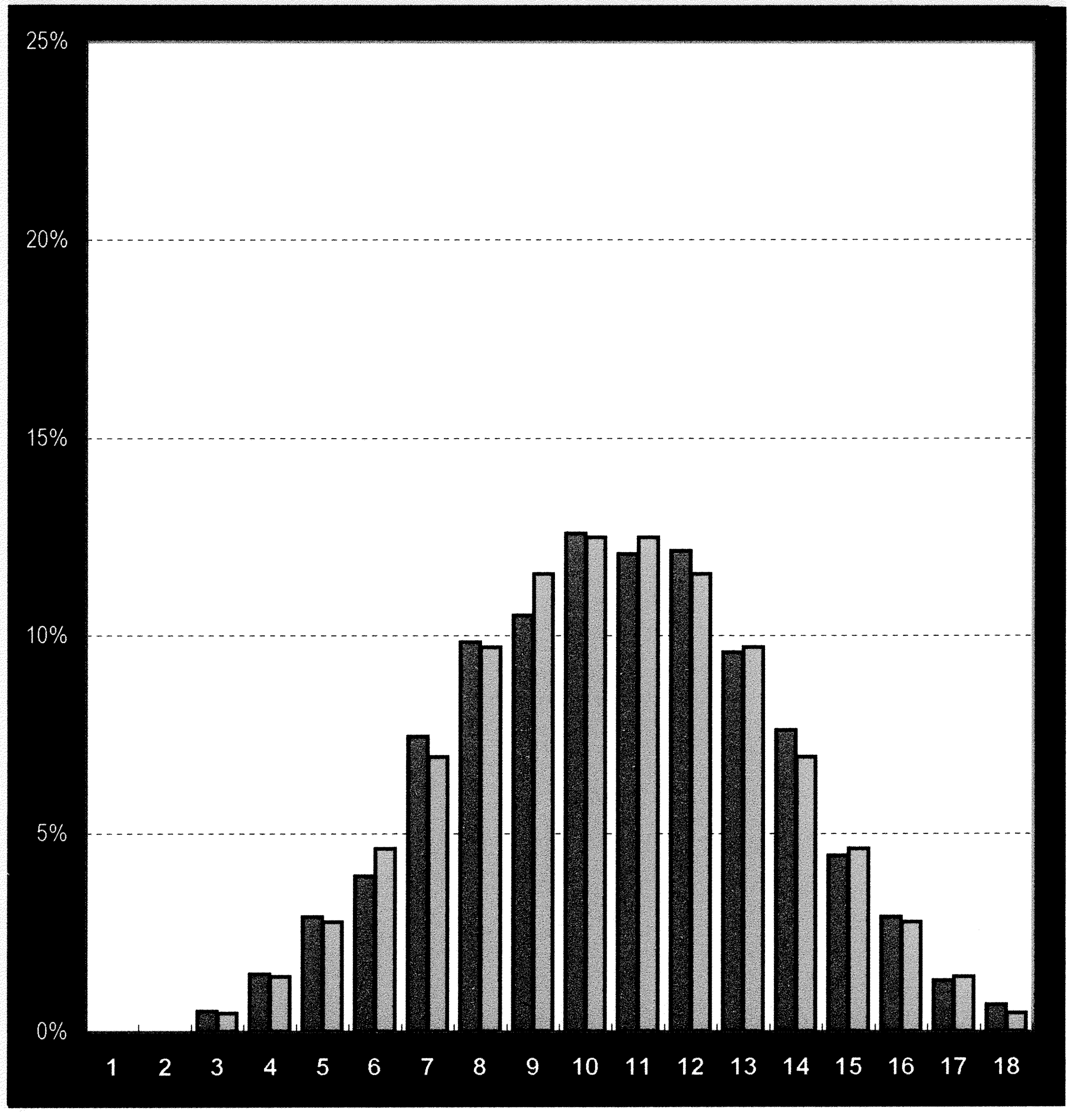
somme	effectif	expérimentale	théorique
1			
2			
3	6	0,51%	0,46%
4	17	1,46%	1,39%
5	34	2,91%	2,78%
6	46	3,94%	4,63%
7	87	7,45%	6,94%
8	115	9,85%	9,72%
9	123	10,53%	11,57%
10	147	12,59%	12,50%
11	141	12,07%	12,50%
12	142	12,16%	11,57%
13	112	9,59%	9,72%
14	89	7,62%	6,94%
15	52	4,45%	4,63%
16	34	2,91%	2,78%
17	15	1,28%	1,39%
18	8	0,68%	0,46%

14
somme
TIRAGE



NOMBRE DE DÉS 3
(de 1 à 3)
CHANGER

LANCERS 1 5 10 50 100 500 1000 5000



C - ACTIVITÉS SUR EXCEL

1 LANCERS DE DÉS

Situation et mode d'emploi

Simulation en direct de lancers de 1 , 2 ou 3 dés: le nombre de dés peut être changé en cliquant sur le bouton **CHANGER** .
A chaque tirage, on associe la somme des points obtenus.
L'épreuve peut être répétée indéfiniment au moyen de boutons déclenchant des séries de 1 , 5 , 10 ,..., 5000 lancers cumulées à partir du début de la manipulation.

Déroulement du programme

⇨ Aspect probabiliste:
Affichage des probabilités d'apparition de chaque somme et diagramme en bâtons (fréquences théoriques en jaune).
⇨ Aspect expérimental:
Après chaque lancer, calcul des effectifs et des fréquences de chaque somme depuis le début de la manipulation et diagramme en bâtons sur le même graphique que les probabilités (fréquences expérimentales en bleu).
⇨ Confrontation des deux aspects:
Le hasard agissant en direct, on pourra suivre visuellement l'évolution des fréquences expérimentales par rapport aux probabilités sur le tableau et sur le graphique.

Suggestions

1° Le professeur peut continuer son cours pendant le déroulement de l'expérience.
2° Le problème du duc de Toscane! On s'intéressera particulièrement aux sommes 9 et 10 avec 3 dés.
(cf. page 31)

Remarques techniques

1° Les tirages de chaque dé sont obtenus par la formule ENT(1+6*ALEA()).
2° Le dénombrement des cas favorables à chaque somme pour le calcul des probabilités a été réalisé comme suit:

	A	B	C	D
1	k / n	1	2	3
2				
3				
4				
5				
6				
7				
8	**1**	1	0	0
9	**2**	1	1	0
10	**3**	1	2	1
11	**4**	1	3	3
12	**5**	1	4	6
13	**6**	1	5	10
14	**7**	0	6	15
15	**8**	0	5	21
16	**9**	0	4	25
17	**10**	0	3	27
18	**11**	0	2	27
19	**12**	0	1	25
20	**13**	0	0	21
21	**14**	0	0	15
22	**15**	0	0	10
23	**16**	0	0	6
24	**17**	0	0	3
25	**18**	0	0	1

	A	B	C	D	E
1	k / n	1	=B1+1	=C1+1	=D1+1
2					
3					
4					
5					
6					
7					
8	**1**	1	=SOMME(B2:B7)	=SOMME(C2:C7)	=SOMME(D2:D7)
9	**2**	1	=SOMME(B3:B8)	=SOMME(C3:C8)	=SOMME(D3:D8)
10	**3**	1	=SOMME(B4:B9)	=SOMME(C4:C9)	=SOMME(D4:D9)
11	**4**	1	=SOMME(B5:B10)	=SOMME(C5:C10)	=SOMME(D5:D10)
12	**5**	1	=SOMME(B6:B11)	=SOMME(C6:C11)	=SOMME(D6:D11)
13	**6**	1	=SOMME(B7:B12)	=SOMME(C7:C12)	=SOMME(D7:D12)
14	**7**	0	=SOMME(B8:B13)	=SOMME(C8:C13)	=SOMME(D8:D13)
15	**8**	0	=SOMME(B9:B14)	=SOMME(C9:C14)	=SOMME(D9:D14)
16	**9**	0	=SOMME(B10:B15)	=SOMME(C10:C15)	=SOMME(D10:D15)
17	**10**	0	=SOMME(B11:B16)	=SOMME(C11:C16)	=SOMME(D11:D16)
18	**11**	0	=SOMME(B12:B17)	=SOMME(C12:C17)	=SOMME(D12:D17)
19	**12**	0	=SOMME(B13:B18)	=SOMME(C13:C18)	=SOMME(D13:D18)
20	**13**	0	=SOMME(B14:B19)	=SOMME(C14:C19)	=SOMME(D14:D19)
21	**14**	0	=SOMME(B15:B20)	=SOMME(C15:C20)	=SOMME(D15:D20)
22	**15**	0	=SOMME(B16:B21)	=SOMME(C16:C21)	=SOMME(D16:D21)
23	**16**	0	=SOMME(B17:B22)	=SOMME(C17:C22)	=SOMME(D17:D22)
24	**17**	0	=SOMME(B18:B23)	=SOMME(C18:C23)	=SOMME(D18:D23)
25	**18**	0	=SOMME(B19:B24)	=SOMME(C19:C24)	=SOMME(D19:D24)

SIMULATION

LANCERS DE DÉS

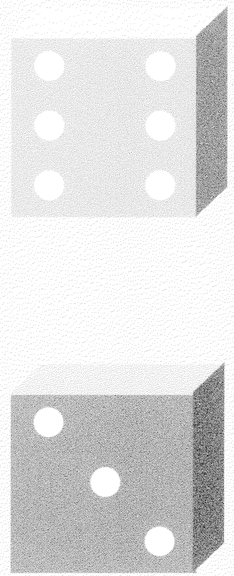
effectif total: 1998

fréquences

9 somme

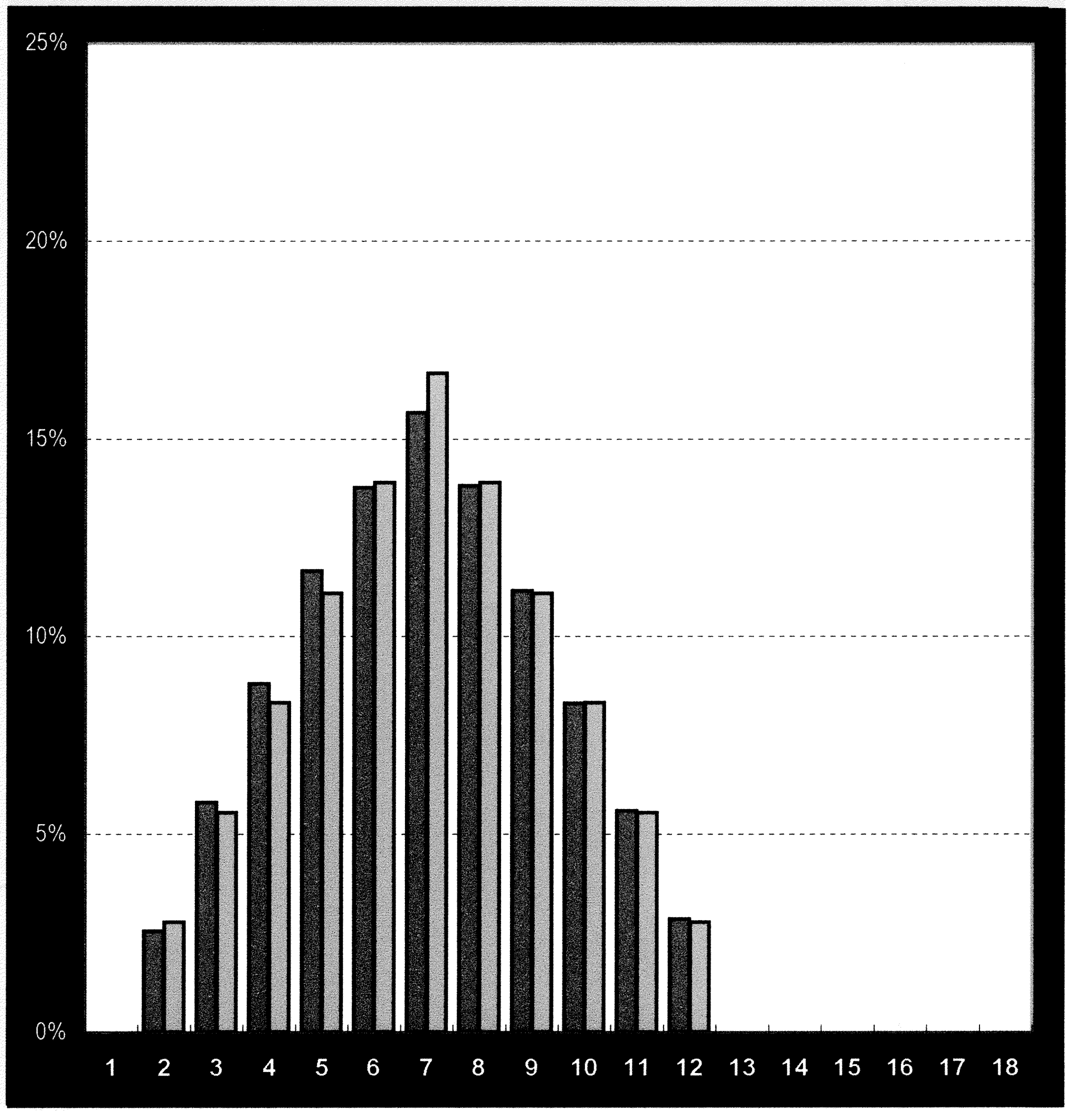
TIRAGE

somme	effectif	expérimentale	théorique
1			
2	51	2,55%	2,78%
3	116	5,81%	5,56%
4	176	8,81%	8,33%
5	233	11,66%	11,11%
6	275	13,76%	13,89%
7	313	15,67%	16,67%
8	276	13,81%	13,89%
9	223	11,16%	11,11%
10	166	8,31%	8,33%
11	112	5,61%	5,56%
12	57	2,85%	2,78%
13			
14			
15			
16			
17			
18			

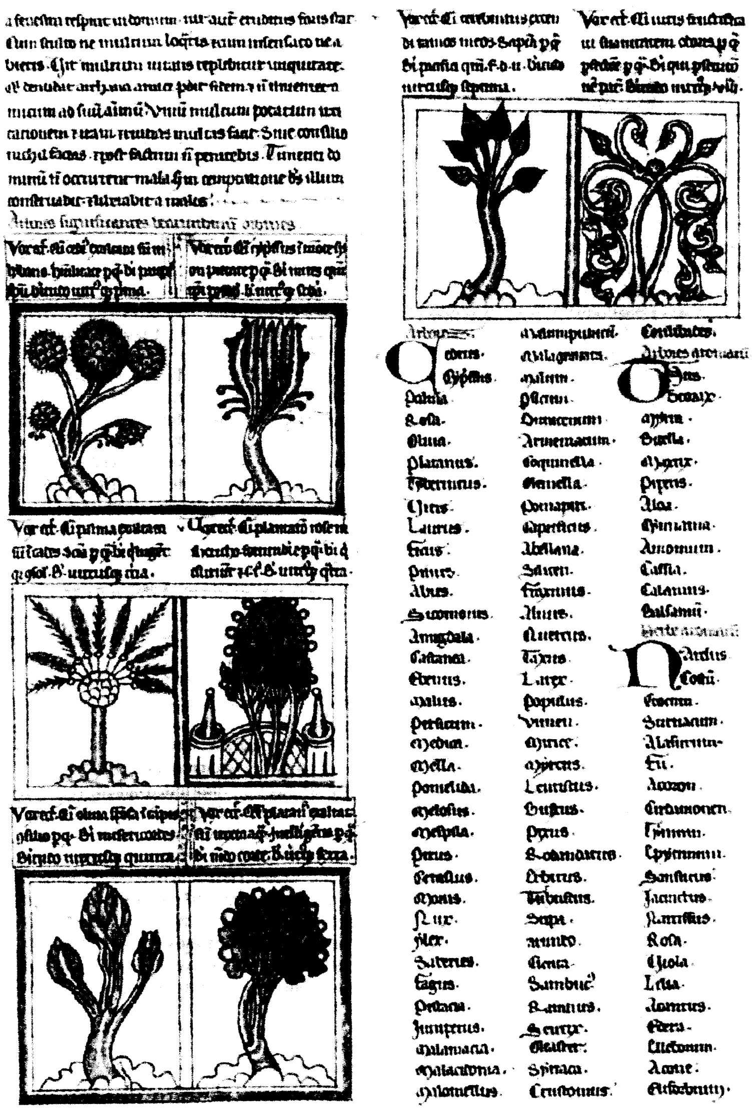


NOMBRE DE DÉS 2 (de 1 à 3) CHANGER

LANCERS 1 5 10 50 100 500 1000 5000



Soit $u_{k,n}$ le nombre de cas favorables à la somme n pour k dés.
"Au mieux", la somme n avec k dés ($k > 1$) peut s'obtenir ainsi:
$n = 6 + (n - 6) = 5 + (n - 5) = \ldots\ldots = 1 + (n - 1)$
où 6 , 5 ,..., 1 est le numéro de 1 dé et ($n - 6$) , ($n - 5$) , ..., ($n - 1$) la somme des k-1 autres dés.
Donc $u_{k,n} = u_{k-1,n-6} + u_{k-1,n-5} + \ldots + u_{k-1,n-1}$ où certains des termes peuvent être nuls.
C'est cette formule qui a été copiée dans tout le tableau (les termes nuls sont dans des cellules vides).
Ici $k \leq 3$ mais on peut étendre le tableau avec la même formule qui peut être utilisée pour le dénombrement avec autant de dés que l'on veut.



Les arbres de béatitude

Lambert de Saint-Omer – *"Liber floridus"* – XII^e siècle

Bibliothèque nationale de France

"Le calcul des probabilités est né de l'installation de la mesure au cœur d'un univers de plaisir, celui du jeu."
Stéphane CALLENS – Les maîtres de l'erreur - 1997.

5 Calcul des probabilités

A - OBJECTIFS

- Confronter expérimentation et calculs théoriques (approche fréquentiste).
- Initier à la manipulation des arbres de probabilité.
- Mettre en évidence la notion de modèle en probabilités.

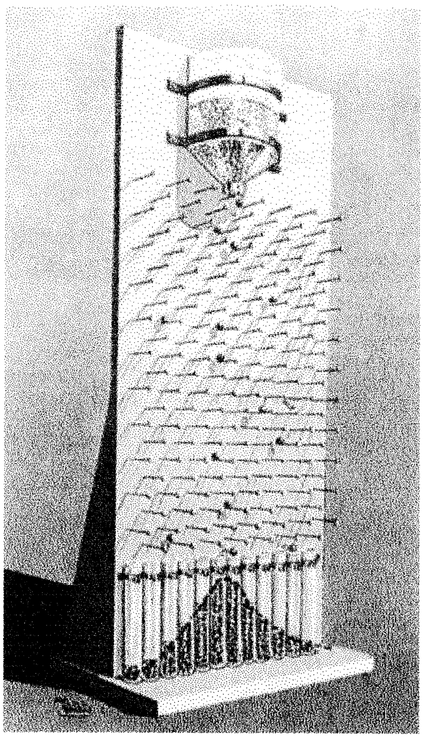
B – ACTIVITES SUR CALCULATRICE

Niveau	A partir de la première.
Situation dans la progression	Après le cours sur la notion de probabilité.
Durée	2 heures à terminer à la maison.
Nature des activités	$\boxed{1}$ Simulation de la distribution des résultats donnés par une planche de Galton. Utilisation du triangle de Pascal pour dénombrer. $\boxed{2}$ Introduction de la notion d'arbre de probabilité par une approche fréquentiste (flux des singes grimpant à l'arbre). $\boxed{3}$ Différents modèles (et donc simulations) pour un même problème dont l'énoncé manque de précision.

TRAVAUX PRATIQUES

SIMULATION ET CALCUL DES PROBABILITES

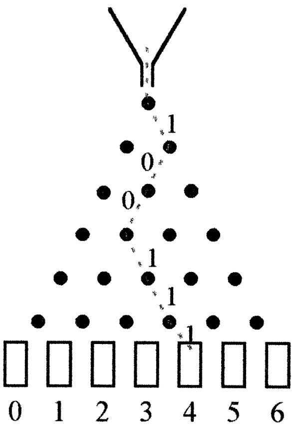
1 ETUDE DE LA PLANCHE DE GALTON
Triangle de Pascal



© BnF - Paris

Considérons une planche de Galton où chaque bille rencontre 6 clous.
Chaque bille suit un trajet aléatoire, pour aboutir dans l'un des godets situé en bas. A chaque clou rencontré, la probabilité, pour la bille, d'aller à droite ou à gauche est de 1/2.

Francis GALTON (1822/1911) est un scientifique anglais, cousin de Charles DARWIN. S'intéressant essentiellement à la biologie et à l'anthropologie, il fut aussi un pionnier en statistique.



1 Simulation

Supposons qu'aller à droite correspond au tirage du chiffre 1, et qu'aller à gauche correspond au chiffre 0 (avec une chance sur deux dans chaque cas).
Pourquoi ceci peut-il être simulé par l'instruction : Int(Ran# + 0.5) ou int(rand + 0.5) ?

....

....

....

....

Pour savoir dans quelle case arrive la bille, il suffit de compter les points :
Case n° 4 = ... points.

Entrer dans votre calculatrice le programme suivant (la partie sous la ligne pointillée concerne le tracé d'un histogramme et est facultative).

Commentaires	CASIO (anciens modèles avec mémoires indicées)	CASIO 6910(*) 8930(*) 9930 9940 9990	TI 80 82 83	TI 92
I compteur des lancers Initialisation des compteurs de billes de chaque case: A[J] Trajet d'une bille 100 lancers de billes. Affichage.	1 → I ↵ 0 → J ↵ Lbl 0 ↵ 0 → A[J] ↵ J+1 → J ↵ J ≤ 6 ⇒ Goto 0 ↵ Lbl 1 ↵ 1 → K ↵ 0 → S ↵ Lbl 2 ↵ Int(Ran#+0.5)+ S → S ↵ K + 1 → K ↵ K ≤ 6 ⇒ Goto 2 ↵ A[S] + 1 → A[S] ↵ I+1 → I ↵ I ≤ 100 ⇒ Goto 1 ↵ 0 → J ↵ Lbl 3 ↵ A[J] ◢ J + 1 → J ↵ J ≤ 6 ⇒ Goto 3 ↵ "FIN"	ClrList ↵ Seq(I,I,0,6,1) → List 1 ↵ Seq(0,I,1,7,1) → List 2 ↵ For 1 → I To 100 ↵ 0 → S ↵ For 1 → K To 6 ↵ Int (Ran# + 0.5) + S → S ↵ Next ↵ S + 1 → J ↵ List 2[J] + 1 → List 2[J] ↵ Next ↵ List 2 ◢ S-WindMan ↵ ViewWindow 0,7,1, 0,50,10 ↵ 0 → Hstart ↵ 1 → Hpitch ↵ S-Gph1 DrawOn, Hist,List1,List2,Blue ↵ DrawStat	:ClrList L_1 , L_2 :seq(I,I,0,6,1) → L_1 :seq(0,I,1,7,1) → L_2 :For(I,1,100) :0 → S :For(K,1,6) :int(rand+0.5) + S → S :End :S + 1 → J :L_2(J) + 1 → L_2(J) :End :Disp L_2 :Pause :Plot1(Histogram,L_1, L_2) :PlotsOn1 :0 → Xmin :7 → Xmax :1 → Xscl :0 → Ymin :50 → Ymax :10 → Yscl :DispGraph	:DelVar L1 , L2 :seq(i,i,0,6,1) → L1 :seq(0,i,1,7,1) → L2 :For i,1,100 :0 → s :For k,1,6 :int(rand( )+0.5) + s → s :EndFor :s + 1 → j :L2[j] + 1 → L2[j] :EndFor :Disp L2 :0 → xmin :7 → xmax :1 → xscl :0 → ymin :50 → ymax :10 → yscl :PlotsOn :NewPlot 1,4,L1,,L2 ,,,,1

Programme non disponible sur TI 81.

⇨ Pour obtenir certaines instructions :

• CASIO 6910 → 9990 : **ClrList** par PRGM CLR List ; **Seq** par OPTN LIST ; **List** par OPTN LIST ; **Int** par OPTN NUM ; **Ran#** par OPTN PROB ; **S-Wind Man** par SET UP Man ou SHIFT SET UP S-WIN ; **Hstart et pitch** par VARS STAT GRPH ; **S-Graph1** par F4(MENU) STAT GRPH GPH1 ; **Draw On** par F4(MENU) STAT DRAW ON ; **Hist** par F4(MENU) STAT GRPH ; **Blue** (si couleur) par STAT COLR ; **DrawStat** par PRGM DISP Stat.

• TI 80 82 83 : **ClrList** par STAT EDIT ; **Seq** par 2nd LIST OPS ; **L_1** au clavier par 2nd ; **For End Pause** par PRGM CTL ; **int** par MATH NUM ; **rand** par MATH PRB ; **Disp** par PRGM I/O ; **Plot 1(Histogram,L1,L2)** par 2nd STAT PLOT PLOTS puis TYPE ; **Xmin** par VARS Window... ; **PlotsOn** par 2nd STAT PLOT PLOTS ; **Dispgraph** par PRGM I/O.

✳ Particularités sur certains modèles :

CASIO 6910 et 8930 : Les instructions 0 → Hstart ↵ et 1 → pitch ↵ sont à supprimer.

⇨ Pour 100 billes, indiquer les pourcentages de billes pour chaque case :

cases	0	1	2	3	4	5	6
% de billes							

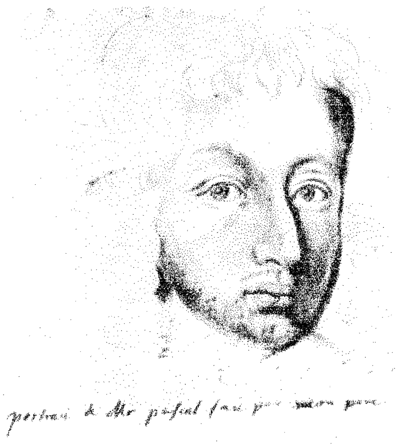
Pour 1000 billes (durée : 2 mn 30 sur CASIO 9990 ; 6 mn 30 sur TI 83):

cases	0	1	2	3	4	5	6
% de billes							

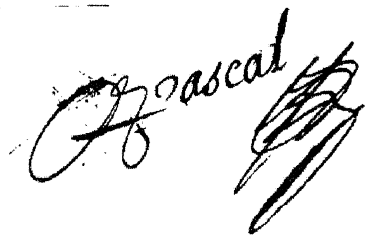
Moyenne des pourcentages obtenus dans la classe :

cases	0	1	2	3	4	5	6
% de billes							

2 Calculs probabilistes

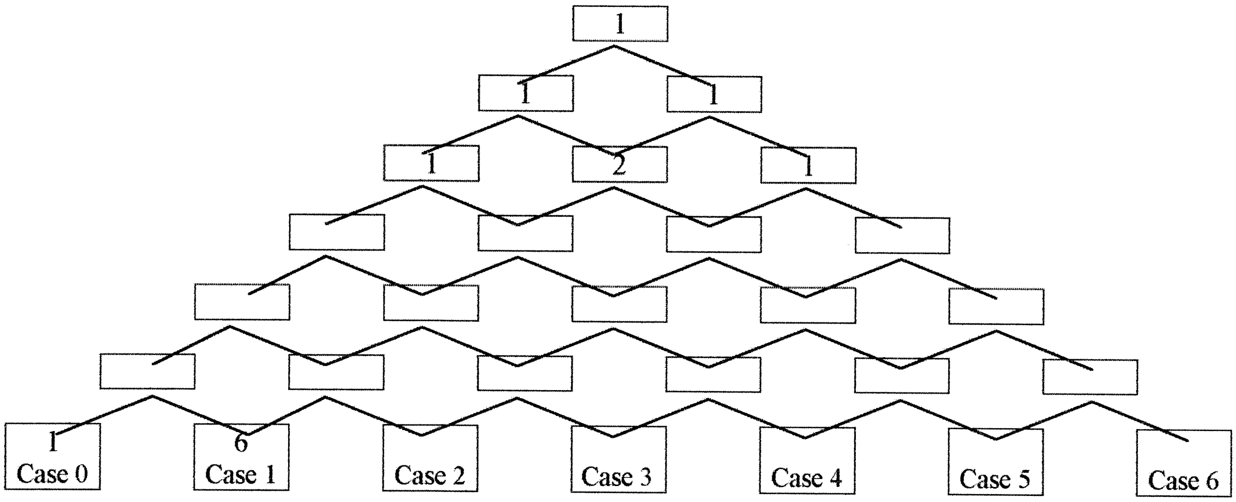


Puisque les trajets sont équiprobables, il s'agit de les dénombrer. Pour faciliter ce dénombrement, vous allez exploiter un triangle, construit par Pascal pour résoudre une question de probabilité, et qui depuis porte son nom (quoique connu des Chinois et des Arabes bien avant).



Blaise PASCAL (1623/1662)
Portrait par Domat - © BnF – Paris.

Indiquer, dans chaque case, le nombre des chemins susceptibles d'y parvenir.



Déduire du triangle de Pascal le nombre de chemins possibles :

....

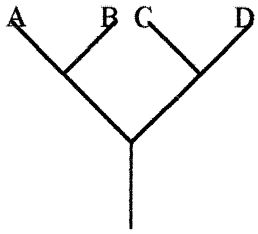
En faisant le rapport des cas favorables aux cas possibles, indiquer dans le tableau ci-dessous les probabilités des événements : « la bille aboutit dans la case n°i » :

Cases d'arrivée	0	1	2	3	4	5	6
probabilités							

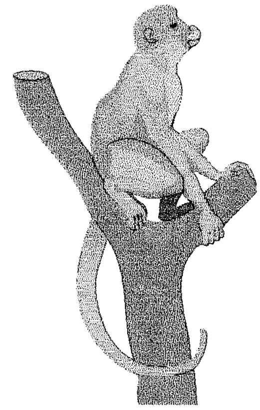
Comparer ces résultats théoriques à ceux obtenus par simulation.

2 QUAND LES SINGES GRIMPENT AUX ARBRES (DE PROBABILITE)
Introduction à l'utilisation des arbres dans le calcul des probabilités

1 Arbre équiprobable

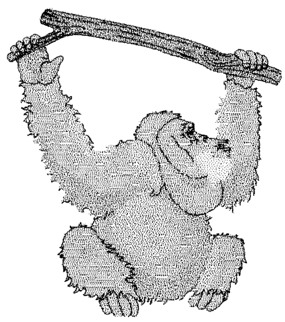


On a constaté qu'un singe grimpant sur l'arbre ci-contre fait son choix, pour chaque embranchement, avec une chance sur deux.

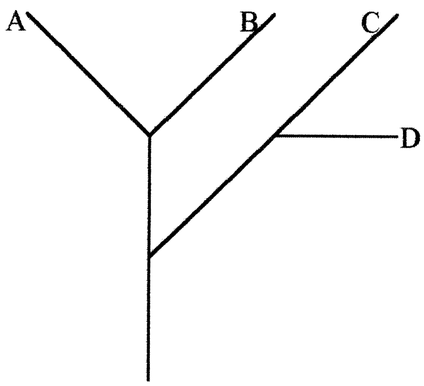


Imaginons une troupe de 100 singes à l'assaut de l'arbre, à combien peut-on estimer le nombre de singes passant sur chaque branche ?
....
....
Déterminer, pour chaque extrémité de l'arbre, la probabilité qu'a le singe d'y parvenir :
....
Indiquer, sur chacune des branches, la probabilité ½ qu'a le singe de l'emprunter.
Par quelle opération, sur les probabilités figurant sur ses branches, obtient-on la probabilité d'un chemin ?..
Quelle probabilité a le singe d'arriver aux terminaisons extérieures (A ou D) ? ....
Par quelle opération obtient-on une probabilité correspondant à plusieurs chemins ? ....

2 Arbre pondéré



⇨ **Observation statistique :**



Vous allez, grâce au programme suivant, observer le comportement de la gente simiesque sur l'arbre ci-contre dont l'aspect n'est plus aussi symétrique que le précédent.
Le programme simule le comportement de 10 singes, choisis au hasard.

CASIO 6910(*) 8930 9930 9940 9990	TI 80 - 82	TI 83	TI 92
Seq(0,J,1,4,1) → List 1 ↵ ViewWindow 0,5,10,0,4,10 ↵ For 1 → I To 10 ↵ F-Line 2,0,2,1 ↵ F-Line 2,1,3,2 ↵ F-Line 2,1,2,2 ↵ F-Line 3,2,4,2 ↵ F-Line 3,2,4,3 ↵ F-Line 2,2,3,3 ↵ F-Line 2,2,1,3 ↵ F-Line 2.1,0,2.1,1 ↵ Int(Ran# + 2÷3) → A ↵ F-Line 2.1,1,2.1+A,2 ↵ If A = 0 ↵ Then Int(Ran# + 0.5) → B ↵ F-Line 2.1+A,2,1.1+2B,3 ◢ Else Int(Ran# + 2÷3) → B ↵ F-Line 2.1+A,2,4,2.9-B ◢ IfEnd ↵ 2A + B + 1 → J ↵ List 1 [J] + 1 → List 1 [J] ↵ Cls ↵ Next ↵ List 1	:ClrList L_1 :PlotsOff :seq(0 , J , 1 , 4 , 1) → L_1 :0 → Xmin :5 → Xmax :10 → Xscl :0 → Ymin :4 → Ymax :10 → Yscl :For(I , 1 , 10) :Line (2,0,2,1) :Line (2,1,3,2) :Line (2,1,2,2) :Line (3,2,4,2) :Line (3,2,4,3) :Line (2,2,3,3) :Line (2,2,1,3) :Line (2.1,0,2.1,1) :int(rand + 2÷3) → A :Line (2.1,1,2.1+A,2) :If A = 0 :Then :int(rand + 0.5) → B :Line (2.1+A,2,1.1+2B,3) :Pause :Else :int(rand + 2÷3) → B :Line (2.1+A,2,4,2.9-B) :Pause :End :2A + B + 1 → J :L_1(J) + 1 → L_1(J) :ClrDraw :End :Disp L_1	:ClrList L_1 :PlotsOff :seq(0 , J , 1 , 4 , 1) → L_1 :0 → Xmin :5 → Xmax :10 → Xscl :0 → Ymin :4 → Ymax :10 → Yscl :Line (2,0,2,1) :Line (2,1,3,2) :Line (2,1,2,2) :Line (3,2,4,2) :Line (3,2,4,3) :Line (2,2,3,3) :Line (2,2,1,3) :For(I , 1 , 10) :Pt-On(2,1,2) :int(rand+2/3) → A :Pt-On(2+A,2,2) :If A = 0 :Then :int(rand+0.5) → B :Pt-On(1+2B,3,2) :Else :int(rand+2/3) → B :Pt-On(4,3-B,2) :End :Pause :2A + B + 1 → J :L_1(J) + 1 → L_1(J) :Pt-Off (2,1,2) :Pt-Off (2,2,2) :Pt-Off (3,2,2) :Pt-Off (4,2,2) :Pt-Off (1,3,2) :Pt-Off (3,3,2) :Pt-Off (4,3,2) :End :Disp L_1 :ClrDraw	:DelVar L1 :PlotsOff :seq(0 , j , 1 , 4 , 1) → L1 :0 → xmin :5 → xmax :10 → xscl :0 → ymin :4 → ymax :10 → yscl :Line 2,0,2,1 :Line 2,1,3,2 :Line 2,1,2,2 :Line 3,2,4,2 :Line 3,2,4,3 :Line 2,2,3,3 :Line 2,2,1,3 :For i , 1 , 10 :Circle 2 , 1 0.1 :int(rand( )+2/3) → a :Circle 2+a , 2 , 0.1 :If a = 0 Then :int(rand( )+0.5) → b :Circle 1+2×b , 3 , 0.1 :Else :int(rand( )+2/3) → b :Circle 4 , 3-b , 0.1 :EndIf :Pause :2×a + b + 1 → j :L1[j] + 1 → L1[j] :Circle 2 , 1 , 0.1 , 0 :Circle 2 , 2 , 0.1 , 0 :Circle 3 , 2 , 0.1 , 0 :Circle 4 , 2 , 0.1 ,0 :Circle 1 , 3 , 0.1 , 0 :Circle 3 , 3 , 0.1 , 0 :Circle 4 , 3 , 0.1 , 0 :EndFor :Disp L1 :ClrDraw

⇨ Pour obtenir certaines instructions :

• CASIO 9940 → 9990 : **F-Line** par SHIFT Sketch LINE (6910 voir ✳) ; **Cls** par Sketch ; **If Then Else IfEnd** par PRGM COM.

• TI 80 82 83 : **Line** par 2nd DRAW ; **If Then Else Pause** par PRGM CTL ; = par 2nd TEST ; **ClrDraw** par 2nd DRAW.

✳ Particularités sur certains modèles :

• CASIO 6910 : L'instruction F-Line n'existant pas, remplacer F-Line 2,0,2,1 par Plot 2,0 ↵ Plot 2,1 ↵ Line.

Faire des statistiques sur 10 singes, c'est un peu faible, vous allez passer à 100 singes.
Remplacer, dans l'instruction For, 10 par 100, puis supprimer les ◢ d'arrêt ou les instructions Pause.
Indiquer vos résultats dans le tableau ci-dessous :

Arrivée à la terminaison :	A	B	C	D
Fréquence en %				

Faire la moyenne des résultats observés dans la classe :

Arrivée à la terminaison :	A	B	C	D
Fréquence en %				

⇨ **Etude théorique :**

Il semble que les singes, préférant la solution de facilité, choisissent plus volontiers les branches moins pentues.

En analysant le programme précédent, indiquer sur chaque branche de l'arbre, la probabilité qu'elle a d'être choisie par le singe.

Calculer alors la probabilité qu'a le singe d'atteindre chacune des terminaisons :

....

....

....

....

....

....

....

Quelle est la probabilité d'atteindre une terminaison extérieure (A ou D) ?

....

....

....

La probabilité affectée à **chaque chemin** est le **PRODUIT** des probabilités affectées à chacune des branches qui le composent.
La probabilité d'un **événement correspondant à plusieurs chemins** est la **SOMME** des probabilités correspondant à chacun des chemins.

3 SUR LES BANCS PUBLICS
Du choix déterminant d'un modèle

On souhaite répondre au petit problème suivant :

Dans un square se trouvent trois bancs à deux places. Deux personnes arrivent et s'assoient au hasard. Quelle est la probabilité qu'elles s'assoient côte à côte ?

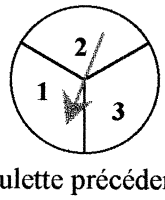
On décide de simuler l'expérience un grand nombre de fois, « pour voir ». Mais cela nous oblige à modéliser la situation.

1 PREMIER MODELE : Le choix des bancs

⇨ SIMULATION :

On numérote les trois bancs 1, 2, 3.

Chacune des personnes tire au hasard le numéro du banc sur lequel elle va s'asseoir, à l'aide de la roulette ci-contre.



Il suffit d'étudier le pourcentage des expériences où le même numéro a été tiré.

Justifier le fait que l'instruction Int(1 + 3Ran#) ou int(1 + 3rand) simule la roulette précédente. ....

....

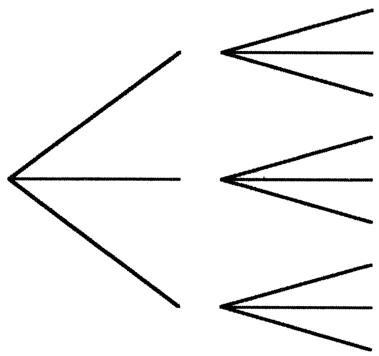
Le programme ci-contre simule 100 expériences décrites précédemment.
Il fournit le nombre d'expériences pour lesquelles le même numéro est sorti deux fois.

CASIO 6910→9990	TI 80 – 82 – 83 – 85(*) – 92(*)
0 → S ↵	:0 → S
For 1 → I To 100 ↵	:For(I , 1 , 100)
Int(1 + 3Ran#) → A ↵	:int(1 + 3rand) → A
Int(1 + 3Ran#) → B ↵	:int(1 + 3rand) → B
A = B ⇒ S + 1 → S ↵	:If A = B
Next ↵	:S + 1 → S
S	:End
	:Disp S

✳ Particularités sur certains modèles :
TI 85 : Test en = = par TEST ; TI 92 : For i , 1 , 100 puis EndFor.

Exécuter ce programme 6 fois, noter les résultats obtenus et calculer leur moyenne.
....
....

⇨ CALCUL DES PROBABILITES :

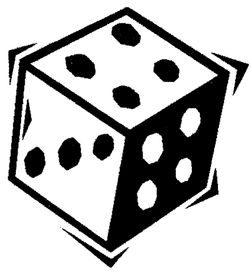


A l'aide de l'arbre ci-contre, calculer la probabilité de l'événement « les deux personnes sont assises côte à côte » selon ce premier modèle.
....
....
....
....
....
....
....

2 SECOND MODELE : Le choix des places

⇨ SIMULATION :
On numérote les places de 1 à 6. Le premier banc correspond aux places 1 et 2, le deuxième banc aux places 3 et 4, et le dernier aux places 5 et 6.
La première personne lance un dé pour choisir sa place. La seconde personne fait de même, mais relance le dé si la place tirée est occupée.
Il suffit d'étudier le pourcentage d'expériences où les numéros des places tirées correspondent au même banc.

1	2	3	4	5	6
Banc 1		Banc 2		Banc 3	



Si l'on note A le numéro tiré par la première personne et B celui, différent, tiré par la seconde personne, pourquoi la connaissance de la somme A+B et du produit A×B caractérise-t-elle les nombres A et B ?
....
....
....

Le programme ci-contre simule 100 expériences décrites précédemment.
Il fournit le nombre d'expériences pour lesquelles les numéros sortis correspondent au même banc.
Exécuter ce programme 6 fois, noter les résultats obtenus et calculer leur moyenne.

CASIO 6910(*)→9990	TI 80(*) – 82 – 83 – 85 – 92(*)
0 → S↵ For 1 → I To 100 ↵ Int(1 + 6 Ran#) → A ↵ Lbl 1 ↵ Int(1 + 6 Ran#) → B ↵ A = B ⇒ Goto 1 ↵ A+B=3 ⇒ S+1→S ↵ A+B=7 And AB=12 ⇒ S+1→S ↵ A+B=11 And AB=30 ⇒ S+1→S ↵ Next ↵ S	:0 → S :For(I , 1 , 100) :int(1 + 6rand) → A :Lbl 1 :int(1 + 6rand) → B :If A = B :Goto 1 :If A+B=3 :S + 1 → S :If A+B=7 and AB = 12 :S + 1 → S :If A+B=11 and AB = 30 :S + 1 → S :End :Disp S

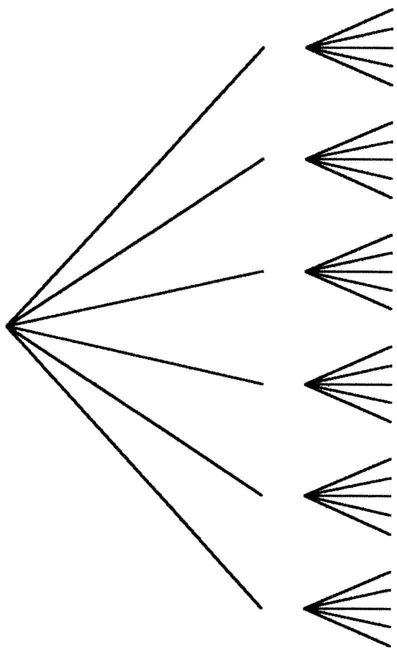
⇨ Pour obtenir certaines instructions :
- CASIO 6930 → 9990 : **And** par OPTN LOGIC.
- TI 82 83 : **and** par 2nd TEST LOGIC.

✳ Particularités sur certains modèles :
- CASIO 6910 : En l'absence du connecteur And, remplacer A+B=7 And AB=12 ⇒ S+1→S ↵ par If A + B = 7 ↵ Then AB = 12 ⇒ S + 1 → S ↵ IfEnd.
- TI 80 : En l'absence du connecteur and, remplacer :If A+B=7 and AB = 12 ↵ :S + 1 → S par :If A + B = 7 ↵ :Then ↵ :If AB = 12 ↵ :S + 1 → S ↵ End.

....

....

⇨ CALCUL DES PROBABILITES :



A l'aide de l'arbre ci-contre, calculer la probabilité de l'événement « les deux personnes sont assises côte à côte » selon ce second modèle.
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Que conclure ?

L'énoncé ne dit pas comment le hasard intervient pour déterminer les positions des deux personnes. L'équiprobabilité porte-t-elle sur le choix du banc ou sur le choix d'une place ? Selon l'hypothèse suivie, la réponse est différente. L'énoncé de départ est incomplet et la question posée n'a pas de sens précis. Pour qu'une expérience aléatoire puisse être étudiée, il est nécessaire de définir un "protocole expérimental" permettant de la répéter.

Description et compte-rendu de l'activité "Calcul des probabilités"

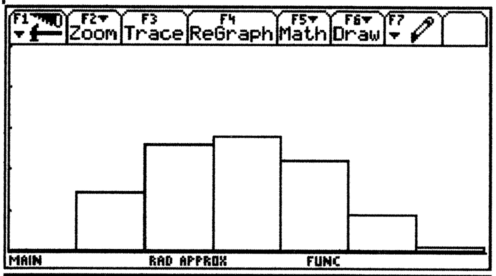
1 Planche de Galton et triangle de Pascal :

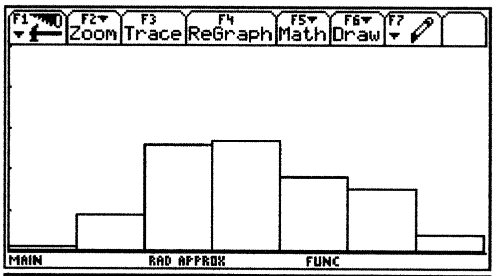
Avec la planche de Galton, le succès auprès des élèves est garanti. C'est un procédé concret et visuel qui de plus passe à la télé (planche du Fakir) ! L'objectif de cette activité est de montrer que la répartition des billes est prévisible et qu'un simple dénombrement suffit à la justifier.

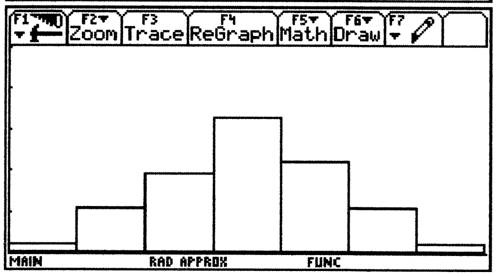
Les probabilités théoriques sont :

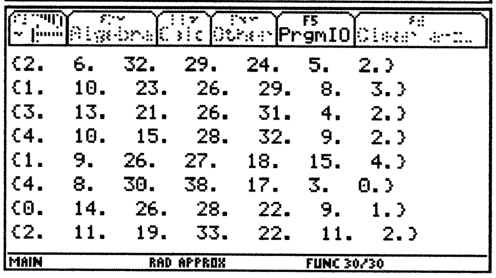
cases	0	1	2	3	4	5	6
probabilités ≈	0,016	0,094	0,234	0,313	0,234	0,094	0,016

Exemples de simulations sur 100 billes :

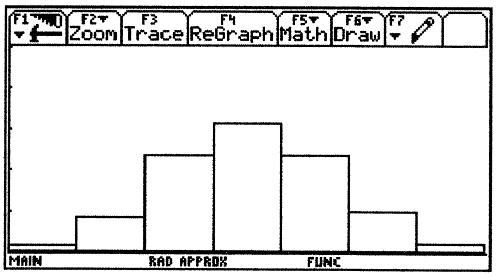


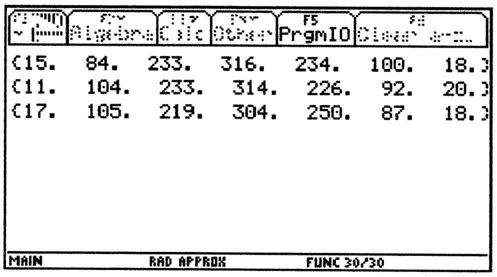






Sur 1000 billes :





Remarque : voir la simulation de la planche de Galton sur Excel (spectaculaire).

2 Quand les singes grimpent aux arbres :

Cette activité se veut une introduction aux règles d'utilisation des arbres de probabilité. L'approche fréquentiste, en considérant le flux des singes grimpant à l'arbre, permet de situer dans un cadre intuitivement évident les règles de multiplication et d'addition.

1) Arbre équiprobable :

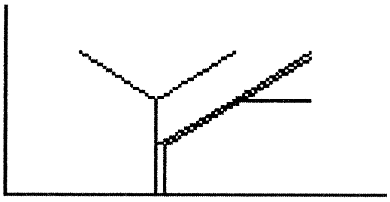
C'est une situation très simple qui est l'occasion de mettre en place les premières règles.

2) Cette fois l'arbre n'est plus équiprobable et l'activité, plutôt ludique, permet de passer d'une approche fréquentiste statistique à des règles de probabilités.

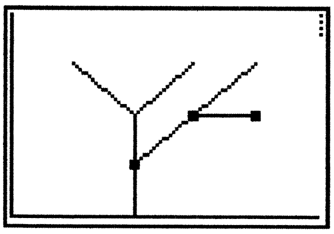
Les résultats théoriques sont :

Branches	A	B	C	D
Probabilités ≈	0,17	0,17	0,22	0,44

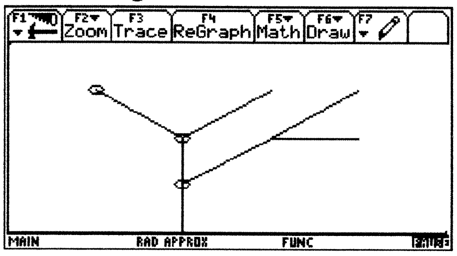
Quelques images d'écrans et des résultats statistiques pour 100 singes :



CASIO 9940



TI 83



TI 92

```
prgmSINGE2
     {15 17 20 48}
              Done
     {20 17 23 40}
              Done
     {15 15 22 48}
              Done
```

```
F5 PrgmIO
{17.  17.  22.  44.}
{16.  17.  25.  42.}
{22.  18.  25.  35.}
{14.  21.  18.  47.}
{13.  19.  19.  49.}
{17.  15.  18.  50.}
{15.  20.  20.  45.}
{8.  16.  21.  55.}
MAIN     RAD APPROX     FUNC 30/30
```

$\boxed{3}$ Sur les bancs publics :

L'activité de modélisation, rare dans nos exercices scolaires, est souvent déterminante dans les applications des probabilités. Chacun des modèles proposés est "raisonnable" et les simulations correspondantes sont calquées dessus. On observe des réactions parfois épidermiques de certains élèves qui refusent d'adhérer à l'un des modèles. Cette activité a pour objectif de montrer le caractère très relatif des résultats probabilistes et incite à une certaine tolérance scientifique.

Simulations du modèle 1 :

```
0.42
0.27
0.27
0.37
0.36
0.38
0.33
```

```
prgmBANCS1
         .32
        Done
         .34
        Done
          .3
        Done
```

Simulations du modèle 2 :

```
0.17
0.19
0.15
0.27
0.14
 0.2
0.28
```

```
prgmBANCS2
         .19
        Done
         .29
        Done
         .22
        Done
```

Allégorie du hasard : Fortune apparaît à Boccace.
Boccace – *"Des cas des nobles hommes et femmes "* - $XV^{ème}$ siècle.
Bibliothèque nationale de France

"Je me propose de déterminer la probabilité des causes par les événements, matière neuve à bien des égards et qui mérite d'autant plus d'être cultivée que c'est principalement sous ce point de vue que la science des hasards peut être utile dans la vie civile."

Pierre-Simon de LAPLACE – 1825.

6 Indépendance et conditionnement

A - OBJECTIFS

• Introduire le conditionnement et l'indépendance par l'approche fréquentiste, en répétant des simulations.
• Evaluer l'impact d'une information sur la probabilité de réalisation d'un événement.
• Faire comprendre que la donnée d'une information nous fait changer d'univers, où l'on détermine une nouvelle répartition des probabilités.
• "Inverser" un arbre de probabilités.

B – ACTIVITES SUR CALCULATRICE

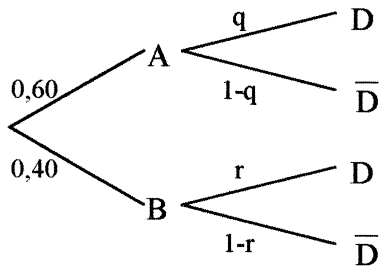
Niveau	A partir de la terminale.
Situation dans la progression	Introduction au cours sur l'indépendance et le conditionnement.
Durée	Non testé.
Nature des activités	• Etude statistique comparée, sur une simulation, des caractères de provenance et de qualité d'une production industrielle. Approche fréquentiste de la probabilité conditionnelle. • Inversion d'arbres de probabilités et définitions de la probabilité conditionnelle et de l'indépendance.

TRAVAUX PRATIQUES

NON TESTE EN CLASSE

INDEPENDANCE ET CONDITIONNEMENT

Deux machines A et B fabriquent une pièce identique et fonctionnent indépendamment. Dans la production de ces machines, on choisit une pièce au hasard. La probabilité que cette pièce provienne de A est de 0,6. Elle est donc de 0,4 pour quelle provienne de B. On suppose que, parmi la production de A, la probabilité de tirer une pièce défectueuse est de q, alors que parmi la production de B, la probabilité de tirer une pièce défectueuse est de r.
La situation est donc résumée par l'arbre suivant :



Arbre 1

On se pose la question suivante :

Lorsque l'on tire au hasard une pièce dans la production totale, et que l'on constate que la pièce est défectueuse, cette information donne-t-elle une idée de nature probabiliste sur sa fabrication éventuelle par A ?

1 Expérience statistique par simulation d'une production de 1000 pièces

Le programme suivant permet de simuler une production de 1000 pièces, en respectant les conditions précédentes. Il fournit le décompte, sur cette production, des pièces de chaque type, selon les deux critères d'origine (A ou B) et de qualité (défectueuse ou non).

Commentaires	CASIO 6910→9990	TI 80 82 83 85	TI 92
La réalisation de A correspond à la valeur 2, celle de B à 0. La réalisation de D correspond à la valeur 1, celle de non-D à la valeur 0.	"Q" ↵ ? → Q ↵ "R" ↵ ? → R ↵ Seq(0,I,1,4,1) → List 1 ↵ For 1 → I To 1000 ↵ 2Int(Ran# + 0.6) → A ↵ If A = 2 ↵ Then Int(Ran#+Q) → D ↵ Else Int(Ran#+R) → D ↵ IfEnd ↵ List 1[A+D+1] + 1 → List 1[A+D+1] ↵ Next ↵ "AD" ↵ List 1[4] ◢ "A NON D" ↵ List 1[3] ◢ "BD" ↵ List 1[2] ◢ "B NON D" ↵ List 1[1]	:Disp "Q" :Input Q :Disp "R" :Input R :seq (0,I,1,4,1) → L_1 :For (I,1,1000) :2 int(rand + 0.6) → A :If A = 2 :Then :int(rand + Q) → D :Else :int(rand + R) → D :End :L_1(A+D+1) + 1 → L_1(A+D+1) :End :Disp "AD" :Disp L_1(4) :Pause :Disp "A NON D" :Disp L_1(3) :Pause :Disp "BD" :Disp L_1(2) :Pause :Disp "B NON D" :Disp L_1(1)	:DelVar s :Disp "q" :Input q :Disp "r" :Input r :seq (0,i,1,4,1) → s :For i,1,1000 :2 int(rand( ) + 0.6) → a :If a = 2 Then :int(rand( ) + q) → d :Else :int(rand( ) + r) → d :EndIf :s[a+d+1] + 1 → s[a+d+1] :EndFor :Disp "AD" :Disp s[4] :Pause :Disp "A NON D" :Disp s[3] :Pause :Disp "BD" :Disp s[2] :Pause :Disp "B NON D" :Disp s[1]

1) Utiliser le programme précédent dans les deux cas suivants :

⇨ **q = 0,10 et r = 0,03 :**
Compléter le tableau ci-dessous :

	A	B	Total
D			
$\overline{D}$			
Total			1000

a) Quelle est, parmi la production des 1000 pièces, la fréquence f_A des pièces provenant de A ?

....

b) Quelle est, parmi la production des 1000 pièces, la fréquence $f_{A\cap D}$ des pièces provenant de A et défectueuses ? ....

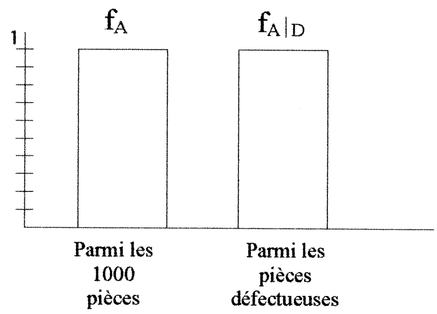
c) Quelle est, parmi les pièces défectueuses, la fréquence notée $f_{A|D} = \dfrac{\text{nb pièces de type A et D}}{\text{nb pièces D}}$ des pièces provenant de A ?

....

....

....

Indiquer dans l'histogramme la proportion des pièces provenant de A, selon que l'on se place dans la production totale de 1000 pièces ou parmi les pièces défectueuses.



⇨ **q = 0,10 et r = 0,10 :**
Compléter le tableau ci-dessous :

	A	B	Total
D			
$\overline{D}$			
Total			1000

a) Quelle est, parmi la production des 1000 pièces, la fréquence f_A des pièces provenant de A ?

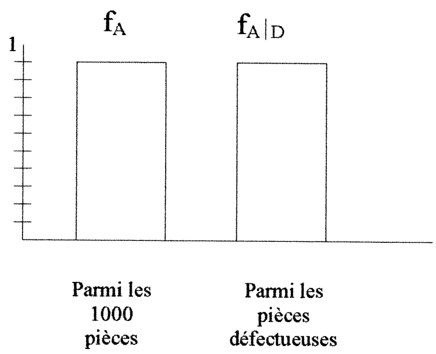
....

b) Quelle est, parmi la production des 1000 pièces, la fréquence $f_{A\cap D}$ des pièces provenant de A et défectueuses ? ....

c)Quelle est, parmi les pièces défectueuses, la fréquence notée $f_{A|D} = \dfrac{\text{nb pièces de type A et D}}{\text{nb pièces D}}$ des pièces provenant de A ?

....

Indiquer dans l'histogramme la proportion des pièces provenant de A, selon que l'on se place dans la production totale de 1000 pièces ou parmi les pièces défectueuses.



2) Dans chaque cas, le fait de savoir que la pièce tirée est défectueuse modifie-t-il significativement la répartition statistique du critère de provenance des pièces ?

....
....
....

2 Fréquence des pièces provenant de A parmi les défectueuses d'une production de 10 000 pièces

Si, au lieu de tirer une seule pièce au hasard dans la production, on recommence (avec remise) jusqu'à tirer une pièce défectueuse, il s'agit d'une nouvelle expérience aléatoire, que l'on peut résumer en disant que l'on tire au hasard une pièce défectueuse dans la production.
On s'intéresse à la probabilité que cette pièce défectueuse provienne de A.
En simulant plusieurs fois une production de 1000 pièces, on peut se faire une idée de cette probabilité. La moyenne des fréquences $f_{A|D}$ devant s'en rapprocher.
En complétant vos simulations précédentes avec celles d'autres élèves, remplir le tableau suivant :

Simulations	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Moyenne
$f_{A\|D}$ avec q=0,10 et r=0,03											
$f_{A\|D}$ avec q=0,10 et r=0,10											

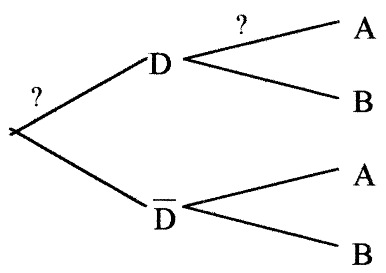
A combien pouvez-vous estimer la probabilité qu'une pièce défectueuse, tirée au hasard, provienne de A ?
Lorsque q = 0,10 et r = 0,03 : ....
Lorsque q = 0,10 et r = 0,10 : ....

3 Etude probabiliste

On tire au hasard une pièce dans la production. On note A l'événement «la pièce tirée provient de la machine A », B l'événement «la pièce tirée provient de la machine B » et D l'événement «la pièce tirée est défectueuse ».
1) On suppose que q = 0,10 et r = 0,03.
Calculer P(A), P(A∩D) et P(D) (on peut s'aider de l'arbre 1).

....
....
....
....
....
....

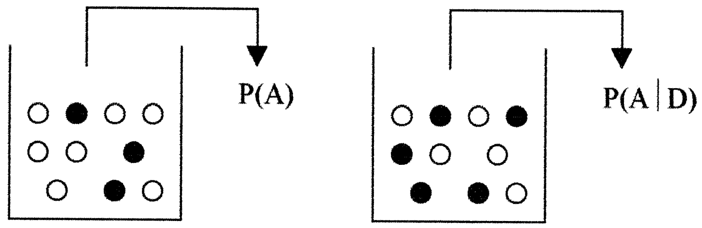
« Inverser » l'arbre 1, en indiquant sur l'arbre ci-dessous les probabilités correspondant aux ? .



Arbre 2

On note P(A | D) la probabilité de A sachant D correspondant à $P(A|D) = \dfrac{P(A \cap D)}{P(D)}$.

Que vaut P(A | D) ? Comparer avec l'estimation obtenue au $\boxed{2}$. ....



Pièces A et B dans la production totale

Pièces A et B parmi les défectueuses

2) On suppose que q = 0,10 et r = 0,10.
Calculer P(A), P(A∩D) et P(D) (on peut s'aider de l'arbre 1).

....

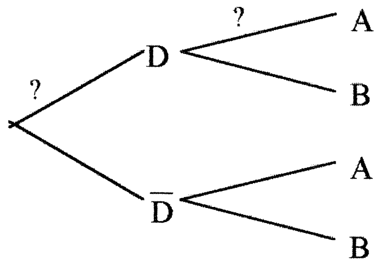
....

....

....

....

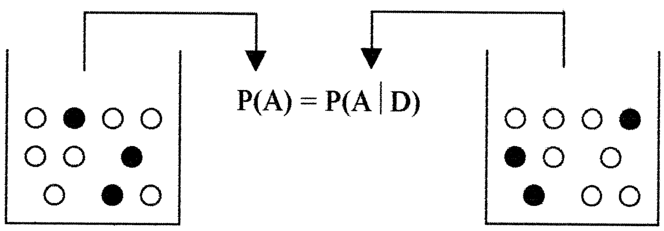
« Inverser » l'arbre 1, en indiquant sur l'arbre ci-dessous les probabilités correspondant aux ? .



Arbre 2

Lorsque P(A∩D) = P(A) × P(D), on dit que les événements A et D sont **indépendants**.
On alors $P(A|D) = \dfrac{P(A \cap D)}{P(D)} = P(A)$, c'est à dire que l'information D n'influe pas sur la probabilité P(A).

Que vaut P(A/D) ? Que constate-t-on ? ....



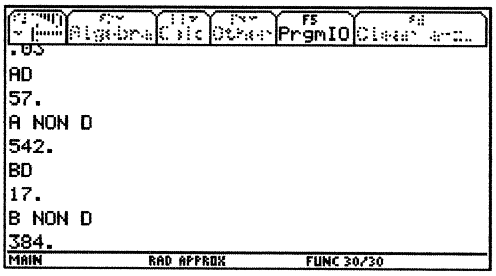
Pièces A et B dans la production totale

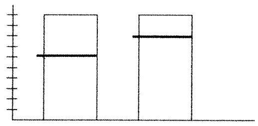
Pièces A et B parmi les défectueuses

Les proportions sont les mêmes

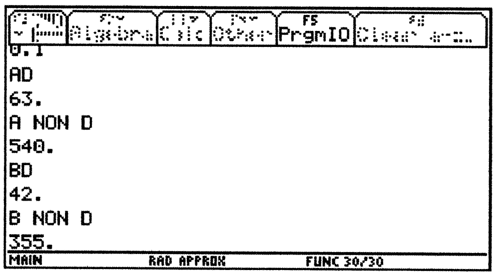
Description et compte-rendu de l'activité "Indépendance et conditionnement"

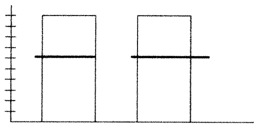
[1] Production de 1000 pièces :
Il n'est pas question de probabilités dans cette question mais de simples statistiques sur une production de 1000 pièces, entièrement connue.
1) A titre d'exemple, voici un résultat possible du programme :
⇨ q = 0,10 et r = 0,03.
a) $f_A = 0,599$.
b) $f_{A \cap D} = 0,057$.
c) $f_{A|D} = 57/(57+17) \approx 0,77$.





⇨ q = 0,10 et r = 0,10.
a) $f_A = 0,603$.
b) $f_{A \cap D} = 0,063$.
c) $f_{A|D} = 63/(63+42) = 0,60$.





2) On constate que c'est seulement dans le premier cas que la répartition du critère de provenance est significativement différente selon que l'on se place dans la production des 1000 pièces ou parmi les pièces défectueuses.

[2] Production de 10000 pièces :
En augmentant le nombre de simulations de la production, $f_{A|D}$ doit converger vers $P(A | D)$.
Voici un exemple de 10 simulations de productions de 1000 pièces :

Simulations	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	moyenne ≈
$f_{A|D}$ avec q=0,10 et r=0,03	0,77	0,83	0,93	0,84	0,81	0,85	0,83	0,78	0,79	0,84	0,83
$f_{A|D}$ avec q=0,10 et r=0,10	0,60	0,58	0,56	0,64	0,56	0,62	0,58	0,51	0,54	0,69	0,59

On estime donc que la probabilité qu'une pièce défectueuse provienne de A est de l'ordre de 0,83 lorsque q=0,10 et r=0,03 et de l'ordre de 0,59 lorsque q=r=0,10.

[3] Etude probabiliste :
1) $P(A) = 0,60$; $P(A \cap D) = 0,60 \times 0,10 = 0,06$ d'après l'arbre 1 et $P(D) = P(A \cap D) + P(B \cap D)$ (cas disjoints) d'où $P(D) = 0,06 + 0,40 \times 0,03 = 0,072$.
Sur l'arbre 2, les données sont $P(D) = 0,072$ et $P(A \cap D) = 0,06$, on en déduit que la probabilité figurant sur la branche menant de D à A est $0,06 \div 0,072 \approx 0,83$.
On a ainsi $P(A/D) \approx 0,83$, résultat approximativement égal à celui donné au [2] par les fréquences.

2) $P(A) = 0{,}60$; $P(A \cap D) = 0{,}60 \times 0{,}10 = 0{,}06$ d'après l'arbre 1 et $P(D) = P(A \cap D) + P(B \cap D)$ (cas disjoints) d'où $P(D) = 0{,}06 + 0{,}40 \times 0{,}10 = 0{,}10$.
Sur l'arbre 2, les données sont $P(D) = 0{,}10$ et $P(A \cap D) = 0{,}06$, on en déduit que la probabilité figurant sur la branche menant de D à A est $0{,}06 \div 0{,}10 = 0{,}60$.
On a ainsi $P(A/D) = 0{,}60$, résultat approximativement égal à celui donné au $\boxed{2}$ par les fréquences.
Dans ce cas, on constate que $P(A/D) = 0{,}60 = P(A)$, il y a indépendance des événements A et D.

Dieu joue-t-il aux dés ?
Gravure Bibliothèque nationale de France

"L'aléatoire existe de son plein droit à tous les niveaux de la réalité. Le fortuit et le nécessaire sont tous deux des outils indispensables dans la panoplie de la Nature."
TRINH XUAN THUAN – Le chaos et l'harmonie – 1997.

7 Variables aléatoires

A - OBJECTIFS

• Permettre une approche statistique des variables aléatoires, par la simulation d'un grand nombre d'expériences. Faire en particulier le lien entre les notions de moyenne et d'espérance.
• Faciliter par l'expérimentation l'appropriation des situations, permettre de conjecturer des résultats que l'on cherchera ensuite à valider par un raisonnement probabiliste.

B – ACTIVITES SUR CALCULATRICE page 64

Niveau	A partir de la terminale.
Situation dans la progression	Après le cours sur les variables aléatoires. Premier T.P. d'exploitation et d'exploration de la notion.
Durée	Non testé.
Nature des activités	1 Inspirée du livre d'Engel (réf. [3]), cette première activité met en lumière l'aspect historique de l'espérance comme espérance de gain, ceci dans un cas où la réponse n'est pas intuitive. 2 Egalement à partir d'une idée de Engel ([3]), l'objectif est un travail sur les arbres et les organigrammes, dans une situation amusante, où là aussi la réponse n'est pas évidente. 3 A propos d'une situation répandue dans le domaine industriel (énoncé inspiré d'une épreuve de BTS), on manipule un arbre pondéré pour confirmer la loi donnée par l'expérience.

C – ACTIVITES SUR EXCEL page 72

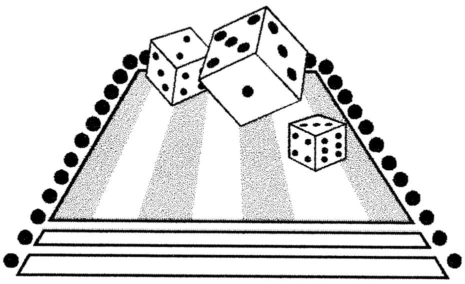
Arnaque à la foire.
Pièces à défauts multiples.

TRAVAUX PRATIQUES

NON TESTE EN CLASSE

VARIABLES ALEATOIRES

1 ARNAQUE A LA FOIRE



Sur les foires anglo-saxonnes, on propose le jeu suivant :
Pour une mise de 1F, le joueur peut parier sur un nombre entier compris entre 1 et 6. Il lance alors trois dés. Si le nombre sur lequel il a parié sort 1 fois, 2 fois ou 3 fois, on lui rembourse sa mise plus 1F, 2F, ou 3F. Sinon, il perd sa mise.
Ce jeu peut sembler, à première vue, plutôt équitable. Nous allons examiner ce qu'il en est.

1 Simulation

Le programme suivant simule 100 parties, où, à chaque fois, un nombre N est choisi au hasard entre 1 et 6. Il fournit ensuite la répartition des gains ou pertes, puis la moyenne.

CASIO (anciens modèles avec mémoires indicées)	CASIO 6910→9990 (avec listes)	TI 80 - 82 - 83 - 85	TI 92
1 → I ↵ 1 → J ↵ Lbl 0 ↵ 0 → A[J] ↵ J + 1 → J ↵ J ≤ 4 ⇒ Goto 0 ↵ Lbl 1 0 → S ↵ Int (1 + 6 Ran#) → N ↵ Int (1 + 6 Ran#) = N ⇒ S + 1 → S ↵ Int (1 + 6 Ran#) = N ⇒ S + 1 → S ↵ Int (1 + 6 Ran#) = N ⇒ S + 1 → S ↵ S + 1 → L ↵ A[L] +1 → A[L] ↵ I + 1 → I ↵ I ≤ **100** ⇒ Goto 1 ↵ 1 → J ↵ Lbl 2 ↵ A[J] ◢ J + 1 → J ↵ J ≤ 4 ⇒ Goto 2 ↵ "FIN"	ClrList ↵ Seq(I,I,0,3,1) → List 1 ↵ -1 → List 1 [1] ↵ Seq(0,I,1,4,1) → List 2↵ For 1 → I To **100** ↵ 0 → S ↵ Int (1 + 6 Ran#) → N ↵ Int (1 + 6 Ran#) = N ⇒ S + 1 → S ↵ Int (1 + 6 Ran#) = N ⇒ S + 1 → S ↵ Int (1 + 6 Ran#) = N ⇒ S + 1 → S ↵ S + 1 → L ↵ List 2 [L] +1 → List 2 [L] ↵ Next ↵ List 2 ◢ 1-Variable List 1 , List 2	:ClrList L_1 , L_2 :seq(I , I , 0 , 3 , 1) → L_1 : -1 → L_1(1) :seq(0 , I , 1 , 4 , 1) → L_2 :For(I, 1 , **100**) :0 → S :int(1 + 6rand) → N :If int(1 + 6rand) = N :S + 1 → N :If int(1 + 6rand) = N :S + 1 → S :If int(1 + 6rand) = N :S + 1 → S :S + 1 → L :L_2(L) + 1 → L_2(L) :End :Disp L_2 :Pause :1-Var Stats L_1 , L_2	:DelVar L1 , L2 :seq(i , i , 0 , 3 , 1) → L1 : -1 → L1[1] :seq(0 , i , 1 , 4 , 1) → L2 :For i, 1 , **100** :0 → s :int(1 + 6rand( )) → n :If int(1 + 6rand( )) = n :s + 1 → s :If int(1 + 6rand( )) = n :s + 1 → s :If int(1 + 6rand( )) = n :s + 1 → s :s + 1 → L :L2[L] + 1 → L2[L] :EndFor :Disp L2 :Pause :OneVar L1 , L2 :ShowStat

⇨ Pour obtenir certaines instructions :

- CASIO 6910 → 9990 : **ClrList** par PRGM CLR List ; **Seq** par OPTN LIST ; **List** par OPTN LIST ; **For To Next** par PRGM COM ; **Int** par OPTN NUM ; **Ran#** par OPTN PROB ; **= [** au clavier ; **1-Variable** par MENU (F4) STAT CALC 1VAR
- TI 80 82 83 : **ClrList** par STAT EDIT ; **Seq** par 2nd LIST OPS ; **L_1** au clavier par 2nd ; **For End** par PRGM CTL ; **int** par MATH NUM ; **rand** par MATH PRB ; **Disp** par PRGM I/O ; **1-Var Stats** par STAT CALC.

On note X la variable aléatoire qui, à chaque jeu, associe le gain (ou la perte).
Compléter le tableau :

X =	-1	1	2	3	$\overline{x} \approx$
Nb d'observations					

Modifier le programme précédent pour faire une simulation de 1000 jeux.

X =	-1	1	2	3	$\overline{x} \approx$
Nb d'observations					

[2] Recherche de l'espérance de gain

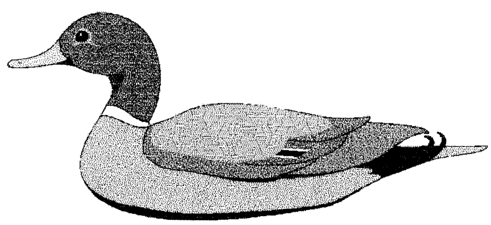
Pour confirmer vos observations, rechercher la loi de probabilité de X.

X =	-1	1	2	3
Probabilités				

Calculer E(X).

2 LA CHASSE AUX CANARDS

Trois chasseurs A, B, C, tirent simultanément sur trois canards numérotés 1, 2, 3. Chaque chasseur choisit au hasard, et indépendamment des autres, de viser un canard et ne rate jamais son coup. On note X la variable aléatoire qui, à toute chasse, associe le nombre de canards survivants.
On désire déterminer la loi de X.



[1] Simulation sans programmer

La simulation va permettre de se faire une première idée de cette loi, sans pour autant commettre une hécatombe.
La simulation d'une chasse consiste à répéter **sans programme** 3 fois l'instruction 1 + Int(3Ran#) ou 1 + int(3rand) en appuyant sur EXE ou ENTER.

Effectuer ainsi 10 chasses et consigner ci-dessous vos résultats.

Simulation n°	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Canards abattus										
Valeur de X										

Statistiques sur 10 chasses :

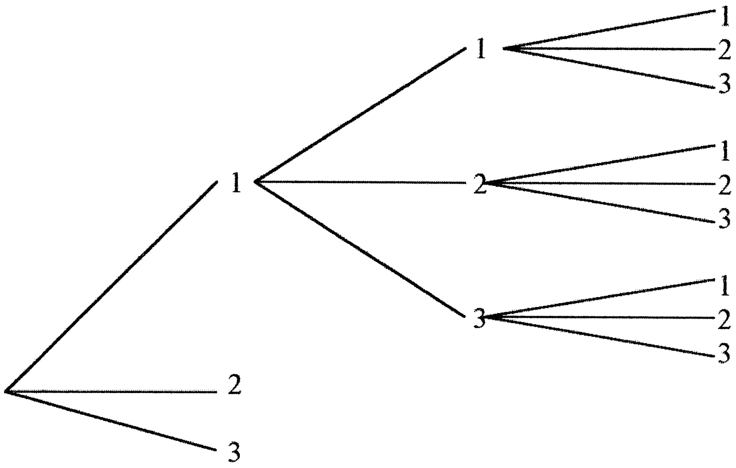
Valeur de X	0	1	2
effectifs			

Faire des statistiques sur 10 chasses, ce n'est pas très significatif. Avant de concevoir un programme permettant d'aller beaucoup plus loin, réfléchissons à une solution théorique.

2 Résolution théorique

A l'aide de l'arbre (incomplet) suivant, déterminer la loi de X.

Valeur de X :
2



Choix du chasseur A — Choix du chasseur B — Choix du Chasseur C

Loi de X :

Valeur de X	0	1	2
Probabilité			

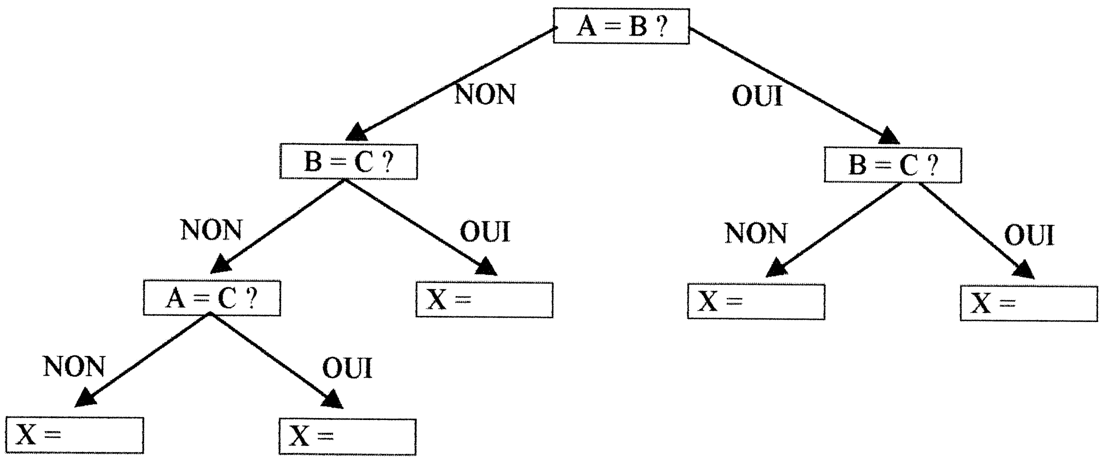
Calculer E(X) et $\sigma(X)$:

....

....

3 Programmation

On désigne par A, B, C les variables où seront stockés les choix des chasseurs A, B, C :
$1 + \text{Int}(3\text{Ran\#}) \to A$ puis $1 + \text{Int}(3\text{Ran\#}) \to B$ et $1 + \text{Int}(3\text{Ran\#}) \to C$.
Il s'agit, selon les valeurs de A, B et C, de faire le tri et d'affecter la valeur correcte à X.
Pour ce faire, compléter l'organigramme suivant :



Effectuer le programme suivant pour 100, puis 1000 chasses.

CASIO 6910→9990 (avec listes)	TI 80 - 82 - 83 - 85	TI 92
ClrList ↵	:ClrList L_1 , L_2	:DelVar L1 , L2
Seq(I,I,0,2,1) → List 1 ↵	:seq(I , I , 0 , 2 , 1) → L_1	:seq(i , i , 0 , 2 , 1) → L1
Seq(0,I,1,3,1) → List 2 ↵	:seq(0 , I , 1 , 3 , 1) → L_2	:seq(0 , i , 1 , 3 , 1) → L2
For 1 → I To **100** ↵	:For(I , 1 , **100)**	:For i , 1 , **100**
1 + Int(3Ran#) → A ↵	:1 + int(3 rand) → A	:1 + int(3 rand( )) → a
1 + Int(3Ran#) → B ↵	:1 + int(3 rand) → B	:1 + int(3 rand( )) → b
1 + Int(3Ran#) → C ↵	:1 + int(3 rand) → C	:1 + int(3 rand( )) → c
If A = B ↵	:If A = B	:If a = b Then
Then If B = C ↵	:Then	:If b = c Then
Then 2 → X ↵	:If B = C	:2 → x
Else 1 → X ↵	:Then	:Else
IfEnd ↵	:2 → X	:1 → x
Else If B = C ↵	:Else	:EndIf
Then 1 → X ↵	:1 → X	:Else
Else If A = C ↵	:End	:If b = c Then
Then 1 → X ↵	:Else	:1 → x
Else 0 → X ↵	:If B = C	:Else
IfEnd ↵	:Then	:If a = c Then
IfEnd ↵	:1 → X	:1 → x
IfEnd ↵	:Else	:Else
X + 1 → X ↵	:If A = C	:0 → x
List 2 [X] + 1 → List 2 [X] ↵	:Then	:EndIf
Next ↵	:1 → X	:EndIf
List 2 ◢	:Else	:EndIf
1-Variable List 1 , List 2	:0 → X	:x + 1 → x
	:End	:L2[x] + 1 → L2[x]
	:End	:EndFor
	:End	:Disp L2
	:X + 1 → X	:Pause
	:L_2(X) + 1 → L_2(X)	:OneVar L1 , L2
	:End	:ShowStat
	:Disp L_2	
	:Pause	
	:1-Var Stats L_1 , L_2	

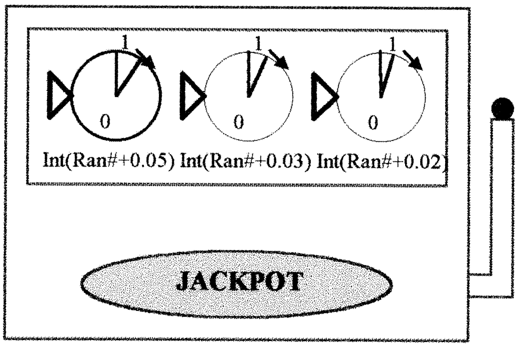
Consigner vos résultats dans le tableau suivant :

	X = 0	X = 1	X = 2	$\overline{x}$	σ
100 chasses					
1000 chasses					

Comparer à vos résultats théoriques. ....

3 NOMBRE DE DEFAUTS

Une usine produit, grâce à des machines M_1, M_2, M_3 des pièces qui ont :
pour la machine M_1 : le défaut a dans 5 % des cas ;
pour la machine M_2 : le défaut b dans 3 % des cas ;
pour la machine M_3 : le défaut c dans 2 % des cas.
Une machine M fabrique un objet en assemblant une pièce provenant de M_1, une pièce provenant de M_2 et une pièce provenant de M_3. Elle prend au hasard des pièces dans trois stocks comprenant un grand nombre de pièces. Les différentes pièces sont tirées au hasard et indépendamment les unes des autres.
On désigne par X la variable aléatoire qui, à chaque objet prélevé au hasard dans la production de M, associe le nombre de ses défauts. On souhaite connaître la loi de X.



1 Simulation :

Il s'agit de lancer trois roulettes indépendantes qui affichent s'il y a défaut ou pas (un peu comme une machine à sous à trois roues), puis de compter les défauts affichés.

CASIO (anciens modèles avec mémoires indicées)	CASIO 6910→9990 (avec listes)	TI 80 - 82 - 83 - 85	TI 92
1 → I ↵ 1 → J ↵ Lbl 0 ↵ 0 → A[J] ↵ J + 1 → J ↵ J ≤ 4 ⇒ Goto 0 ↵ Lbl 1 Int(Ran#+0.05)+Int(Ran#+0.03)+Int(Ran# + 0.02) → X ↵ X + 1 → X ↵ A[X] + 1 → A[X] ↵ I + 1 → I ↵ I ≤ **100** ⇒ Goto 1 ↵ 1 → J ↵ Lbl 2 ↵ A[J] ◢ J + 1 → J ↵ J ≤ 4 ⇒ Goto 2 ↵ "FIN"	ClrList ↵ Seq(I , I , 0 , 3 , 1) → List 1 ↵ Seq(0 , I , 1 , 4 , 1) → List 2 ↵ For 1 → I To **100** ↵ Int(Ran#+0.05)+Int(Ran#+0.03)+Int(Ran# + 0.02) → X ↵ X + 1 → X ↵ List 2[X] + 1 → List 2[X] ↵ Next ↵ List 2 ◢ 1-Variable List 1 , List 2	:ClrList L_1 , L_2 :seq(I , I , 0 , 3 , 1) → L_1 :seq(0 , I , 1 , 4 , 1) → L_2 :For(I , 1 , **100**) :int(rand+0.05)+int(rand+0.03)+int(rand+0.02) → X :X + 1 → X :L_2(X) + 1 → L_2(X) :End :Disp L_2 :Pause :1-Var Stats L_1 , L_2	:DelVar L1 , L2 :seq(i , i , 0 , 3 , 1) → L1 :seq(0 , i , 1 , 4 , 1) → L2 :For i , 1 , **100** :int(rand( )+0.05)+int (rand( )+0.03) +int(rand( )+0.02) → x :x + 1 → x :L2[x] + 1 → L2[x] :EndFor :Disp L2 :Pause :OneVar L1 , L2 :ShowStat

Compléter le tableau :

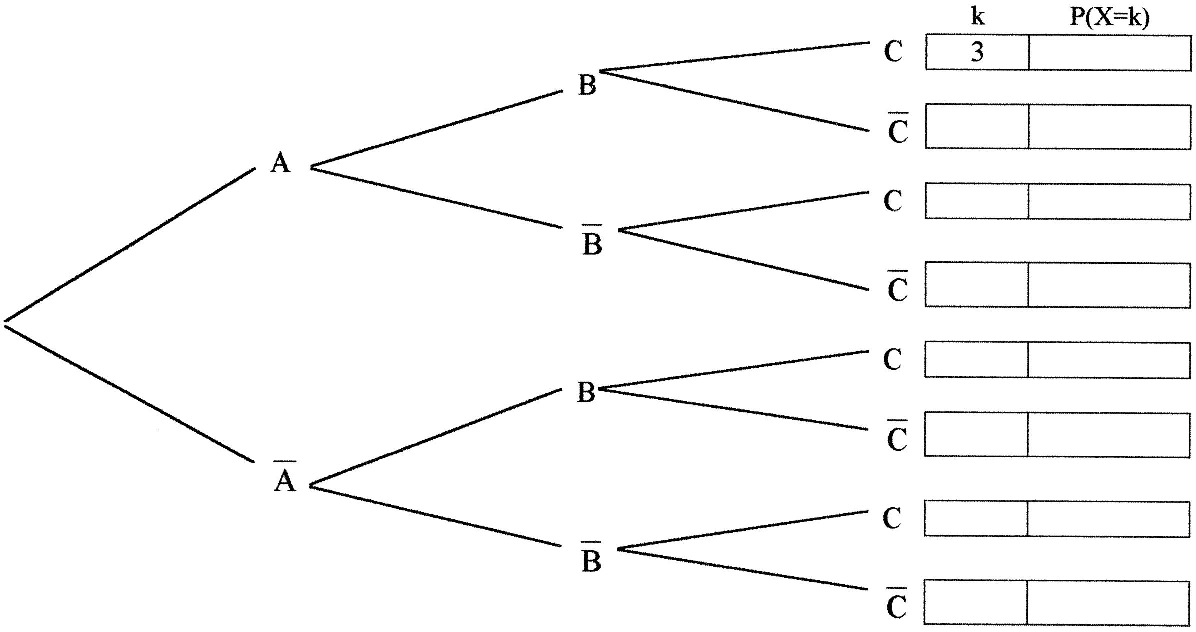
X =	0	1	2	3	$\overline{x} \approx$
Nb d'observations					

Modifier le programme précédent pour faire une simulation de 1000 pièces.

X =	0	1	2	3	$\overline{x} \approx$
Nb d'observations					

2 Résolution probabiliste du problème :

On tire une pièce M. Soit A l'événement "la pièce M présente le défaut a", B l'événement "la pièce M présente le défaut b" et C "la pièce M présente le défaut c".
Compléter, sur l'arbre ci-dessous, les probabilités.



En déduire la loi de X :

Valeur de X	0	1	2	3
Probabilité				

Calculer E(X) :

....

Comparer avec les résultats obtenus par simulation. ....

Description et compte-rendu de l'activité "Variables aléatoires"

[1] Arnaque à la foire :

1) On souhaite se faire d'abord une idée de l'espérance de gain par simulations.
Simulation de 1000 parties :

```
L2
  {584 341 66 9}
```

```
1-Var Stats
 x̄=-.084
 Σx=-84
 Σx²=1270
 Sx=1.124370138
 σx=1.123807813
↓n=1000
```

2) Loi de X et espérance :

X =	-1	1	2	3
Probabilités	125/216≈0,579	75/216≈0,347	15/216≈0,069	1/216≈0,005

E(X) = -17/216 ≈ -0,079. Ces résultats correspondent aux simulations et confirment que le jeu n'est pas équitable.

[2] La chasse aux canards :

1) Il s'agit dans cette question de comprendre le principe de la simulation et de "vivre" les aléas du hasard.

2) Résolution théorique :

Valeur de X	0	1	2
Probabilité	6/27 ≈ 0,22	18/27 ≈ 0,67	3/27 ≈ 0,11

E(X) ≈ 0,89 et σ(X) ≈ 0,57.

3) Simulation de 1000 chasses :

```
prgmCANARDS
    {217 682 101}
```

```
1-Var Stats
 x̄=.884
 Σx=884
 Σx²=1086
 Sx=.5521311881
 σx=.5518550534
↓n=1000
```

[3] Nombre de défauts :

1) Simulations de 1000 pièces :

```
prgmDEFAUTS
    {900 97 3 0}
```

```
1-Var Stats
 x̄=.103
 Σx=103
 Σx²=109
 Sx=.3138303514
 σx=.313673397
↓n=1000
```

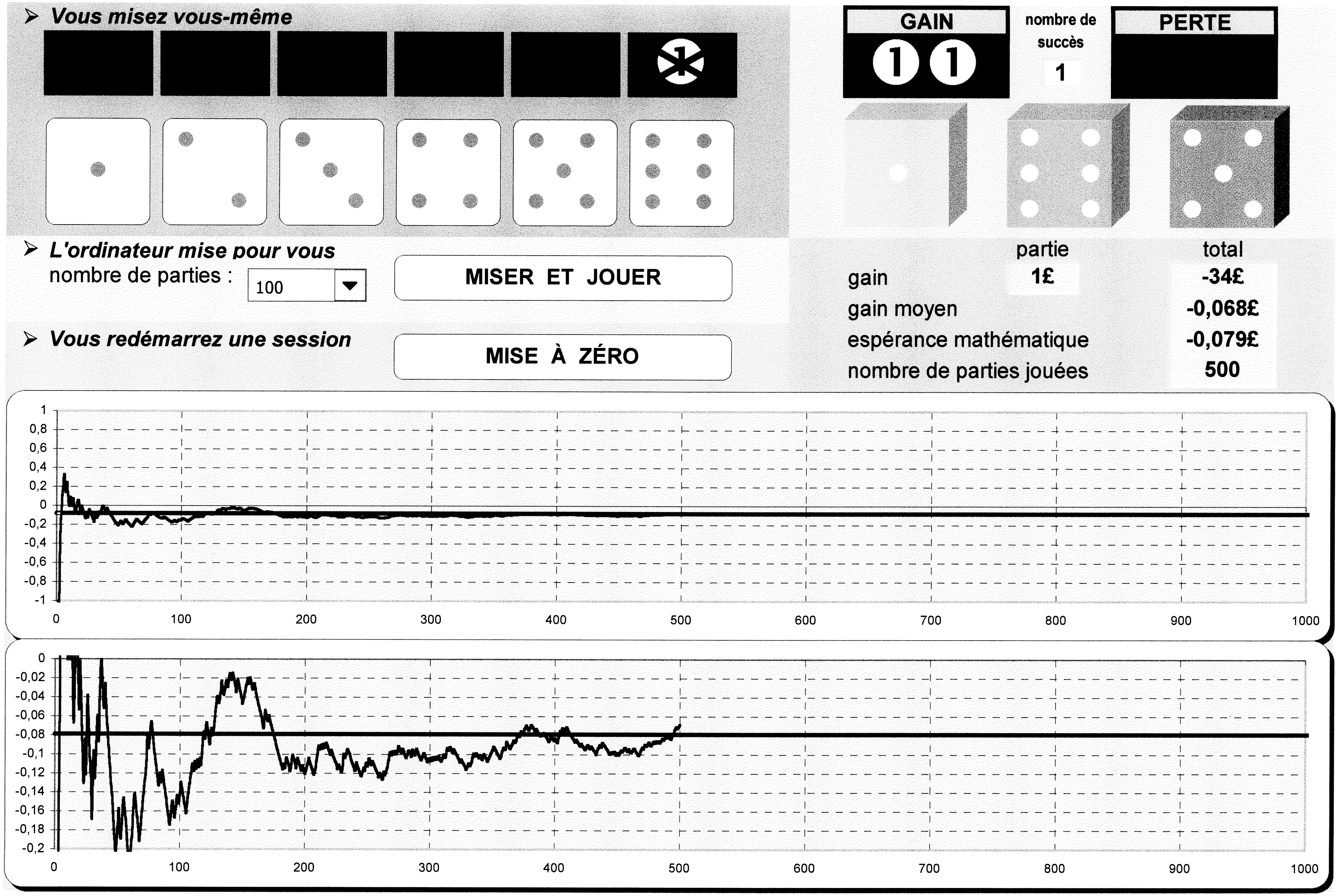
2) Calculs probabilistes :

Valeur de X	0	1	2	3
Probabilité	0,90307	0,09389	0,00301	0,00003

E(X) = 0,10.

SIMULATION

ARNAQUE À LA FOIRE



C - ACTIVITES SUR EXCEL

1 ARNAQUE À LA FOIRE

Situation

Cette manipulation reprend la situation de l'activité 1 sur calculatrice où l'on mise 1 £ sur un numéro et où l'on perd sa mise ou on la récupère augmentée de 1 £, 2£, 3£ suivant que ce numéro sort 0, 1, 2 ou 3 fois en lançant 3 dés (cf. page 64) .

Simulation en direct de parties successives (jusqu'à 1000) où le manipulateur peut jouer lui-même ou faire jouer l'ordinateur à sa place.

Calcul des gains cumulés et du gain moyen sur l'ensemble des parties.

Objectif

Comparer le gain moyen du jeu avec l'espérance mathématique.

Mode d'emploi et déroulement du programme

⇨ Vous misez vous-même :

Cliquez sur le bouton portant le numéro choisi
La mise ① barrée d'une **X** apparaît au dessus du numéro choisi
L'ordinateur simule un lancer
- Si vous avez perdu, la mise ① apparaît en perte
- Si vous avez gagné, la mise ① apparaît en gain augmentée de ①, ② ou ③

⇨ L'ordinateur mise pour vous :

Choisissez un nombre de parties à jouer (de 1 à 1000) dans la zone de liste en cliquant sur ▼
Cliquez sur le bouton **MISER ET JOUER**
L'ordinateur simule le nombre voulu de lancers, les pertes et gains s'affichent comme précédemment

⇨ 2 graphiques permettent de suivre en direct l'évolution du gain moyen (courbe noire) par rapport à l'espérance mathématique (droite bleue) en fonction du nombre de parties jouées, l'un gradué de -1 à 1, l'autre gradué de -0,2 à 0.

⇨ Pour redémarrer une nouvelle session, cliquer sur le bouton **MISE À ZÉRO**

Suggestions

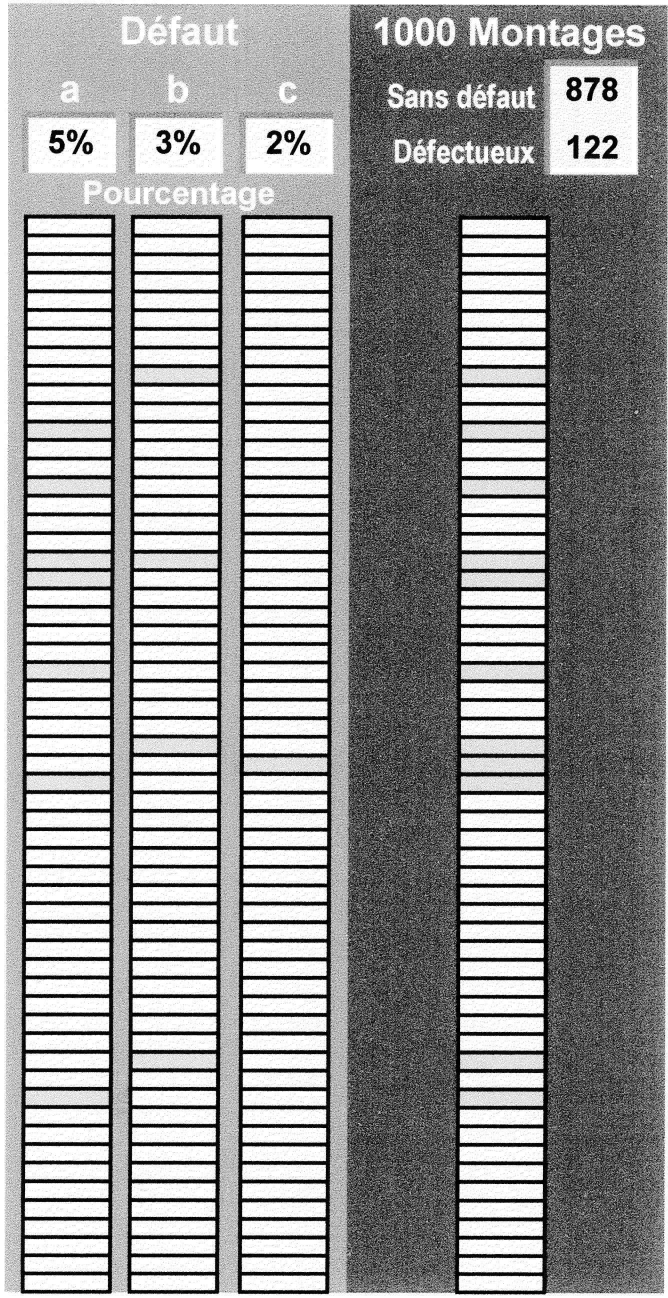
1° Faire étudier la variable aléatoire qui à chaque lancer associe le gain et calculer l'espérance mathématique.
2° Continuer le cours pendant le déroulement de l'expérience.

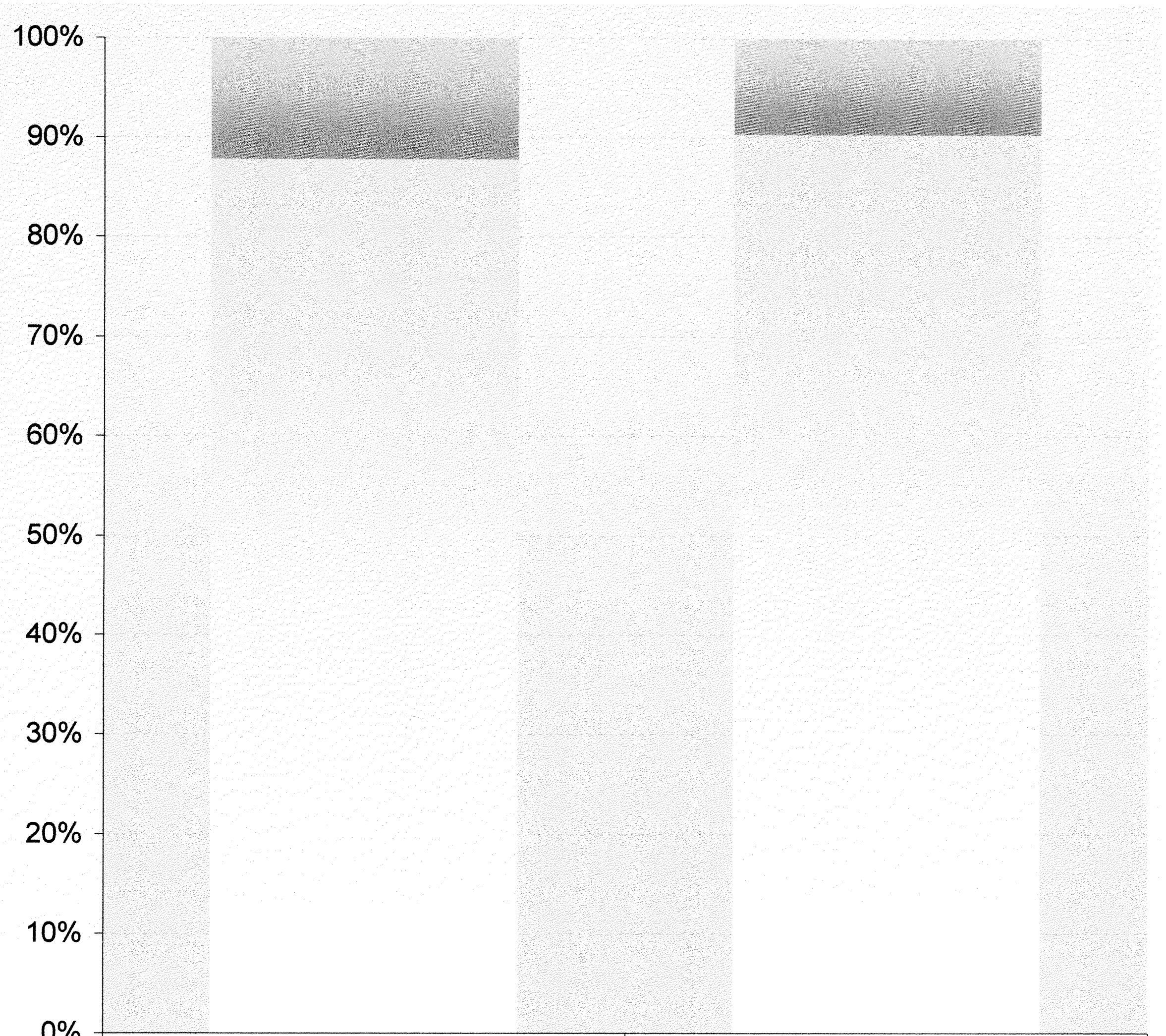
Remarque technique

Les tirages de chaque dé sont obtenus par la formule ENT(1+6*ALEA()) qui génère aléatoirement un entier entre 1 et 6.

SIMULATION

PIÈCES À DÉFAUTS MULTIPLES





Fréquences	Expérimentales	Théoriques
Défectueux	12,20%	9,69%
Sans défaut	87,80%	90,31%

NOUVELLE SIMULATION

2 PIECES A DEFAUTS MULTIPLES

Situation :
Cette manipulation reprend la situation de l'activité 3 sur calculatrice où des montages sont constitués de 3 composants a , b , c ayant des probabilités données d'être défectueux (cf. p 68) .
Simulation globale d'une population de1000 montages.

Objectif :
Comparer la fréquence expérimentale de montages défectueux dans une population de1000 montages avec la probabilité pour qu'un montage soit défectueux.

Description :

⇨ Les composants sont représentés dans la colonne de gauche par des rectangles rouges s'ils sont défectueux, verts dans le cas contraire.

⇨ Les montages sont représentés par des rectangles dans la 2° colonne. Chaque montage résulte de l'assemblage des composants a , b , c situés sur la même ligne. Un montage est donc défectueux (rouge) dès qu'un composant est défectueux, sinon il n'a pas de défaut (vert).

⇨ On peut voir la totalité de la population en se déplaçant au moyen de l'ascenseur vertical.

⇨ Affichage et représentation graphique en rectangles superposés des fréquences expérimentales de composants avec et sans défaut.

⇨ Affichage et représentation graphique en rectangles superposés des fréquences théoriques de composants avec et sans défaut (probabilités que l'on pourra demander aux élèves de calculer).

Mode d'emploi et déroulement du programme:

⇨ Entrer les probabilités d'apparition des 3 défauts dans les 3 cellules en haut à gauche (taper seulement la valeur sans le % puis Entrée au clavier).

⇨ Après chaque saisie une nouvelle population est simulée et les fréquences théoriques et expérimentales sont recalculées.

⇨ Une nouvelle population peut être simulée sans changer les probabilités d'apparition des défauts en cliquant sur le bouton NOUVELLE SIMULATION .

Remarques techniques :
- Les composants a, défectueux ou non, sont simulés par la formule : =ALEA()+B$3<1 , où la cellule B$3 contient la probabilité p_a que a soit défectueux, qui génère FAUX avec une probabilité p_a (composant défectueux) ou VRAI avec une probabilité $1 - p_a$
(c'est la gestion des formats qui permet l'affichage de rectangles rouges ou verts au lieu FAUX ou VRAI).
- Les montages, défectueux ou non, sont simulés par la formule : =B5*D5*F5=1 , où les cellules B5, D5, F5 contiennent les composants a, b, c qui génère FAUX dès que B5, D5 ou F5 est FAUX (montage défectueux) ou VRAI dans le cas contraire sachant que FAUX = 0 et VRAI = 1 (c'est la gestion des formats qui permet l'affichage de rectangles rouges ou verts au lieu de FAUX ou VRAI).

"Il n'y a rien d'étonnant à ce que l'expérience ne puisse nous fournir la valeur rigoureuse d'une probabilité; il en est de même lorsqu'on cherche à mesurer n'importe quelle grandeur physique; dans un cas comme dans l'autre, le nombre de décimales exactes peut augmenter avec le nombre d'observations."

Emile BOREL – 1938.

8 Loi binomiale

A - OBJECTIFS

On souhaite illustrer certains domaines d'intervention de la loi binomiale en mettant en valeur l'aspect expérimental.

B – ACTIVITES SUR CALCULATRICE page 78

Niveau	Certaines terminales. BTS 1ère année.
Situation dans la progression	Après le cours sur la loi binomiale.
Durée	2 heures, à terminer à la maison.
Nature des activités	$\boxed{1}$ La planche de Galton, si elle n'est pas déjà connue des élèves, est une illustration concrète et spectaculaire de distribution binomiale avec p = 0,5. $\boxed{2}$ Le nombre de pannes d'une machine est à la base de nombreuses utilisations industrielles (illustration du cas général $p \neq 0,5$). $\boxed{3}$ La situation, plus originale, du bruit de fond dans la transmission de messages est inspirée de Engel (réf. [3]). Ce type de situation conduit à de nombreuses applications récentes des probabilités.

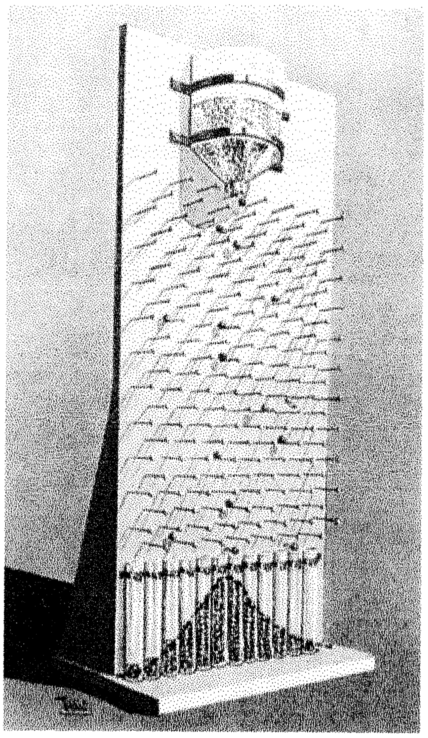
C – ACTIVITES SUR EXCEL page 86

Loi binomiale.
Planche de Galton.

TRAVAUX PRATIQUES

SIMULATION DE LOIS BINOMIALES

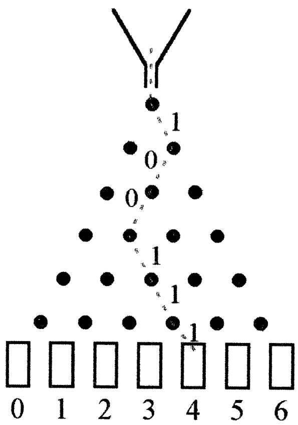
1 ETUDE DE LA PLANCHE DE GALTON
Histogramme symétrique



© BnF - Paris

Considérons une planche de Galton où chaque bille rencontre 6 plots.
Chaque bille suit un trajet aléatoire, pour aboutir dans l'un des godets situé en bas. A chaque plot rencontré, la probabilité, pour la bille, d'aller à droite ou à gauche est de 1/2.

Francis GALTON (1822/1911) est un scientifique anglais, cousin de Charles DARWIN. S'intéressant essentiellement à la biologie et à l'anthropologie, il fut aussi un pionnier en statistique.



[1] Simulation

Supposons qu'aller à droite correspond au tirage du chiffre 1, et qu'aller à gauche correspond au chiffre 0 (avec une chance sur deux dans chaque cas).
Pourquoi ceci peut-il être simulé par l'instruction : Int(Ran# + 0.5) ou int(rand + 0.5) ?

....

....

....

....

Pour savoir dans quelle case arrive la bille, il suffit de compter les points :
Case n° 4 = ... points.

Entrez dans votre calculatrice le programme suivant (la partie sous la ligne pointillée concerne le tracé d'un histogramme et est facultative).

Commentaires	CASIO (anciens modèles avec mémoires indicées)	CASIO 6910(*) 8930(*) 9930 9940 9990	TI 80 82 83	TI 92
I compteur des lancers Initialisation des compteurs de billes de chaque case: A[J] Trajet d'une bille 100 lancers de billes. Affichage.	1 → I ↵ 0 → J ↵ Lbl 0 ↵ 0 → A[J] ↵ J+1 → J ↵ J ≤ 6 ⇒ Goto 0 ↵ Lbl 1 ↵ 1 → K ↵ 0 → S ↵ Lbl 2 ↵ Int(Ran#+0.5)+ S → S ↵ K + 1 → K ↵ K ≤ 6 ⇒ Goto 2 ↵ A[S] + 1 → A[S] ↵ I+1 → I ↵ I ≤ 100 ⇒ Goto 1 ↵ 0 → J ↵ Lbl 3 ↵ A[J] ◢ J + 1 → J ↵ J ≤ 6 ⇒ Goto 3 ↵ "FIN"	ClrList ↵ Seq(I,I,0,6,1) → List 1 ↵ Seq(0,I,1,7,1) → List 2 ↵ For 1 → I To 100 ↵ 0 → S ↵ For 1 → K To 6 ↵ Int (Ran# + 0.5) + S → S ↵ Next ↵ S + 1 → J ↵ List 2[J] + 1 → List 2[J] ↵ Next ↵ List 2 ◢ S-WindMan ↵ ViewWindow 0,7,1, 0,50,10 ↵ 0 → Hstart ↵ 1 → pitch ↵ S-Gph1 DrawOn, Hist,List1,List2,Blue ↵ DrawStat	:ClrList L_1 , L_2 :seq(I,I,0,6,1) → L_1 :seq(0,I,1,7,1) → L_2 :For(I,1,100) :0 → S :For(K,1,6) :int(rand+0.5) + S → S :End :S + 1 → J :L_2(J) + 1 → L_2(J) :End :Disp L_2 :Pause :Plot1(Histogram,L_1, L_2) :PlotsOn1 :0 → Xmin :7 → Xmax :1 → Xscl :0 → Ymin :50 → Ymax :10 → Yscl :DispGraph	:DelVar L1 , L2 :seq(i,i,0,6,1) → L1 :seq(0,i,1,7,1) → L2 :For i,1,100 :0 → s :For k,1,6 :int(rand( )+0.5) + s → s :EndFor :s + 1 → j :L2[j] + 1 → L2[j] :EndFor :Disp L2 :0 → xmin :7 → xmax :1 → xscl :0 → ymin :50 → ymax :10 → yscl :PlotsOn :NewPlot 1,4,L1,,L2 ,,,,1

Programme non disponible sur TI 81.

⇨ Pour obtenir certaines instructions :

• CASIO 6910 → 9990 : **ClrList** par PRGM CLR List ; **Seq** par OPTN LIST ; **List** par OPTN LIST ; **Int** par OPTN NUM ; **Ran#** par OPTN PROB ; **S-Wind Man** par SHIFT SET UP S-WIN ; **Hstart et pitch** par VARS STAT GRPH ; **S-Graph1** par F4(MENU) Stat GRPH GPH1 ; **Draw On** par DRAW ON ; **Hist** par GRPH ; **Blue** sur 9940 par STAT COLR ; **DrawStat** par PRGM DISP Stat.

• TI 80 82 83 : **ClrList** par STAT EDIT ; **Seq** par 2nd LIST OPS ; **L_1** au clavier par 2nd ; **For End** par PRGM CTL ; **int** par MATH NUM ; **rand** par MATH PRB ; **Disp** par PRGM I/O ; **Plot 1(Histogram,L1,L2)** par 2nd STAT PLOT PLOTS puis TYPE ; **Xmin** par VARS Window... ; **PlotsOn** par 2nd STAT PLOT PLOTS ; **Dispgraph** par PRGM I/O.

✻ Particularités sur certains modèles :

CASIO 6910 et 8930 : Les instructions 0 → Hstart ↵ et 1 → pitch ↵ sont à supprimer.

⇨ Pour 100 billes, indiquer les pourcentages de billes pour chaque case :

cases	0	1	2	3	4	5	6
% de billes							

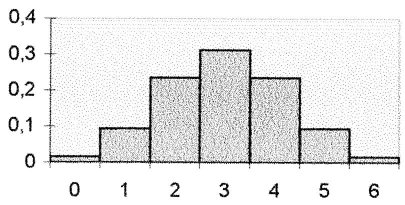
Pour 1000 billes (durée : 2 mn 30 sur CASIO 9990 ; 6 mn 30 sur TI 83):

cases	0	1	2	3	4	5	6
% de billes							

Moyenne des pourcentages obtenus dans la classe :

cases	0	1	2	3	4	5	6
% de billes							

2 Calculs probabilistes



a) Soit X la variable aléatoire qui, à chaque bille lancée, associe le nombre de déviations à droite. Quelle est la loi de X (justifier) ?

....
....
....
....
....

b) Par le calcul, compléter le tableau ci-dessous, et comparer avec les résultats des simulations.

k	0	1	2	3	4	5	6
P(X = k)							

2 PANNES DE MACHINES
Histogramme non symétrique

Un atelier contient 10 machines identiques. On admet que la probabilité qu'une machine soit en panne est 0,124 et que les machines fonctionnent de manière indépendante. On appelle X la variable aléatoire qui, à chaque jour, associe le nombre de machines en panne.
On souhaite étudier la loi de X.

1 Simulation

Montrer que l'instruction Int(Ran# + 0.124) peut simuler la panne d'une machine, un jour donné :

Le programme ci-dessous simule 100 réalisations de la variable X puis trace leur histogramme.

CASIO 6910 8930 9930 9940 9990	TI 80 82 83	TI 92
ClrList ↵ Seq(I,I,0,10,1) → List 1 ↵ Seq(0,I,1,11,1) → List 2 ↵ For 1 → I To 100 ↵ 0 → S ↵ For 1 → K To 10 ↵ Int(Ran# + .124) + S → S ↵ Next ↵ S + 1 → J ↵ List 2 [J] +1 → List 2 [J] ↵ Next ↵ List 2 ◢ S-WindMan ↵ ViewWindow 0,11,1,0,60,10 ↵ 0 → Hstart ↵ 1 → Hpitch ↵ S-Graph1 DrawOn,Hist,List1, List2,Blue ↵ DrawStat	:ClrList L_1,L_2 :seq(I,I,0,10,1) → L_1 :seq(0,I,1,11,1) → L_2 :For(I,1,100) :0 → S :For(K,1,10) :int(rand + .124) + S → S :End :S+1 → J :L_2(J) + 1 → L_2(J) :End :Disp L_2 :Pause :Plot1(Histogram,L_1,L_2) :PlotsOn 1 :0 → Xmin :11 → Xmax :1 → Xscl :0 → Ymin :60 → Ymax :10 → Yscl :DispGraph	:DelVar L1,L2 :seq(i,i,0,10,1) → L1 :seq(0,i,1,11,1) → L2 :For i,1,100 :0 → s :For k,1,10 :int(rand( ) + .124) + s → s :EndFor :s+1 → j :L2[j] + 1 → L2[j] :Endfor :Disp L2 :0 → xmin :11 → xmax :1 → xscl :0 → ymin :60 → ymax :10 → yscl :PlotsOn :NewPlot 1,4,L1,,L2,,,,1

Effectuer 3 simulations de 100 réalisations de X :

Nb de pannes	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Effectif Simul 1											
Effectif Simul 2											
Effectif Simul 3											

2 Etude probabiliste

1) Justifier que X suit une loi binomiale, en donner les paramètres :

....
....
....
....
....

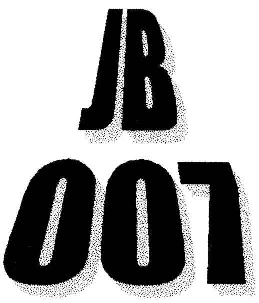
2) Compléter le tableau suivant, à comparer avec les résultats des simulations.

k	0	1	2	3	4	5	6
P(X = k)							

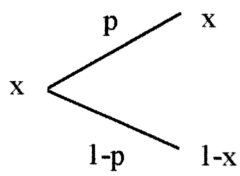
3) Quelle est la probabilité que, sur ces 10 machines, il y en ait au moins 2 en panne ?

....
....
....

3 TRANSMISSION D'UN SIGNAL



La transmission d'un signal binaire $x \in \{0,1\}$ se fait selon le schéma suivant : le signal x est transmis en x avec une probabilité p et en 1 – x avec une probabilité 1 – p.



Le "bruit de fond" qui perturbe la transmission a des origines diverses : orages, parasites, brouillage ... L'agent JB 007 doit transmettre un message important résumé par l'unique signal 1. Pour le protéger du bruit de fond, il transmet indépendamment 5 fois le signal 1 et on décide que si le message reçu contient plus de 1 que de 0, il est lu 1. Il s'agit d'étudier la fiabilité de cette procédure, selon les valeurs de p.

1 Simulation

La simulation d'une transmission consiste à répéter 5 fois l'instruction Int(Ran# + P).

Quand doit-on considérer que le message est bien transmis ? ....

Le programme suivant, **après introduction de la valeur de p**, simule 100 transmissions et affiche le nombre de messages correctement transmis.

CASIO 6910 8930 9930 9940 9990	TI 80 82 83	TI 92
ClrList ↵	:ClrList L_1	:DelVar L1
Seq(0,I,1,6,1 → List 1 ↵	:seq(0,I,1,6,1) → L_1	:seq(0,i,1,6,1) → L1
? → P ↵	:Input P	:Input p
For 1 → I To 100 ↵	:For(I,1,100)	:For i,1,100
0 → S ↵	:0 → S	:0 → s
For 1 → K To 5 ↵	:For(K,1,5)	:For k,1,5
Int(Ran# + P) + S → S ↵	:int(rand + P) + S → S	:int(rand( ) + p) + s → s
Next ↵	:End	:EndFor
List 1[J] + 1 → List 1[J] ↵	:S + 1 → J	:s + 1 → j
Next ↵	:L_1(J) + 1 → L_1(J)	:L1[j] + 1 → L1[j]
List 1[4] + List 1[5] + List 1[6]	:End	:Endfor
	:Disp L_1(4) + L_1(5) + L_1(6)	:Disp L1[4] + L1[5] + L1[6]

Compléter le tableau suivant, en effectuant 9 simulations de 100 transmissions.

Valeur de p	0,7	0,7	0,7	0,8	0,8	0,8	0,9	0,9	0,9
Nb de messages bien transmis									

2 Calcul théorique

On désigne par X la variable aléatoire qui, à chaque transmission choisie au hasard, associe le nombre de 1. Montrer que X suit la loi $\mathscr{B}(5 ; p)$.

....

....

....

Exprimer, en fonction de p, la probabilité que le message reçu soit interprété comme valant 1 .

....

....

....

....

....

....

....

En déduire la probabilité que le message reçu soit interprété comme valant 1 lorsque $p = 0{,}7$ puis $p = 0{,}8$ et $p = 0{,}9$. Comparer avec les simulations.

....

....

....

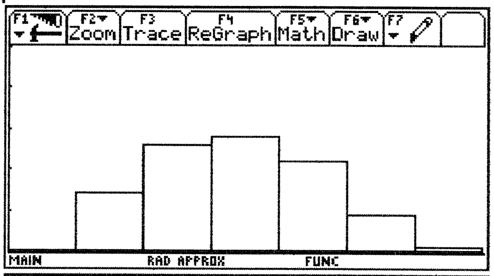
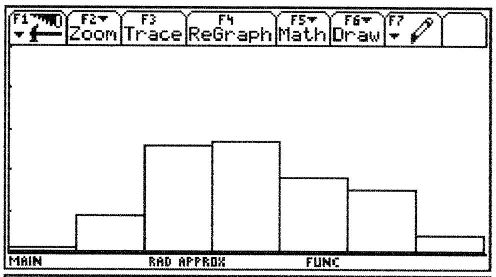
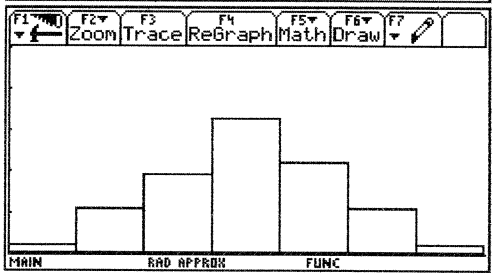
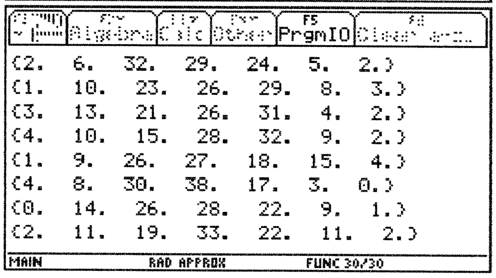
....

Description et compte-rendu de l'activité "Loi binomiale"

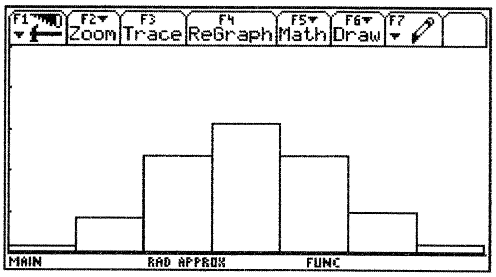
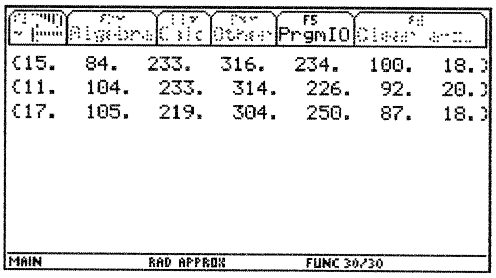
1 Etude de la planche de Galton

1) Simulation :

Exemples de simulations sur 100 billes :

Sur 1000 billes :

Remarque : voir la simulation de la planche de Galton sur Excel.

2) Calculs probabilistes :

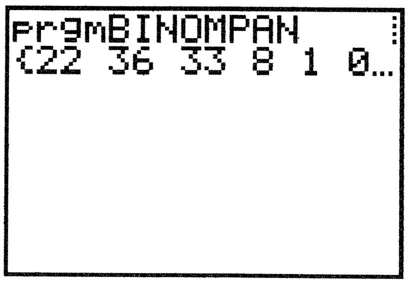
On a la répétition de 6 épreuves aléatoires indépendantes avec deux issues possibles de probabilité ½ où X associe le nombre de succès. La variable aléatoire X suit donc la loi binomiale $\mathscr{B}$(6 ; 0,5) :

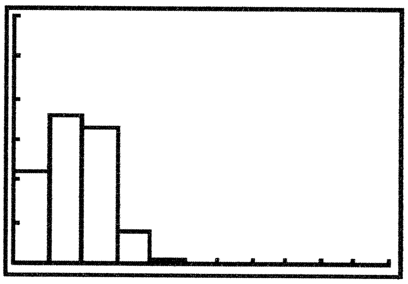
k	0	1	2	3	4	5	6
P(X=k) ≈	0,016	0,094	0,234	0,313	0,234	0,094	0,016

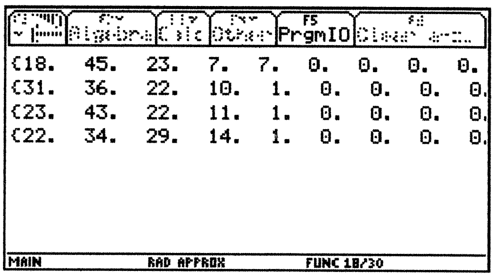
2 Pannes de machines

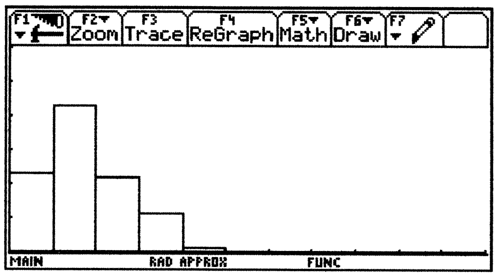
1) Simulations :

Images d'écran pour 100 réalisations de X









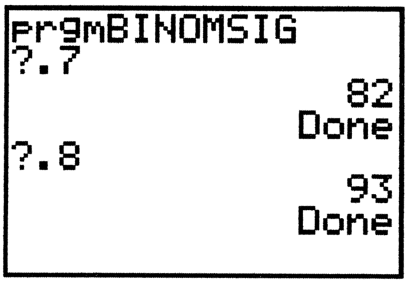
2) La variable aléatoire X suit la loi $\mathscr{B}$ (10 ; 0,124) dont la répartition théorique est :

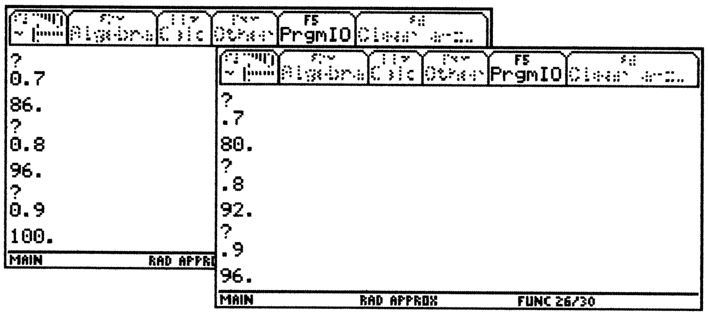
k	0	1	2	3	4	5	6
P(X = k)≈	0,266	0,377	0,240	0,091	0,022	0,004	0,0004

3 Transmission d'un signal

1) Simulations :

Transmissions correctes, sur 100 effectuées, selon la valeur de p.





2) Calcul théorique :

On a $P(X \geq 3) = P(X = 5) + P(X = 4) + P(X = 3) = p^5 + 5p^4(1-p) + 10p^3(1-p)^2$.

Les probabilités théoriques d'une transmission correcte sont donc :

p	0,7	0,8	0,9
$P(X \geq 3) \approx$	0,837	0,942	0,991

SIMULATION

LOI BINOMIALE

succès	effectif	fréquence	probas
	sur 764		
0		0,00%	0,00%
1		0,00%	0,00%
2		0,00%	0,03%
3	1	0,13%	0,18%
4	6	0,79%	0,74%
5	22	2,88%	2,22%
6	41	5,37%	5,18%
7	53	6,94%	9,61%
8	115	15,05%	14,42%
9	140	18,32%	17,62%
10	133	17,41%	17,62%
11	118	15,45%	14,42%
12	66	8,64%	9,61%
13	41	5,37%	5,18%
14	15	1,96%	2,22%
15	13	1,70%	0,74%
16		0,00%	0,18%
17		0,00%	0,03%
18		0,00%	0,00%
19		0,00%	0,00%

TIRAGE

11

succès

PARAMETRES

n 19

p 0,50

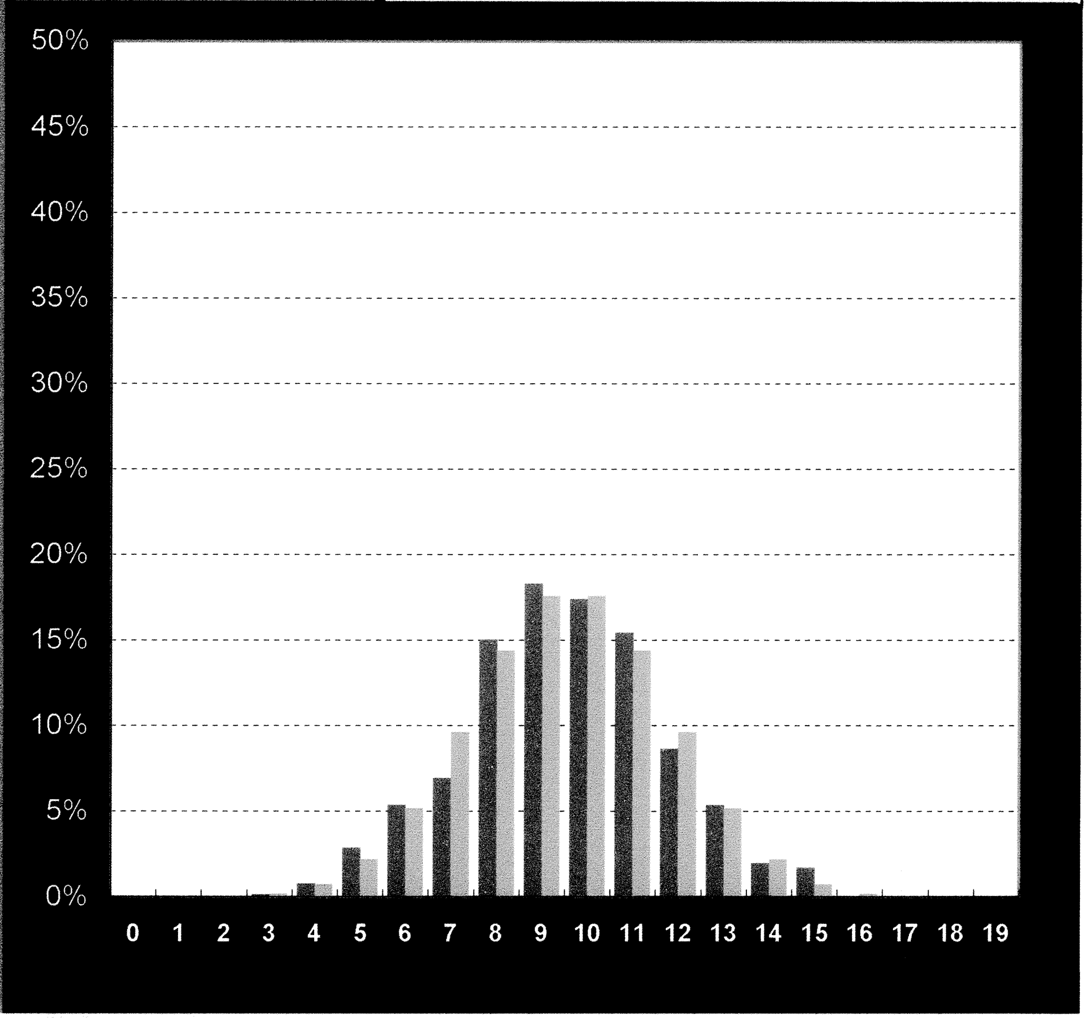
q 0,50

Z

NOMBRE DE LANCERS

1 10 100 1000

5 50 500 5000



C - ACTIVITES SUR EXCEL

1 LOI BINOMIALE

Situation :

Simulation en direct de tirages formés par les résultats de n épreuves de Bernoulli indépendantes où la probabilité de succès est p.
Les succès sont matérialisés par des visages souriants, les échecs, par des visages tristes.
A chaque tirage, on associe le nombre de succès.

Objectif :

Comparer numériquement et graphiquement les fréquences expérimentales de chaque nombre de succès avec la loi de probabilité $\mathcal{B}(n, p)$.

Mode d'emploi :

⇨ Les paramètres n et p peuvent être changés en cliquant sur le bouton $\boxed{Z}$ (p peut être saisi sous forme décimale, de fraction ou de pourcentage et n ne doit pas dépasser 19 pour des raisons d'affichage).
⇨ L'épreuve peut être répétée indéfiniment au moyen de boutons déclenchant des séries de $\boxed{1}$, $\boxed{5}$, $\boxed{10}$,…, $\boxed{5000}$ lancers cumulées à partir du début de la manipulation.

Déroulement du programme :

⇨ Aspect probabiliste :
Affichage des valeurs de la loi de probabilité d'une variable binomiale de paramètres n et p et diagramme en bâtons (fréquences théoriques en jaune).
⇨ Aspect expérimental :
Après chaque tirage, calcul des effectifs et des fréquences de chaque nombre de succès depuis le début de la manipulation et diagramme en bâtons sur le même graphique que les probabilités (fréquences expérimentales en bleu).
⇨ Confrontation des deux aspects :
Le hasard agissant en direct, on pourra suivre visuellement l'évolution des fréquences expérimentales par rapport aux probabilités sur le tableau et sur le graphique.

Suggestions :

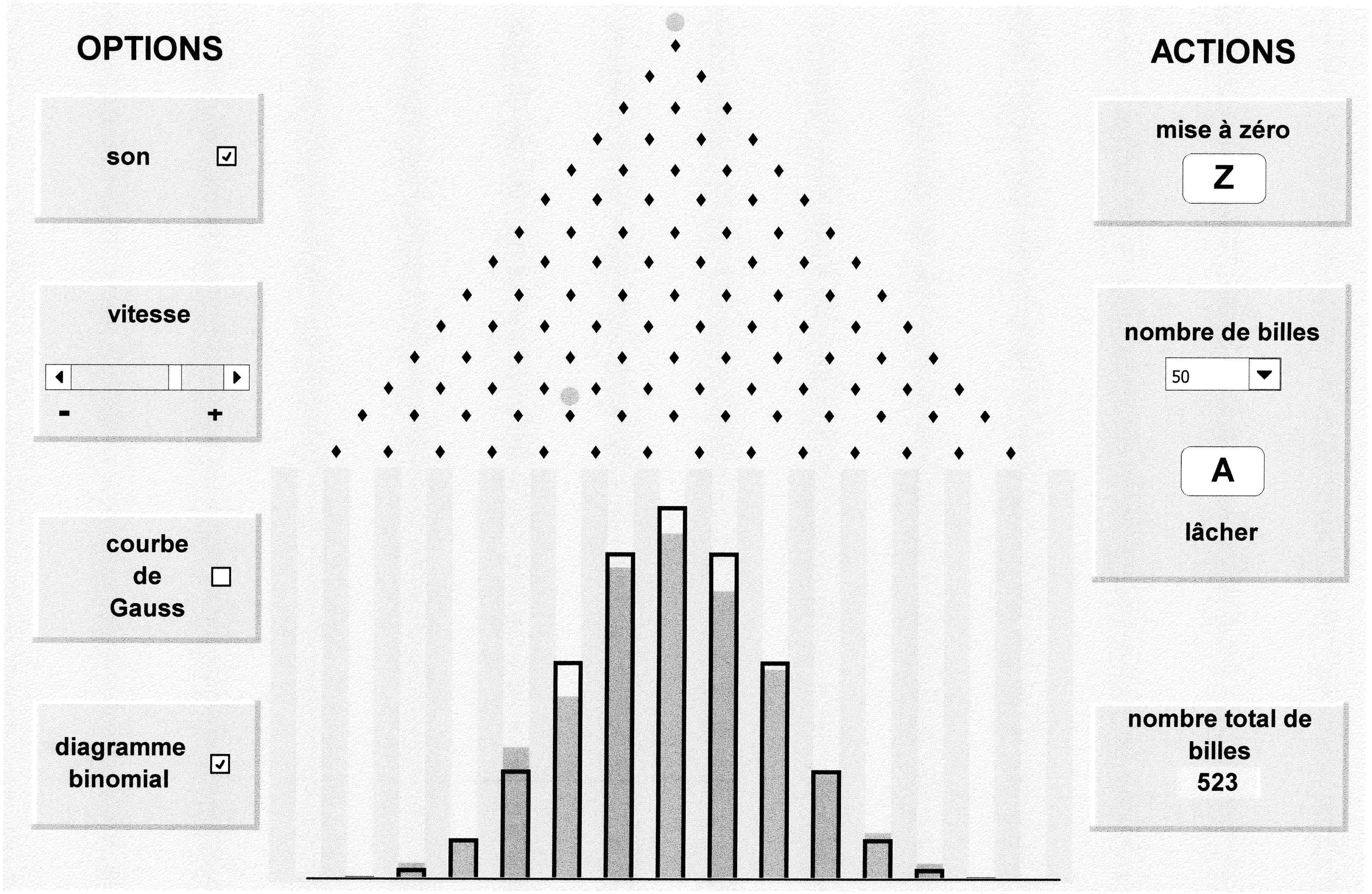
1° Le professeur peut continuer son cours pendant le déroulement de l'expérience.
2° Pile ou face : on peut simuler des lancers de 1, 2, …,19 pièces avec p = ½ si les pièces sont équilibrées ou d'autres valeurs dans le cas contraire.
3° Lancers d'un dé équilibré où le succès est le tirage du 6 : simulation avec n = 1 et p = 1/6.

Remarques techniques :

1° Chaque tirage de Bernoulli est simulé par la formule =1*(ALEA()<p) qui génère 1 ou 0 suivant que le nombre aléatoire est inférieur ou supérieur à p. C'est la gestion des formats de cellules qui permet d'afficher des visages plus ludiques qu'une série de 1 et de 0.
2° L'ordonnée maximale étant 50%, certaines expériences avec n petit, ou p proche de 0 ou 1, peuvent donner lieu à des affichages graphiques incomplets ainsi que les premiers affichages en début de manipulation.

SIMULATION

PLANCHE DE GALTON (1)



2 PLANCHE DE GALTON

Nota bene :
La planche de Galton intervient dans deux chapitres (Ch 8 - Loi binomiale - et Ch 10 - Loi normale -). C'est le même programme qui intervient dans les deux chapitres : des cases à cocher permettent de choisir si on veut l'utiliser pour approcher une loi binomiale ou une loi normale. (cf. page 109)

Présentation :
La planche de Galton est une planche verticale sur laquelle sont plantées n lignes de clous disposés en quinconce avec 1 clou sur la $1^{ère}$ ligne, 2 sur la $2^{ème}$,..., n sur la $n^{ème}$. Des billes sont lâchées une à une à partir du sommet.
A chaque clou rencontré, la bille a :

une probabilité $p = ½$ de passer à droite (succès)
une probabilité $1 - p = ½$ de passer à gauche (échec).

Sous la planche les billes tombent dans n+1 compartiments (numérotés de 0 à n de gauche à droite) dans lesquels elles s'empilent. **Simulation en direct** de la chute des billes.
Soit X la variable aléatoire qui à chaque bille associe le numéro du compartiment atteint.
L'événement (X = k) est réalisé quand la bille passe k fois à droite (k succès).
La loi de X est $\mathcal{B}(n , ½)$.
Ici n =14 lignes de clous.
L'ordinateur nous donne l'occasion de réactualiser ce procédé qui n'a rien perdu de son intérêt pédagogique : outre l'intervention de la loi binomiale, le dénombrement des chemins sur la planche permet de retrouver le triangle de Pascal. (cf. page 46)

Objectif :
Comparer graphiquement les piles de billes tombées dans les compartiments avec les piles théoriques calculées avec la loi de probabilité de $\mathcal{B}(n , ½)$.

Mode d'emploi et déroulement du programme :
⇨ 4 options permettent entre les séries de lâchers de :
- cocher le son si vous voulez agrémenter l'expérience en entendant le bruit des billes tombant sur les clous!
- régler la vitesse de chute des billes en déplaçant le curseur vers **+** pour accélérer, vers **-** pour ralentir
- faire apparaître la courbe de densité de la loi normale (case non cochée dans ce chapitre)
- faire apparaître le diagramme en bâtons de la loi binomiale (case cochée dans ce chapitre)

⇨ Déclencher des séries de lâchers de billes (cumulées depuis le début)
- choisir le nombre lâchers (de 10 à 350) dans la zone de liste en cliquant sur ▼
- cliquer sur le bouton A

⇨ Redémarrer une session en cliquant sur le bouton Z
⇨ Le graphique représente:
- les effectifs expérimentaux de billes tombées dans chaque compartiment (rectangles rouges)
- les effectifs théoriques de billes tombées dans chaque compartiment (rectangles verts) obtenus en multipliant le nombre total de billes tombées par les P(X = k) de $\mathcal{B}(14 , ½)$

Remarques techniques :
1° Les billes semblent s'écraser dans les compartiments : on pourra toujours dire aux élèves que les billes sont en réalité des jetons qui s'empilent à plat!
2° La session s'arrête automatiquement lorsque le graphique est plein

3°Extrait de la macro-commande (Langage Excel 4) gérant le déplacement des billes dans les cellules à l'aide d'une boucle.

```
j=18
=POUR("i";3;16)
=FORMULE("";"l"&i&"c"&j)
j=j+(-1)^ENT(2*ALEA())
=FORMULE("l";"l"&i+1&"c"&j)
=SUIVANT()
```

j est la variable contenant le numéro de colonne: elle gère les déplacements horizontaux (colonne 18 au départ).
i est la variable contenant le numéro de ligne: elle gère la chute de la bille de la ligne 3 à la ligne16.
=FORMULE("";"l"&i&"c"&j) efface la bille d'une position donnée en déposant une chaîne vide "" dans la cellule d'adresse i , j .
2*ALEA() génère un nombre aléatoire ≥ 0 et < 2
ENT(2*ALEA()) prend la valeur 0 ou 1 avec une probabilité de ½.
(-1)^ENT(2*ALEA()) prend la valeur 1 ou -1 avec une probabilité de ½.
j est donc augmenté de 1 ou diminué de 1 avec une probabilité de ½.
=FORMULE("l";"l"&i+1&"c"&j) place la bille dans sa nouvelle position en déposant le caractère "l" (un disque plein en police Wingdings) dans la cellule d'adresse i+1 , j nouveau.

"Cette science s'intéresse à ce qui est formalisable et quantifiable dans l'aléatoire, elle s'oppose à ce qu'on appelle communément l'incertitude ou le dieu Chaos des premiers Grecs qui représente justement ce que l'on ne peut organiser."

D. DACUNHA CASTELLE – Chemins de l'aléatoire – 1997.

9 Loi de Poisson

A - OBJECTIFS

• Expérimenter la loi de Poisson dans un cadre naturel (processus de Poisson) où celle-ci n'est pas simplement, comme c'est trop souvent le cas, réduite au rôle d'approximation d'une loi binomiale.

• Ressentir l'imprévisibilité du hasard et la puissance d'organisation du modèle probabiliste.

B – ACTIVITES SUR CALCULATRICE

Niveau	BTS $1^{\text{ère}}$ année.
Situation dans la progression	Après le cours sur la loi de Poisson.
Durée	Environ 1h.
Nature des activités	On souhaite simuler un historique de pannes de machines suffisamment important pour en déceler la loi. On présente ainsi l'aspect modélisation des probabilités, en recherchant parmi les lois de Poisson du formulaire, celle qui s'adaptera le mieux à l'historique statistique.

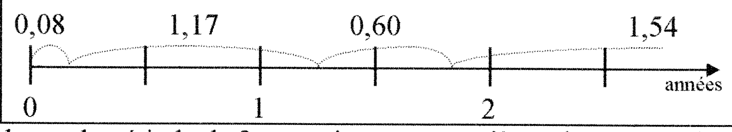
TRAVAUX PRATIQUES

LOI DE POISSON
Nombre de pannes sur une période donnée

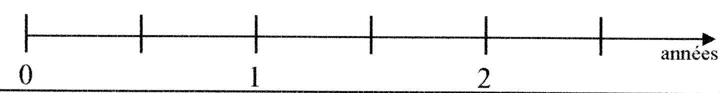
Une entreprise possède un parc important de machines identiques et fonctionnant de façon indépendante. Elle souhaite étudier les pannes de ces machines de façon à établir un plan de maintenance.

1 Simulation des temps de bon fonctionnement :

On choisit une machine au hasard. On suppose que les arrivées des pannes sont indépendantes les unes des autres et que la machine est réparée instantanément. On a relevé les résultats suivants :

Temps de bon fonctionnement (années)	Temps cumulés	Schéma
0,08	0,08	
1,17	1,25	
0,60	1,85	
1,54	3,39	

Cette machine a donc connu 3 pannes durant la période de 2 ans suivant sa première mise en marche.
Suite à un historique statistique, il est apparu que l'instruction : $\boxed{(-\ln \text{Ran\#}) \div 2.5}$ simulait convenablement le temps de bon fonctionnement (en années) d'une de ces machines choisie au hasard.
En répétant (en mode de calcul) cette instruction, simuler les pannes d'une de ces machines sur une période de 2 ans suivant sa première mise en marche.

Temps de bon fonctionnement (années)	Temps cumulés	Schéma
		

2 Simulation, pour 100 machines, du nombre de pannes les deux premières années :

Supposons que les deux premiers temps de bon fonctionnement soient donnés par $-\frac{1}{2{,}5}\ln r$ et $-\frac{1}{2{,}5}\ln r'$. Les deux premières pannes se produiront donc durant les deux premières années si $-\frac{1}{2{,}5}\ln r - \frac{1}{2{,}5}\ln r' \leq 2$. Montrer que cette condition équivaut à $r \times r' \geq e^{-5}$: ....

....

....

....

....

....

Le programme ci-dessous simule, pour 100 machines, le nombre de machines ayant eu k pannes sur la période de 2 ans suivant leur mise en service, pour k allant de 0 à 11.

Commentaires	CASIO (anciens modèles avec mémoires indicées)	CASIO 6910→9990 (avec listes)	T.I. 82 – 83 – 85 – 92(*)
I compteur des machines étudiées. Z[J] mémoires contenant le nombre de machines ayant eu J pannes sur les 2 ans.	(en mode calcul, faire defm 11 pour ajouter des mémoires) 1 → I ↵ 0 → J ↵ Lbl 0 ↵ 0 → Z[J] ↵ J + 1 → J ↵ J ≤ 11 ⇒ Goto 0 ↵ Lbl 1 ↵	Seq(0,J,1,12,1) → List 1↵ For 1 → I To **100** ↵ 1 → P ↵ 0 → N ↵ While P > e -5 ↵ N + 1 → N ↵ P Ran# → P ↵ WhileEnd ↵ N ≤ 12 ⇒ List 1[N]+1 → List 1[N]↵ Next ↵ List 1	:ClrList L_1 :seq(0,J,1,12,1) → L_1 :For (I,1,**100**) :1 → P :0 → N :While P > e^(-5) :N + 1 → N :P × rand → P :End (EndWhile) :If N ≤ 12 :L_1(N) + 1 → L_1(N) :End (Endfor) :Disp L_1
Module simulant le nb de pannes de la machine I. N compteur du nombre de pannes pour la machine I. **attention** : exponentielle.	1 → P ↵ -1 → N ↵ Lbl 2 ↵ N + 1 → N ↵ P Ran# → P ↵ P > e -5 ⇒ Goto 2 ↵ N > 11 ⇒ Goto 3 ↵ Z[N] + 1 → Z[N] ↵ Lbl 3 ↵ I + 1 → I ↵ I ≤ **100** ⇒ Goto 1 ↵ 0 → J ↵		
Affichage du nombre de machines ayant eu J pannes pendant les 2 ans.	Lbl 4 : Z[J] ◢ J + 1 → J ↵ J ≤ 11 ⇒ Goto 4 : "FIN"		

Programme non disponible sur TI 80 et TI 81.

⇨ Pour obtenir certaines instructions :

- CASIO 6910 → 9990 : **ClrList** par PRGM CLR List ; **Seq** par OPTN LIST ; **List** par OPTN LIST ; **For To Next While WhileEnd** par PRGM COM ; > par PRGM REL ; **Int** par OPTN NUM ; **Ran#** par OPTN PROB ; ◢ par PRGM.
- TI 80 82 83 : **ClrList** par STAT EDIT ; **Seq** par 2nd LIST OPS ; **L_1** au clavier par 2nd ; **For End While** par PRGM CTL ; > par 2nd TEST ; **int** par MATH NUM ; **rand** par MATH PRB ; **Disp** par PRGM I/O.

✳ Particularités sur certains modèles :

- TI 92 : Remplacer ClrList par DelVar et L_1 par L1 ; syntaxe For I,1,100 puis rand( ) ; préciser EndWhile et Endfor ; noter le terme de rang N sous la forme L1[N].

Compléter le tableau suivant en indiquant, sur 100 machines, le nombre de machines ayant eu k pannes :

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
effectif												

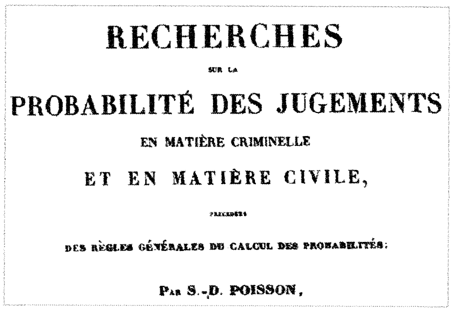
Compléter le tableau suivant en indiquant, sur **1000** machines (modifier la boucle sur I), le nombre de machines ayant eu k pannes (attention environ 4mn30 sur CASIO 9990) :

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
fréq. %												

Pour une meilleure estimation, effectuer la moyenne des résultats obtenus dans la classe.

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
fréq. %												

3 Recherche d'un modèle probabiliste :
Soit X la variable aléatoire associant, à chaque machine choisie au hasard, le nombre de pannes de cette machine durant la période [0 ; 2] (en années).


RECHERCHES
SUR LA
PROBABILITÉ DES JUGEMENTS
EN MATIÈRE CRIMINELLE
ET EN MATIÈRE CIVILE,
PRÉCÉDÉES
DES RÈGLES GÉNÉRALES DU CALCUL DES PROBABILITÉS;
PAR S.-D. POISSON,

Rechercher, à l'aide du formulaire, une loi de Poisson convenant, selon les données statistiques, à la variable aléatoire X.

On peut supposer que X suit la loi de Poisson de paramètre
$\lambda =$ ....

4 Exploitation du modèle pour des prévisions :

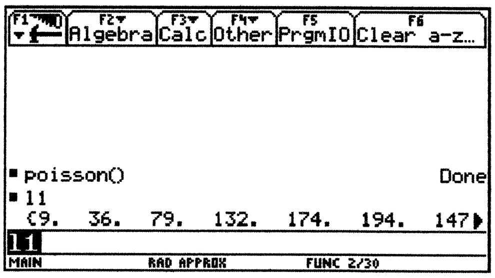
En considérant que X suit la loi de Poisson précédente, déterminer, pour chaque machine :
a) la probabilité qu'elle tombe en panne au moins 3 fois sur une durée de 2 ans suivant sa mise en service. ....
b) le nombre maximum de pannes, pour une période de 2 ans suivant sa mise en service, avec une probabilité d'au moins 0,95. ....

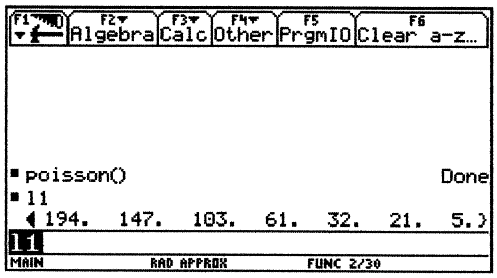
Description et compte-rendu de l'activité "Loi de Poisson"

$\boxed{1}$ Chaque élève simule, pour une machine, le nombre de pannes sur une durée de 2 années. Si les résultats sont généralement compris entre 3 et 8 pannes, ils semblent totalement imprévisibles. Cette première étape est importante pour "ressentir" l'effet du hasard sur l'arrivée des pannes.

$\boxed{2}$ Chaque élève simule l'étude de 100 ou 1000 machines, puis on met en commun les résultats.

Exemple de simulation pour 1000 machines :

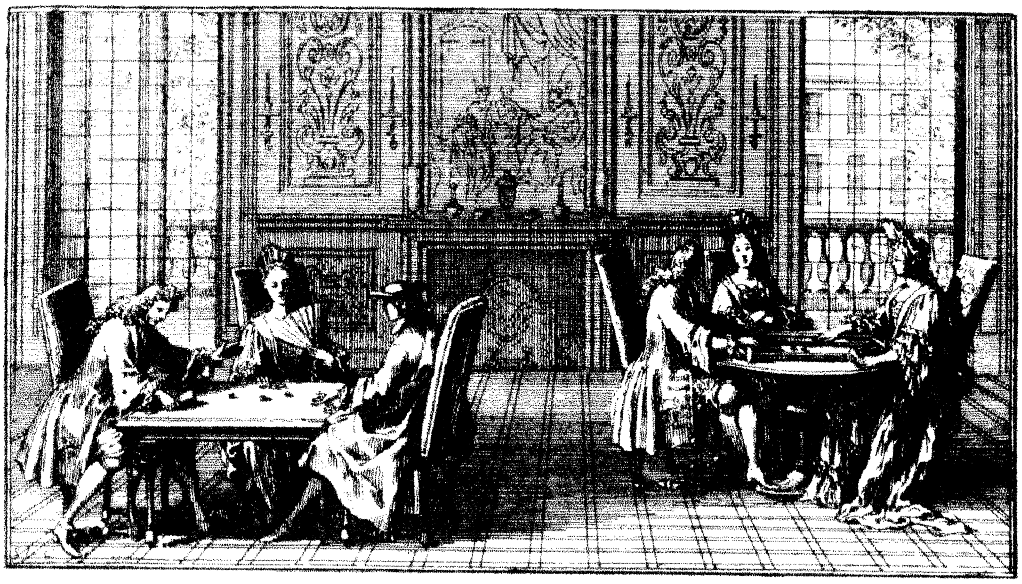




$\boxed{3}$ En cherchant un modèle de Poisson dans le formulaire, on constate que la loi de Poisson $\mathscr{P}(5)$ convient plutôt bien :

nb de pannes	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
fréquences %	0,7	3,4	8,4	14,0	17,6	17,6	14,6	10,4	6,5	3,6	1,8	0,8

$\boxed{4}$ L'intérêt est que l'on peut alors faire des prévisions d'après la loi $\mathscr{P}(5)$ et également reconsidérer, rétrospectivement, les résultats de la première simulation ($\boxed{1}$) qui semblaient si désordonnés.



"De façon apparemment paradoxale, l'accumulation d'événements au hasard aboutit à une répartition parfaitement prévisible des résultats possibles. Le hasard n'est capricieux qu'au coup par coup."

"Le Trésor" sous la direction de M. SERRES et N. FAROUKI, article loi des grands nombres.

10 Loi normale

A - OBJECTIFS

• Simuler des distributions normales de sorte à confronter expériences statistiques et manipulations théoriques de la loi normale. La simulation permettra le cas échéant de suppléer à la difficulté du calcul analytique.

• Illustrer de façon concrète l'intérêt de l'utilisation de la loi normale comme approximation, soit d'une loi binomiale, soit d'une somme de variables aléatoires indépendantes de même loi (théorème central-limite).

B – ACTIVITES SUR CALCULATRICE page 98

Niveau	BTS toutes spécialités.
Situation dans la progression	Après le cours sur la loi normale et ses techniques de calcul.
Durée	Activité 1 : non testée. Activité 2 : 2 heures.
Nature des activités	Activité 1 : Expérimentation du théorème limite central Cette activité explique l'omniprésence de la loi normale dans les phénomènes aléatoires en expérimentant le théorème limite central. Activité 2 : Quand les sondages se trompent On montre l'intérêt concret de l'approximation normale de la loi binomiale (temps de calcul). On met en évidence, par leurs simulations, les limites des sondages d'opinion, relativisant ainsi la confiance que l'on doit leur accorder (contribution à la formation du citoyen ?). Les résultats obtenus sont en effet parfois surprenants. Lorsque c'est possible, on confronte expérience par simulation et calcul théorique. Lorsque le calcul théorique s'avère trop compliqué, seule la simulation donne une idée de la réponse.

C – ACTIVITES SUR EXCEL page 106

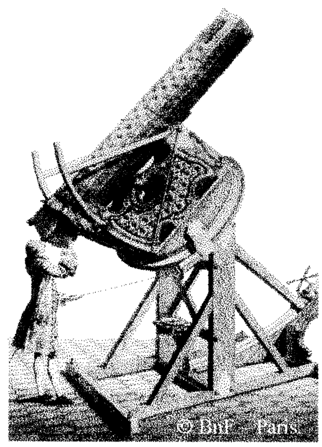
• Loi normale.

• Planche de Galton : visualisation concrète de l'approximation normale.

TRAVAUX PRATIQUES

NON TESTE EN CLASSE

LOI NORMALE
Expérimentation du théorème limite central



Lorsqu'en 1809, Gauss étudia la distribution des erreurs d'observation d'une orbite d'objet céleste, il mit en évidence la célèbre "courbe en cloche". Pourquoi, avec une expression analytique paradoxalement compliquée, cette distribution est-elle si répandue, au point d'être qualifiée de "normale" ?
La réponse des mathématiciens à cette question est le **théorème limite central** :

> La somme de n variables aléatoires indépendantes de même loi suit approximativement, pour n assez grand, une loi normale.

1 Une expérimentation du théorème limite central :

En admettant que n = 12 est assez grand, l'instruction $\underbrace{\text{Ran\#+Ran\#+...+Ran\#}}_{12 \text{ fois}}$ - 6 doit simuler approximativement la loi $\mathcal{N}(0 ; 1)$. En faisant $\underbrace{\text{Ran\#+Ran\#+...+Ran\#}}_{12 \text{ fois}}$ - 6 + 4,5 , quelle loi devrait-on approximativement simuler ? ....

Vous allez l'expérimenter en regroupant 100 résultats consécutifs de cette instruction en 9 classes : [0;1[; [1;2[... [8;9[, puis en comparant l'histogramme avec la courbe de densité de la loi $\mathcal{N}(4,5 ; 1)$.

La partie sous la ligne pointillée concerne, pour les modèles récents, le tracé de l'histogramme et est facultative.

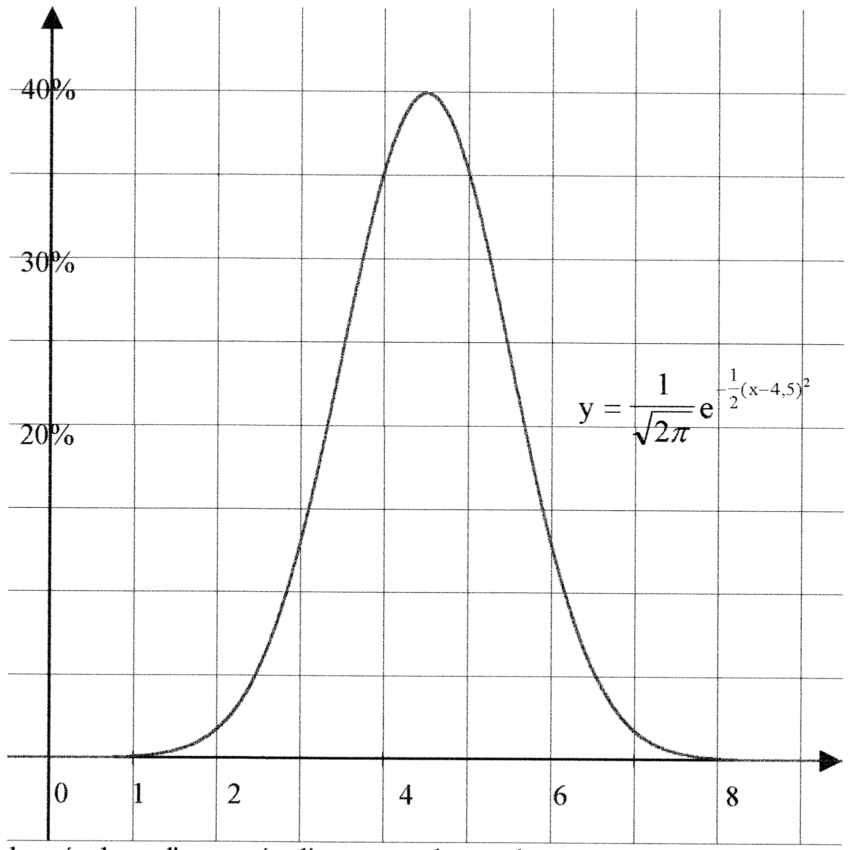
Commentaires	CASIO (anciens modèles avec mémoires indicées)	CASIO 6910(*) 8930(*) 9930 9940 9990	TI 80(*) 82(*) 83	TI 92
Initialisation des mémoires A[J] correspondant aux 9 classes. K compteur des tirages. N résultat de la simulation de la loi $\mathcal{N}(4,5 ; 1)$. Augmentation de l'effectif de la classe correspondant à la partie entière de N. 100 tirages. Affichage des effectifs de chaque classe.	0 → J ↲ Lbl 0 : 0 → A[J] ↲ J + 1 → J ↲ J ≤ 8 ⇒ Goto 0 ↲ 1 → K ↲ Lbl 1 ↲ **Ran#+Ran#+Ran#+Ran#+Ran#+Ran#+Ran#+Ran#+Ran#+Ran#+Ran#+Ran# - 1.5** → N ↲ Int (N) → N ↲ N > 8 ⇒ Goto 2 ↲ N < 0 ⇒ Goto 2 ↲ A[N] + 1 → A[N] ↲ Lbl 2 ↲ K + 1 → K ↲ K ≤ 100 ⇒ Goto 1 ↲ 0 → J ↲ Lbl 3 : A[J] ◢ J + 1 → J ↲ J ≤ 8 ⇒ Goto 3 ↲ "FIN"	Clrlist ↲ Seq(I,I,0,8,1) → List 1 ↲ Seq(0,J,1,9,1) → List 2 ↲ For 1 → K To 100 ↲ **Ran#+Ran#+Ran#+Ran#+Ran#+Ran#+Ran#+Ran#+Ran#+Ran#+Ran#+Ran# - 1.5** → N ↲ 1 + Int N → N ↲ N ≥ 1 And N ≤ 9 ⇒ List 2[N]+1 → List 2[N]↲ Next ↲ List 2 ◢ S-WindMan ↲ ViewWindow 0,9,1,0,45,10 ↲ 0 → Hstart ↲ 1 → Hpitch ↲ S-Gph1 DrawOn,Hist,List 1,List 2,Blue ↲ DrawStat ↲ Graph Y= (100÷ √(2π))e(-.5(X-4.5)²)	:ClrList L_1 , L_2 :seq(I,I,0,8,1) → L_1 :seq(0,J,1,9,1) → L_2 :For(K , 1 , 100) **:rand+rand+rand+rand+rand+rand+rand+rand+rand+rand+rand+rand - 1.5 → N** :int (N)+1 → N :If N ≥ 1 and N ≤ 9 :L_2(N) + 1 → L_2(N) :End :Disp L_2 :Pause :Plot1(Histogramm,L_1, L_2) :PlotsOn1 :0 → Xmin :9 → Xmax :1 → Xscl :0 → Ymin :45 → Ymax :10 → Yscl :DrawF 100normalpdf (X,4.5,1) :DispGraph	:DelVar L1 , L2 :seq (i,i,0,8,1) → L1 :seq (0,j,1,9,1) → L2 :For k , 1 , 100 **:rand( )+rand( )+rand( )+rand( )+rand( )+rand( )+rand( )+rand( )+rand( )+rand( )+rand( )+rand( ) - 1.5** → n :int (n)+1 → n :If n ≥ 1 and n ≤ 9 :L2[n] + 1 → L2[n] :EndFor :Disp L2 :Pause :0 → xmin :9 → xmax :1 → xscl :0 → ymin :45 → ymax :10 → yscl :PlotsOn :Newplot 1,4,L1,, L2,,,,1 :DrawFunc 100/(√(2π))×e^(-.5(x-4.5)^2)

⇨ Pour obtenir certaines instructions :
• CASIO 6910 → 9990 : **ClrList** par PRGM CLR List ; **Seq** par OPTN LIST ; **List** par OPTN LIST ; **Int** par OPTN NUM ; **Ran#** par OPTN PROB ; **And** par OPTN LOGIC ; ⇒ par PRGM JUMP ; **S-Wind Man** par SHIFT SET UP S-WIN ; **Hstart et pitch** par VARS STAT GRPH ; **S-Graph1** par F4(MENU) STAT GRPH GPH1 ; **Draw On** par F4(MENU) STAT DRAW ON ; **Hist** par GRPH ; **Blue** sur 9940 par STAT COLR ; **DrawStat** par PRGM DISP Stat.
• TI 80 82 83 : **ClrList** par STAT EDIT ; **Seq** par 2nd LIST OPS ; **L_1** au clavier par 2nd ; **For End** par PRGM CTL ; **int** par MATH NUM ; **rand** par MATH PRB ; **and** par 2nd TEST ; **Disp** par PRGM I/O ; **Plot 1(Histogram,L1,L2)** par 2nd STAT PLOT PLOTS puis TYPE ; **Xmin** par VARS Window... ; **PlotsOn** par 2nd STAT PLOT PLOTS ; **DrawF** par 2nd DRAW ; **normalpdf** sur TI83 par 2nd DISTR ; **Dispgraph** par PRGM I/O.
✳ Particularités sur certains modèles :
• CASIO 6910 et 8930 : En l'absence de l'instruction And, faire If N≥1 ↵ If N≤9 ↵. Les instructions 0 → Hstart ↵ et 1 → pitch ↵ sont à supprimer.
• TI 80/82 : Remplacer normalpdf par 100/(√(2π))×e^(-.5(x-4.5)^2).
Programme non disponible sur TI 81.

Résultats de la simulation :

Classes	[0;1[	[1;2[	[2;3[	[3;4[	[4;5[	[5;6[	[6;7[	[7;8[	[8;9[
%									

Tracer l'histogramme correspondant sur le graphique ci-dessous :



Comparer avec les résultats d'autres étudiants ou relancer le programme. Un résultat plus précis peut être obtenu en remplaçant 100 par 1000 (multiplier par 10 l'échelle en y et la fonction tracée – Durée ≈ 4 mn).

2 Simulation "directe" :

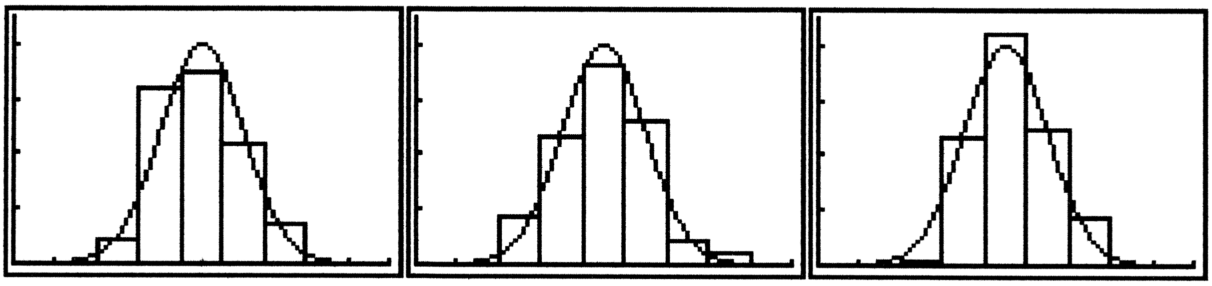
Il existe une instruction permettant de simuler directement la loi $\mathcal{N}(m;\sigma)$.
Dans le programme précédent, remplacer les instructions en caractère gras par :

CASIO en mode Deg	TI 82 85 en mode Degree	TI 83 92
4.5 + cos(360 Ran#) √ (-2 ln Ran#)	4.5+cos(360×rand) √ (-2 ln (rand))	randNorm(4.5 , 1)

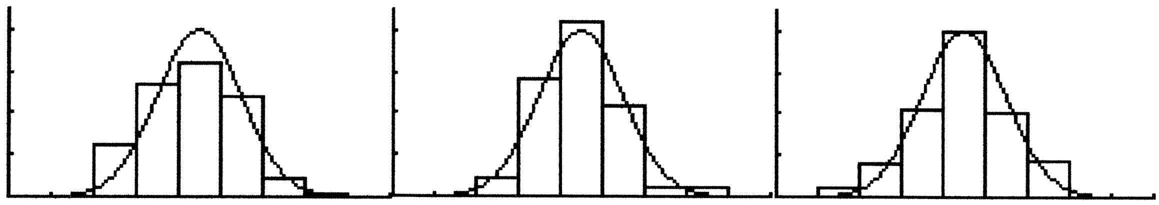
Description et compte-rendu de l'activité "Expérimentation du théorème limite central"

$\boxed{1}$ Quelques images d'écrans obtenues par répétition 100 fois de l'instruction $\underbrace{\text{Ran\#+Ran\#+...+Ran\#}}_{12 \text{ fois}}$ - 1.5 :

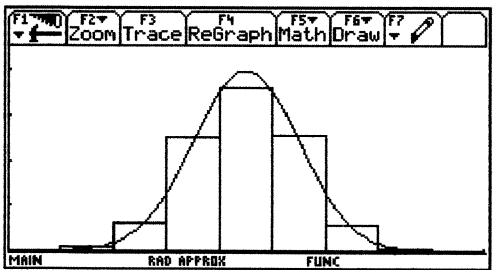
Sur TI 83 :



Sur CASIO 9940 :

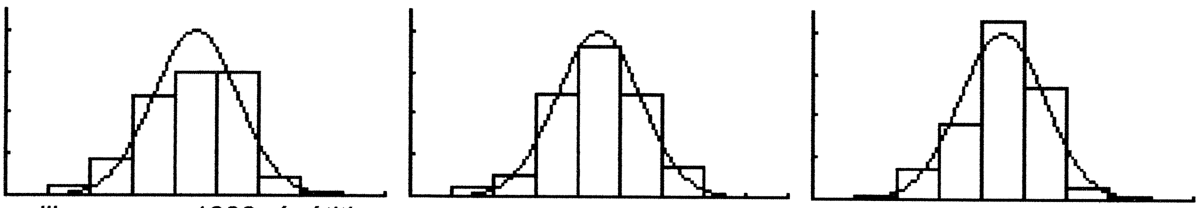


Les résultats sont plus réguliers en passant de 100 à 1000 répétitions :

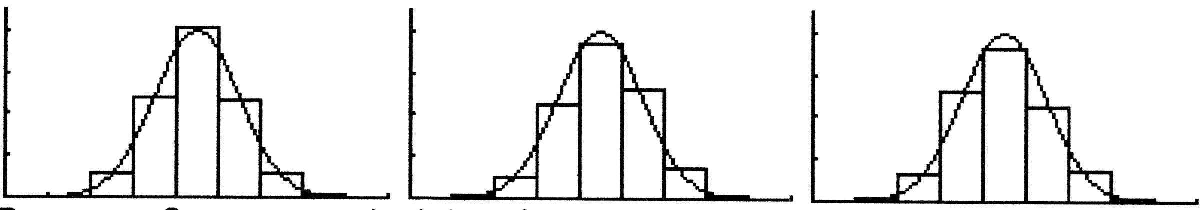


La conclusion à en tirer est que lorsqu'un phénomène quelconque subit des fluctuations dues à l'addition d'un grand nombre de perturbations aléatoires indépendantes (sans que l'une d'elle soit dominante), ces fluctuations suivront approximativement une loi normale.

$\boxed{2}$ Simulation par l'instruction 4.5 + cos(360 Ran#) √ (-2 ln Ran#) :
Les résultats sont comparables à ceux de la partie $\boxed{1}$.
Parfois inégaux pour 100 répétitions,



meilleurs pour 1000 répétitions :



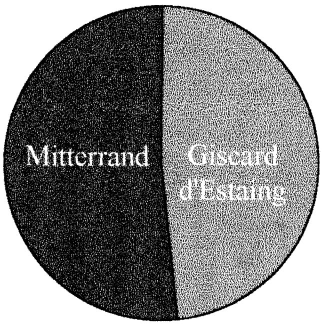
Remarque : Comparer aux simulations, à une autre échelle, sur Excel.

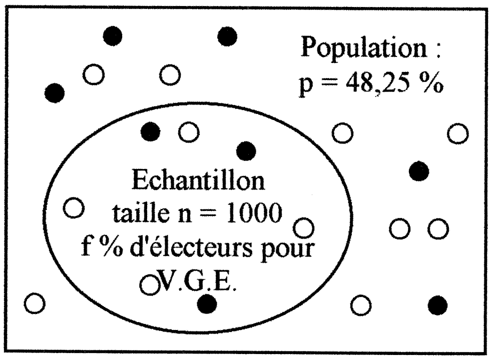
TRAVAUX PRATIQUES

LOI NORMALE
Quand les sondages se trompent

Le 10 mai 1981, François Mitterrand a été élu par 51,75 % des électeurs, alors que Valery Giscard d'Estaing n'a recueilli que 48,25 % des suffrages.

On suppose que l'on effectue un sondage sur 1000 électeurs, le jour de l'élection.





1 Approximation par une loi normale :

a) Compte tenu du grand nombre d'électeurs, on suppose que la constitution d'un échantillon de 1000 électeurs correspond à un tirage au hasard avec remise. On désigne par X la variable aléatoire qui, à chaque échantillon ainsi constitué, associe le nombre d'électeurs pour Giscard d'Estaing.
Quelle est la loi de X (justifier) ?

....

....

....

....

b) La simulation de la loi précédente nécessite la répétition 1000 fois de l'instruction correspondant au tirage d'un électeur. Or, pour étudier statistiquement les résultats que peuvent fournir les sondages, on désire effectuer 1000 sondages. Ce serait beaucoup trop long. On décide donc d'approcher la loi de X par une loi normale. Laquelle ? ....

2 Pourcentage de sondages ne prévoyant pas le bon vainqueur :

On s'intéresse à la probabilité qu'un sondage, réalisé sur 1000 électeurs le jour du vote, se trompe et prévoit la victoire de Giscard.

⇨ PAR SIMULATION :
Effectuer le programme suivant, qui indique, sur 1000 sondages simulés, le nombre de sondages donnant à tort Giscard vainqueur (durée sur Casio 9940 ou TI 83 : 1mn45).

CASIO sans instruction For (mode Deg)	CASIO 6910→9990 (mode Deg)	T.I. 80 – 81(*) – 82 – 85 (mode Degree)	T.I. 83 / 92(*)
0 → N ↵ 0 → I ↵ Lbl 1 ↵ I + 1 → I ↵ 482.5 + 15.8 cos(360 Ran#) √ (-2 ln Ran#) → R ↵ R ≥ 500 ⇒ N + 1 → N ↵ I < 1000 ⇒ Goto 1 ↵ N	0 → N ↵ For 1 → I To 1000 ↵ 482.5 + 15.8 cos(360 Ran#) √ (-2 ln Ran#) → R ↵ R ≥ 500 ⇒ N + 1 → N ↵ Next ↵ N	:0 → N :For(I,1,1000) :482.5 + 15.8 cos(360× rand) √ (-2 ln(rand)) → R :If R ≥ 500 :N + 1 → N :End :Disp N	:0 → N :For(I,1,1000) :randNorm(482.5 , 15.8) → R :If R ≥ 500 :N + 1 → N :End :Disp N

✳ Particularités sur certains modèles :

- TI 81 : Remplacer For(I,1,1000) par :0 → I :Lbl 1 :I + 1 → I puis replacer End par :If I < 1000 :Goto 1
- TI 92 : Syntaxe For i, 1 , 1000 puis EndFor.

Résultat de votre simulation (% de sondages "faux") : ....
Moyenne sur la classe : ....
⇨ PAR LE CALCUL :
On suppose que X suit la loi $\mathcal{N}(482,5 ; 15,8)$. Calculer $P(X \geq 500)$.

....

....

3 Ecart moyen en valeur absolue entre deux sondages :

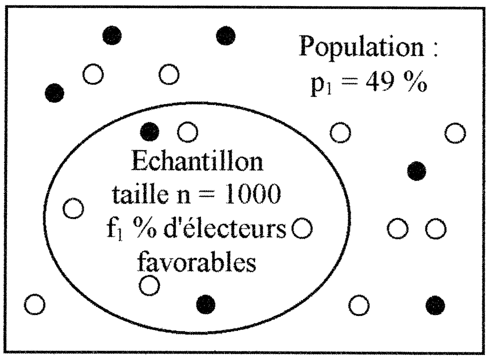
La simulation permet, en disposant d'un grand nombre de sondages virtuels, d'en étudier la répartition. En particulier lorsque le calcul s'avérerait délicat.
On suppose que deux instituts organisent le jour de l'élection deux sondages de taille 1000 indépendants. A quel écart moyen doit-on s'attendre ?
Soit x_1 le nombre d'électeurs pour Giscard d'Estaing donné par le 1er sondage et x_2 le nombre donné par le second. On s'intéresse à $|x_1 - x_2|$.
Le programme ci-dessous calcule la moyenne, sur 500 simulations, des écarts $|x_1 - x_2|$ (durée ≈ 1 mn 40).

CASIO sans instruction For (mode Deg)	CASIO 6910→9990 (mode Deg)	T.I. 80 – 82 – 85 (mode Degree)	T.I. 83 / 92(*)
0 → N ↵ 0 → I ↵ Lbl 1 ↵ I + 1 → I ↵ 482.5 + 15.8 cos(360 Ran#) √ (-2 ln Ran#) → A ↵ 482.5 + 15.8 cos(360 Ran#) √ (-2 ln Ran#) → B ↵ abs(A - B) + N → N ↵ I < 500 ⇒ Goto 1 ↵ N ÷ 500	0 → N ↵ For 1 → I To 500 ↵ 482.5 + 15.8 cos(360 Ran#) √ (-2 ln Ran#) → A ↵ 482.5 + 15.8 cos(360 Ran#) √ (-2 ln Ran#) → B ↵ abs(A - B) + N → N ↵ Next ↵ N ÷ 500	:0 → N :0 → I : For(I,1,500) :482.5 + 15.8 cos(360× rand) √ (-2 ln (rand)) → A :482.5 + 15.8 cos(360× rand) √ (-2 ln (rand)) → B :abs(A - B) + N → N :End :Disp N / 500	:0 → N :For (I,1,500) :abs(randNorm(482.5 , 15.8) - randNorm(482.5 , 15.8)) + N → N :End (Endfor) :Disp N / 500

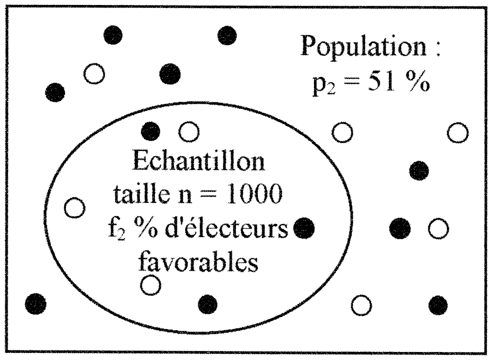
Ecart absolu moyen entre deux sondages, pour vos 500 simulations : ....soit............. %.
Moyenne des résultats de la classe : ....

4 Pourcentage de sondages ne détectant pas une hausse significative :

On suppose maintenant qu'au cours des semaines de campagne électorale, la cote d'un candidat parmi la population d'électeurs, soit passée de 49 % la semaine 1, à 51 % la semaine 2. Quelle est la probabilité que cette évolution soit détectée par deux sondages de taille 1000, l'un la semaine 1, l'autre la semaine 2 ?
C'est une question décisive pour le moral du candidat, mais aussi pour son influence possible sur l'opinion.



Semaine 1



Semaine 2

On note X_1 la variable aléatoire qui, à tout sondage de taille 1000 prélevé au hasard la semaine 1, associe le nombre d'électeurs favorables, et X_2 la variable aléatoire analogue pour la semaine 2.
On approche les lois de X_1 et de X_2 par des lois normales. Que doit-on prendre ?
....
....

On désire déterminer la probabilité $P(X_2 \leq X_1)$ (cas où l'évolution positive de la cote n'est pas decelée par les sondages).

⇨ PAR SIMULATION :

Le programme suivant, donne, sur 500 sondages, le pourcentage de sondages correspondant à la réalisation de l'événement "$X_2 \leq X_1$" :

CASIO sans instruction For (mode Deg)	CASIO 6910→9990 (mode Deg)	T.I. 80 – 82 – 85 (mode Degree)	T.I. 83 / 92(*)
0 → N ↵ 0 → I ↵ Lbl 1 ↵ I + 1 → I ↵ 490 + 15.81 cos(360 Ran#) √ (-2 ln Ran#) → R ↵ 490 + 15.81 cos(360 Ran#) √ (-2 ln Ran#) → S ↵ S ≤ R ⇒ N + 1 → N ↵ I < 500 ⇒ Goto 1 ↵ N ÷ 5	0 → N ↵ For 1 → I To 500 ↵ 490 + 15.81 cos(360 Ran#) √ (-2 ln Ran#) → R ↵ 490 + 15.81 cos(360 Ran#) √ (-2 ln Ran#) → S ↵ S ≤ R ⇒ N + 1 → N ↵ Next ↵ N ÷ 5	:0 → N :0 → I :For(I,1,500) :490 + 15.81 cos(360× rand) √ (-2 ln (rand)) → R :490 + 15.81 cos(360× rand) √ (-2 ln (rand)) → S :If S ≤ R :N + 1 → N :End :Disp N / 5	:0 → N :For (I,1,500) :randNorm(490 , 15.81) → R :randNorm(510 , 15.81) → S :If S ≤ R :N + 1 → N :End (EndFor) :Disp N / 5

Résultat de votre simulation : ....
Faire une moyenne des résultats de la classe : ....

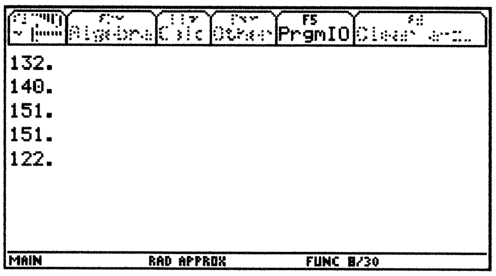
⇨ PAR LE CALCUL :

On considère la variable aléatoire $D = X_1 - X_2$. On admet que D, tout comme X_1 et X_2 , suit une loi normale, et l'on rappelle que $E(X_1 - X_2) = E(X_1) - E(X_2)$ et $V(X_1 - X_2) = V(X_1) + V(X_2)$.
Quelle est la loi de D ? ....
....
Calculer $P(X_2 \leq X_1) = P(D \geq 0)$: ....
....

Description et compte-rendu de l'activité "Quand les sondages se trompent"

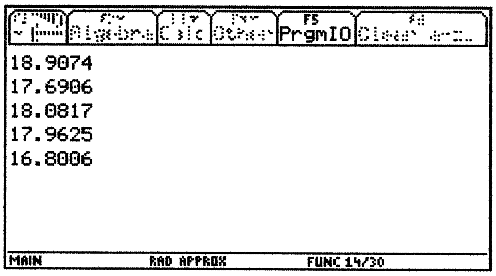
1 On montre concrètement l'intérêt de l'approximation de la loi $\mathscr{B}$ (1000 ; 0,4825) par la loi $\mathcal{N}$(482,5 ; 15,8).

2 Sur un exemple déjà historique, on montre que, lorsque les scores sont serrés, un sondage sur 1000 personnes est assez peu fiable. Il s'agit également de tester l'outil "simulation" sur une question dont la réponse nous est connue par la théorie.
A titre d'exemple, pour 1000 sondages simulés, le nombre de sondages prévoyant à tort la victoire de VGE a été, sur 5 essais :



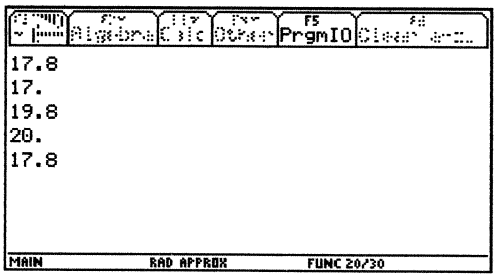
La valeur théorique obtenue avec la loi $\mathcal{N}$(482,5 ; 15,8) est 13,4%.

3 Il s'agit d'étudier la distribution des sondages par simulation alors que cette fois le calcul ne relève plus du programme de BTS.
A titre d'exemple, sur 500 sondages, 5 essais ont donné un écart moyen de (pour 1000 personnes interrogées) :



L'écart moyen est donc pratiquement de l'ordre de 2 % des personnes interrogées. Il n'y a donc pas de quoi gloser, dans ces conditions, sur une différence de cet ordre entre deux sondages successifs.

4 Il est assez étonnant que près de 20% des sondages effectués sur 1000 personnes, ne détectent pas une évolution de l'opinion de 49% à 51%.
Le résultat théorique, où D suit la loi $\mathcal{N}$(20 ; 22,36), est $P(D \leq 0) \approx 0,186$.
A titre d'exemple, par simulation de 500 sondages, on a obtenu sur 5 essais :

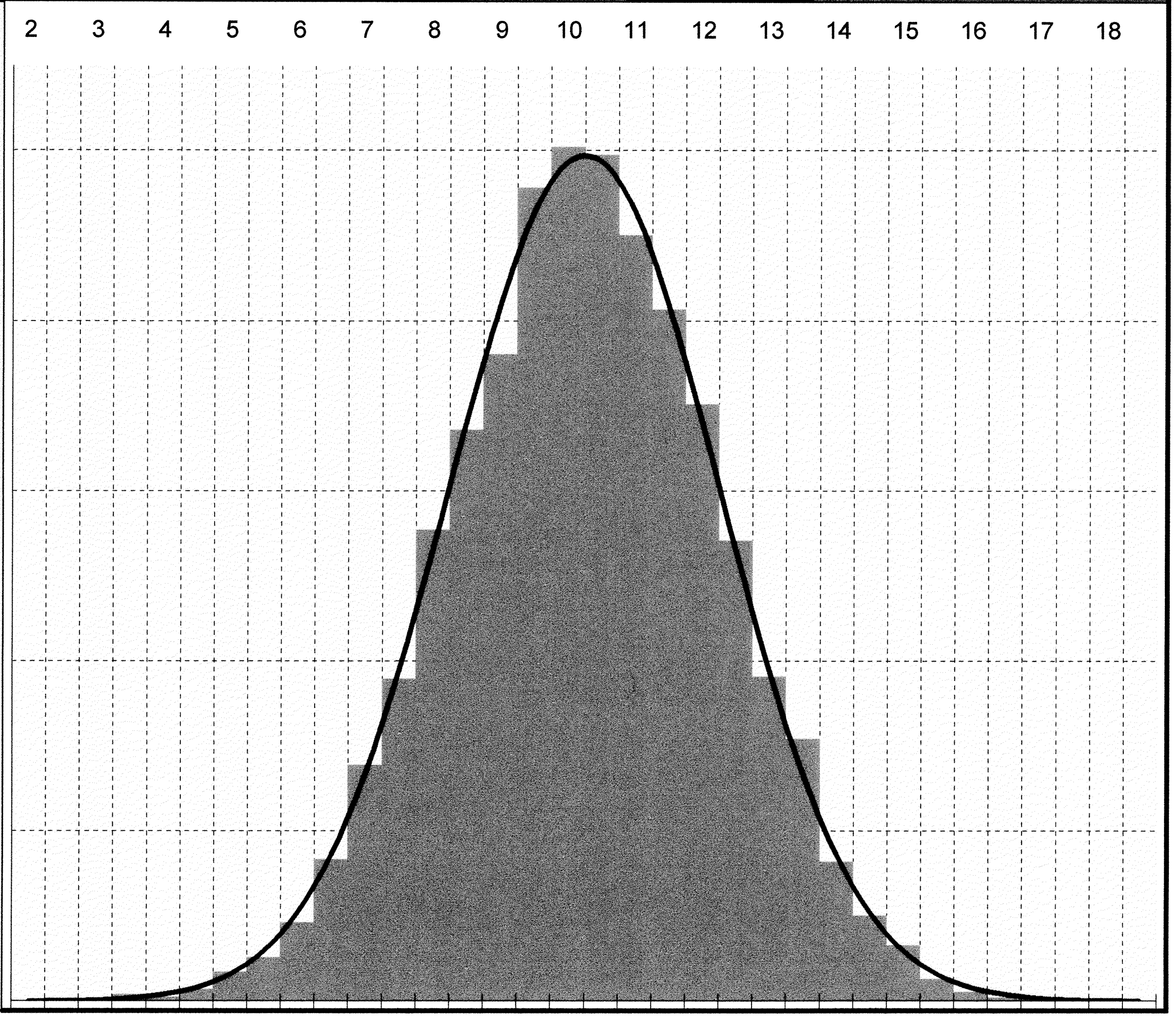


SIMULATION — LOI NORMALE

paramètres: m = 10, σ = 2

NOUVELLE SIMULATION

simulation	intervalle	effectif	fréquence	loi normale
8,647291	[1,5;2[	1	0,010%	0,002%
10,63751	[2;2,5[	0	0,000%	0,006%
9,342521	[2,5;3[	2	0,020%	0,014%
9,754387	[3;3,5[	8	0,080%	0,034%
9,564126	[3,5;4[	5	0,050%	0,077%
12,3282	[4;4,5[	14	0,140%	0,163%
10,19353	[4,5;5[	35	0,350%	0,323%
8,541196	[5;5,5[	52	0,520%	0,601%
9,192401	[5,5;6[	93	0,930%	1,053%
8,903773	[6;6,5[	167	1,670%	1,731%
5,19629	[6,5;7[	278	2,780%	2,675%
6,466902	[7;7,5[	379	3,790%	3,884%
10,61889	[7,5;8[	555	5,550%	5,301%
10,78844	[8;8,5[	672	6,720%	6,797%
12,17001	[8,5;9[	761	7,610%	8,191%
7,705817	[9;9,5[	956	9,560%	9,276%
12,09067	[9,5;10[	1004	10,040%	9,871%
9,105806	[10;10,5[	995	9,950%	9,871%
10,75689	[10,5;11[	900	9,000%	9,276%
12,38639	[11;11,5[	813	8,130%	8,191%
7,125589	[11,5;12[	702	7,020%	6,797%
7,944235	[12;12,5[	542	5,420%	5,301%
11,79127	[12,5;13[	382	3,820%	3,884%
9,63132	[13;13,5[	309	3,090%	2,675%
10,49855	[13,5;14[	164	1,640%	1,731%
12,84875	[14;14,5[	101	1,010%	1,053%
12,5512	[14,5;15[	66	0,660%	0,601%
9,253243	[15;15,5[	26	0,260%	0,323%
10,5315	[15,5;16[	11	0,110%	0,163%
10,12679	[16;16,5[	4	0,040%	0,077%
10,79084	[16,5;17[	3	0,030%	0,034%
9,877825	[17;17,5[	0	0,000%	0,014%
8,389755	[17,5;18[	0	0,000%	0,006%
6,927869	[18;18,5[	0	0,000%	0,002%



C - ACTIVITES SUR EXCEL

1 LOI NORMALE

Situation :
Cette manipulation reprend la situation de l'activité sur calculatrice (cf page 98) .
Simulation globale d'une population de 10 000 valeurs aléatoires d'une variable normale de paramètres m et σ par la formule: =COS(2*PI()*ALEA())*RACINE(-2*LN(ALEA()))*s+m
où s = σ .

Objectif :
Comparer numériquement et graphiquement les valeurs expérimentales regroupées dans des classes avec les classes théoriques suivant la loi normale.

Mode d'emploi et déroulement du programme :

⇨ Entrer les paramètres m et σ dans les 2 cellules concernées (taper la valeur puis **Entrée** au clavier).

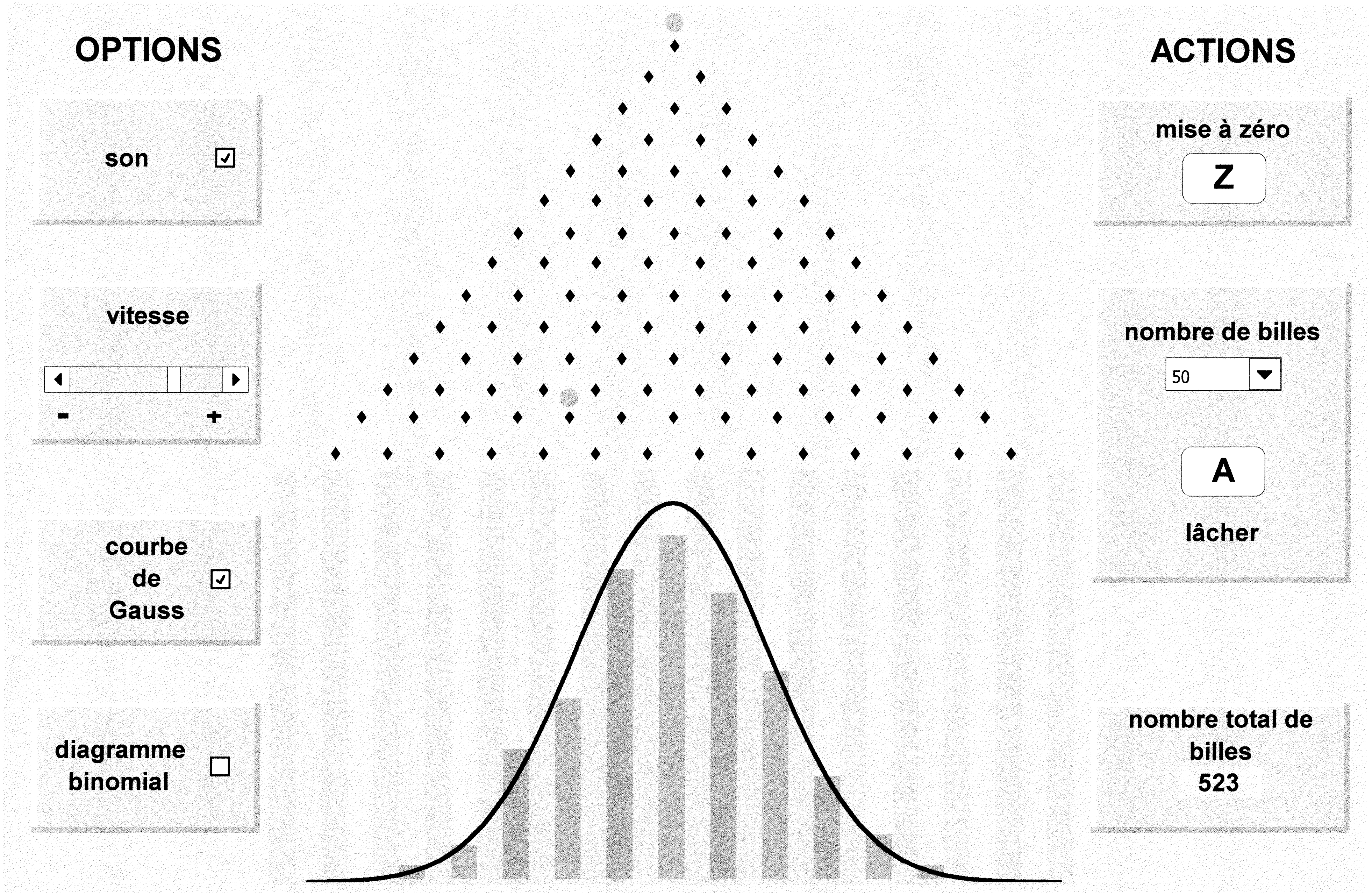
⇨ Après chaque saisie le programme simule dans la colonne de gauche une nouvelle population visible en totalité en se déplaçant au moyen de l'ascenseur vertical.

- regroupement des valeurs dans 34 classes d'amplitude σ / 4
- calcul de la fréquence expérimentale de chaque classe
- calcul de la fréquence théorique de chaque classe
- affichage de l'histogramme des fréquences expérimentales comparé à une courbe de Gauss

⇨ Une nouvelle population de 10 000 valeurs aléatoires peut être simulée sans changer m et σ en cliquant sur le bouton **NOUVELLE SIMULATION** .

SIMULATION

PLANCHE DE GALTON (2)



2 PLANCHE DE GALTON

Nota bene :
La planche de Galton intervient dans deux chapitres (Ch 8 - Loi binomiale - et Ch 10 - Loi normale -). C'est le même programme qui intervient dans les deux chapitres : des cases à cocher permettent de choisir si on veut l'utiliser pour approcher une loi binomiale ou une loi normale. (cf. page 88)

Présentation :
La planche de Galton est une planche verticale sur laquelle sont plantées n lignes de clous disposés en quinconce avec 1 clou sur la $1^{ère}$ ligne, 2 sur la $2^{ème}$,..., n sur la $n^{ème}$. Des billes sont lâchées une à une à partir du sommet.
A chaque clou rencontré, la bille a :

une probabilité $p = ½$ de passer à droite (succès)
une probabilité $1 - p = ½$ de passer à gauche (échec)

Sous la planche les billes tombent dans n+1 compartiments (numérotés de 0 à n de gauche à droite) dans lesquels elles s'empilent. **Simulation en direct** de la chute des billes.
Soit X la variable aléatoire qui à chaque bille associe le numéro du compartiment atteint.
L'événement (X = k) est réalisé quand la bille passe k fois à droite (k succès).
La loi de X est $\mathcal{B}(n, ½)$. Et comme $p = ½$, si n est assez grand, elle peut être approchée par la loi $\mathcal{N}(np, \sqrt{npq})$ soit $\mathcal{N}(½ n, ½ \sqrt{n})$.
Ici n =14 lignes de clous. (n devrait être plus grand pour une meilleure approche de la loi normale, mais on perd en visibilité à l'écran).
Galton a donc imaginé ce système, (encore parfois en usage dans les sections techniques de nos lycées, j'en connais un !), pour simuler une courbe de Gauss.
L'ordinateur nous donne l'occasion de réactualiser ce procédé qui n'a rien perdu de son intérêt pédagogique : outre l'intervention de la loi binomiale et de la loi normale, le dénombrement des chemins sur la planche permet de retrouver le triangle de Pascal (cf page 46).

Objectif :
Comparer graphiquement les piles de billes tombées dans les compartiments avec les piles théoriques calculées avec la loi de probabilité de $\mathcal{N}(½ n, ½ \sqrt{n})$.

Mode d'emploi et déroulement du programme :

⇨ 4 options permettent entre les séries de lâchers de :
- cocher le son si vous voulez agrémenter l'expérience en entendant le bruit des billes tombant sur les clous!
- régler la vitesse de chute des billes en déplaçant le curseur vers **+** pour accélérer et vers **-** pour ralentir
- faire apparaître la courbe de densité de la loi normale (case cochée dans ce chapitre)
- faire apparaître le diagramme en bâtons de la loi binomiale (case non cochée dans ce chapitre)

⇨ Déclencher des séries de lâchers de billes (cumulées depuis le début)
- choisir le nombre lâchers (de 10 à 350) dans la zone de liste en cliquant sur ▼
- cliquer sur le bouton A

⇨ Redémarrer une session en cliquant sur le bouton Z

⇨ Le graphique représente:
- les effectifs expérimentaux de billes tombées dans chaque compartiment (rectangles rouges)
- une courbe de Gauss (rose) variable qui représente la densité de $\mathcal{N}(7, \sqrt{3,5})$ multipliée par le nombre total de billes tombées.

Remarques techniques : (cf page 89 Planche de Galton précédente...)

"Le Hasard est dans la nature même des phénomènes microscopiques ; le Déterminisme est une conséquence, à l'échelle macroscopique, des lois du Hasard à l'échelle microscopique, lorsqu'on mesure des grandeurs qui sont en fait des valeurs moyennes aux fluctuations très faibles."

Ch. RUHLA – La physique du hasard – 1989.

11 Echantillonnage

Les "fluctuations" des valeurs moyennes des échantillons sont un des objets de ce chapitre. On comprend mieux l'argument de Ch. Ruhla lorsque l'on songe à la taille des "échantillons" (nombre d'Avogadro $6{,}022\times10^{23}$).

A - OBJECTIFS

- Exhiber concrètement, par l'extraction d'un grand nombre d'échantillons, la distribution d'échantillonnage d'une moyenne ou d'une fréquence (la notion de distribution d'échantillonnage est difficile à faire comprendre dans un cours "classique").
- Vérifier expérimentalement les formules données en cours, concernant la distribution des échantillons.
- Faire prendre conscience aux élèves de la nature de cette distribution, des fluctuations parfois importantes entre les différents échantillons et de la puissance de la loi des grands nombres qui, malgré les errances locales du hasard, permet globalement une bonne prévision.

B – ACTIVITES SUR CALCULATRICE page 112

Niveau	BTS 2ème année toutes spécialités.
Situation dans la progression	Après le cours sur l'échantillonnage.
Durée	2 h.
Nature des activités	Simulation des distributions d'échantillons dans le cas des fréquences et celui des moyennes.

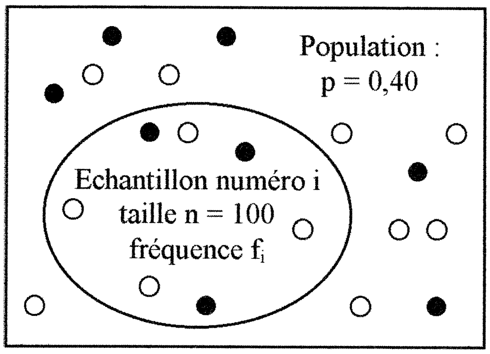
C – ACTIVITES SUR EXCEL page 118

Echantillonnage des moyennes.
Echantillonnage des fréquences.

TRAVAUX PRATIQUES

ECHANTILLONNAGE : Aspect expérimental, par simulation

1 Distribution des fréquences d'échantillons :



On considère une production importante contenant 40% (p = 0,40) d'objets de première qualité (ou encore, une urne qui contient 40% de boules noires et 60% de boules blanches).
On prélève dans cette population, au hasard et avec remise, des échantillons de taille n = 100 éléments.
Pour chaque échantillon, on calcule la fréquence f_i d'objets de première qualité.
On désire étudier selon quelle règle se répartissent les fréquences f_i des différents échantillons.

1) **Simulation d'un tirage**
En mode "normal" de calcul, taper l'instruction : Int (Ran# + 0.4) (ou int (rand + 0.4), sur T.I.), puis faire 10 fois EXE (ou ENTER) :

....

Le résultat affiché est 1 (= objet de première qualité = boule noire) avec une probabilité de 0,4 et 0 (= second choix) avec une probabilité de 0,6.

2) **Simulation de 100 tirages avec remise (un échantillon) et calcul de la fréquence des objets de 1ère qualité**

Commentaires	CASIO (anciens modèles de la fx 7000G à la CFX 9900GC)	CASIO 6910G - 9930 - 9940 - 9960 – 9990	T.I. 81	T.I. 80 -82 - 83 - 85 – 92(*)
S compteur des objets de 1ère qualité. I compteur des 30 tirages 1 = 1ère qualité ; 0 = second choix. Affichage de la fréquence de l'échantillon.	0 → S ↵ 1 → I ↵ Lbl 1 ↵ Int (Ran# + 0.4) + S → S ↵ I + 1 → I ↵ I ≤ 100 ⇒ Goto 1 ↵ S ÷ 100	0 → S ↵ For 1 → I To 100 ↵ Int (Ran# + 0.4) + S → S ↵ Next ↵ S ÷ 100	:0 → S :1 → I :Lbl 1 :int (rand + 0.4) + S → S :I + 1 → I :If I ≤ 100 :Goto 1 :Disp S ÷ 100	:0 → S :For (I,1,100) :int (rand + 0.4) + S → S :End :Disp S ÷ 100

* Modifications pour certains modèles : sur TI 92 la syntaxe est For I,1,100 et rand( ).

3) **Distribution des fréquences de 25 échantillons**
Prélever ainsi 5 échantillons de taille 100 (il suffit de réappuyer sur EXE ou ENTER), et noter, dans le tableau les fréquences obtenues :

fréquences f_i					

Compléter vos résultats avec ceux d'autres étudiants :

fréquences f_i										
fréquences f_i										

Calculer la moyenne $\bar{f}$ et l'écart type s des fréquences f_i de vos 25 échantillons.

....

....

Comparer $\bar{f}$ et p d'une part, s et $\sqrt{\dfrac{p(1-p)}{100}}$ d'autre part.

....

4) Comparaison de la distribution expérimentale des fréquences à la loi $\mathcal{N}\left(p\ ;\ \sqrt{\dfrac{p(1-p)}{100}}\right)$

Le programme ci-dessous, disponible sur les modèles récents, affiche l'histogramme de distribution des moyennes de 100 échantillons (tester d'abord sur **10**) et le compare à la répartition normale prévue comme approximation par la théorie (durée du programme ≈ 8 mn 40 s !).

CASIO fx 6910(*) – 9930 - 9940 -- 9960 – 9990	TI 80(*) 82	TI 83	TI 92
ClrList ↵ Seq(I,I,.2,.6,.05)→ List 1↵ Seq(0,I,1,9,1)→ List 2↵ For 1 → K To **100**↵ 0 → S↵ For 1 → I To 100↵ Int(Ran# + 0.4) + S → S↵ Next↵ S÷100 → F↵ F>.625 Or F<.175 ⇒ Goto 1↵ 1+Int((F - .175)÷.05)→L↵ List 2[L]+1→List 2[L]↵ Lbl 1↵ Next↵ S-WindMan↵ ViewWindow .175,.625, .05,0,50,10↵ .175 → HStart↵ .05 → Hpitch↵ S-Gph1 DrawOn,Hist,List 1,List 2,Blue↵ DrawStat↵ Graph Y =(5÷(.049√(2π)))e(-.5((X-.4)÷.049)²)	:ClrList L₁,L₂ :seq(I,I,0.2,0.6,0.05) → L₁ :seq(0,I,1,9,1) → L₂ :For(K,1,**100**) :0 → S :For(I,1,100) :int(rand + 0.4) + S → S :End :S/100 → F :If F>0.625 or F<0.175 :Goto 1 :1 + int((F-0.175)/0.05) → L :L₂(L) + 1 → L₂(L) :Lbl 1 :End :Plot1(Histogram,L₁,L₂) :PlotOn 1 :0.175 → Xmin :0.625 → Xmax :0.05 → Xscl :0 → Ymin :50 → Ymax :10 → Yscl :DrawF (5/(.049√(2π)))e^(-.5((X-.4)/.049)²) :DispGraph	:ClrList L₁,L₂ :seq(I,I,0.2,0.6,0.05) → L₁ :seq(0,I,1,9,1) → L₂ :For(K,1,**100**) :0 → S :For(I,1,100) :int(rand + 0.4) + S → S :End :S/100 → F :If F>0.625 or F<0.175 :Goto 1 :1 + int((F-0.175)/0.05) → L :L₂(L) + 1 → L₂(L) :Lbl 1 :End :Plot1(Histogram,L₁,L₂) :PlotsOn 1 :0.175 → Xmin :0.625 → Xmax :0.05 → Xscl :0 → Ymin :50 → Ymax :10 → Yscl :DrawF 5normalpdf(X, 0.4,0.049) :DispGraph	:DelVar L1 , L2 :seq(i,i,0.2,0.6,0.05) → L1 :seq(0,i,1,9,1) → L2 :For k,1,**100** :0 → s :For i,1,100 :int(rand( ) + 0.4) + s → s :EndFor :s/100 → f :If f>0.625 or f<0.175 :Goto a :1 + int((f-0.175)/0.05) → L :L2[L] + 1 → L2[L] :Lbl a :EndFor :0.175 → xmin :0.625 → xmax :0.05 → xscl :0 → ymin :50 → ymax :10 → yscl :PlotsOn :NewPlot 1,4,L1,, L2,,,,0.05 :DrawFunc (5/(.049√(2π)))e^(-.5((X-.4)/.049)^2)

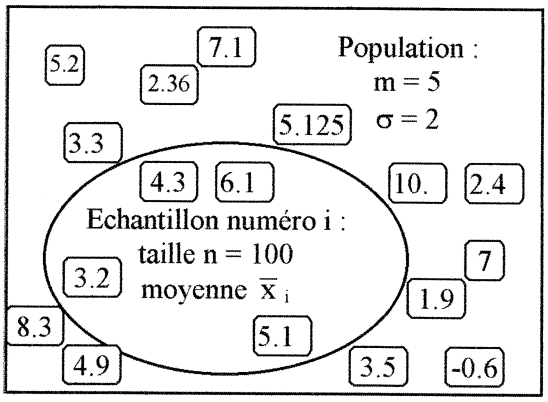
⇨ Pour obtenir certaines instructions :

- CASIO 6910 9940 : **ClrList** par PRGM CLR List ; **Seq** par OPTN LIST ; **List** par OPTN LIST ; **Int** par OPTN NUM ; **Ran#** par OPTN PROB ; **Or** par OPTN Logic ; **S-Wind Man** par SHIFT SET UP S-WIN ; **Hstart et pitch** par VARS STAT GRPH ; **S-Graph1** par F4(MENU) STAT GRPH GPH1 ; **Draw On** par F4(MENU) STAT DRAW ON ; **Hist** par GRPH ; **Blue** sur 9940 par STAT COLR ; **DrawStat** par PRGM DISP Stat ; **Graph Y=** par Sketch GRPH Y=.
- TI 80 82 83 : **ClrList** par STAT ; **Seq** par 2nd LIST OPS ; **rand** ou **randNorm** par MATH PRB; **or** par 2nd TEST LOGIC ; **Plot 1(Histogram,L₁,L₂)** par 2nd STAT PLOT puis PLOTS puis TYPE ; **PlotsOn** par 2nd STAT PLOT puis PLOTS ; **DrawF** par DRAW ; **Dispgraph** par PRGM I/O ; **normalpdf** sur TI83 par 2nd DISTR.

✳ Particularités sur certains modèles :

- CASIO 6910 et 9930 : En l'absence du connecteur Or, faire F>.625 ⇒ Goto 1↵ F<.175 ⇒ Goto 1↵. Supprimer .175 → HStart↵ et .05 → Hpitch↵ .
- TI 80 : En l'absence du connecteur Or, faire :If F > .625 ↵ :Goto 1 ↵ :If F < .175 ↵ :Goto 1 .

2 Distribution des moyennes d'échantillons :



On considère une population importante dont la moyenne vaut m = 5 et l'écart-type σ = 2, correspondant à une répartition selon la loi normale $\mathcal{N}(5\,;2)$.

On prélève dans cette population, au hasard et avec remise, des échantillons de taille n = 100 éléments. Pour chaque échantillon, on calcule la moyenne $\overline{x}_i$.

On désire étudier selon quelle règle se répartissent les moyennes des différents échantillons.

1) Simulation du tirage d'un échantillon de taille 100 et calcul de sa moyenne

Le programme suivant fournit la moyenne d'un échantillon de taille n = 100 (durée ≈ 20s).

CASIO (anciens modèles de la fx 7000G à la CFX 9900GC) en mode Deg	CASIO fx 6910G - CFX 9930 9940 – 9960 – 9990 GT en mode Deg	T.I. 81 – 82 - 85 en mode Degree	T.I. 83 - 92
0 → N ↵ 0 → I ↵ Lbl 1 ↵ I + 1 → I ↵ 5 + 2 cos(360 Ran#) √ (-2 ln Ran#) + N → N ↵ I < 100 ⇒ Goto 1 ↵ N ÷ 100	0 → N ↵ For 1 → I To 100 ↵ 5 + 2 cos(360 Ran#) √ (-2 ln Ran#) + N → N ↵ Next ↵ N ÷ 100	:0 → N :0 → I :Lbl 1 (sur TI85 : Lbl a1) :I + 1 → I :5 + 2 cos(360×rand) √ (-2 ln (rand)) + N → N :If I < 100 :Goto 1 (TI85 : Goto a1) :Disp N ÷ 100	:0 → N :For (I,1,100) :randNorm(5,2) + N → N :End :Disp N ÷ 100 Syntaxe sur TI92 : For i,1,100 EndFor

Résultat de votre simulation : moyenne d'échantillon $\overline{x}_1 \approx$ .... à 10^{-2} près.

2) **Distribution des moyennes de 20 échantillons**

Compléter, dans le tableau suivant, la moyenne $\overline{x}_1$ de votre échantillon, avec 19 autres moyennes d'échantillons prélevés par d'autres étudiants.

moyennes $\overline{x}_i$										
moyennes $\overline{x}_i$										

Calculer la moyenne μ et l'écart-type s des moyennes $\overline{x}_i$ des 20 échantillons.

....

....

Comparer μ et m d'une part, s et $\dfrac{\sigma}{\sqrt{100}}$ d'autre part.

....

....

3) Comparaison de la distribution expérimentale des moyennes à la loi $\mathcal{N}(m ; \frac{\sigma}{\sqrt{100}})$

Le programme ci-dessous, disponible sur les modèles récents, affiche l'histogramme de distribution des moyennes de 50 échantillons (tester d'abord sur **5**) et le compare à la répartition normale prévue par la théorie (durée du programme ≈ 10 mn !).

CASIO fx 6910G - CFX 9930 9940 -- 9960 - 9990 GT	TI 82	TI 83	TI 92
ClrList↵ Seq(I,I,4.6,5.4,.1)→List 1↵ Seq(0,I,1,9,1)→List 2↵ For 1 → K To **50**↵ 0 → N↵ For 1→ I To 100↵ 5 + 2 cos(360 Ran#) √ (-2 ln Ran#) + N → N ↵ Next↵ N ÷ 100 → M↵ M<4.55 Or M≥5.45 ⇒ Goto 1↵ 1+Int((M-4.55)÷0.1)→L↵ List 2[L] + 1→ List 2[L]↵ Lbl 1↵ Next↵ S-WindMan↵ ViewWindow 4.55,5.45, .1,0,15,10↵ 4.55 → HStart↵ .1 → Hpitch↵ DrawStat↵ Graph Y = (5÷(.2√(2π)))e(-.5((X-5)÷.2)^2)	:ClrList L_1 , L_2 :seq(I,I,4.6,5.4,.1) → L_1 :seq(0,I,1,9,1) → L_2 :For(K,1,**50**) :0 → N :For(I,1,100) :5 + 2 cos(360×rand) √ (-2 ln (rand)) + N → N :End :N/100 → M :If M < 4.55 or M ≥ 5.45 :Goto 1 :1 + int((M-4.55)/0.1) → L :L_2(L) + 1 → L_2(L) :Lbl 1 :End :Plot1(Histogram,L_1,L_2) :PlotsOn 1 :4.55 → Xmin :5.45 → Xmax :0.1 → Xscl :0 → Ymin :15 → Ymax :10 → Yscl :DrawF (5/(.2√(2π)))e^(-.5((X-5)/.2)^2) :DispGraph	:ClrList L_1 , L_2 :seq(I,I,4.6,5.4,.1) → L_1 :seq(0,I,1,9,1) → L_2 :For(K,1,**50**) :0 → N :For(I,1,100) :randNorm(5,2) + N → N :End :N/100 → M :If M < 4.55 or M ≥ 5.45 :Goto 1 :1 + int((M-4.55)/0.1) → L :L_2(L) + 1 → L_2(L) :Lbl 1 :End :Plot1(Histogram,L_1,L_2) :PlotsOn 1 :4.55 → Xmin :5.45 → Xmax :0.1 → Xscl :0 → Ymin :15 → Ymax :10 → Yscl :DrawF 5normalpdf(X, 5,0.2) :DispGraph	:DelVar L1 , L2 :seq(i,i,4.6,5.4,.1) → L1 :seq(0,i ,1,9,1) → L2 :For k,1,**50** :0 → n :For i,1,100 :randNorm(5,2) + n → n :EndFor :n/100 → m :If m < 4.55 or m ≥ 5.45 :Goto a :1 + int((m-4.55)/0.1) → L :L2[L] + 1 → L2[L] :Lbl a :EndFor :4.55 → xmin :5.45 → xmax :0.1 → xscl :0 → ymin :15 → ymax :10 → yscl :PlotsOn :NewPlot 1,4,L1,,L2,,,,0.1 :DrawFunc (5/(.2√(2π)))e^(-.5((X-5)/.2)^2)

Description et compte-rendu de l'activité "Echantillonnage"

$\boxed{1}$ On commence par la distribution des fréquences d'échantillons, dont le concept est plus simple que celui des moyennes.

1) Explication de l'instruction correspondant à un tirage.

2) Constitution d'un échantillon de taille 100.

3) Il est important que les élèves voient et comprennent qu'il y a d'une part la distribution de la population et, d'autre part, la distribution des fréquences d'échantillons.

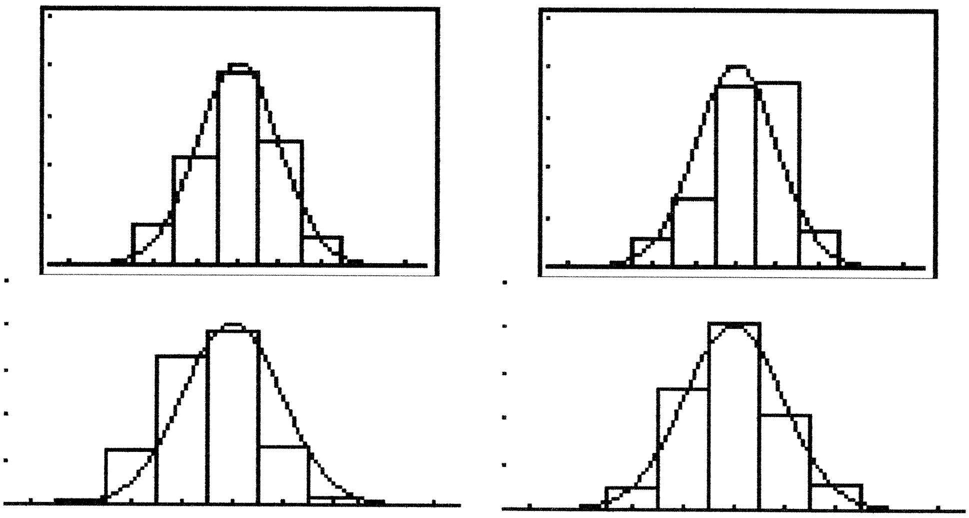
La collecte de 25 échantillons chez plusieurs élèves est nécessaire compte tenu du temps de calcul. Mais loin d'être un inconvénient, elle permet la comparaison des différentes simulations (suspense : un certain désordre semble régner quant aux résultats des échantillons des uns et des autres) et de concentrer à nouveau l'attention sur leur interprétation.

Sur 25 échantillons de taille 100, la répartition des fréquences nous a donné :

$\bar{f} \approx 0{,}404$ et $s \approx 0{,}038$, alors que les valeurs théoriques sont $p = 0{,}40$ et $\sqrt{\dfrac{p(1-p)}{100}} \approx 0{,}049$.

4) Ce programme est plus long à saisir et prend du temps à "tourner". Il peut être réservé à quelques-uns, ou fait à la maison, ou encore rétroprojeté par le professeur.

Les résultats sont très corrects, voici, à titre d'exemple, quelques images d'écran (TI 83 et CASIO 9940) :



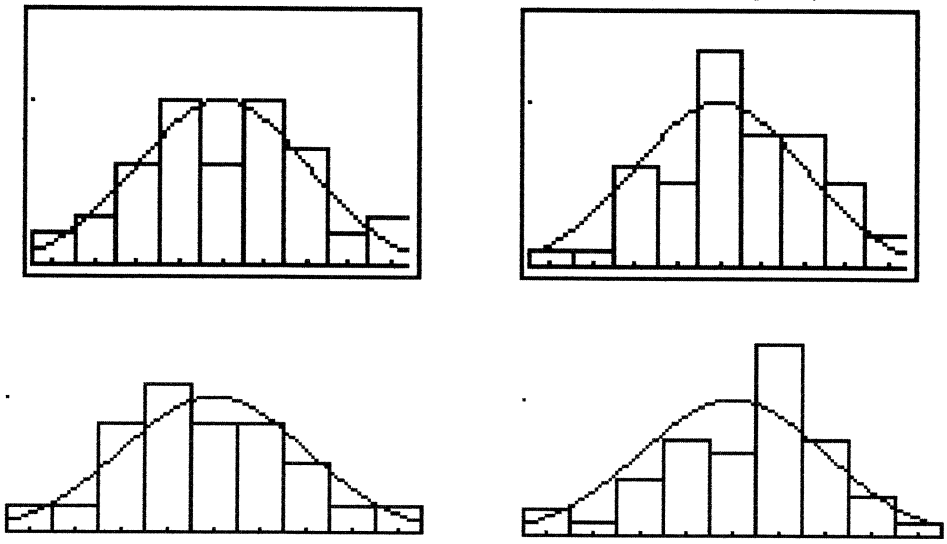
$\boxed{2}$ La notion de moyenne des moyennes est plus difficile à comprendre. Le fait d'avoir sous les yeux une simulation de la distribution des moyennes d'échantillons aide à donner un sens à ce que l'on fait.

2) Sur 20 échantillons de taille 100, la répartition des moyennes des échantillons nous a donné :

$\mu = 5{,}112$ et $s \approx 0{,}19$ alors que les valeurs théoriques sont : $m = 5$ et $\dfrac{\sigma}{\sqrt{100}} = 0{,}20$.

On constate donc que le désordre parmi les différents échantillons des élèves n'est qu'apparent.

3) Quelques images d'écran TI 83 et CASIO 9940 (résultats plus inégaux) :

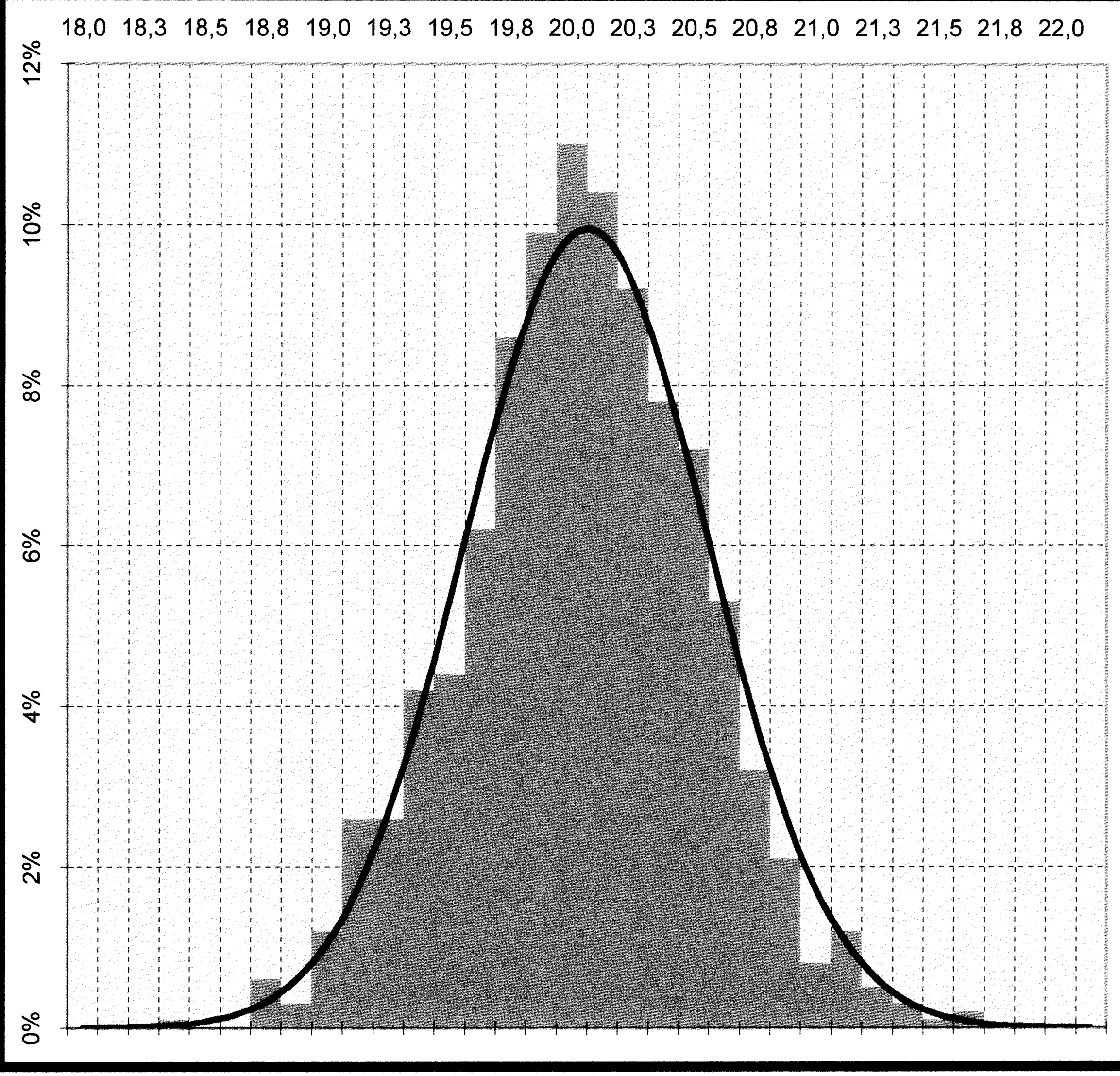


Remarque : Les répartitions d'échantillonnage demandant de nombreux prélèvements, on pourra comparer ces résultats à ceux, plus performants, de l'ordinateur (développements Excel).

SIMULATION — ÉCHANTILLONNAGE D'UNE MOYENNE

intervalle	effectif	fréquence	loi normale
[17,88;18[	0	0,0%	0,00%
[18;18,13[	0	0,0%	0,01%
[18,13;18,25[	0	0,0%	0,01%
[18,25;18,38[	1	0,1%	0,03%
[18,38;18,5[	0	0,0%	0,08%
[18,5;18,63[	0	0,0%	0,16%
[18,63;18,75[	6	0,6%	0,32%
[18,75;18,88[	3	0,3%	0,60%
[18,88;19[	12	1,2%	1,05%
[19;19,13[	26	2,6%	1,73%
[19,13;19,25[	26	2,6%	2,67%
[19,25;19,38[	42	4,2%	3,88%
[19,38;19,5[	44	4,4%	5,30%
[19,5;19,63[	62	6,2%	6,80%
[19,63;19,75[	86	8,6%	8,19%
[19,75;19,88[	99	9,9%	9,28%
[19,88;20[	110	11,0%	9,87%
[20;20,13[	104	10,4%	9,87%
[20,13;20,25[	92	9,2%	9,28%
[20,25;20,38[	78	7,8%	8,19%
[20,38;20,5[	72	7,2%	6,80%
[20,5;20,63[	53	5,3%	5,30%
[20,63;20,75[	32	3,2%	3,88%
[20,75;20,88[	21	2,1%	2,67%
[20,88;21[	8	0,8%	1,73%
[21;21,13[	12	1,2%	1,05%
[21,13;21,25[	5	0,5%	0,60%
[21,25;21,38[	3	0,3%	0,32%
[21,38;21,5[	1	0,1%	0,16%
[21,5;21,63[	2	0,2%	0,08%
[21,63;21,75[	0	0,0%	0,03%
[21,75;21,88[	0	0,0%	0,01%
[21,88;22[	0	0,0%	0,01%
[22;22,13[	0	0,0%	0,00%

nouveaux échantillons	distribution des moyennes d'échantillons		population
	expérimentale	théorique	
moyenne	19,983	20	20
écart-type	0,442	0,500	5



échantillons	
taille (≤100)	
100	
n °	moyenne
1	21,000
2	19,381
3	19,571
4	20,320
5	20,335
6	19,391
7	20,773
8	19,683
9	19,861
10	20,306
11	20,007
12	20,005
13	19,411
14	19,613
15	20,517
16	20,109
17	20,047
18	20,247
19	19,877
20	20,351
21	19,985
22	20,183
23	20,063
24	19,603
25	19,700
26	19,881
27	19,149
28	20,729
29	19,626
30	19,779

C - ACTIVITES SUR EXCEL

1 ECHANTILLONNAGE D'UNE MOYENNE

Situation :
Simulation globale de 1000 échantillons aléatoires de taille n issus d'une population de moyenne m et d'écart type σ.
Etude de la distribution expérimentale des moyennes des 1000 échantillons de taille n.

Objectif :
Comparer numériquement et graphiquement la distribution expérimentale des moyennes des 1000 échantillons de taille n avec la loi normale de moyenne m et d'écart type $\sigma / \sqrt{n}$.

Mode d'emploi et déroulement du programme :

⇨ Entrer la moyenne m et l'écart type σ de la population dans les cellules au-dessous de **population** (taper la valeur puis **Entrée** au clavier).
⇨ Entrer la taille n des échantillons dans la cellule au-dessous de **échantillons** (taper la valeur puis **Entrée** au clavier). Cette taille doit être **100 au maximum**.
⇨ Après chaque saisie le programme simule 100 000 valeurs aléatoires visibles en se déplaçant au moyen des ascenseurs vers la droite et vers le bas.

- les échantillons sont constitués par les n premières valeurs de chaque ligne
- affichage des moyennes des 1000 échantillons
- regroupement des moyennes d'échantillons dans 34 classes d'amplitude ¼ de l'écart type théorique de la distribution des moyennes d'échantillons de taille n soit $(\sigma / \sqrt{n}) / 4$
- calcul des pourcentages expérimentaux d'échantillons ayant leur moyenne dans chaque classe
- calcul des pourcentages théoriques d'échantillons ayant leur moyenne dans chaque classe avec $\mathcal{N}(m, \sigma / \sqrt{n})$
- calcul de la moyenne et de l'écart type de la distribution expérimentale des moyennes des 1000 échantillons de taille n
- calcul de la moyenne et de l'écart type de la distribution théorique des moyennes d'échantillons de taille n
- affichage de l'histogramme des pourcentages expérimentaux (rectangles bleus) comparé à la courbe de Gauss théorique (rouge)

⇨ Un nouvel ensemble de 100 000 valeurs aléatoires peut être simulé sans changer m et σ en cliquant sur le bouton **nouveaux échantillons** .

Suggestions :
1° Comparer les paramètres des distributions expérimentale et théorique des moyennes d'échantillons de taille n .
2° Observer l'influence de la taille des échantillons sur les écarts type des distributions expérimentale et théorique en changeant n sans modifier m et σ .

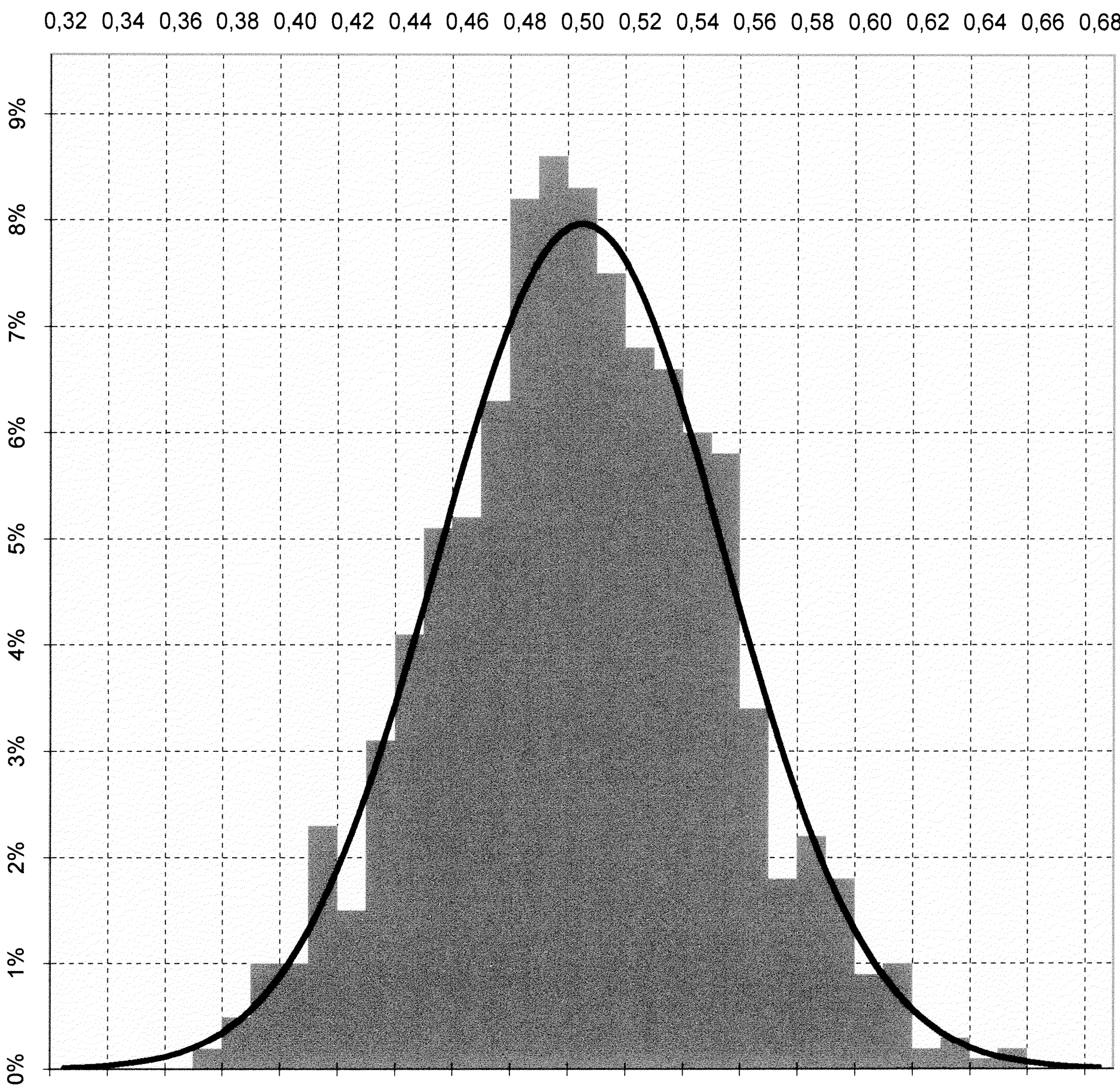
Remarque technique :
Les 100 000 valeurs du caractère étudié dans la population sont générées par la formule
=COS(2*PI()*ALEA())*RACINE(-2*LN(ALEA()))*s+m où s = σ.

SIMULATION

ÉCHANTILLONNAGE D'UNE FRÉQUENCE

fréquence	nombre	pourcent	loi normale
0,320	0	0,0%	0,01%
0,330	0	0,0%	0,03%
0,340	0	0,0%	0,05%
0,350	0	0,0%	0,09%
0,360	0	0,0%	0,16%
0,370	2	0,2%	0,27%
0,380	5	0,5%	0,45%
0,390	10	1,0%	0,71%
0,400	10	1,0%	1,09%
0,410	23	2,3%	1,58%
0,420	15	1,5%	2,22%
0,430	31	3,1%	3,00%
0,440	41	4,1%	3,89%
0,450	51	5,1%	4,84%
0,460	52	5,2%	5,79%
0,470	63	6,3%	6,66%
0,480	82	8,2%	7,36%
0,490	86	8,6%	7,81%
0,500	**83**	**8,3%**	**7,97%**
0,510	75	7,5%	7,81%
0,520	68	6,8%	7,36%
0,530	66	6,6%	6,66%
0,540	60	6,0%	5,79%
0,550	58	5,8%	4,84%
0,560	34	3,4%	3,89%
0,570	18	1,8%	3,00%
0,580	22	2,2%	2,22%
0,590	18	1,8%	1,58%
0,600	9	0,9%	1,09%
0,610	10	1,0%	0,71%
0,620	2	0,2%	0,45%
0,630	3	0,3%	0,27%
0,640	1	0,1%	0,16%
0,650	2	0,2%	0,09%
0,660	0	0,0%	0,05%
0,670	0	0,0%	0,03%
0,680	0	0,0%	0,01%

nouveaux échantillons	distribution des fréquences d'échantillons expérimentale	théorique	population
moyenne	0,500	0,5	0,5
écart-type	0,055	0,050	(fréquence)



échantillons	
100	
30≤ taille≤100	
n °	fréquence
1	0,440
2	0,400
3	0,490
4	0,580
5	0,480
6	0,590
7	0,520
8	0,400
9	0,520
10	0,510
11	0,520
12	0,400
13	0,460
14	0,560
15	0,500
16	0,540
17	0,500
18	0,470
19	0,530
20	0,490
21	0,540
22	0,500
23	0,510
24	0,570
25	0,570
26	0,480
27	0,600
28	0,480
29	0,540
30	0,520
31	0,470
32	0,420
33	0,410

2 ECHANTILLONNAGE D'UNE FREQUENCE

Situation :
Simulation globale de 1000 échantillons aléatoires de taille n issus d'une population dans laquelle une certaine propriété a une fréquence p.
Etude de la distribution expérimentale des fréquences des 1000 échantillons de taille n.

Objectif :
Comparer numériquement et graphiquement la distribution expérimentale des fréquences des 1000 échantillons de taille n avec la loi normale de moyenne p et d'écart type $\sqrt{(pq/n)}$.

Mode d'emploi et déroulement du programme :

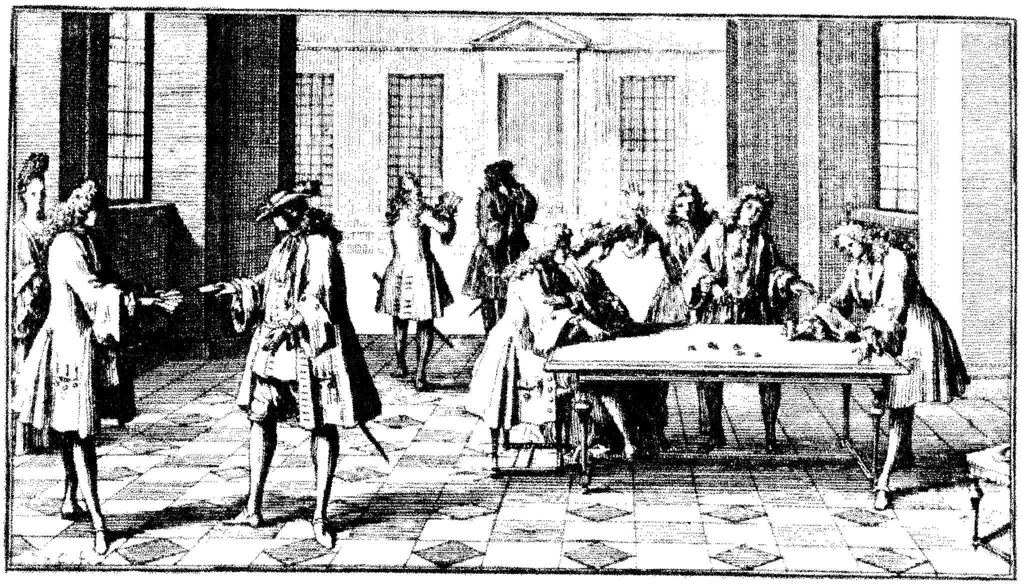
⇨ Entrer la fréquence p de la population dans la cellule située au-dessous de **population** taper la valeur puis **Entrée** au clavier).
⇨ Entrer la taille n des échantillons dans la cellule au-dessous de **échantillons** (taper la valeur puis **Entrée** au clavier). Cette taille doit être **comprise entre 30 et 100** .
⇨ Après chaque saisie le programme simule 100 000 valeurs aléatoires (VRAI, FAUX) visibles en se déplaçant au moyen des ascenseurs vers la droite et vers le bas.

- les échantillons sont constitués par les n premières valeurs de chaque ligne
- affichage des fréquences du caractère dans les 1000 échantillons (valeur VRAI)
- dénombrement des échantillons pour chacune des 37 fréquences d'échantillons les plus proches de p
- calcul des pourcentages expérimentaux d'échantillons ayant chacune des 37 fréquences
- calcul des pourcentages théoriques d'échantillons ayant chacune des 37 fréquences avec $\mathcal{N}(p, \sqrt{(pq/n)})$
- calcul de la moyenne et de l'écart type de la distribution expérimentale des fréquences des 1000 échantillons de taille n
- calcul de la moyenne et de l'écart type de la distribution théorique des fréquences d'échantillons de taille n
- affichage de l'histogramme des pourcentages expérimentaux (rectangles bleus) comparé à la courbe de Gauss théorique (rouge)

⇨ Un nouvel ensemble de 100 000 valeurs aléatoires peut être simulé sans changer m et σ en cliquant sur le bouton **nouveaux échantillons** .

Suggestions :
1° Comparer les paramètres des distributions expérimentale et théorique des fréquences d'échantillons de taille n .
2° Observer l'influence de la taille des échantillons sur les écarts type des distributions expérimentale et théorique en changeant n sans modifier p .

Remarque technique :
Les 100 000 valeurs aléatoires d'une variable de Bernoulli de paramètre p sont générées par la formule =ALEA()<p (qui génère VRAI ou FAUX suivant que le nombre aléatoire est inférieur ou supérieur à p).



"L'estimation d'une grandeur à l'aide d'observations, avec une erreur plus ou moins grande, peut être comparée à un jeu de hasard.".

Carl Friedrich Gauß 1809.

12 Estimation par intervalle de confiance

A - OBJECTIFS

• Montrer expérimentalement le caractère relatif des intervalles de confiance, leur dépendance à l'échantillon.

• Comprendre la notion de "confiance" qu'on peut leur attacher.

B – ACTIVITES SUR CALCULATRICE page 123

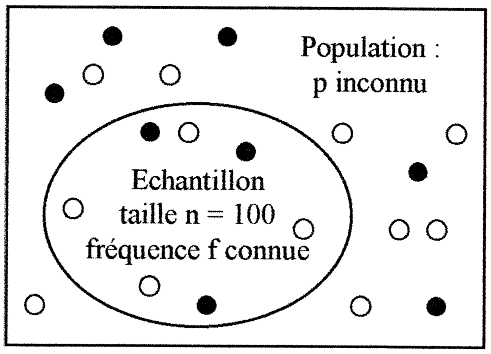
Niveau	BTS $2^{ème}$ année
Situation dans la progression	Après le cours sur l'estimation.
Durée	Un peu plus d'une heure.
Nature des activités	Simulation d'intervalles de confiance d'une fréquence inconnue. Répartition de ces intervalles et, après exhibition de la fréquence de la population, étude de la pertinence de ces intervalles.

C – ACTIVITES SUR EXCEL page 128

Intervalles de confiance d'une moyenne inconnue.
Intervalles de confiance d'une fréquence inconnue.

TRAVAUX PRATIQUES

ESTIMATION :
Intervalle de confiance pour une fréquence



On considère une population importante contenant une proportion p inconnue d'objets d'un certain type T (boules noires par exemple).
On prélève dans cette population, au hasard et avec remise, un échantillon de taille n = 100. On calcule la fréquence d'apparition f des objets de type T dans cet échantillon.
Il s'agit, à partir de la valeur de f, de donner un intervalle dans lequel on estime que p se situe avec un coefficient de confiance de 90 %.

A l'aide de la table de la loi $\mathcal{N}(0;1)$, déterminer le nombre t tel que : $2\pi(t) - 1 = 0{,}90$.

....

On prendra donc comme intervalle de confiance de p au niveau de confiance de 90 % :

$$\left[f - 1{,}645\sqrt{\frac{f(1-f)}{100}} ; f + 1{,}645\sqrt{\frac{f(1-f)}{100}}\right].$$

Dans le programme suivant, la calculatrice **choisit aléatoirement une valeur de p** entre 0 et 1 (inconnue) qui détermine une **population**. Pour chaque **échantillon de 100 objets de cette population**, elle donne un intervalle de confiance. On observera comment ils se répartissent . Après avoir interrogé la calculatrice sur la valeur qu'elle a prise pour p, on observera si p se situe dans les intervalles de confiance.

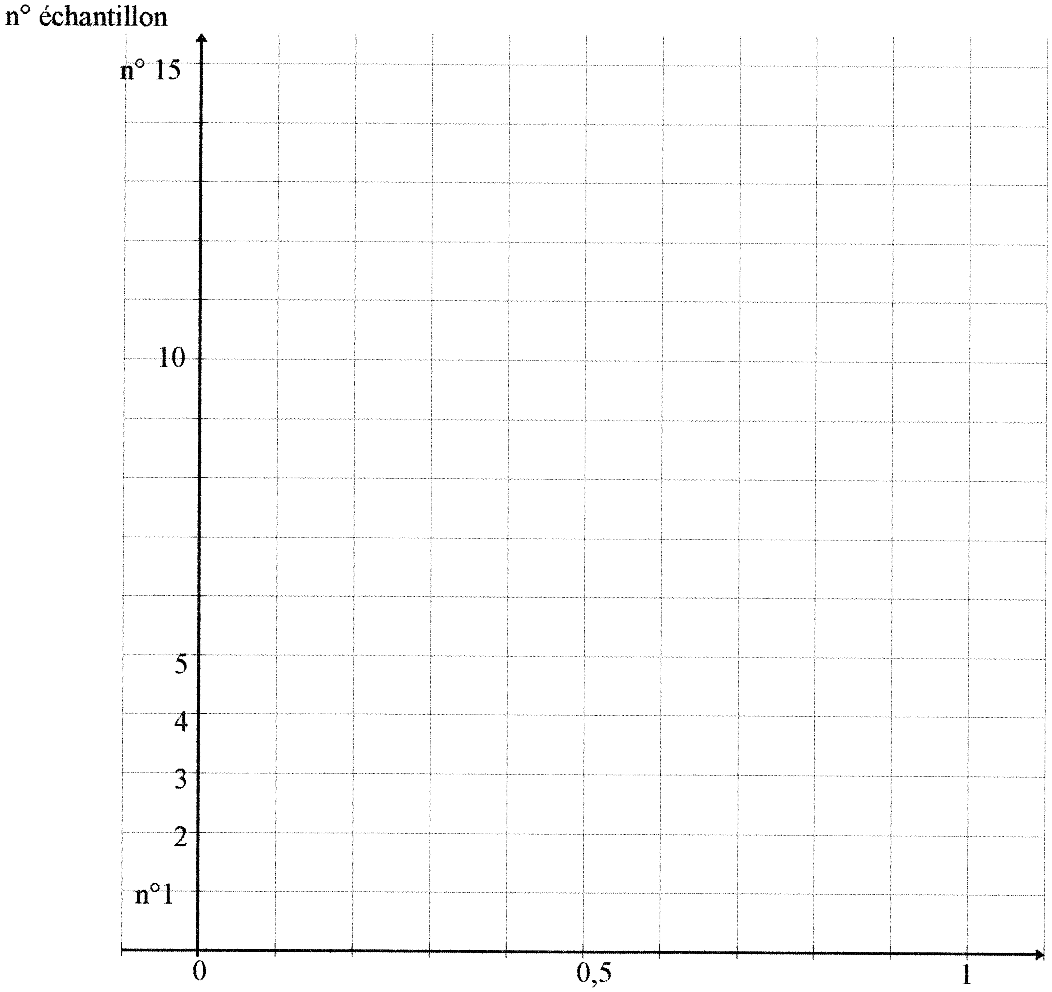
Commentaires	CASIO sans l'instruction For	CASIO 6990→9990	T.I. 81	T.I. 80 – 82 –83 – 85(*) – 92(*)
Choix aléatoire de p (inconnu). p pas trop petit, ni trop grand. I compteur des tirages de l'échant. S compteur des objets de type T. 100 tirages Calcul de f Affichage : borne inférieure puis borne supérieure. Autre échantillon **(même p)**.	Lbl 0 ↵ Ran# → P ↵ P < 0.1 ⇒ Goto 0 ↵ P > 0.9 ⇒ Goto 0 ↵ Lbl 1 ↵ 1 → I ↵ 0 → S ↵ Lbl 2 ↵ Int (Ran# + P) + S → S ↵ I + 1 → I ↵ I ≤ 100 ⇒ Goto 2 ↵ S ÷ 100 → F ↵ 1.645 √ (F (1 - F) ÷ 100) → A ↵ F - A ◢ F + A ◢ Goto 1	Lbl 0 ↵ Ran# → P ↵ P < 0.1 ⇒ Goto 0 ↵ P > 0.9 ⇒ Goto 0 ↵ Lbl 1 ↵ 0 → S ↵ For 1 → I To 100 ↵ Int (Ran# + P) + S → S ↵ Next ↵ S ÷ 100 → F ↵ 1.645 √ (F (1 - F) ÷ 100) → A ↵ F - A ◢ F + A ◢ Goto 1	:Lbl 0 :rand → P :If P < 0.1 :Goto 0 :If P > 0.9 :Goto 0 :Lbl 1 :1 → I :0 → S :Lbl 2 :int (rand + P) + S → S :I + 1 → I :If I ≤ 100 :Goto 2 :S ÷ 100 → F :1.645 √ (F (1 - F) ÷ 100) → A :Disp F - A :Disp F + A :Pause :Goto 1	:Lbl 0 :rand → P :If P < 0.1 :Goto 0 :If P > 0.9 :Goto 0 :Lbl 1 :0 → S :For (I , 1 , 100) :int (rand + P) + S → S :End :S ÷ 100 → F :1.645 √ (F (1 - F) ÷ 100) → A :Disp F - A :Disp F + A :Pause :Goto 1

✳ Particularités sur certains modèles :
TI 85 – 92 : Goto A0; Lbl A0; Lbl A1; Goto A1. Syntaxe TI 92 : rand( ) et For I,1,100.

Pour 15 échantillons différents, noter les 15 intervalles de confiance de p au niveau de confiance de 90 % (arrondir au centième).
Attention : si l'on arrête le programme pour le relancer, on change de population.

échantillon :	1	2	3	4	5
intervalle de confiance	[;]				
échantillon :	6	7	8	9	10
intervalle de confiance					
échantillon :	11	12	13	14	15
intervalle de confiance					

Reporter ces résultats sur le graphique suivant.



Rechercher la valeur de p en affichant la mémoire P (faire, en mode de calcul, ALPHA P EXE ou ENTER .**Attention** le programme ne doit pas avoir été relancé entre temps car alors p a changé) :
p = ... Indiquer la position de p sur le graphique.

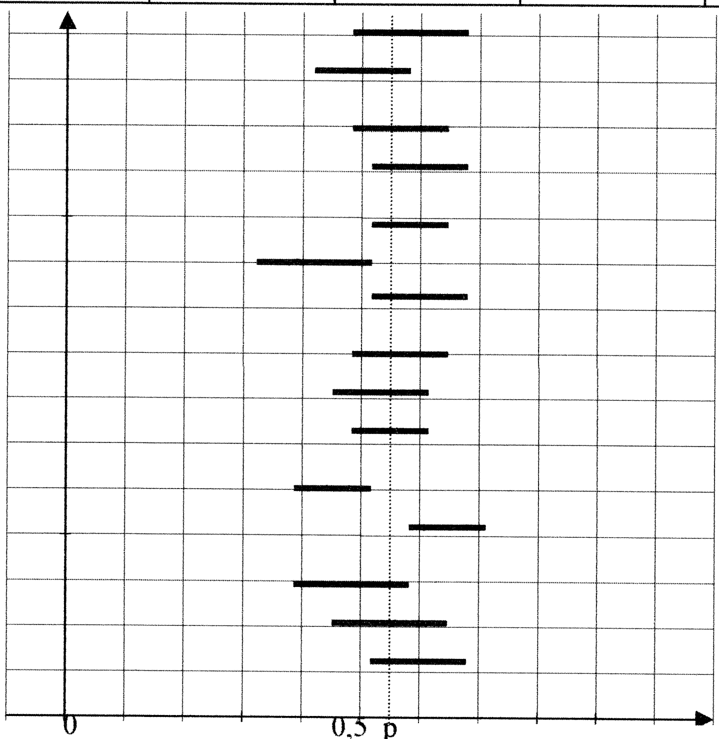
- Deux intervalles de confiance sont-ils obligatoirement les mêmes ? ....
- Deux intervalles ont-ils obligatoirement le même centre ? ....
- Deux intervalles de confiance peuvent-ils n'avoir aucun élément commun ? ....
- Est-ce que p appartient nécessairement à l'intervalle de confiance donné par un échantillon ? ....
....
- Les intervalles ont-ils tous la même amplitude ? ....

Description et compte-rendu de l'activité "Intervalles de confiance pour une fréquence"

Le fait que la valeur de p soit au départ inconnue permet de vivre le hasard en direct et d'affiner l'opinion que l'on a de p au fur et à mesure des nouveaux intervalles calculés.
Exemple de simulation :

```
0.5090934213
0.6709065787
0.4681622833
0.6318377167
0.3878981835
0.5521018165
     - Disp -
```

échantillon :	1	2	3	4	5
intervalle de confiance	[0,509 ; 0,671]	[0.468 ; 0.632]	[0.388 ; 0.552]	[0.572 ; 0.728]	[0.349 ; 0.511]
échantillon :	6	7	8	9	10
intervalle de confiance	[0.448 ; 0.612]	[0.468 ; 0.632]	[0.489 ; 0.651]	[0.499 ; 0.661]	[0.339 ; 0.501]
échantillon :	11	12	13	14	15
intervalle de confiance	[0.509 ; 0.671]	[0.530 ; 0.690]	[0.478 ; 0.642]	[0.428 ; 0.592]	[0.489 ; 0.651]



Derniers intervalles et affichage de p :

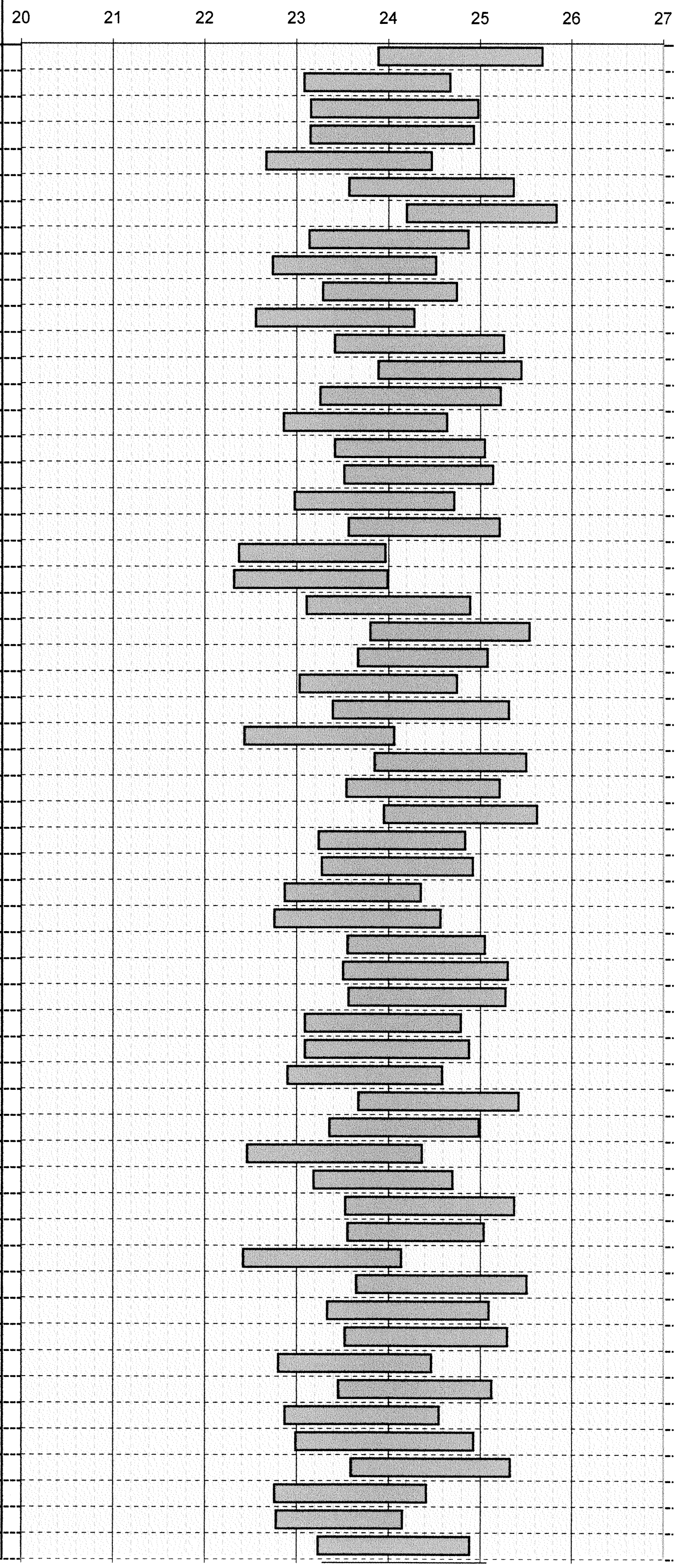
```
0.4277664516
0.5922335484
0.4885600388
0.6514399612

P
0.5486537143
```

On constate, ici, que plusieurs intervalles ne contiennent pas la valeur de p.
Les dernières questions qui, présentées dans le cadre du cours, poseraient problème, trouvent, grâce à l'expérience, une réponse toute naturelle.

SIMULATION INTERVALLES DE CONFIANCE D'UNE MOYENNE

seuil de risque	5,0%	seuil de confiance	95,0%	nouveaux échantillons	moyenne dans la population	m =	24	nouvelle population	afficher

moyenne	écart-type	intervalle	94%
24,788	4,560	[23,89 ; 25,687]	VRAI
23,882	4,065	[23,082 ; 24,683]	VRAI
24,067	4,649	[23,152 ; 24,983]	VRAI
24,043	4,540	[23,148 ; 24,937]	VRAI
23,572	4,595	[22,667 ; 24,478]	VRAI
24,468	4,572	[23,568 ; 25,369]	VRAI
25,021	4,165	[24,201 ; 25,842]	FAUX
24,006	4,431	[23,133 ; 24,879]	VRAI
23,628	4,544	[22,733 ; 24,523]	VRAI
24,018	3,733	[23,282 ; 24,753]	VRAI
23,420	4,407	[22,552 ; 24,288]	VRAI
24,338	4,698	[23,412 ; 25,263]	VRAI
24,671	3,962	[23,89 ; 25,451]	VRAI
24,240	5,014	[23,252 ; 25,228]	VRAI
23,751	4,546	[22,855 ; 24,646]	VRAI
24,235	4,159	[23,416 ; 25,055]	VRAI
24,331	4,126	[23,518 ; 25,143]	VRAI
23,849	4,440	[22,974 ; 24,723]	VRAI
24,390	4,205	[23,561 ; 25,218]	VRAI
23,170	4,079	[22,366 ; 23,973]	FAUX
23,156	4,273	[22,314 ; 23,997]	FAUX
23,999	4,542	[23,105 ; 24,894]	VRAI
24,670	4,424	[23,799 ; 25,542]	VRAI
24,374	3,611	[23,663 ; 25,086]	VRAI
23,888	4,377	[23,026 ; 24,75]	VRAI
24,355	4,891	[23,391 ; 25,318]	VRAI
23,248	4,162	[22,428 ; 24,068]	VRAI
24,677	4,215	[23,846 ; 25,507]	VRAI
24,375	4,259	[23,536 ; 25,214]	VRAI
24,788	4,248	[23,951 ; 25,625]	VRAI
24,038	4,065	[23,238 ; 24,839]	VRAI
24,098	4,197	[23,271 ; 24,925]	VRAI
23,615	3,784	[22,869 ; 24,36]	VRAI
23,663	4,624	[22,753 ; 24,574]	VRAI
24,304	3,817	[23,552 ; 25,055]	VRAI
24,404	4,566	[23,505 ; 25,303]	VRAI
24,419	4,364	[23,56 ; 25,279]	VRAI
23,938	4,336	[23,084 ; 24,792]	VRAI
23,987	4,556	[23,089 ; 24,884]	VRAI
23,742	4,297	[22,896 ; 24,589]	VRAI
24,548	4,458	[23,67 ; 25,426]	VRAI
24,173	4,153	[23,355 ; 24,991]	VRAI
23,413	4,860	[22,456 ; 24,37]	VRAI
23,945	3,863	[23,184 ; 24,706]	VRAI
24,452	4,702	[23,526 ; 25,379]	VRAI
24,296	3,787	[23,55 ; 25,042]	VRAI
23,277	4,391	[22,412 ; 24,142]	VRAI
24,578	4,748	[23,643 ; 25,514]	VRAI
24,213	4,482	[23,33 ; 25,096]	VRAI
24,409	4,504	[23,522 ; 25,297]	VRAI
23,635	4,256	[22,797 ; 24,473]	VRAI
24,290	4,262	[23,45 ; 25,129]	VRAI
23,710	4,293	[22,864 ; 24,556]	VRAI
23,960	4,936	[22,988 ; 24,933]	VRAI
24,458	4,421	[23,587 ; 25,329]	VRAI
23,587	4,216	[22,756 ; 24,417]	VRAI
23,464	3,521	[22,77 ; 24,158]	VRAI
24,057	4,209	[23,228 ; 24,887]	VRAI



C - ACTIVITES SUR EXCEL

1 INTERVALLES DE CONFIANCE D'UNE MOYENNE

Situation : Le programme génère aléatoirement :
- la moyenne m d'une population (occultée au début)
- une **simulation globale de** 100 échantillons de 100 valeurs issus de cette population

L'utilisateur fixe un seuil de risque α.
Le programme détermine 100 intervalles de confiance de m au seuil de risque α à partir de chacun des 100 échantillons.

Objectif : Comparer le pourcentage d'intervalles de confiance **vrais** (c'est à dire contenant effectivement m) avec le seuil de confiance.

Mode d'emploi et déroulement du programme :

⇨ Le seuil de risque α peut être modifié à tout moment dans la cellule à droite de **seuil de risque** : taper seulement la valeur sans le % puis **Entrée** au clavier. Le seuil de confiance est calculé en conséquence : vous ne pouvez donc pas le changer directement.

⇨ Au lancement du programme l'ordinateur génère aléatoirement la moyenne m d'une population qui reste inconnue de l'utilisateur (situation normale en estimation!) ...jusqu'à ce qu'il demande l'affichage de m (voir plus bas).

⇨ Ensuite l'ordinateur génère aléatoirement 100 échantillons de 100 valeurs issus de cette population : ils sont visibles en se déplaçant au moyen des ascenseurs vers la droite et vers le bas. Chaque ligne représente un échantillon.

⇨ Affichage de la moyenne $\overline{x}$ et de l'écart type $\sigma_é$ de chaque échantillon (toutes visibles à l'aide de l'ascenseur vertical).

⇨ Calcul des intervalles de confiance obtenus à partir de chacun des 100 échantillons par la formule :

$[\ \overline{x} - t\sigma_é / \sqrt{(n-1)}\ ,\ \overline{x} + t\sigma_é / \sqrt{(n-1)}\ ]$ où $\Pi(t) = 1 - \alpha/2$ et $n = 100$

⇨ Visualisation des 100 intervalles de confiance sur un diagramme en barres flottantes.

⇨ L'utilisateur peut, à tout moment, simuler un nouvel échantillonnage de la même population en cliquant sur le bouton **nouveaux échantillons** entraînant de nouveaux intervalles.

⇨ L'utilisateur peut, à tout moment, connaître m en cliquant sur le bouton **afficher** . Simultanément la véracité des 100 intervalles de confiance obtenus s'affiche, ainsi que le **pourcentage d'intervalles vrais** au-dessous du **seuil (ou niveau) de confiance**.

⇨ L'utilisateur peut, à tout moment, recommencer l'expérience avec une nouvelle population de moyenne m inconnue en cliquant sur le bouton **nouvelle population** .

Suggestions :

1° Avant l'affichage de m:
- conjecturer sur la valeur de m après avoir simulé plusieurs échantillonnages
- remarquer que les intervalles n'ont pas tous la même longueur puisqu'elle dépend de $\sigma_é$

2° Après l'affichage de m:
- comparer le pourcentage d'intervalles vrais avec le seuil de confiance
- répéter cette comparaison en simulant plusieurs échantillonnages

Remarques techniques :

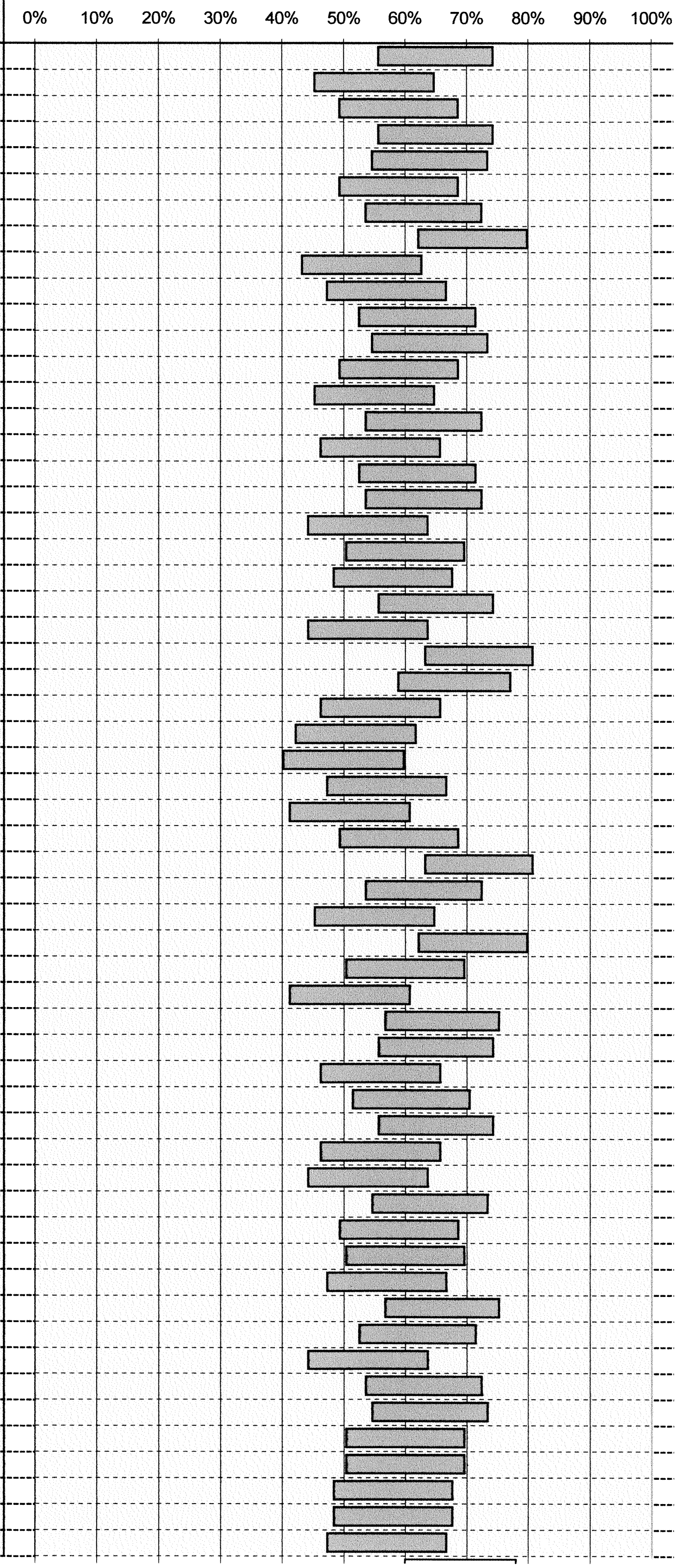
1° Les valeurs du caractère étudié dans la population sont générées par la formule
=COS(2*PI()*ALEA())*RACINE(-2*LN(ALEA()))*s+m où s = σ.

2° Attention : l'échelle du graphique, gérée par Excel, est susceptible de varier en cours de manipulation.

SIMULATION INTERVALLES DE CONFIANCE D'UNE FRÉQUENCE

seuil de risque	5,0%	seuil de confiance	95,0%	nouveaux échantillons	fréquence dans la population	p =	60%	nouvelle population	afficher

échantillon	fréquence	intervalle	94%
1	65%	[55,7% ; 74,3%]	VRAI
2	55%	[45,2% ; 64,8%]	VRAI
3	59%	[49,4% ; 68,6%]	VRAI
4	65%	[55,7% ; 74,3%]	VRAI
5	64%	[54,6% ; 73,4%]	VRAI
6	59%	[49,4% ; 68,6%]	VRAI
7	63%	[53,5% ; 72,5%]	VRAI
8	71%	[62,1% ; 79,9%]	FAUX
9	53%	[43,2% ; 62,8%]	VRAI
10	57%	[47,3% ; 66,7%]	VRAI
11	62%	[52,5% ; 71,5%]	VRAI
12	64%	[54,6% ; 73,4%]	VRAI
13	59%	[49,4% ; 68,6%]	VRAI
14	55%	[45,2% ; 64,8%]	VRAI
15	63%	[53,5% ; 72,5%]	VRAI
16	56%	[46,3% ; 65,7%]	VRAI
17	62%	[52,5% ; 71,5%]	VRAI
18	63%	[53,5% ; 72,5%]	VRAI
19	54%	[44,2% ; 63,8%]	VRAI
20	60%	[50,4% ; 69,6%]	VRAI
21	58%	[48,3% ; 67,7%]	VRAI
22	65%	[55,7% ; 74,3%]	VRAI
23	54%	[44,2% ; 63,8%]	VRAI
24	72%	[63,2% ; 80,8%]	FAUX
25	68%	[58,9% ; 77,1%]	VRAI
26	56%	[46,3% ; 65,7%]	VRAI
27	52%	[42,2% ; 61,8%]	VRAI
28	50%	[40,2% ; 59,8%]	FAUX
29	57%	[47,3% ; 66,7%]	VRAI
30	51%	[41,2% ; 60,8%]	VRAI
31	59%	[49,4% ; 68,6%]	VRAI
32	72%	[63,2% ; 80,8%]	FAUX
33	63%	[53,5% ; 72,5%]	VRAI
34	55%	[45,2% ; 64,8%]	VRAI
35	71%	[62,1% ; 79,9%]	FAUX
36	60%	[50,4% ; 69,6%]	VRAI
37	51%	[41,2% ; 60,8%]	VRAI
38	66%	[56,7% ; 75,3%]	VRAI
39	65%	[55,7% ; 74,3%]	VRAI
40	56%	[46,3% ; 65,7%]	VRAI
41	61%	[51,4% ; 70,6%]	VRAI
42	65%	[55,7% ; 74,3%]	VRAI
43	56%	[46,3% ; 65,7%]	VRAI
44	54%	[44,2% ; 63,8%]	VRAI
45	64%	[54,6% ; 73,4%]	VRAI
46	59%	[49,4% ; 68,6%]	VRAI
47	60%	[50,4% ; 69,6%]	VRAI
48	57%	[47,3% ; 66,7%]	VRAI
49	66%	[56,7% ; 75,3%]	VRAI
50	62%	[52,5% ; 71,5%]	VRAI
51	54%	[44,2% ; 63,8%]	VRAI
52	63%	[53,5% ; 72,5%]	VRAI
53	64%	[54,6% ; 73,4%]	VRAI
54	60%	[50,4% ; 69,6%]	VRAI
55	60%	[50,4% ; 69,6%]	VRAI
56	58%	[48,3% ; 67,7%]	VRAI
57	58%	[48,3% ; 67,7%]	VRAI
58	57%	[47,3% ; 66,7%]	VRAI



2 INTERVALLES DE CONFIANCE D'UNE FREQUENCE

Situation :
Le programme génère aléatoirement :
- la fréquence p d'un caractère dans une population (occultée au début)
- une **simulation globale de** 100 échantillons de 100 valeurs (VRAI, FAUX) issus de cette population

L'utilisateur fixe un seuil de risque α.
Le programme détermine 100 intervalles de confiance de p au seuil de risque α à partir de chacun des 100 échantillons.

Objectif :
Comparer le pourcentage d'intervalles de confiance **vrais** (c'est à dire contenant effectivement p) avec le seuil de confiance.

Mode d'emploi et déroulement du programme :

⇨ Le seuil de risque α peut être modifié à tout moment dans la cellule à droite de **seuil de risque** : taper seulement la valeur sans le % puis **Entrée** au clavier. Le seuil de confiance est calculé en conséquence : vous ne pouvez donc pas le changer directement.

⇨ Au lancement du programme l'ordinateur génère aléatoirement la fréquence p du caractère dans une population qui reste inconnue de l'utilisateur (situation normale en estimation!) ...jusqu'à ce qu'il demande l'affichage de p (voir plus bas).

⇨ Ensuite l'ordinateur génère aléatoirement 100 échantillons de 100 valeurs aléatoires d'une variable de Bernoulli de paramètre p (VRAI, FAUX) : ils sont visibles en se déplaçant au moyen des ascenseurs vers la droite et vers le bas. Chaque ligne représente un échantillon.

⇨ Affichage de la fréquence f de chaque échantillon (toutes visibles à l'aide de l'ascenseur vertical).

⇨ Calcul des intervalles de confiance obtenus à partir de chacun des 100 échantillons par la formule : $[\ f - t\sqrt{(f(1-f)/(n-1))}\ ,\ f - t\sqrt{(f(1-f)/(n-1))}\ ]$ où $\Pi(t) = 1 - \alpha/2$ et $n = 100$.

⇨ Visualisation des 100 intervalles de confiance sur un diagramme en barres flottantes.

⇨ L'utilisateur peut, à tout moment, simuler un nouvel échantillonnage de la même population en cliquant sur le bouton **nouveaux échantillons** entraînant de nouveaux intervalles.

⇨ L'utilisateur peut, à tout moment, connaître p en cliquant sur le bouton **afficher** . Simultanément la véracité des 100 intervalles de confiance obtenus s'affiche, ainsi que le **pourcentage d'intervalles vrais** au dessous du **seuil de confiance**.

⇨ L'utilisateur peut, à tout moment, recommencer l'expérience avec une nouvelle population de paramètre p inconnu en cliquant sur le bouton **nouvelle population** .

Suggestions :
1° Avant l'affichage de p:
- conjecturer sur la valeur de p après avoir simulé plusieurs échantillonnages
- remarquer que les intervalles n'ont pas tous la même longueur puisqu'elle dépend de f

2° Après l'affichage de p:
- comparer le pourcentage d'intervalles vrais avec le seuil de confiance
- répéter cette comparaison en simulant plusieurs échantillonnages

Remarques techniques :
1° Les valeurs d'une variable de Bernoulli de paramètre p sont générées par la formule =ALEA()<p (qui génère VRAI ou FAUX suivant que le nombre aléatoire est inférieur ou supérieur à p).
2° Attention : l'échelle du graphique, gérée par Excel, est susceptible de varier en cours de manipulation.

"La seule certitude que j'ai, c'est d'être dans le doute."
Pierre DESPROGES – 1986.

13 Tests d'hypothèse

A - OBJECTIFS

- Expérimenter les cas où un test d'hypothèse échoue.
- Comprendre les notions d'erreur de première et de seconde espèce.
- Vérifier, par des calculs sur la loi normale, les pourcentages observés par simulation.

B – ACTIVITES SUR CALCULATRICE

Niveau	BTS $2^{\text{ème}}$ année.
Situation dans la progression	Après le cours sur les tests d'hypothèse d'une moyenne.
Durée	Non testé.
Nature des activités	Construction d'un test d'hypothèse relatif à une moyenne. Simulation d'un grand nombre de tests alors que la validité (ou non) de l'hypothèse H_0 nous est connue. Observation des tests "faux" selon les deux types d'erreurs.

TRAVAUX PRATIQUES

NON TESTE EN CLASSE

QUAND LES TESTS ECHOUENT

1 CONSTRUCTION D'UN TEST RELATIF A UNE MOYENNE

Une entreprise produit en grande quantité des poutrelles métalliques. On considère la variable aléatoire X qui, à chaque poutrelle tirée au hasard dans la production, associe sa longueur en millimètres. La variable aléatoire X suit une loi normale de moyenne m et d'écart-type $\sigma = 8$.
Pour analyser la qualité de la fabrication, on effectue un test bilatéral permettant, à la suite du prélèvement au hasard d'un échantillon de 50 poutrelles dans la production, de tester au seuil de signification de 5 %, l'hypothèse selon laquelle la longueur moyenne des poutrelles de la production est bien m = 6150 mm.

Pour cela, on considère la variable aléatoire $\overline{X}$ qui, à tout échantillon aléatoire de 50 poutrelles de la production, associe la moyenne des longueurs de ces 50 poutrelles. (On assimile les échantillons de 50 poutrelles à des échantillons prélevés avec remise).

1) Préciser l'hypothèse nulle H_0 et l'hypothèse alternative H_1.

....

....

2) Lorsque H_0 est vraie, quelle est la loi de $\overline{X}$?

....

....

3) Déterminer le nombre réel h tel que, sous H_0, on ait $P(m-h \leq \overline{X} \leq m+h) = 0{,}95$.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

4) Enoncer la règle de décision du test.

....

....

....

....

Nous allons, dans la suite, étudier les cas où le test échoue, c'est à dire accepte ou rejette à tort l'hypothèse H_0. Ces erreurs sont de deux types :

	H_0 est VRAIE	H_0 est FAUSSE
Le test ACCEPTE H_0	EXACT	ERREUR N° 2
Le test REJETTE H_0	ERREUR N° 1	EXACT

2 ERREUR DE 1ère ESPECE

On considère une production pour laquelle H_0 est vraie, c'est à dire où X suit la loi $\mathcal{N}(6150 ; 8)$. Le programme ci-dessous simule le prélèvement de 50 échantillons de taille 50 et effectue, pour chaque échantillon, le test d'hypothèse précédent.
Introduire la valeur 6150. Le programme affiche, sur 50 tests, le pourcentage de tests acceptant H_0 (durée ≈ 5 mn !).

CASIO anciens modèles sans instruction For – mode Deg	CASIO 6910→9990 mode Deg	TI 80 – 81(*) – 82 – 85 mode Degree	TI 83 – 92(*)
"M"↵ ? → M↵ 0 → N↵ 1 → I↵ Lbl 1↵ 0 → S↵ 1 → J↵ Lbl 2↵ M+8cos(360Ran#)√(-2ln Ran#) + S → S↵ J+1 → J↵ J ≤ 50 ⇒ Goto 2↵ S÷50 → X↵ Abs(X–6150) ≤ 2.22 ⇒ N +1 → N↵ I+1 → I↵ I ≤ 50 ⇒ Goto 1↵ "H0 VRAIE"↵ 2N	"M"↵ ? → M↵ 0 → N↵ For 1 → I To 50↵ 0 → S↵ For 1 → J To 50↵ M+8cos(360Ran#)√(-2ln Ran#) + S → S↵ Next↵ S÷50 → X↵ Abs(X–6150) ≤ 2.22 ⇒ N +1 → N↵ Next↵ "H0 VRAIE"↵ 2N	:Disp "M" :Input M :0 → N :For (I,1,50) :0 → S :For (J,1,50) :M+8cos(360×rand)√(-2ln(rand)) + S → S :End :S / 50 → X :If abs(X – 6150) ≤ 2.22 :N + 1 → N :End :Disp "H0 VRAIE" :Disp 2×N	:Disp "M" :Input M :0 → N :For (I,1,50) :0 → S :For (J,1,50) :randNorm(M,8) + S → S :End :S / 50 → X :If abs(X – 6150) ≤ 2.22 :N + 1 → N :End :Disp "H0 VRAIE" :Disp 2×N

⇨ Pour obtenir certaines instructions :

• CASIO 6910 → 9990 : **?** par PRGM ; **For To Next** par PRGM COM ; **Abs** par OPTN NUM ; **Ran#** par OPTN PROB ; ≤ par PRGM REL ; ⇒ par PRGM JUMP.

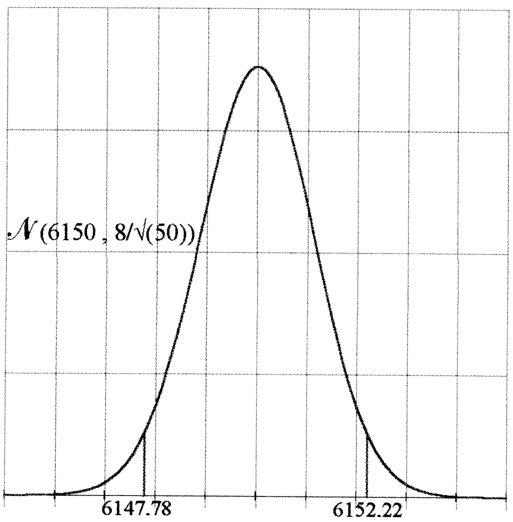
• TI 80 → 92 : Sur TI 83 85 92 possibilité d'utiliser **CATALOG** ; **For If End** par PRGM CTL ; **int** par MATH NUM ; **rand** par MATH PRB ; **Disp** par PRGM I/O. Sur TI 92 : **"** par 2nd CHAR 3 puis 2 ; ≤ par 2nd CHAR 3 puis C.

✳ Particularités sur certains modèles :

• TI 81 : Remplacer les instructions For et Next comme pour les anciens modèles CASIO.

• TI 92 : La syntaxe est For I,1,50 et remplacer End par EndFor.

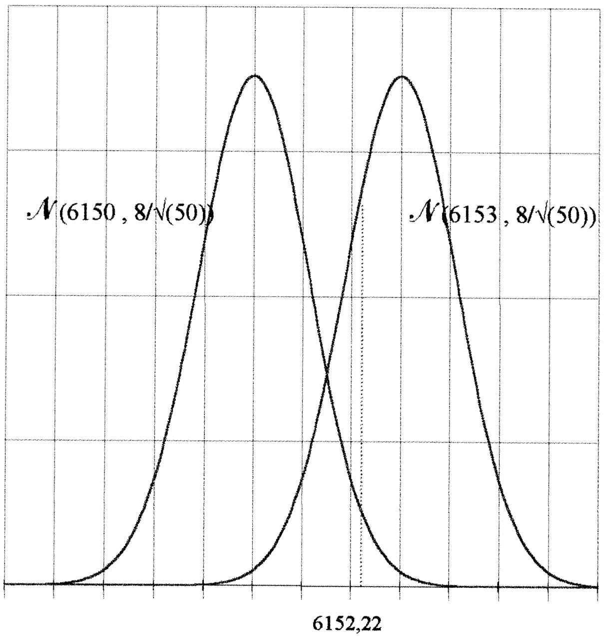
Quel est, pour votre simulation, le pourcentage de tests acceptant H_0 ?..
Quel est, pour votre simulation, le pourcentage de tests commettant l'erreur de première espèce ? ....
....
Comparer avec les simulations d'autres étudiants. ....



Déterminer le pourcentage théorique, sur un grand nombre de tests, des erreurs de première espèce.
....
....
....
....
....
....
....

3 ERREUR DE SECONDE ESPECE

On suppose maintenant que X (pour la production) suit la loi normale $\mathcal{N}$ (6153 , 8). C'est une différence sensible par rapport à la valeur m = 6150 testée et le test devrait rejeter l'hypothèse H_0.
Voyez ce qu'il en est en utilisant le programme précédent, **après avoir introduit la valeur 6153**.
Quel est, pour votre simulation, le pourcentage de tests acceptant H_0 ?..
Comparer avec les simulations d'autres étudiants. ....
C'est le pourcentage de tests commettant l'erreur de seconde espèce.

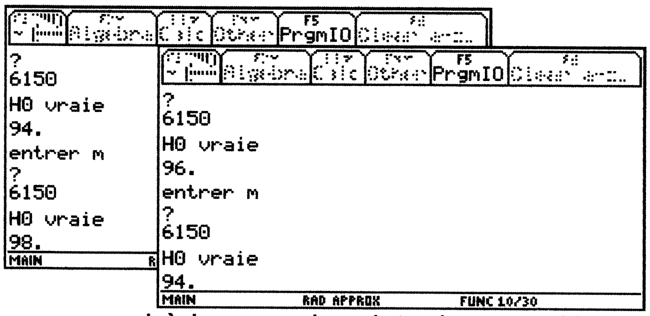


Hachurer, sur le graphique ci-contre, la surface correspondant théoriquement au pourcentage, sur un grand nombre de tests, des erreurs de seconde espèce.
Calculer ce pourcentage et comparer avec vos simulations.
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

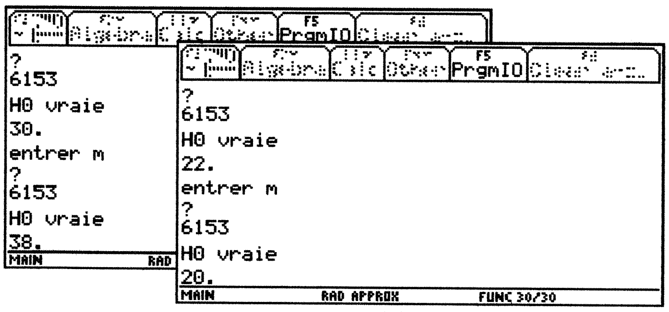
Reprendre le programme précédent **en introduisant la valeur 6154**. D'après cette dernière simulation, à combien pouvez-vous estimer l'erreur de seconde espèce lorsque X suit la loi $\mathcal{N}$(6154 ; 8) ?
....
....
Comparer avec les simulations d'autres étudiants. ....

Description et compte-rendu de l'activité "Quand les tests échouent"

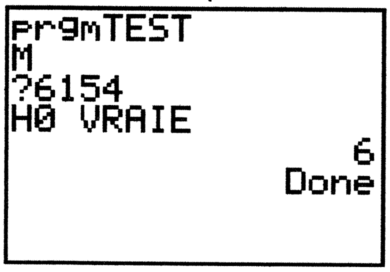
$\boxed{1}$ Construction du test :
L'énoncé s'inspire du BTS Constructions métalliques 1996.
1) On teste H_0 "m = 6150" contre H_1 "m $\neq$ 6150".
2) Sous l'hypothèse H_0, $\overline{X}$ suit la loi $\mathcal{N}(6150\ ;\ \frac{8}{\sqrt{50}})$.
3) On trouve h = $1{,}96 \times \frac{8}{\sqrt{50}} \approx 2{,}22$ à 10^{-2} près.
4) Pour chaque échantillon, on calcule $\overline{x}$.
Si $\overline{x} \in [6147{,}78\ ;\ 6152{,}22]$, H_0 est acceptée, sinon, H_0 est refusée.
$\boxed{2}$ Erreur de première espèce :
Exemples de simulations :



L'erreur de première espèce correspond à la zone de rejet, alors que H_0 est vraie, c'est à dire, théoriquement, 5%.
$\boxed{3}$ Erreur de seconde espèce :
Exemples de simulations lorsque l'on introduit la valeur 6153 :



L'erreur de seconde espèce correspond dans ce cas à $P(\overline{X} \leq 6152{,}22)$ où $\overline{X}$ suit la loi $\mathcal{N}(6153\ ;\ \frac{8}{\sqrt{50}})$.
Sur TI 83 ou CASIO 9940 ou 9990, on peut faire normalcdf(-1^E99,6152.22,6153,8/$\sqrt{}$(50)) qui donne environ 24,5 %.
En entrant la valeur 6154, on devrait théoriquement observer une erreur de seconde espèce d'environ 6 %.



"Ainsi tout problème de probabilité offre deux périodes d'étude : la première, métaphysique pour ainsi dire, qui légitime telle ou telle convention ; la seconde, mathématique, qui applique à ces conventions les règles du calcul."

H. POINCARE – Calcul des probabilités - 1896.

14 Loi exponentielle

A - OBJECTIFS

- Valider par l'expérience le modèle de la loi exponentielle.
- Mettre la loi exponentielle en situation dans des domaines proches de la vie de l'entreprise.

B – ACTIVITES SUR CALCULATRICE page 140

Niveau	BTS 2$^{\text{ème}}$ année.
Situation dans la progression	Après le cours sur la loi exponentielle.
Durée	Simulation de pannes : Un peu plus d'1 h. Files d'attente : 2h.
Nature des activités	FIABILITE : Simulation de pannes à taux d'avarie constant A partir d'un historique statistique de pannes (ici simulé), on recherche la nature de leur loi de façon à organiser la maintenance. On soumet à l'expérience le modèle de la loi exponentielle, en partant d'un programme simple où le taux d'avarie est constant (au lieu de simuler directement une loi exponentielle). LOI EXPONENTIELLE : File d'attente On fait une simulation là où la théorie est inaccessible au niveau BTS. On met la loi exponentielle (et les connaissances des élèves dans ce domaine) en situation originale, pour une étude qui se veut proche des préoccupations de l'entreprise. Les domaines d'application des files d'attentes sont nombreux (ici la maintenance, mais il pourrait s'agir, dans le tertiaire, d'attente à un guichet de banque, ou, en informatique, d'attente de documents pour l'impression etc ...).

C – ACTIVITES SUR EXCEL page 150

Loi exponentielle.

TRAVAUX PRATIQUES

FIABILITE : Simulation de pannes à taux d'avarie constant

La loi exponentielle à l'épreuve de l'expérience

(D'après BTS Maintenance 90)

Vous êtes technicien supérieur dans votre entreprise et vous avez été chargé d'étudier plus particulièrement le cas de la pièce JB 007.
Cette pièce est supposée avoir un taux d'avarie par heure de 0,007.
Vous allez simuler le fonctionnement de cette pièce en utilisant l'instruction Int (Ran# + 0.007).
Quelles valeurs peut prendre cette instruction, avec quelle probabilité ? ....
....

$\boxed{1}$ Simulation du temps de bon fonctionnement

Dans la simulation, le temps n'est pas continu mais "saute" d'heure en heure.

Commentaires	CASIO (sans instruction While)	CASIO 6910→9990	T.I. 80 - 81 (sans instruction While)	T.I. 82 83 85(*) 92(*)
I : compteur du temps de bon fonctionnement (en heures).	-1 → I ↵ Lbl 1 ↵ I + 1 → I ↵ Int (Ran# + 0.007) = 0 ⇒ Goto 1 ↵ I	0 → I ↵ While Int(Ran# + 0.007) = 0 ↵ I + 1 → I ↵ WhileEnd ↵ I	:-1 → I :Lbl 1 :I + 1 → I : If int (rand+0.007) = 0 :Goto 1 :Disp I	:0 → I :While int(rand + 0.007) = 0 :I + 1 → I :End :Disp I

✳ Particularités sur certains modèles :

• TI 85 : Test en = = par 2nd TEST. • TI 92 : syntaxe rand( ) et EndWhile.

A l'aide du programme précédent, établir un historique de 20 TBF :

Regrouper vos résultats dans les 15 classes suivantes :

Classes	]0;25]	]25;50]	]50;75]	]75;100]	]100;125]	]125;150]	]150;175]	]175;200]
Effectif								
Classes	]200;225]	]225;250]	]250;275]	]275;300]	]300;325]	]325;350]	]350;+∞[	
Effectif								

Compléter le tableau ci-dessous, **en ajoutant pour chaque classe à vos effectifs, ceux obtenus par les autres étudiants**, puis en utilisant la méthode des rangs bruts :

TBF t_i (en heures)	Effectifs	Effectifs cumulés	$F(t_i)$ en %	$R(t_i)$ en %
25				
50				
75				
100				
125				
150				
175				
200				
225				
250				
275				
300				
325				
350				
> 350				

$\boxed{2}$ On note R(t) la probabilité de survie du matériel à la date t. En utilisant la feuille de papier semi-logarithmique et l'historique (simulé), justifier l'approche de R(t) par une loi exponentielle : ....

....

Déterminer graphiquement la MTBF de la pièce JB 007 : ....

Quelle valeur obtenez-vous pour λ, paramètre de la loi exponentielle ? ....

$\boxed{3}$ On se propose de prévoir une politique de maintenance sur une période de 286 heures.
Le programme suivant effectue une simulation du nombre de pannes sur [0;286] :

Commentaires	CASIO (sans instruction While)	CASIO 6910→9990	T.I. 80 - 81 (sans instruction While)	T.I. 82 83 85(*) 92(*)
N compteur du nombre de pannes. I compteur du temps.	0→ N ↵ 0 → I ↵ Lbl 1 ↵ Int (Ran# + 0.007) + N → N ↵ I + 1 → I ↵ I ≤ 286 ⇒ Goto 1 ↵ N	0→ N ↵ 0 → I ↵ While I ≤ 286 ↵ Int (Ran# + 0.007) + N → N ↵ I + 1 → I ↵ WhileEnd ↵ N	:0→ N :0 → I :Lbl 1 :Int (Rand + 0.007) + N → N :I + 1 → I :If I ≤ 286 :Goto 1 :Disp N	:0→ N :0 → I :While I ≤ 286 :int (rand + 0.007) + N → N :I + 1 → I :End :Disp N

Noter le nombre de pannes sur l'intervalle [0 ; 286] pour 10 simulations précédentes :

nb de pannes	0	1	2	3	4	5	6
nb de simulations							

Compléter vos résultats à l'aide de ceux des autres étudiants :

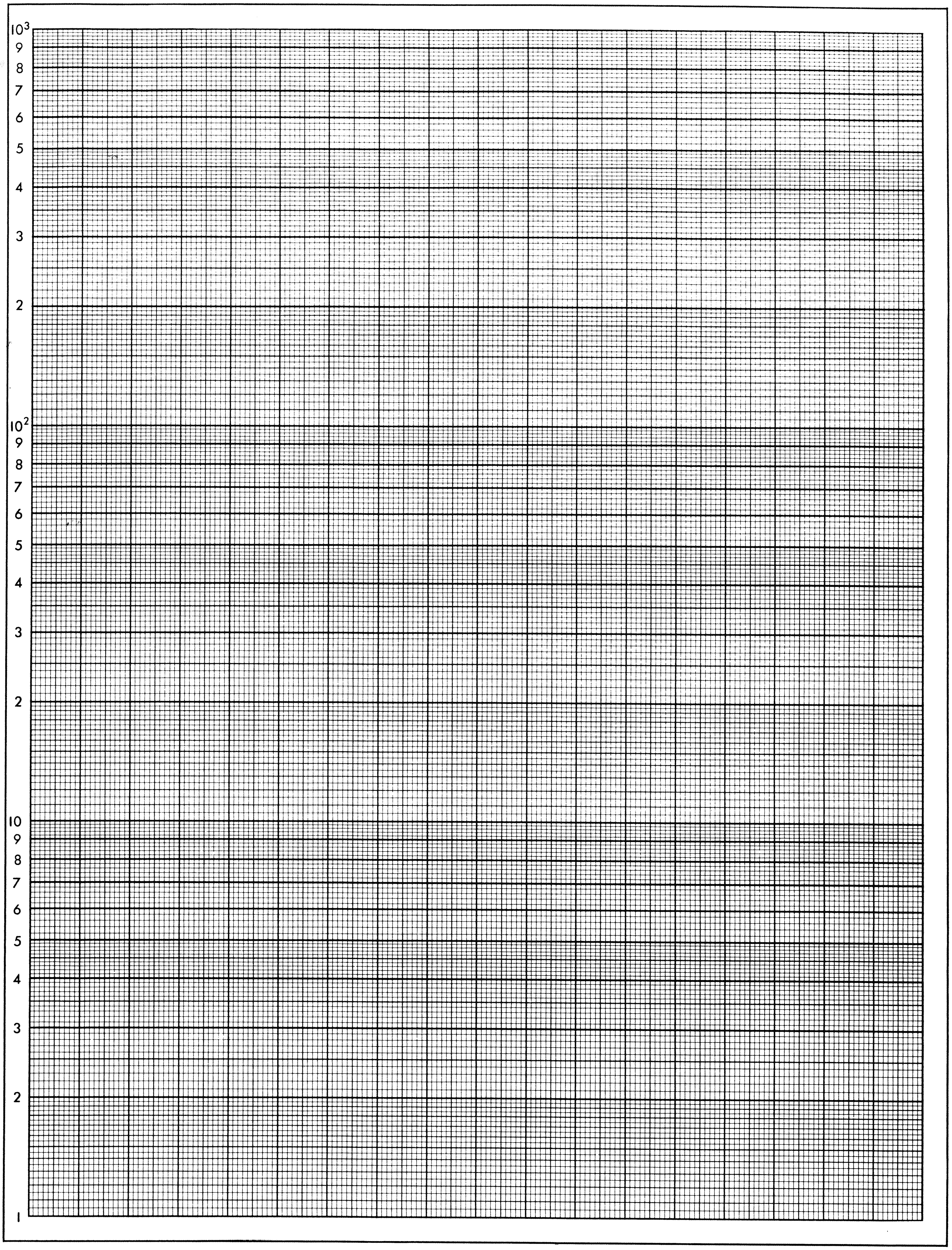
nb de pannes	0	1	2	3	4	5	6
%							

$\boxed{4}$ Lorsque le taux d'avarie λ est constant, la variable aléatoire X qui, à toute période de 286 heures, associe le nombre de pannes, suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda \times 286$.

En prenant $\lambda = 0{,}007$, que vaut le paramètre de la loi de X ? ....

Compléter, à l'aide du formulaire officiel le tableau suivant, puis comparer à la simulation du $\boxed{3}$.

k = nb de pannes	0	1	2	3	4	5	6
P(X = k)							


10³
9
8
7
6
5
4
3
2
10²
9
8
7
6
5
4
3
2
10
9
8
7
6
5
4
3
2
1

Description et compte-rendu de l'activité "Fiabilité : pannes à taux d'avarie constant"

Le temps étant discret dans la simulation (saut d'heure en heure), on simule une loi géométrique plutôt qu'une loi exponentielle.

	T : temps d'attente d'une panne	X : nombre de pannes sur [0 ; 286]
Temps continu	$\mathscr{E}(0{,}007)$	$\mathscr{P}(\lambda t \approx 2)$
Temps discret	$\mathscr{G}(p = 0{,}007)$ avec $P(T=k) = p(1-p)^k$	$\mathscr{B}(286 ; 0.007)$

Les lois à temps discret sont des approximations des lois à temps continu correspondantes.

⇨ DEROULEMENT :
Les programmes de ce T.P. sont volontairement simples, de façon à privilégier la mise en commun et l'analyse des résultats.

$\boxed{1}$ Après avoir compris le sens du programme entré dans la calculatrice, chacun simule 20 temps de bon fonctionnement. Bien malin celui qui pourrait, à ce stade, déceler une loi dans l'arrivée de ces TBF.
La mise en commun des simulations nous a permis de faire un historique sur 200 TBF :

TBF (h)	25	50	75	100	125	150	175	200	225	250	275	300	325	350
$R(t_i)$ %	61	64	56	50	43	35	29	24	18	15	12	9	8	5

$\boxed{2}$ On obtient, sur papier semi-log., avec les résultats précédents, un nuage de points à l'alignement très convenable sur le point de coordonnées (t=0 ; 100%), sauf pour le dernier point (fréquent dans la pratique). On lit une MTBF d'environ 130 heures d'où $\lambda = \frac{1}{130} \approx 0{,}0077$. Ce qui est raisonnable.

L'écart-type de la loi $\mathscr{G}(0{,}007)$ étant $\sigma = \sqrt{\frac{q}{p^2}} \approx 142$ h, on peut estimer l'écart-type sur les moyennes des différents échantillons de 200 TBF à $\frac{\sigma}{\sqrt{200}} \approx 10$ h, ce qui est suffisant pour obtenir un résultat convenable pour λ.

$\boxed{3}$ Pour le nombre de pannes durant l'intervalle de temps [0;286], on est sensé retrouver la répartition de la loi $\mathscr{P}(2)$.
Sur 100 simulations, on a par exemple obtenu :

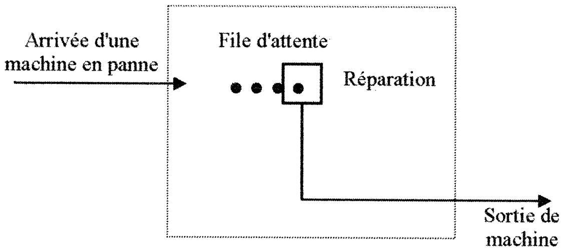
nb pannes	0	1	2	3	4	5	6
fréquences %	13%	29%	28%	18%	8%	4%	0%
A comparer avec les valeurs de la loi $\mathscr{P}(2)$:	13,5	27,1	27,1	18,0	9,0	3,6	0,12% .

⇨ PROLONGEMENT :
On peut construire un TP analogue à partir de simulation de pannes à taux d'avarie variable, selon le modèle des lois de Weibull (BTS Maintenance).
En remplaçant par exemple l'instruction Int(Ran# + 0.007) par Int(Ran#+(2.4÷50)×(I÷50)^1.4) on a un taux d'avarie $\lambda(t) = \frac{2{,}4}{50}\left(\frac{t}{50}\right)^{2{,}4-1}$ correspondant à une loi de Weibull de paramètres $\gamma = 0$; $\eta = 50$; $\beta = 2{,}4$.

TRAVAUX PRATIQUES

LOI EXPONENTIELLE : File d'attente

Dans une entreprise, un ouvrier est chargé de la réparation d'un certain type de machine.
Les machines, identiques, sont en nombre important et tombent en panne de façon aléatoire, indépendamment les unes des autres. Elles sont alors conduites à son atelier, où le temps de réparation est également variable. Il s'établit alors une "file" de machines en panne en "attente" de réparation.



Il s'agit d'étudier le phénomène afin d'évaluer son coût pour l'entreprise.

1 Etude des pannes de machines :

L'équipe de maintenance a relevé les temps entre chaque arrivée, en heures, des 9 premières pannes et a obtenu les temps t_i suivants (rangés en ordre croissant).

t_i en heures	$F(t_i)$ en %	$R(t_i)$ en %
0,42		
0,89		
1,41		
2,06		
2,77		
3,67		
4,84		
6,44		
9,19		

A l'aide de la méthode des rangs moyens, compléter le tableau ci-dessus.
Tracer le nuage des points $M_i(t_i\ ;\ R(t_i))$ sur du papier semi-logarithmique.
On note T_A la variable aléatoire qui, à chaque panne, associe le temps d'attente en heures avant l'arrivée de la prochaine panne.
Expliquer pourquoi on peut estimer que T_A suit une loi exponentielle de paramètre λ que l'on précisera.

....

....

....

....

....

....

2 Etude des temps de réparation :

L'observation de 100 réparations a permis d'établir le tableau suivant (rangs bruts) :

temps de réparation (classes)	temps t_i (centres) en heures	nombre de réparations	$F(t_i)$	$R(t_i)$	$y_i = \ln R(t_i)$ à 10^{-5} près
]0 ; 1]	0,5	24	0,24		
]1 ; 2]	1,5	19	0,43		
]2 ; 3]	2,5	15	0,58		
]3 ; 4]	3,5	11	0,69		
]4 ; 5]	4,5	9	0,78		
]5 ; 6]	5,5	5	0,83		
]6 ; 7]	6,5	4	0,87		
]7 ; 8]	7,5	5	0,92		
]8 ; 9]	8,5	2	0,94		
]9 ; 10]	9,5	2	0,96		
]10 ; 11]	10,5	1	0,97		
> 11		3	1	0	

Compléter le tableau ci-dessus.

En ne prenant pas en compte la dernière valeur (>11), déterminer à l'aide de la calculatrice, une équation $y = at + b$ de la droite d'ajustement de y en t, selon la méthode des moindres carrés, ainsi que le coefficient de corrélation entre y et t.

....

....

En prenant pour valeurs approchées : $a = -0,3$ et $b = 0$, donner l'expression de $R(t)$.

....

....

....

....

En déduire la loi suivie par la variable aléatoire T_R qui, à chaque machine à réparer, associe son temps de réparation en heures.

....

3 Etude de la file d'attente :

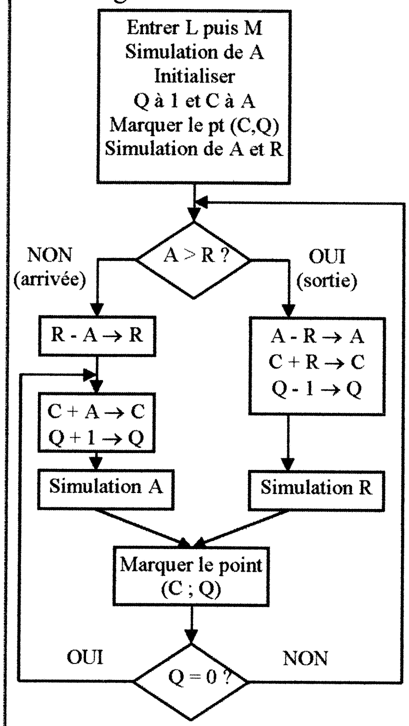
On suppose que T_A suit la loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda = 0,25)$ et que T_S suit la loi exponentielle $\mathcal{E}(\mu = 0,30)$.

Comparer le temps moyen entre deux arrivées, $E(T_A)$, et le temps moyen d'une réparation, $E(T_R)$: ....

....

....

Le **programme** suivant, **après introduction des valeurs de λ et μ**, simule sur un graphique, l'évolution de la longueur de la file d'attente ("queue") en fonction du temps, puis affiche la longueur moyenne de la file d'attente (y compris la machine en réparation) sur l'intervalle de temps [0 ; ≈2000 h].

Organigramme et commentaires	CASIO	TEXAS INSTRUMENTS
L : valeur de λ M : valeur de μ A : temps d'attente d'<u>arrivée</u> de la prochaine panne. R : temps de la <u>réparation</u> en cours. Q : longueur de la <u>queue</u>. C : horloge.  (B sert au calcul de la longueur moyenne de la queue)	ViewWindow 0,2000,500,0,15,5 ↵ ? → L ↵ ? → M ↵ 0 → B ↵ 1 → Q ↵ (-ln Ran#) ÷ L → C ↵ Plot C,Q ↵ (-ln Ran#) ÷ M → R ↵ (-ln Ran#) ÷ L → A ↵ Lbl 1 ↵ A > R ⇒ Goto 3 ↵ R - A → R ↵ Lbl 2 ↵ C + A → C ↵ B + QA → B ↵ Q + 1 → Q ↵ (-ln Ran#) ÷ L → A ↵ Goto 4 ↵ Lbl 3 ↵ A - R → A ↵ C + R → C ↵ B + QR → B ↵ Q - 1 → Q ↵ (-ln Ran#) ÷ M → R ↵ Lbl 4 ↵ Plot C , Q ↵ C ≥ 2000 ⇒ Goto 5 ↵ Q = 0 ⇒ Goto 2 ↵ Goto 1 ↵ Lbl 5 ↵ B ÷ C	:0 → Xmin :2000 → Xmax :500 → Xscl :0 → Ymin :15 → Ymax :5 → Yscl :PlotsOff :ClrDraw :Input L :Input M :0 → B :1 → Q :(-ln (rand)) / L → C :Pt-On (C,Q) :(-ln (rand)) / M → R :(-ln (rand)) / L → A :Lbl 1 (Sur TI 85-92 : Lbl A1) :If A > R :Goto 3 (Sur TI 85-92 : Goto A3) :R - A → R :Lbl 2 :C + A → C :B + Q×A → B :Q + 1 → Q :(-ln (rand)) / L → A :Goto 4 :Lbl 3 :A - R → A :C + R → C :B + Q×R → B :Q - 1 → Q :(-ln (rand)) / M → R :Lbl 4 :Pt-On(C , Q) :If C ≥ 2000 :Goto 5 :If Q = 0 (Sur TI85 : ==) :Goto 2 :Goto 1 :Lbl 5 :Disp B / C

⇨ Pour obtenir certaines instructions :

• CASIO 6910 → 9990 : **Ran#** par OPTN PROB ;**Plot** par Sketch PLOT ; > ≥ = par PRGM REL ; **Lbl Goto** ⇒ par PRGM JUMP.

• TI 80 → 92 : Sur TI 83 85 92 possibilité d'utiliser **CATALOG** ; **PlotsOff** par 2nd STAT PLOT ; **ClrDraw** par 2nd DRAW ; **rand** par MATH PRB ; **Pt-On** par 2nd DRAW POINTS ; **Lbl Goto** par PRGM CTL ; > ≥ = par 2nd TEST ; **Disp** par PRGM I/O.

✳ Particularités sur certains modèles :

• TI 85 et TI 92 : Numéros des Lbl et Goto, ajouter la lettre A (Lbl A1 , Lbl A2 ... Goto A1 , Goto A2 ...).

• TI 85 : La syntaxe du test d'égalité est = = par TEST.

• TI 92 : Syntaxe rand( ) et PtOn C,Q.

Décrire l'évolution de la file d'attente : ....

....

Quelle est la longueur moyenne de la file d'attente, obtenue par votre simulation ? ....

Effectuer la moyenne de ces moyennes, pour la classe : ....

4 Etude du coût de la file d'attente :

Le coût du mécanicien (salaire + charges) est de 80 F / heure.
Le coût d'une machine immobilisée (salaire de l'ouvrier + charges + perte de production) est de 200 F / heure.
En supposant que la longueur moyenne de la queue est m = 5 machines, et sur une base de 35 heures, déterminer :

- le coût du mécanicien : ....
- le temps moyen d'immobilisation d'une machine : $\frac{m}{\mu}$ = ...
- le coût moyen d'immobilisation des machines : $35 \times 200 \times \lambda \times \frac{m}{\mu}$ = ...
- le coût total moyen espéré pour l'entreprise : ....

L'embauche d'un second mécanicien permettrait d'abaisser le temps moyen d'une réparation à 2 heures.
En supposant que T_R suive toujours une loi exponentielle, quel est la nouvelle valeur (estimée) de μ ? ....
Après avoir effacé l'écran graphique de la calculatrice, refaire une simulation de la file d'attente avec cette nouvelle valeur pour μ de façon à évaluer la valeur moyenne m de la longueur de queue dans ces conditions : pour ma simulation, m ≈ ....
Moyenne des résultats obtenus pour m, dans ces nouvelles conditions, dans la classe :
m ≈ ....
En supposant que la longueur moyenne de la queue est m = 1 machine, et sur une base de 35 heures, déterminer, dans les conditions précédentes :

- le coût des deux mécaniciens : ....
- le temps moyen d'immobilisation d'une machine : $\frac{m}{\mu}$ = ...
- le coût moyen d'immobilisation des machines : $35 \times 200 \times \lambda \times \frac{m}{\mu}$ = ...
- le coût total moyen espéré pour l'entreprise : ....

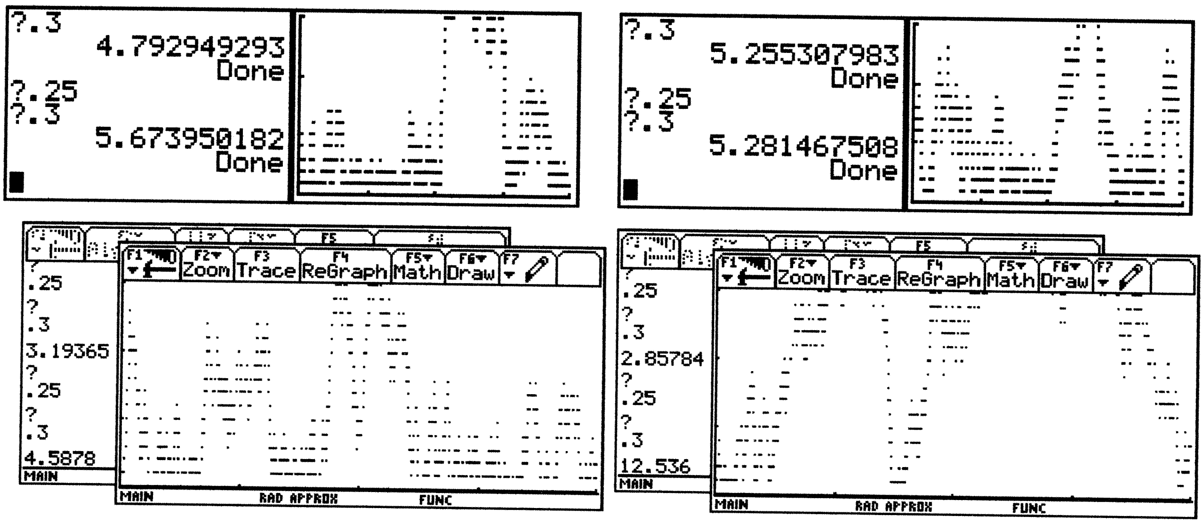
Conclusion :
....
....
....

Description et compte-rendu de l'activité "Files d'attente"

L'évolution des files d'attente est toujours surprenante (effet d'accumulation que l'on a tous vécu au supermarché, une administration...) et son étude est économiquement importante (d'autant qu'ici, un "happy end" veut qu'elle conduise à l'embauche d'un employé supplémentaire).
L'aspect simulation est développé dans un article de "Pour la science" (réf. [2]). Pour des justifications théoriques pas trop compliquées, on peut consulter [4].

$\boxed{1}$ et $\boxed{2}$: On étudie les lois d'arrivée et de sortie selon les techniques de l'examen (BTS) : Graphiquement, avec le papier semi-log., ou par régression linéaire après changement de variable.
On trouve comme paramètres :
A l'arrivée $\mathcal{E}(\lambda)$ avec $\lambda = 0{,}25$ soit, en moyenne (MTBF), une arrivée de machine en panne toutes les 4 heures.
A la sortie $\mathcal{E}(\mu)$ avec $\mu = 0{,}30$ soit, en moyenne, un temps de réparation de 3,33 heures.
Il semble donc que l'on ait un écart raisonnable, pour éviter une trop grande attente. Et pourtant ...
$\boxed{3}$ Au fur et à mesure que le programme se déroule, la longueur de la queue s'affiche à l'écran, puis, à la fin, sa longueur moyenne :
Images CASIO 9940 :

Images TI 83 et TI 92 :



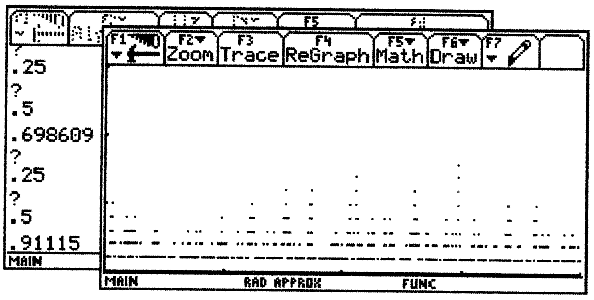
On obtient, sur les 12 simulations précédentes, comme longueur moyenne de la file sur 2000 heures : ≈ 5,3 machines.

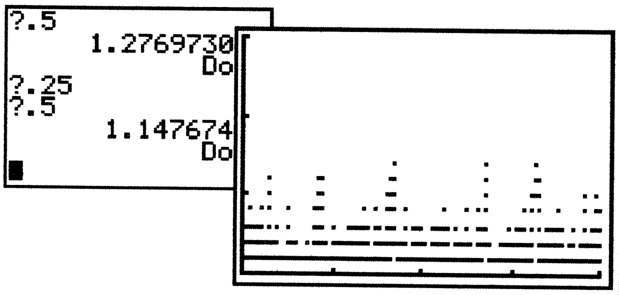
Le résultat théorique (voir [3]) est, en moyenne, $\dfrac{\lambda}{\mu-\lambda} = 5$ machines dans la file d'attente (y compris la machine en réparation) en régime stationnaire. L'écart entre les simulations est parfois important. L'observation sur 2000 heures est un compromis entre le temps de calcul et le désir de suivre "en direct" sur un graphique l'évolution de la file d'attente.

$\boxed{4}$ Etude du coût.

1. Avec $\lambda = 0{,}25$; $\mu = 0{,}30$ et un seul mécanicien : $35\times80 + 35\times200\times0{,}25\times\dfrac{5}{0{,}30} \approx 31\ 967$ F.

2. Avec $\lambda = 0{,}25$; $\mu = 0{,}50$ et deux mécaniciens :
Exemples de simulations :





Le résultat théorique est, en moyenne, $\dfrac{\lambda}{\mu-\lambda} = 1$ machine dans la file d'attente, d'où

$35\times160 + 35\times200\times0{,}25\times\dfrac{1}{0{,}50} \approx 9100$ F.

Les chiffres ne sont peut-être pas très réalistes, mais c'est pour le besoin de la cause. On conclut donc à l'urgence d'une embauche.

SIMULATION

LOI EXPONENTIELLE

TBF en vrac
11
155
227
4
52
153
14
83
55
6
169
5
46
1
418
21
69
622
10
213
255
292
338
410
1
100
534
246

Taux d'avarie constant
(0,0001 < taux < 0,25)

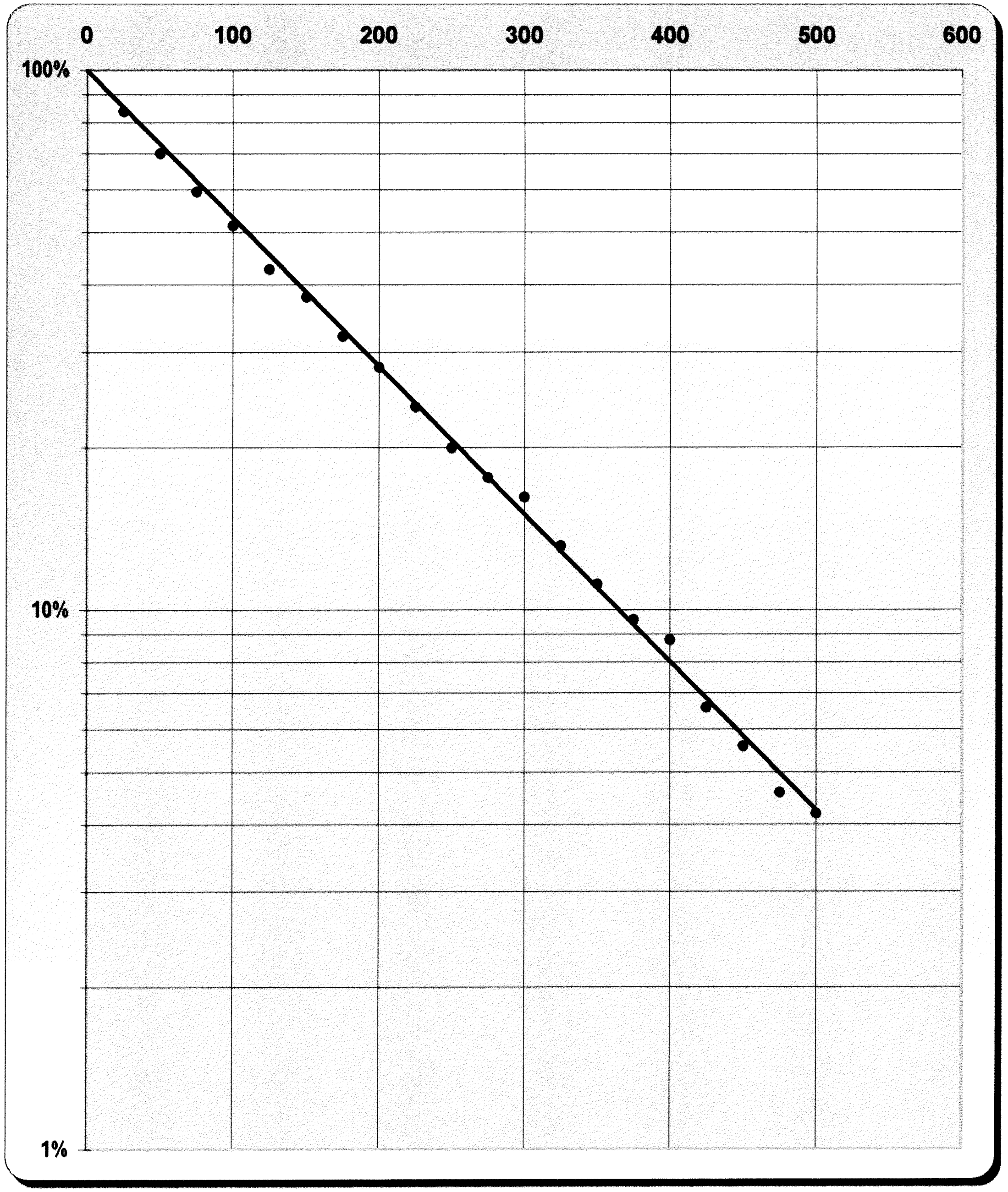
taux = 0,007

NOUVEAU TAUX

Loi exponentielle de paramètre
λ = **0,006310**
MTBF = **158,466**
r = **-0,998371**

NOUVELLE SIMULATION

TABLEAU / MÉTHODE DES RANGS BRUTS				
TBF t_i	Effectif	Effectif cumulé	$F(t_i)$	$R(t_i)$
[0 , 25]	80	80	16,0%	84,0%
] 25 , 50]	69	149	29,8%	70,2%
] 50 , 75]	53	202	40,4%	59,6%
] 75 , 100]	40	242	48,4%	51,6%
] 100 , 125]	44	286	57,2%	42,8%
] 125 , 150]	24	310	62,0%	38,0%
] 150 , 175]	29	339	67,8%	32,2%
] 175 , 200]	20	359	71,8%	28,2%
] 200 , 225]	22	381	76,2%	23,8%
] 225 , 250]	19	400	80,0%	20,0%
] 250 , 275]	12	412	82,4%	17,6%
] 275 , 300]	7	419	83,8%	16,2%
] 300 , 325]	15	434	86,8%	13,2%
] 325 , 350]	10	444	88,8%	11,2%
] 350 , 375]	8	452	90,4%	9,6%
] 375 , 400]	4	456	91,2%	8,8%
] 400 , 425]	11	467	93,4%	6,6%
] 425 , 450]	5	472	94,4%	5,6%
] 450 , 475]	5	477	95,4%	4,6%
] 475 , 500]	2	479	95,8%	4,2%
> 500	21	500		



C - ACTIVITES SUR EXCEL

LOI EXPONENTIELLE

Situation :
Simulation globale de 500 temps de bon fonctionnement d'une pièce ayant un taux d'avarie constant. Etude de fiabilité de cette pièce sur le modèle exponentiel.
Cette manipulation reprend la situation de l'activité $\boxed{1}$ sur calculatrice : Simulation de pannes à taux d'avarie constant (cf. page 140).

Objectif :
Vérifier que la fiabilité des pièces étudiées est proche de la loi exponentielle dont le paramètre est le taux d'avarie.

Mode d'emploi et déroulement du programme :

⇨ Le taux peut être changé en cliquant sur le bouton [NOUVEAU TAUX] .(Pour des raisons de programmation, le taux doit être compris entre 0,0001 et 0,25; dans les autres cas il vous suffira de changer l'unité de temps).

⇨ Statistique descriptive :
- TBF simulés en vrac dans la colonne de gauche (visibles en se déplaçant au moyen de l'ascenseur vertical).
- Regroupement des TBF en 30 classes variables suivant le taux pour utiliser au mieux les données.
- Estimation des fiabilités par la méthode des rangs bruts.

⇨ Statistique inférentielle :
- Ajustement des fiabilités aux TBF par une régression exponentielle forçant le coefficient multiplicatif à 1.
- Affichage du paramètre λ de la loi exponentielle ajustant cette distribution et affichage de la MTBF et du coefficient de corrélation r (négatif).
- Nuage de points et courbe de régression sur "papier semi-logarithmique".

⇨ Renouvellement des 500 TBF simulés en cliquant sur le bouton [NOUVELLE SIMULATION] .

Suggestions :
1° Observer qu'en renouvelant la simulation (sans changer le taux) les valeurs de λ restent voisines du taux d'avarie.
2° Justifier la légitimité de l'ajustement
- visuellement sur le papier semi-logarithmique.
- par un coefficient de corrélation r très proche de -1.

3° Remarquer que $r < 0$ (la fiabilité est une fonction décroissante).

Remarques techniques :
1° Ci-dessous un extrait de la macro-commande en VBA générant les TBF aléatoires dans les cellules A6 à A505 à l'aide d'une boucle.

```
For j = 6 To 505
        i = 0
        While Int(Rnd + taux) = 0
        i = i + 1
        Wend
Range("A" & j).FormulaR1C1 = i
Next
```

Le processus est expliqué page 143.

2° La valeur de λ est obtenue par la formule -LN(INDEX(LOGREG(J13:J26;E13:E26;FAUX);1)).

La plage J13:J26 contient les R (t_i) ; la plage E13:E26 contient les t_i .
La fonction LOGREG génère une matrice de résultats relatifs à une régression exponentielle (contrairement à ce que son nom laisse penser) sous la forme b m^x.
Le 3° argument (FAUX) impose b = 1.
La fonction INDEX avec pour 2ème argument 1 donne le 1er élément de la matrice qui est m.
Et bien sûr, $\lambda = - \ln m$.
Un autre élément de la matrice permet d'obtenir le coefficient de corrélation r .

Annexe 1

Programmation		CASIO 7000G 7500G 8000G 8500G 6800G	CASIO 6900G	CASIO 7700G 7800G 8800G	CASIO 7900GC 9900GC	CASIO 6910G	CASIO CFX9930GT 9940 – 9960 – 9990 GT
Création (édition) d'un nouveau programme		MODE 2 (WRT=write) Sélection d'un n° puis EXE	MENU EXE PRGM$_6$ Sélectionner P1 par exemple puis EXE	MODE 2 Sélectionner P1 par exemple puis EXE	MENU EXE puis PRGM$_8$ pour 7900 PRG PRGM$_A$ pour 9900 Sélectionner P1 par exemple puis EXE	PRGM$_6$ NEW Nom de 8 lettres maxi	PRGM EXE NEW Nom de 8 lettres maxi
Effacer un programme		MODE 3 (PCL) sélection puis AC	FUNC DELETE ONE PROG sélection puis EXE EXE	MODE 3 (PCL) sélection puis AC	MENU PRGM$_8$ DEL Sélection YES	PRGM Sélection du programme DEL YES	PRGM Sélection du programme DEL YES
Nommer un programme		Ecrire ce que l'on veut en début de programme entre des guillemets " "	Ecrire ce que l'on veut en début de programme entre des guillemets " "	Ecrire ce que l'on veut en début de programme entre des guillemets " "	Ecrire ce que l'on veut en début de programme entre des guillemets " "	Nom de 8 lettres maxi	Nom de 8 lettres maxi
Séparation des instructions		EXE (avec retour à la ligne) ou :	EXE (avec retour à la ligne) ou :	EXE (avec retour à la ligne) ou :	EXE (avec retour à la ligne) ou :	EXE (avec retour à la ligne) ou :	EXE (avec retour à la ligne) ou :
Introduction d'une valeur		?	?	? par PRGM	? par PRGM	? par PRGM	? par PRGM
Mise en mémoire		→ X (attention flèche noire)	→ X (touche X-var ou ALPHA X)	→ X (touche X,θ,T ou ALPHA X)	→ X (touche X,θ,T ou ALPHA X)	→ X (touche X,θ,T ou ALPHA X)	→ X (touche X,θ,T ou ALPHA X)
Saut	Etiquette Saut	Lbl 1 Goto 1	Lbl 1 (par FUNC PRGM JUMP) Goto 1 (idem)	Lbl 1 (par PRGM JMP) Goto 1 (idem)	Lbl 1 (par PRGM JMP) Goto 1 (idem)	Lbl 1 (par PRGM JMP) Goto 1 (idem)	Lbl 1 (par PRGM JUMP) Goto 1 (idem)
Test	Relation Implication Effet	= ≠ > < ≥ ≤ ⇒ par SHIFT 7 Si VRAI, aller à l'instruction suivante. Si FAUX sauter une instruction.	= ≠ > < ≥ ≤ (par FUNC PRGM REL) ⇒ (par FUNC PRGM JUMP) Si VRAI, aller à l'instruction suivante. Si FAUX sauter une instruction.	= ≠ > < ≥ ≤ (par PRGM REL) ⇒ (par PRGM JMP) Si VRAI, aller à l'instruction suivante. Si FAUX sauter une instruction.	= ≠ > < ≥ ≤ (par PRGM REL) ⇒ (par PRGM JMP) Si VRAI, aller à l'instruction suivante. Si FAUX sauter une instruction.	= ≠ > < ≥ ≤ (par PRGM REL) ⇒ (par PRGM JMP) Si VRAI, aller à l'instruction suivante. Si FAUX sauter une instruction.	Comme précédentes ou (par PRGM COM) If relation Then instructions (Else instructions) I-End
Boucle : Pour I allant de 1 à 10, faire instructions.		1 → I Lbl 0 instructions I+1 → I I ≤ 10 ⇒ Goto 0	1 → I Lbl 0 instructions I+1 → I I ≤ 10 ⇒ Goto 0	1 → I Lbl 0 instructions I+1 → I I ≤ 10 ⇒ Goto 0	1 → I Lbl 0 instructions I+1 → I I ≤ 10 ⇒ Goto 0	For 1 → I To 10 Instructions Next	(par PRGM COM) For 1 → I To 10 Instructions Next
Affichage d'un résultat ou de texte		X ◢ (mémoire X) " TEXTE "	X ◢ (mémoire X) " TEXTE "	X ◢ (mémoire X) " TEXTE " (◢ dans PRGM, " dans ALPHA)	X ◢ (mémoire X) " TEXTE " (◢ dans PRGM, " dans ALPHA)	X ◢ (mémoire X) " TEXTE " (◢ dans PRGM, " dans ALPHA)	X ◢ (mémoire X) " TEXTE " (◢ dans PRGM, " dans ALPHA)
Passage au mode d'exécution		MODE 1 (RUN)	EXIT	MODE 1	EXIT	EXIT	EXIT
Lancement d'un programme		PROG 1 EXE (ou autre n° du prog.)	RUN	Prg (par PRGM 7) EXE	RUN	Sélection du programme EXE	Sélection du programme EXE

Programmation	TI 81	TI 80	TI 82 83	TI 85	TI 92	SHARP EL 9200 9600	HP 48GX
Création (édition) d'un nouveau programme	PRGM EDIT Sélection d'un n° de programme puis ENTER	PRGM ENTER NEW CREATE NEW	PRGM ENTER NEW Create New	PRGM EDIT	APPS 7 (prog. Editor) 3 (New) choix répertoire (Folder) Taper le nom du prog.	Dans ◄ NEW ENTER REAL ENTER Title ? apparaît à l'écran	Pas de mode prog. Taper le contenu du prog. entre « ». Puis 'Nom' ↲ STO
Effacer un programme	PRGM ERASE sélection n° ENTER Erase ENTER	MEM Delete Prgm Sélection ENTER	MEM Delete Prgm Sélection ENTER	MEM DELET MORE PRGM sélection ENTER	F1 8 : ClearEditor	Dans ◄ DEL sélection ENTER ENTER	'Nom' ↲ ↖ EEX (purge)
Nommer un programme	Nom de programme de 8 lettres maxi	Nom de programme de 7 lettres maxi	Nom de programme de 8 lettres maxi	Nom de programme de 8 lettres maxi	Nom de programme de 8 lettres maxi	Nom de programme de 7 lettres maxi	Nom entre ' ... '
Séparation des instructions	ENTER pour aller à la ligne ou :	ENTER pour aller à la ligne ou :	ENTER pour aller à la ligne ou :	ENTER pour aller à la ligne ou :	ENTER pour aller à la ligne	ENTER pour aller à la ligne	↲ pour aller à la ligne
Introduction d'une valeur	Input X (par PRGM I/O)	INPUT X (par PRGM I/O)	Input X (par PRGM I/O)	Input X (par PRGM I/O)	Input X (par F3 I/O)	Input X (par COMMAND PROG)	Input
Mise en mémoire	STO▶ X ENTER	STO▶ X ENTER	STO▶ X ENTER	STO▶ X ENTER	STO▶ X ENTER	X = (correspond à → X)	X STO
Saut — Etiquette / Saut	Lbl 1 par PRGM CTL Goto 1 (idem)	LBL 1 par PRGM CTL GOTO 1 (idem)	Lbl 1 par PRGM CTL Goto 1 (idem)	**Lbl A1** par PRGM CTL **Goto A1** (idem)	**Lbl A1** **Goto A1**	Label 1 (par COMMAND BRNCH) Goto 1 (idem)	
Test — Relation / Implication / Effet	= ≠ < > ≤ ≥ dans TEST If par PRGM CTL Si VRAI, aller à l'instruction suivante. Si FAUX, sauter une instruction	= ≠ < > ≤ ≥ dans TEST IF par PRGM CTL Si VRAI, aller à l'instruction suivante. Si FAUX, sauter une instruction	Comme TI 81 ou :If relation (dans TEST) : Then :instructions (:Else et instructions) :End	== ≠ < > ≤ ≥ dans TEST If par PRGM CTL Si VRAI, aller à l'instruction suivante. Si FAUX, sauter une instruction	= ≠ < > ≤ ≥ If par F2 Control Si VRAI, aller à l'instruction suivante. Si FAUX, sauter une instruction (ou : If ...Then...EndIf)	= ≠ < > ≤ ≥ (dans COMMAND INEQ) If par COMMAND BRANCH avec Goto obligatoire. Si VRAI, aller au label. Si FAUX, sauter le Goto.	= ≠ < > ≤ ≥ (dans PRG TEST) If relation Then instructions Else instructions End (dans PRG BRCH) (ou case ... Then ... end)
Boucle : Pour I allant de 1 à 10, faire instructions.	:1 → I :Lbl 0 :instructions :I+1 → I :If I ≤ 10 :Goto 0	:FOR(I,1,10) :instructions :END	:For(I,1,10) (par PRGM CTL) :instructions :End	:For(I,1,10) :instructions :End	Dans F2 Control :For I,1,10 :instructions :EndFor	I = 1 Lbl 0 instructions I = I+1 If I ≤ 10 Goto 0	For I 1 10 instructions End Start dans PRG BRCH
Affichage d'un résultat ou de texte	Disp X (par PRGM I/O) Disp "TEXTE" Pause (par PRGM CTL pour l'arrêt)	DISP X (par PRGM I/O) DISP "TEXTE" PAUSE (par PRGM CTL pour l'arrêt)	Disp X (par PRGM I/O) Disp "TEXTE" Pause (par PRGM CTL pour l'arrêt)	Disp X (par PRGM I/O) Disp "TEXTE" (" dans STRNG) Pause (par PRGM CTL pour l'arrêt)	Disp X (par F3 I/O) Disp "TEXTE" (affiche dans écran PRGMIO) Pause (F2 Control 8: 1:)	Print X (par COMMAND PROG) Print "TEXTE" (idem) Wait (pour arrêt)	" TEXTE " 1 disp ou MSGBOX
Passage au mode d'exécution	QUIT	QUIT	QUIT	QUIT	Sortie de l'éditeur par choix d'un nouvel écran : ♦[HOME]	QUIT	
Lancement d'un programme	PRGM EXEC puis sélection n° ENTER	PRGM EXEC puis sélection nom ENTER	PRGM EXEC puis sélection nom ENTER	PRGM NAMES sélection nom ENTER	nom du prog. ENTER	RUN choix ENTER	Cliquer sur la touche menu correspondante

Probabilités	CASIO 6910-8930-9930-9960 GT	CASIO 9940 – 9990 GT	TI 83	SHARP EL 9600	TI 92
Dénombrement : $n!$ A_n^p C_n^p	OPTN PROB contient x! nPr et nCr	MENU RUN EXE OPTN PROB contient x! nPr et nCr	MATH PRB 4: ! 2: nPr 3: nCr		MATH Probability nPr(n,p) nCr(n,p)
Simulation de la loi uniforme sur [0;1]	OPTN PROB Ran#	OPTN PROB Ran#	MATH PRB 1: rand		rand ( )
Loi binomiale					
X suit $\mathscr{B}$(n;p) Calcul de probabilités : P(X = k)		MENU STAT EXE DIST BINM Bpd (Data:Var, entrer k,n,p)	2nd DISTR 0: binompdf(n,p,k)	STAT F (DISTRI) 09 pdfbin(n,p,k)	
P(X ≤ k) = F(k)		DIST BINM Bcd	DISTR A: binomcdf(n,p,k)	STAT DISTRI 10 cdfbin(n,p,k)	
Simulation			MATH PRB 7:randBin(n,p)		
Loi de Poisson					
X suit $\mathscr{P}$(λ) Calcul de probabilités : P(X = k)		MENU STAT EXE DIST POISN Ppd (entrer k et λ)	DISTR B: poissonpdf (λ,k)	STAT DISTRI 11 pdfpoi(λ,k)	
P(X ≤ k) = F(k)		DIST POISN Pcd	DISTR C: poissoncdf (λ,k)	STAT DISTRI 12 cdfpoi (λ,k)	
Loi normale					
X suit $\mathscr{N}$(m ; σ) ; T suit $\mathscr{N}$(0 ; 1) Calcul de probabilités : P(a ≤ X ≤ b)		MENU STAT EXE DIST NORM Ncd (entrer a, b, σ, μ)	DISTR 2: normalcdf (a,b,μ,σ)	STAT DISTRI 02 cdfnorm (a,b,μ,σ^2)	
P(a ≤ X)		Ncd (Upper: 1E99)	normalcdf (a,1E99,μ,σ)	02 cdfnorm (a,10000,μ,σ^2)	
P(X ≤ t) = F(t)		Ncd (Lower: -1E99)	normalcdf(-1E99,t,μ,σ)	02 cdfnorm (-10000,t,μ,σ^2)	
P(T ≤ t) = π(t)	MENU RUN OPTN PROB P(valeur t) EXE	MENU RUN OPTN PROB P(valeur t) EXE ou utiliser Ncd	normalcdf (-1E99,t)	02 cdfnorm (-10000,t)	
Calcul inverse de a tel que P(X ≤ a) = p avec p donné		DIST NORM InvN entrer p, σ, μ	DISTR 3: invNorm (p,μ,σ)	STAT DISTRI 03 InvNorm(p,μ,σ^2)	
Lecture inverse $\mathscr{N}$(0;1) Calcul de t pour π(t)=p avec p donné		DIST NORM InvN entrer p, 1, 0	DISTR 3: invNorm(p)	STAT DISTRI 03 InvNorm(p)	
Fonction de densité Calcul de f(x)		DIST NORM Npd entrer x, σ, μ	DISTR 1: normalpdf (x,μ,σ)	STAT DISTRI 01 pdfnorm (x,μ,σ^2)	
Représentation de f		Dans Normal P.D DRAW (F6) (échelle auto)	WINDOW réglage Y= \Y_1= normalpdf(X,μ,σ)		
Ombrage sur la courbe de Gauss		Tracé de densité $\mathscr{N}$(0;1) et ombrage de zone π(t) MENU RUN EXE V-Window réglage -3.2;3.2;1;-0.1;0.45;0.1 Sketch GRPH Y= OPTN PROB P(t) EXE	Tracé de la courbe de Gauss, ombrage et calcul de l'aire de P(a≤X≤b). WINDOW réglage DISTR 1: ShadeNorm(a,b,μ,σ)		
Simulation			MATH PRB 6:randNorm(m,σ)		randNorm(m,σ)

Statistiques descrip. à 1 VARIABLE	**CASIO 7000G 7500G 8000G 8500G 6800G**	**CASIO 6900G**	**CASIO 7700G 7800G 8800G**	**CASIO 7900GC 9900GC**	**CASIO 6910G**	**CASIO CFX9930GT 9940GT 9960GT**	**HP 48GX**
Mise en mode statistiques	MODE × (SD1)	MENU SD EXE	MODE × MODE SHIFT 1	SD EXE SET UP STO	MAIN MENU STAT EXE	MAIN MENU STAT EXE	Pas de calculs prévus pondérés par des fréquences. Programmer les calculs
Effacement des mémoires statistiques	Scl EXE	FUNC CLEAR Scl	EDIT ERS YES	CLR SCL EXE	(dans MENU STAT) DEL A Sélection d'une liste YES EXE	(dans MENU STAT) DEL A Sélection d'une liste YES EXE	
Entrée des données	Entrer chaque couple x_i n_i séparés par ; en faisant DT	Entrer chaque couple x_i n_i séparés par ; en faisant DT EDIT	Entrer chaque couple x_i n_i séparés par ; en faisant DT EDIT ou Listes	Entrer chaque couple x_i n_i séparés par ; en faisant DT EDIT ou Listes	On entre les x_i en colonne List 1 n_i en colonne List 2	On entre les x_i en colonne List 1 n_i en colonne List 2	
Affichage des résultats	$\bar{x}$ EXE $x\sigma_n$ EXE	FUNC CAL $\bar{x}$ EXE $x\sigma_n$ EXE	DEV $\bar{x}$ EXE DEV $x\sigma_n$ EXE	CAL DEV $\bar{x}$ EXE DEV $x\sigma_n$ EXE	CALC SET (affectation des listes) 1Var X List : List 1 1Var Freq : List 2 EXE 1-VAR Affichage de $\bar{x}$ et $x\sigma n$	CALC SET (affectation des listes) 1Var X List : List 1 1Var Freq : List 2 EXE 1-VAR Affichage de $\bar{x}$ et $x\sigma n$	
Histogramme	RANGE réglage de l'échelle Defm (par MODE .) nb de classes EXE GRAPH EXE	SET UP STAT GRAPH DRAW EXIT RANGE réglage de l'échelle EXIT Defm nb classes EXE GRAPH EXE	MODE SHIFT 3 (DRAW) RANGE réglage de l'échelle Defm nb classes EXE GRAPH EXE	SET UP STAT GRAPH DRAW EXIT RANGE réglage de l'échelle EXIT Defm nb classes EXE GRAPH EXE	(dans MENU STAT) GRPH SET (affectations) Graph Type : Hist X List : List 1 Frequency : List 2 EXE SEL Set Interval Start : borne inf classe 1 pitch : pas entre centres de classes DRAW	(dans MENU STAT) GRPH SET (affectations) Graph Type : Hist X List : List 1 Frequency : List 2 EXE SEL Set Interval Start : borne inf classe 1 pitch : pas entre centres de classes DRAW	

Statistiques descrip. à 1 VARIABLE	**TI 81**	**TI 80**	**TI 82**	**TI 83**	**TI 85**	**TI 92**	**SHARP EL 9200 EL 9600**
Mise en mode statistiques	STAT	STAT	STAT	STAT	STAT	APPS 6 3 taper stat1 puis 2× ENTER	Edit ONE VARIABLE X , W ENTER
Effacement des mémoires statistiques	DATA 2: ClrStat ENTER	EDIT 4: CLRLIST L_1 , L_2 , L_3	EDIT 4: ClrList L_1 , L_2 , L_3	EDIT 4: ClrList L_1 , L_2 , L_3	EDIT xStat yStat CLRxy QUIT		MENU DEL ALL DATA
Entrée des données	DATA 1: Edit ENTER Entrer dans la liste x1= y1= x2= y2= etc les valeurs en x_i et les effectifs n_i en y_i .	STAT EDIT 1: EDIT ENTER Entrer les valeurs x_i en colonne L1 et les effectifs n_i en colonne L2	STAT EDIT 1: Edit ENTER Entrer les valeurs x_i en colonne L1 et les effectifs n_i en colonne L2	STAT EDIT 1: Edit ENTER Entrer les valeurs x_i en colonne L1 et les effectifs n_i en colonne L2	STAT EDIT Entrer dans la liste x1= y1= x2= y2= etc les valeurs en x_i et les effectifs n_i en y_i .	On entre x_i en colonne c1 n_i en colonne c2	Entrer : X série des x_i W effectifs n_i
Affichage des résultats	STAT CALC 1: 1-Var ENTER Affichage $\overline{x}$ et σ_x	STAT CALC (SET UP pour affectation des listes) 1: 1-VAR STATS ENTER L_1 , L_2 ENTER affichage de $\overline{x}$ σx	STAT CALC 1: 1-Var Stats ENTER L_1 , L_2 ENTER affichage de $\overline{x}$ σx Med	STAT CALC 1: 1-Var Stats ENTER L_1 , L_2 ENTER affichage de $\overline{x}$ σx Med	STAT CAL 1-Var ENTER Affichage $\overline{x}$ et σ_x	F5 1 (One Var) x................c1 Use Freq ? YES Freq...........c2 ENTER Affichage $\overline{x}$ pour σx faire 2nd GSX	MENU STAT X-VARS ENTER affichage
Histogramme	RANGE Xmin : borne inf 1ère int Xmax : sup dernier int Xscl : amplitude classes Ymin : 0 Ymax : effectif maxi Yscl : 1 STAT DRAW 1: Hist ENTER	WINDOW Xmin : borne inf 1ère int Xmax : sup dernier int Xscl : amplitude classes Ymin : 0 Ymax : effectif maxi Yscl : 1 STAT PLOT choix : ON TYPE : Hist XL : L1 F : L2 GRAPH	WINDOW Xmin : borne inf 1ère int Xmax : sup dernier int Xscl : amplitude classes Ymin : 0 Ymax : effectif maxi Yscl : 1 STAT PLOT 1 : Plot 1 ENTER choix : On Type : Hist XList : L1 Freq : L2 GRAPH	WINDOW Xmin : borne inf 1e int Xmax : sup dernier int Xscl : amplitude classes Ymin : 0 Ymax : effectif maxi Yscl : 1 Xres : 1 STAT PLOT 1 : Plot 1 ENTER choix : On Type : Hist XList : L1 Freq : L2 GRAPH	RANGE Xmin : borne inf 1ère int Xmax : sup dernier int Xscl : amplitude classes Ymin : 0 Ymax : effectif maxi Yscl : 1 STAT DRAW HIST ENTER	WINDOW Xmin : borne inf 1e int Xmax : sup dernier int Xscl : ampl. classes Ymin : 0 Ymax : effectif maxi Yscl : 1 Xres : 1 APPS 6 1 Plot Type...Histogramm X................c1 Hist; Bucket Width (largeur des classes) Freq............c2 ENTER GRAPH	Graph HIST AUTO
Polygone des fréquences cumulées				STAT EDIT Se placer sur L3 L3=cumSum(L2/sum(L2)) (cumSum sum dans LIST MATH) WINDOW réglage STAT PLOT choix GRAPH			

Attention pour la MEDIANE : la valeur affichée est la première valeur de la série située au dessus de 50% de l'effectif total, ce qui n'est pas ce qu'il y a de mieux.

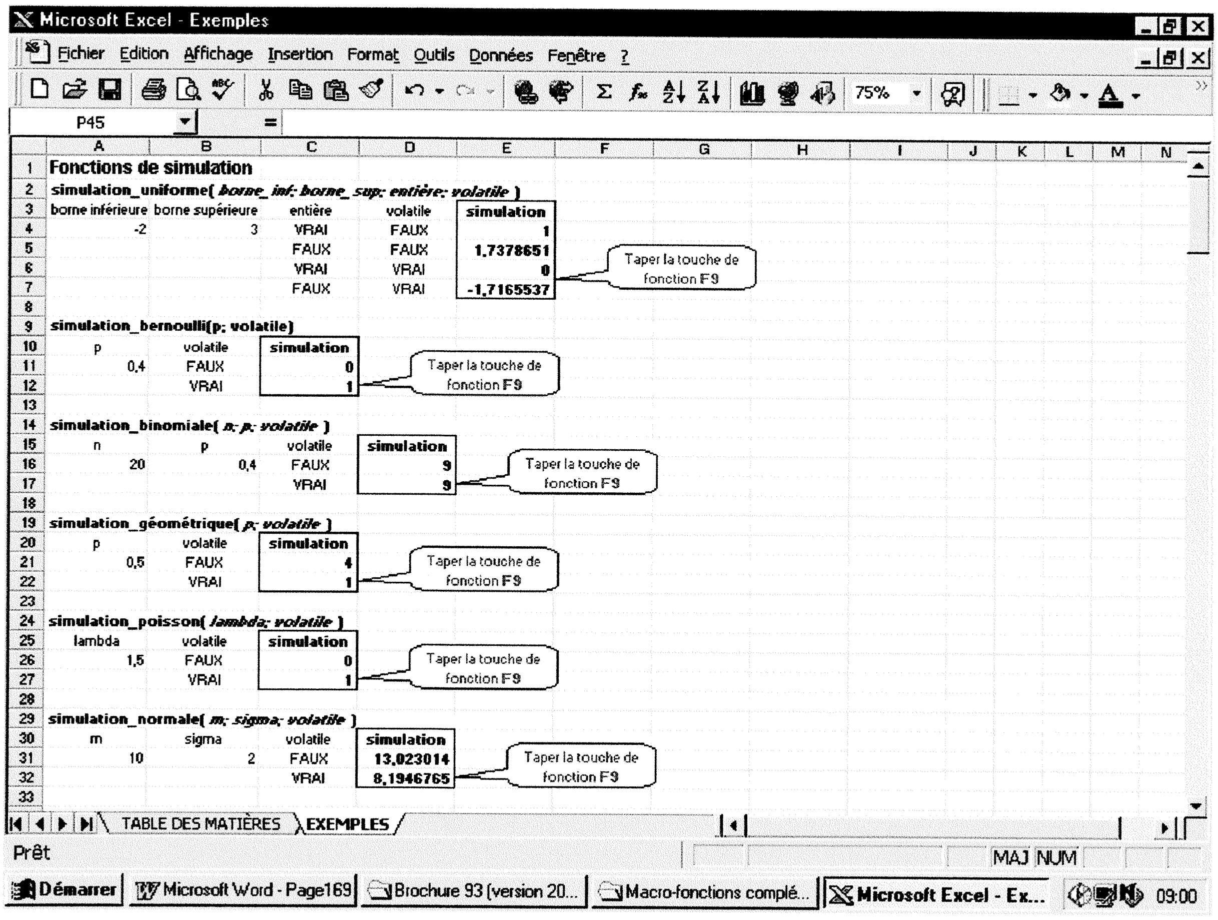
Statistiques descrip. à 2 VARIABLES	CASIO 7000G 7500G 8000G 8500G 6800G	CASIO 6900G	CASIO 7700G 7800G 8800G	CASIO 7900GC 9900GC	CASIO 6910G	CASIO CFX9930GT 9940 GT 9960GT	HP 48GX
Mise en mode de régression linéaire	MODE ÷ (LR 1) (LR2 pour un tracé)	LR (4) EXE (Pour un tracé : SET UP STATGRAPH DRAW)	MODE ÷ (REG) (Pour un tracé : MODE SHIFT 3 : DRAW)	REG (4) EXE SET UP STAT DATA STO STAT GRAPH DRAW EXIT	MAIN MENU STAT EXE	MAIN MENU STAT EXE	
Effacement des mémoires statistiques	Scl EXE	FUNC CLEAR Scl EXE	EDIT ERS YES	EDIT ERS YES	(dans MENU STAT) DEL A Sélection YES EXE	(dans MENU STAT) DEL A Sélection YES EXE	
Entrée des données	Entrer chaque couple x_i y_i séparés par , en faisant DT	Entrer chaque couple x_i y_i séparés par , en faisant DT	MODE SHIFT 1 Entrer dans un tableau X Y f x_i y_i 1 PRE ou EXIT	Entrer dans un tableau X Y f x_i y_i 1 EXIT	On entre les x_i en colonne List 1 y_i en colonne List 2	On entre les x_i en colonne List 1 y_i en colonne List 2	
moyenne des x_i : $\bar{x}$ moyenne des y_i : $\bar{y}$ Effectif total $n = \Sigma n_i$ $\Sigma x_i y_i$ Covariance : $\sigma_{xy} = \frac{\Sigma x_i y_i}{n} - \bar{x}\bar{y}$	$\bar{x}$ EXE $\bar{y}$ EXE ALPHA W EXE ALPHA R EXE Poser le calcul de σ_{xy} à la main.	FUNC CAL DEV fournit $\bar{x}$ $\bar{y}$ $x\sigma n$ $y\sigma n$ FUNC CAL Σ fournit n Σx Σxy Poser le calcul de σ_{xy} à la main.	CAL DEV fournit $\bar{x}$ $\bar{y}$ $x\sigma n$ $y\sigma n$ CAL Σ fournit n Σx Σxy Poser le calcul de σ_{xy} à la main.	CAL DEV fournit $\bar{x}$ $\bar{y}$ $x\sigma n$ $y\sigma n$ CAL Σ fournit n Σx Σxy Poser le calcul de σ_{xy} à la main.	CALC SET (affectations) 2Var XList : List 1 2Var YList : List 2 2Var Freq : 1 EXE 2VAR Affichage de $\bar{x}$ $x\sigma n$ $\bar{y}$ $y\sigma n$ n Σxy Poser le calcul de σ_{xy} à la main.	CALC SET (affectations) 2Var XList : List 1 2Var YList : List 2 2Var Freq : 1 EXE 2VAR Affichage de $\bar{x}$ $x\sigma n$ $\bar{y}$ $y\sigma n$ n Σxy Poser le calcul de σ_{xy} à la main.	
Corrélation linéaire r Equation de la droite de régression de y en x	SHIFT A EXE SHIFT B EXE SHIFT r EXE	FUNC CAL REG A EXE B EXE pour Y=BX+A r EXE	CAL REG A EXE B EXE pour Y=BX+A r EXE	CAL REG A EXE B EXE pour Y=BX+A r EXE	CALC REG X affichage de y = ax+b a, b, r	CALC REG X affichage de y = ax+b a, b, r	
Représentation du nuage de points	Utiliser le mode LR2 avant d'introduire les données si l'on veut un tracé statistique. SHIFT MODE ÷ RANGE réglage de l'échelle au préalable. Affichage progressif du nuage.	Utiliser SET UP STATGRAPH DRAW avant d'introduire les données si l'on veut un tracé statistique. RANGE réglage de l'échelle au préalable. Affichage progressif du nuage.	Utiliser MODE SHIFT 3 DRAW avant d'introduire les données si l'on veut un tracé statistique. RANGE réglage de l'échelle au préalable. Affichage progressif du nuage.	RANGE réglage de l'échelle au préalable. Affichage progressif du nuage.	(dans MENU STAT) GRPH SET Graph Type : Scatt XList : List 1 YList : List 2 Freq : 1 EXE GPH1	(dans MENU STAT) GRPH SET Graph Type : Scatt XList : List 1 YList : List 2 Freq : 1 EXE GPH1	
Représentation de la droite de régression de y en x	Graph Line 1 EXE	Graph Line 1 EXE	Graph Line 1 EXE	Graph Line 1 EXE	(dans GPH1) X DRAW	(dans GPH1) X DRAW	

Statistiques descrip. à 2 VARIABLES	**TI 81**	**TI 80**	**TI 82**	**TI 83**	**TI 85**	**TI 92**	**SHARP EL 9200 EL 9600**
Mise en mode de régression linéaire	STAT	STAT	STAT	STAT	STAT	APPS 6 3 taper stat2 puis 2× ENTER	MENU Edit TWO VARIABLE X,Y ENTER
Effacement des mémoires statistiques	DATA 2: ClrStat ENTER	EDIT 4: CLRLIST L_1 , L_2 , L_3	EDIT 4: ClrList L_1 , L_2 , L_3	EDIT 4: ClrList L_1 , L_2 , L_3	EDIT xStat yStat CLRxy QUIT		MENU Edit DEL ALL DATA
Entrée des données	DATA 1: Edit ENTER Entrer dans la liste x1= y1= x2= y2= etc les valeurs en x_i et les valeurs y_i .	STAT EDIT 1: EDIT ENTER Entrer les valeurs x_i en colonne L1 et les valeurs y_i en colonne L2	STAT EDIT 1: Edit ENTER Entrer les valeurs x_i en colonne L1 et les valeurs y_i en colonne L2	STAT EDIT 1: Edit ENTER Entrer les valeurs x_i en colonne L1 et les valeurs y_i en colonne L2	STAT EDIT Entrer dans la liste x1= y1= x2= y2= etc les valeurs en x_i et les valeurs y_i .	Introduire x_i en colonne c1 et y_i en colonne c2	MENU Edit TWO VARIABLE X,Y ENTER entrer les valeurs x_i et y_i à leurs places
moyenne des x_i : $\bar{x}$ moyenne des y_i : $\bar{y}$ Effectif total $n = \Sigma n_i$ $\Sigma x_i y_i$ Covariance : $\sigma_{xy} = \frac{\Sigma x_i y_i}{n} - \bar{x}\bar{y}$	STAT CALC VARS XY 2: $\bar{x}$ 5: $\bar{y}$ VARS Σxy pour n σx σy Σxy Poser le calcul de σ_{xy} à la main.	STAT CALC 2-VAR STATS ENTER L_1 , L_2 ENTER Affichage de $\overline{X}$ $x\sigma n$ $\bar{y}$ $y\sigma n$ n Σxy Poser le calcul de σ_{xy} à la main.	STAT CALC 2: 2-Var Stats ENTER L_1 , L_2 ENTER Affichage de $\bar{x}$ $x\sigma n$ $\bar{y}$ $y\sigma n$ n Σxy Poser le calcul de σ_{xy} à la main.	STAT CALC 2: 2-Var Stats ENTER L_1 , L_2 ENTER Affichage de $\bar{x}$ $x\sigma n$ $\bar{y}$ $y\sigma n$ n Σxy Poser le calcul de σ_{xy} à la main.	STAT VARS accès à $\bar{x}$ σx $\bar{y}$ σy n Σxy Poser le calcul de σ_{xy} à la main.	On peut taper directement le nom des résultats souhaités dans l'écran de calcul : $\bar{x}$ σx ...	MENU STAT X-VARS ENTER MENU STAT Y-VARS ENTER accès à $\bar{x}$ σx $\bar{y}$ σy n Σxy. Poser le calcul de σ_{xy} à la main.
Corrélation linéaire r Equation de la droite de régression de y en x	STAT CALC LinReg a=... b=... pour y = bx + a ! r=...	STAT CALC LINREG(aX+B) ENTER L_1 , L_2 ENTER Affichage de y=ax+b et de r	STAT CALC 5: Lin Reg (ax+b) ENTER L_1 , L_2 ENTER Affichage de y=ax+b et de r	STAT CALC 4: Lin Reg ENTER L_1 , L_2 ENTER Affichage de y=ax+b (Si nécessaire, CATALOG Diagnostic On pour afficher r)	CALC LINR a=... b=... pour y = bx + a ! corr=...	APPS 6 1 F5 Calculat Type:LinReg x........................c1 y........................c2 Store Reg EQ to..$y_1(x)$ ENTER affichage y=ax+b et r	MENU STAT REG ENTER Affichage de r a=... b=... pour y = bx + a !
Représentation du nuage de points	RANGE réglage STAT DRAW 2: Scatter ENTER	WINDOW réglage STAT PLOT ON Type : nuage XL : l1 YL : L2 ENTER	WINDOW réglage STAT PLOT Plot 1 choix On Type: nuage XList : L1 YList : L2 GRAPH	WINDOW réglage STAT PLOT Plot 1 choix On Type: nuage XList : L1 YList : L2 GRAPH	RANGE réglage STAT DRAW SCAT	Plot Type.........Scatter Mark.................Box x........................c1 y........................c2 Use Freq............NO ENTER	MENU graph SD (Scatter Diagram) ENTER
Représentation de la droite de régression de y en x	Y = CLEAR VARS 4: ENTER TRACE	Y = CLEAR VARS 2: 5: ENTER TRACE	Y= CLEAR VARS 5: Stat EQ ENTER 7: RegEQ ENTER TRACE	Y= CLEAR VARS 5: Stat EQ ENTER 1: RegEQ ENTER TRACE	STAT DRAW DRREG	GRAPH F3	MENU graph REG a+bX ENTER

Statistiques INFERENTIELLES	CASIO CFX 9940GT	TI 83	SHARP EL 9600	TI 92
Intervalle de confiance d'une moyenne m d'une population, centré sur la moyenne $\bar{x}$ d'un échantillon de taille n..	STAT INTR Z (si σ pop; connu) ou t (si σ pop. Inconnu) 1-S Data : Var C-Level : 0.95 ou 0.99 ou ... σ (ou xσn-1) : entrer σ pop. ou estimé $\bar{x}$: entrer $\bar{x}$ échantillon n: entrer taille échantillon affichage de l'intervalle de confiance	STAT TESTS 7:ZInterval (Si σ pop connu) ou 8:TInterval (Si σ inconnu) Inpt: Stats $\bar{x}$: entrer $\bar{x}$ échantillon σ (ou Sx) : entrer σ pop. ou son estimé n : entrer taille échantillon C-Level : entrer 0.95 ou 0.99 ou ... affichage de l'intervalle de confiance	STAT E TEST 17 InputStats ENTER (mode valeurs numériques) 12 Zint1samp (Si σ pop connu) ou 06 Tint1samp (Si σ inconnu)	Pas de programme intégré en statistiques inférentielles.
Intervalle de confiance d'une fréquence ou proportion p d'une population, centré sur la fréquence f calculée sur un échantillon de taille n.	STAT INTR Z 1-P C-Level : entrer 0.95 ou 0.99 ou ... x: entrer le nombre de succès (x=f×n) n: entrer taille échantillon affichage de l'intervalle de confiance	STAT TESTS A:1-PropZInt x: entrer le nombre de succès (x=f×n) n: entrer taille échantillon C-Level : entrer 0.95 ou 0.99 ou ... affichage de l'intervalle de confiance	STAT E TEST 17 InputStats ENTER 14 Zint1prop	
Test d'hypothèse relatif a une moyenne On teste l'hypothèse "la moyenne de la population est m" à l'aide d'un échantillon de moyenne $\bar{x}$ et de taille n.	STAT TEST Z (si σ pop; connu) ou t (si σ pop. Inconnu) 1-S Data: Var μ: $\neq\mu_0$ $<\mu_0$ $>\mu_0$ choix bilatéral ou unilat. μ_0: entrer m σ (ou xσn-1) : entrer σ pop. ou estimé $\bar{x}$: entrer $\bar{x}$ échantillon n : entrer taille échantillon CALC ou DRAW pour affichage voir •	STAT TESTS 1:Z-Test (Si σ population connu) ou 2:T-Test (Si σ inconnu) Inpt: Stats μ_0 : entrer m $\bar{x}$: entrer $\bar{x}$ échantillon σ ou Sx : entrer σ pop. ou son estimation n : entrer taille échantillon μ: $=\mu_0$ $<\mu_0$ $>\mu_0$ choix bilatéral ou unilat. Calculate ou Draw pour affichage voir •	STAT E TEST 17 InputStats ENTER 08 Ztest1samp (Si σ population connu) ou 03 Ttest1samp (Si σ inconnu)	
Test de comparaison de deux moyennes On compare deux populations de moyennes m_1 et m_2 à l'aide de deux échantillons de moyennes $\bar{x}_1$ et $\bar{x}_2$ et de tailles n_1 et n_2.	STAT TEST Z (si σ pop; connu) ou t (si σ pop. Inconnu) 2-S Data : Var μ_1: $\neq\mu_2$ $<\mu_2$ $>\mu_2$ choix bilatéral ou unilatéral Entrer écart types (ou estimation) des pop. moyennes et tailles des échantillons. Affichage voir •	STAT TESTS 3:2-SampZTest (si σ pop. connu) ou 4:2-SampTTest (σ inconnu) Inpt: Stats Entrer moyennes et tailles des échantillons, écart types (ou estimation) des populations μ_1: $\neq\mu_2$ $<\mu_2$ $>\mu_2$ choix bilatéral ou uni. Pooled : NO Affichage voir •	STAT E TEST 17 InputStats ENTER 09 Ztest2samp (Si σ population connu) ou 04 Ttest2samp (Si σ inconnu)	
Test d'hypothèse relatif à une fréquence ou proportion p d'une population à l'aide de la fréquence f calculée sur un échantillon de taille n.	STAT TEST Z 1-P prop$\neq p_0$ $<p_0$ $>p_0$ choix bilatéral ou non p_0 : entrer p x : n: entrer nombre succès et taille échant. Affichage voir •	STAT TESTS 5:1-PropZTest p_0 : entrer p x : n: entrer nb succès et taille échant. prop$\neq p_0$ $<p_0$ $>p_0$ choix bilatéral ou non Affichage voir •	STAT E TEST 17 InputStats ENTER 10 Ztest1prop	
Test de comparaison de deux fréquences On compare 2 populations de fréquences p_1 et p_2 à l'aide de 2 échantillons de fréquences f_1 et f_2 et de tailles n_1 et n_2.	STAT TEST Z 2-P p_1: $\neq p_2$ $<p_2$ $>p_2$ choix bilatéral ou non entrer nombre de succès et tailles des échantillons Affichage voir •	STAT TESTS 6:2-PropZTest entrer nombre de succès et tailles des échantillons p_1: $\neq p_2$ $<p_2$ $>p_2$ choix bilatéral ou non Affichage voir •	STAT E TEST 17 InputStats ENTER 11 Ztest2prop	

• **Pour les TESTS :** Les calculatrices affichent le nombre $z = \frac{\bar{x}-m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$ (ou $t = \frac{\bar{x}-m}{\frac{s}{\sqrt{n}}}$) dans le cas du test d'hypothèse d'une moyenne, ainsi que la probabilité $p = P(T \leq -|z|) + P(T \geq |z|)$ dans le cas bilatéral.

C'est le "risque d'erreur de 1ère espèce". C'est cette zone qui est ombrée sur la courbe de densité de la loi $\mathcal{N}(0;1)$. Si sa surface est supérieure au seuil de rejet, l'hypothèse H_0 est acceptée.
Ainsi si **p = 0.0662 par exemple, l'hypothèse H_0 est acceptée au seuil de rejet de 5% mais rejetée au seuil de 10%**. La valeur p affichée est donc le seuil limite pour l'acceptation de H_0.


Microsoft Excel - Exemples
Fichier Edition Affichage Insertion Format Outils Données Fenêtre ?
P45
Fonctions de simulation
simulation_uniforme(borne_inf; borne_sup; entière; volatile)
borne inférieure borne supérieure entière volatile simulation
-2 3 VRAI FAUX 1
FAUX FAUX 1,7378651
VRAI VRAI 0
FAUX VRAI -1,7165537
Taper la touche de fonction F9
simulation_bernoulli(p; volatile)
p volatile simulation
0,4 FAUX 0
VRAI 1
Taper la touche de fonction F9
simulation_binomiale(n; p; volatile)
n p volatile simulation
20 0,4 FAUX 9
VRAI 9
Taper la touche de fonction F9
simulation_géométrique(p; volatile)
p volatile simulation
0,5 FAUX 4
VRAI 1
Taper la touche de fonction F9
simulation_poisson(lambda; volatile)
lambda volatile simulation
1,5 FAUX 0
VRAI 1
Taper la touche de fonction F9
simulation_normale(m; sigma; volatile)
m sigma volatile simulation
10 2 FAUX 13,023014
VRAI 8,1946765
Taper la touche de fonction F9
TABLE DES MATIÈRES EXEMPLES
Prêt
MAJ NUM
Démarrer Microsoft Word - Page169 Brochure 93 (version 20... Macro-fonctions complé... Microsoft Excel - Ex... 09:00

Annexe 2

MACRO-FONCTIONS COMPLÉMENTAIRES

Pour votre usage personnel, vous trouverez sur la disquette, un fichier contenant diverses fonctions de simulation, de statistique descriptive, de statistique inférentielle et de probabilités. Nous avons crée ces fonctions qui n'existent pas en standard sur Excel.
Ce fichier se nomme **Fonctions statistiques complémentaires**. Il se situe dans le dossier **Fonctions complémentaires** de la disquette.
Vous devrez le **copier**, sur votre disque dur, dans le dossier XLOuvrir dont le chemin est vraisemblablement **C:\Program Files\Microsoft Office\Office\XLOuvrir**.
Les fonctions qu'il contient seront alors disponibles dès l'ouverture d'Excel, dans l'**Assistant fonction**, rubrique **Tous**.
Le dossier **Fonctions complémentaires** contient en outre un fichier Excel nommé **Exemples** qui vous aidera à comprendre le maniement de ces fonctions.

1° Fonctions de simulation :

Ces fonctions simulent des lois de probabilité usuelles.
Elles ont toutes pour dernier argument ***volatile***. Une fonction volatile, sur Excel, est une fonction qui est recalculée automatiquement après chaque entrée ou lorsqu'on donne l'ordre de recalcul (raccourci au clavier par la touche de fonction F9). La volatilité d'une fonction peut être considérée comme un avantage ou un inconvénient, suivant les circonstances. Les fonctions de simulation fournies en standard sur Excel, ALEA() et ALEA.ENTRE.BORNES() sont volatiles. Ceci agace les utilisateurs pendant l'élaboration de leur feuille de calcul car les valeurs simulées changent continuellement après chaque entrée ! Par contre, quand l'ouvrage est terminé, une simple pression sur F9 régénère la simulation à volonté ...
C'est pourquoi nous avons inclus dans les arguments de nos fonctions l'option de volatilité. En donnant la valeur VRAI (ou 1) à l'argument ***volatile***, la fonction est volatile ; en lui donnant la valeur FAUX (ou 0), elle ne l'est pas.
Conseil méthodologique : en phase de création de votre feuille de calcul, pour calmer la frénésie de recalcul d'Excel, donnez à l'argument ***volatile*** la valeur FAUX, ou mieux, entrez-y la référence absolue* d'une cellule où vous taperez 0 ; par la suite, quand vous voudrez que la simulation devienne volatile, remplacez 0 par 1 ; puis redonnez la valeur 0 si vous revenez en phase de création ...
** référence absolue = référence du type A1 au lieu de A1 (référence relative).*

➢ **simulation_uniforme(*borne_inf;borne_sup;entière; volatile*)**

⇨ simule une loi uniforme sur un intervalle

borne_inf	borne inférieure de l'intervalle
borne_sup	borne supérieure de l'intervalle
entière	VRAI si on veut des valeurs entières, sinon FAUX
volatile	VRAI si on veut que la simulation soit recalculée à chaque entrée, sinon FAUX

✎ Remarques :
- simulation_uniforme(0;1;FAUX; VRAI) équivaut à ALEA().
- simulation_uniforme(*borne_inf; borne_sup*;VRAI;VRAI) équivaut à ALEA.ENTRE.BORNES(*borne_inf;borne_sup*).

➢ **simulation_bernoulli(p;volatile)**

⇨ simule une loi de Bernoulli

p	probabilité de succès
volatile	VRAI si on veut que la simulation soit recalculée à chaque entrée, sinon FAUX

- **simulation_binomiale(n;p;volatile)**

⇨ simule une loi binomiale

n	nombre d'épreuves
p	probabilité de succès
volatile	VRAI si on veut que la simulation soit recalculée à chaque entrée, sinon FAUX

- **simulation_géométrique(*p;volatile*)**

⇨ simule une loi géométrique

p	probabilité de succès
volatile	VRAI si on veut que la simulation soit recalculée à chaque entrée, sinon FAUX

- **simulation_poisson(*lambda;volatile*)**

⇨ simule une loi de Poisson

lambda	moyenne
volatile	VRAI si on veut que la simulation soit recalculée à chaque entrée, sinon FAUX

- **simulation_normale(*m;sigma;volatile*)**

⇨ simule une loi normale

m	moyenne
sigma	écart-type
volatile	VRAI si on veut que la simulation soit recalculée à chaque entrée, sinon FAUX

- **simulation_exponentielle(*lambda;volatile*)**

⇨ simule une loi exponentielle

lambda	paramètre
volatile	VRAI si on veut que la simulation soit recalculée à chaque entrée, sinon FAUX

- **simulation_weibull(*bêta;gamma;eta;volatile*)**

⇨ simule une loi de Weibull

bêta	paramètre de forme
gamma	paramètre d'échelle
eta	paramètre de repérage
volatile	VRAI si on veut que la simulation soit recalculée à chaque entrée, sinon FAUX

- **tirage_avec_remise(*borne_inf;borne_sup;volatile*)**

⇨ renvoie une matrice ligne d'entiers tirés au sort entre deux nombres avec remise

borne_inf	entier inférieur
borne_sup	entier supérieur
volatile	VRAI si on veut que la simulation soit recalculée à chaque entrée, sinon FAUX

☞ *Sélectionner une plage dans une ligne, saisir la formule et, le curseur étant dans la barre de formule, entrer en maintenant les touches Ctrl+Maj enfoncées.*

✎ Exemple d'utilisation : simuler une série de tirages à la roulette...

- **tirage_sans_remise(*borne_inf;borne_sup;volatile*)**

⇨ renvoie une matrice ligne d'entiers tirés au sort entre deux nombres avec remise

borne_inf	entier inférieur
borne_sup	entier supérieur
volatile	VRAI si on veut que la simulation soit recalculée à chaque entrée, sinon FAUX

☞ *Sélectionner une plage dans une ligne, saisir la formule et, le curseur étant dans la barre de formule, entrer en maintenant les touches Ctrl+Maj enfoncées.*

✎ Exemples d'utilisation : simuler des tiercés, des tirages du loto...

2° Fonctions de statistique descriptive :

Les fonctions statistiques standard d'Excel ne calculent que les caractéristiques d'une série de valeurs en vrac et ne permettent donc pas de calculer, de façon simple, ces caractéristiques dans le cas d'une série statistique (valeurs avec effectifs).

➢ **moyenne_pondérée(valeurs_x; effectifs_n)**

⇨ renvoie la moyenne arithmétique d'une série, de valeurs affectées d'effectifs.

valeurs_x plage des valeurs dont on calcule la moyenne
effectifs_n plage contenant les effectifs dont sont affectées ces valeurs
(les deux plages doivent avoir la même forme)

➢ **variance_pondérée_p(valeurs_x; effectifs_n)**

⇨ renvoie la variance d'une série, considérée comme une population, de valeurs affectées d'effectifs.

valeurs_x plage des valeurs dont on calcule la variance
effectifs_n plage contenant les effectifs dont sont affectées ces valeurs
(les deux plages doivent avoir la même forme)

➢ **variance_pondérée(valeurs_x; effectifs_n)**

⇨ renvoie la variance d'une série, considérée comme un échantillon, de valeurs affectées d'effectifs.

valeurs_x plage des valeurs dont on calcule la variance
effectifs_n plage contenant les effectifs dont sont affectées ces valeurs
(les deux plages doivent avoir la même forme)

➢ **écart_type_pondéré_p(valeurs_x; effectifs_n)**

⇨ renvoie l'écart-type d'une série, considérée comme une population, de valeurs affectées d'effectifs.

valeurs_x plage des valeurs dont on calcule l'écart-type
effectifs_n plage contenant les effectifs dont sont affectées ces valeurs
(les deux plages doivent avoir la même forme)

➢ **écart_type_pondéré(valeurs_x; effectifs_n)**

⇨ renvoie l'écart-type d'une série, considérée comme un échantillon, de valeurs affectées d'effectifs.

valeurs_x plage des valeurs dont on calcule l'écart-type
effectifs_n plage contenant les effectifs dont sont affectées ces valeurs
(les deux plages doivent avoir la même forme)

➢ **écart_moyen_pondéré(valeurs_x; effectifs_n)**

⇨ renvoie l'écart moyen d'une série de valeurs affectées d'effectifs.

valeurs_x plage des valeurs dont on calcule la variance
effectifs_n plage contenant les effectifs dont sont affectées ces valeurs
(les deux plages doivent avoir la même forme)

➢ **médiane_pondérée(valeurs_x; effectifs_n)**

⇨ renvoie la médiane d'une série de valeurs affectées d'effectifs.

valeurs_x plage des valeurs dont on calcule la variance
effectifs_n plage contenant les effectifs dont sont affectées ces valeurs
(les deux plages doivent avoir la même forme)

3° Fonctions de statistique inférentielle :

Ces fonctions permettent d'estimer les caractéristiques d'une population à partir d'un échantillon.

- **int_conf_fréquence(confiance;fréquence_effectif_ou_valeurs;taille_éch_ou_valeur;taille_pop)**

⇨ renvoie une matrice horizontale de deux cellules contenant les bornes de l'intervalle de confiance d'une fréquence. Les données peuvent être la fréquence ou l'effectif, dans un échantillon, de la valeur du caractère qu'on veut estimer dans la population, ou des valeurs numériques en vrac dans une plage.

confiance	niveau de confiance
fréquence_effectif_ou_valeurs	fréquence ou effectif dans l'échantillon ou plage de valeurs numériques en vrac
taille_éch_ou_valeur	taille de l'échantillon ou valeur du caractère étudiée dans le cas de valeurs en vrac
taille_pop	taille de la population dans le cas de tirages exhaustifs, si elle est connue (argument facultatif)

☞ *Sélectionner une plage de deux cellules dans une ligne, saisir la formule et, le curseur étant dans la barre de formule, entrer en maintenant les touches Ctrl+Maj enfoncées.*

- **int_conf_moyenne(confiance; m_éch_ou_valeurs_x; taille_éch_ou_effectifs_n; écartype_pop_connu; écartype; taille_pop)**

⇨ renvoie une matrice horizontale de deux cellules contenant les bornes de l'intervalle de confiance d'une moyenne. Les données peuvent être la moyenne des valeurs d'un échantillon, ou des valeurs en vrac dans une plage, ou des valeurs dans une plage associées à des effectifs dans une autre plage.

confiance	niveau de confiance
m_éch_ou_valeurs_x	moyenne de l'échantillon ou plage des valeurs de l'échantillon
taille_éch_ou_effectifs_n	taille de l'échantillon ou plage contenant les effectifs dont sont affectées ces valeurs ou rien si ces valeurs ne sont pas pondérées
écartype_pop_connu	VRAI si on connaît l'écart-type de la population, sinon FAUX
écartype	écart-type de la population s'il est connu (VRAI) ou écart-type de l'échantillon s'il est connu (FAUX) sinon rien
taille_pop	taille de la population dans le cas de tirages exhaustifs, si elle est connue (argument facultatif)

☞ *Sélectionner une plage de deux cellules dans une ligne, saisir la formule et, le curseur étant dans la barre de formule, entrer en maintenant les touches Ctrl+Maj enfoncées.*

- **stock_alerte_poisson(lambda, risque)**

⇨ renvoie, pour une gestion de pièces détachées de consommation moyenne connue durant la période du délai de livraison, le stock d'alerte au risque α , c'est à dire la plus petite valeur de k telle que $P(X \leq k) > 1-\alpha$, où X est la variable aléatoire qui à toute période égale au délai de livraison associe la consommation durant cette période.

lambda	consommation moyenne sur la période du délai de livraison
risque	probabilité de rupture de stock

- **stock_alerte_normal(m, sigma, risque)**

⇨ renvoie, pour une gestion de consommables dont la consommation a une moyenne et un écart-type connus pour la période du délai de livraison, le stock d'alerte au risque α,c'est à dire le plus petit entier k tel que $P(X \leq k) > 1-\alpha$, où X est la variable aléatoire qui à toute période égale au délai de livraison associe la consommation durant cette période.

m	consommation moyenne sur la période du délai de livraison
sigma	écart-type de la consommation sur la période du délai de livraison
risque	probabilité de rupture de stock

4° Fonctions de probabilités :

Excel fournit en standard la fonction réciproque de la fonction de répartition d'une loi normale mais pas d'une loi de Poisson.
Excel fournit en standard la fonction LOI.WEIBULL(), mais ses paramètres n'ont pas été francisés et elle ignore le paramètre γ .

- **poisson_inverse(lambda, probabilité)**

⇨ Renvoie, pour une probabilité p donnée, la plus petite valeur de k telle que $P (X \leq k) > p$, où X suit la loi de Poisson de paramètre λ.

lambda	paramètre λ
probabilité	probabilité p

- **weibull(t, bêta, gamma, eta, cumulative)**

⇨ Renvoie, des probabilités de défaillances par une variable aléatoire T qui suit la loi de Weibull de paramètres β , γ et η.

t	temps de bon fonctionnement ou instant d'une défaillance
bêta	paramètre de forme β
gamma	paramètre de position γ
eta	paramètre déchelle η
cumulative	VRAI si on veut la probabilité d'un TBF t soit : $R(t) = P (T \geq t)$ FAUX si on veut la probabilité d'une défaillance à l'instant t soit : $P (T = t)$

Références

[1] BOULEAU Nicolas - "Probabilités de l'ingénieur : variables aléatoires et simulation" - Hermann 1986.

[2] DEWDNEY Alexander - "Le hasard simulé" - Dossier "Pour la science" : "Le hasard" - Hors série avril 96.

[3] ENGEL Arthur – "Les certitudes du hasard" – ALEAS Editeur 1990.

[4] FAURE Robert - "Précis de recherche opérationnelle" - DUNOD 1993.

[5] RADE Lennart - "Tentez votre chance avec votre calculateur programmable" - CEDIC 1977 (épuisé).

[6] SAADA Daniel - "Simulation d'une loi normale : applications aux sondages" - Bull. APMEP 379, juin 91.

[7] SAPORTA Gilbert - "Probabilités, analyse des données et statistique" - TECHNIP 1990.

[8] COLLECTIF – "Enseigner les probabilités au lycée" – Commission inter-IREM "Statistique et probabilités" – 1997 (en particulier les articles de M. HENRY et G. GIRARD).

[9] COLLECTIF – "Simulation et statistique en Seconde" – Commission inter-IREM "Lycées technologiques" – 2000.