PUBLICATION 27 DU GROUPE INTER-IREM "LYCEES TCHNIQUES"

EXERCICES POUR S.T.S.

NOMBRES COMPLEXES
TRANSFORMATION DE LAPLACE
SERIE DE FOURIER
COURBES PLANES
MODELISATION GEOMETRIQUE

FASCICULE 2

Université PARIS-NORD
IREM - Institut Galilée
Avenue J.B. Clément
93430 VILLETANEUSE

1994

UNIVERSITE DE PARIS-NORD
IREM

EXERCICES ET PROBLÈMES DE B.T.S.

ISBN 2 86240 80 7

GENEVIÈVE CHAVIGNY : IREM DE BESANÇON
HÉLÈNE DELCLAUX : IREM DE PARIS-NORD
FRANÇOISE DELZONGLE : IREM DE PARIS-NORD
JEAN MATIVET : IREM DE PARIS-NORD
BERNARD VERLANT : IREM DE PARIS-NORD

Retirage Janvier 1994

600 ex.

40,00 F.

AVANT PROPOS

Cette brochure regroupe des exercices ou problèmes posés aux épreuves de B.T.S. des dernières années.

Afin d'élargir les champs d'investigation, les textes ont été regroupés par thèmes ; dans chaque thème, les sujets ont été généralement classés par ordre de difficulté croissante.

La plupart des énoncés ont été modifiés pour améliorer la compréhension et la progressivité.

SOMMAIRE

NOMBRES COMPLEXES

NOMBRES COMPLEXES : MODULE ET ARGUMENT - REPRESENTATION GRAPHIQUE

1 - Electrotechnique 1989

En électronique on utilise la fonction de transfert T *de la pulsation* ω *définie par :*

$$T(\omega) = \frac{K}{(1+j\omega\tau)^3}$$ *où* K *et* τ *sont des nombres réels positifs, et où* *j est le nombre complexe de module* 1 *et d'argument* $\frac{\pi}{2}$.

Pour améliorer les qualités du filtre, on réalise une contre-réaction sur le montage correspondant et on obtient alors la nouvelle fonction de transfert :

$$H(\omega) = \frac{T(\omega)}{1 + T(\omega)} .$$

Le but du problème est d'utiliser un diagramme représentant T *pour obtenir graphiquement certaines caractéristiques de* H. *Pour cette étude on se ramène au cas où* $\tau = 1$ *et* $K = 4$, *<u>ce que l'on supposera dans toute la suite du problème</u>.*

1°) *Sur la feuille ci-jointe, on donne l'ensemble* C *des points* M *du plan d'affixe* $T(\omega)$ *quand* ω *décrit l'intervalle* $[0, +\infty[$.

Calculer $T(0)$, $T\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$, $T(1)$, $T(\sqrt{3})$ *et placer leurs images respectives* M_0, M_1, M_2, M_3 sur la courbe C.

2°) *Calculer les modules et arguments de* $H(0)$, $H(1)$ *et* $H(\sqrt{3})$.

3°) *On se propose de déterminer un procédé graphique pour obtenir le module et un argument de* $H(\omega)$.

On note A *le point d'affixe* -1 *et* M *le point d'affixe* $T(\omega)$.

a) Montrer que le module de $H(\omega)$ *est égal à* $\frac{MO}{MA}$.

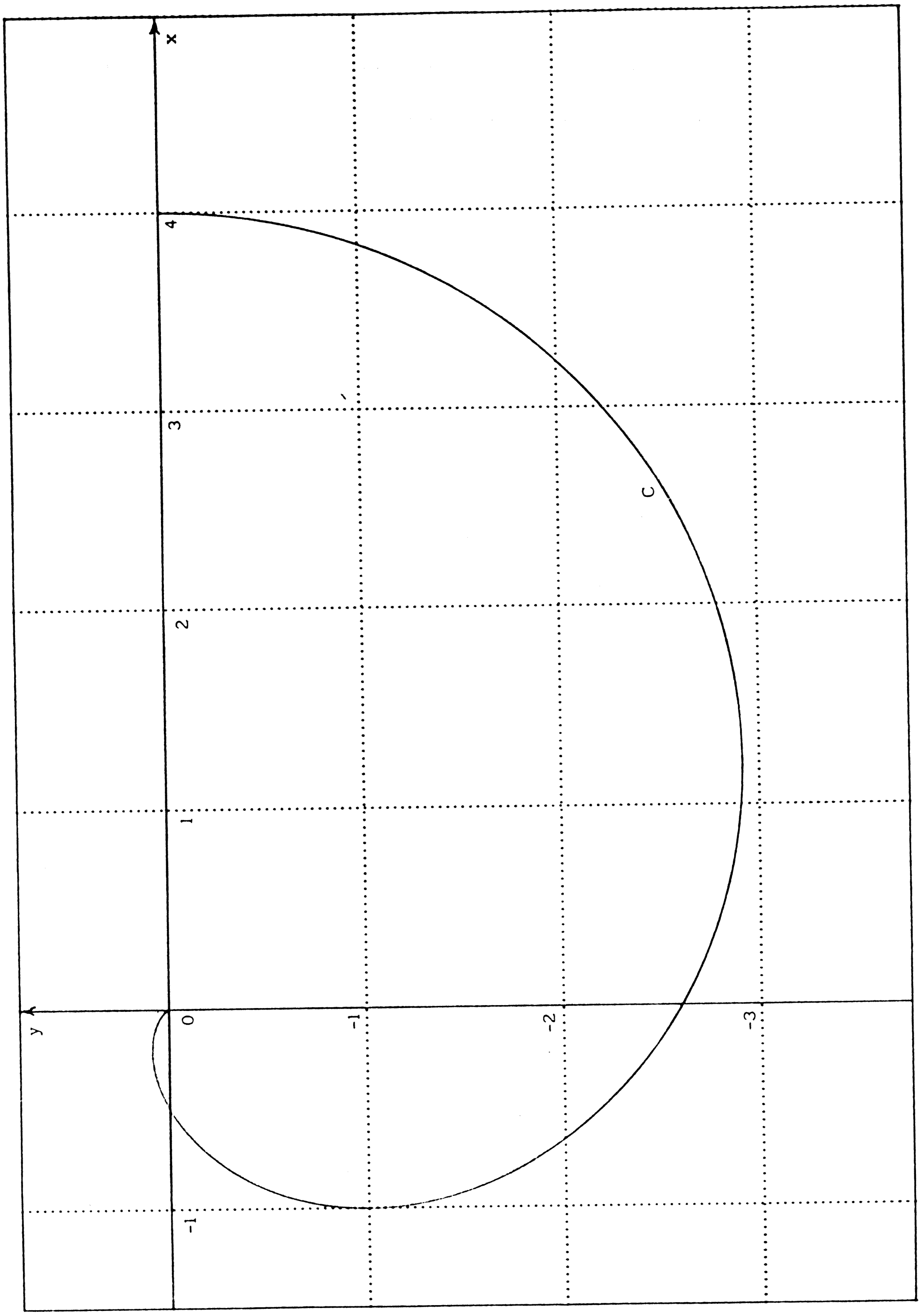
b) Montrer qu'un argument de $H(\omega)$ *est égal à l'angle* $(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MO})$.

c) En utilisant ce qui précède, expliquer comment on peut retrouver les résultats de la question 2° par une lecture graphique.

4°) *Déterminer par une lecture graphique*

a) les différentes valeurs de l'argument de $H(\omega)$ *quand* $|H(\omega)| = 1$;

b) le module de $H(\omega)$ *quand l'argument de* $H(\omega)$ *est égal à* $-\frac{\pi}{2}$.


x
y
4
3
2
1
0
-1
-1
-2
-3
C

2 - Microtechniques 1987

Soient M_1 et M_2 les images, dans le plan complexe, de deux nombres complexes z_1 et z_2.

Déterminer une relation entre les parties réelles et imaginaires de z_1 et z_2 pour que l'on ait :

$$|z_1 + z_2| = |z_1 - z_2|$$

(on pourra poser $z_1 = a_1+ib_1$ et $z_2 = a_2+ib_2$ où i est le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$).

En déduire que, si $z_2 \neq 0$, le nombre complexe $\frac{z_1}{z_2}$ est imaginaire pur.

O étant l'origine du plan complexe, que peut-on dire du triangle OM_1M_2 ?

3 - Moteurs à combustion interne 1988 *(extraits)*

j désigne le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$.

Pour tout nombre complexe z ($z \neq -i$), on pose :

$$Z = \frac{z^2}{z + i}$$

1) Calculer la partie réelle et la partie imaginaire de Z en fonction de x et y, partie réelle et partie imaginaire respectives de z.

2) Déterminer l'ensemble (E) des points M du plan complexe, d'affixe z, tels que Z soit imaginaire pur. Représenter (E) dans un plan rapporté à un repère orthonormal $(O , \vec{i} , \vec{j})$.

3) Déterminer une équation cartésienne de l'ensemble (C) des points M du plan complexe, d'affixe z, tels que Z soit réel.

NOMBRES COMPLEXES : EQUATIONS A COEFFICIENTS RÉELS OU COMPLEXES

4 - Productique Textile 1991

On considère le polynôme défini dans $\mathbb{C}$ par :

$$P(z) = z^3 - 7z^2 + 19z - 13$$

1) Déterminer trois nombres réels a, b, c tels que :

$$P(z) = (z-1)(az^2 + bz + c)$$

2) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$.

3) Dans un repère orthonormal, placer les points A, B, C, images des solutions de cette équation.

Calculer les longueurs AB, AC et BC ; en déduire la nature du triangle ABC.

5 - Electronique 1979

Soit le polynôme h de la variable complexe z tel que :

$$h(z) = z^3 - 3(1-j)z^2 - 8jz + 4j(1-j),$$

j désignant le nombre complexe tel que $j^2 = -1$.

1) Mettre h(z) sous la forme $A(x) + j\,B(x)$ dans le cas où z est le nombre réel x.

En déduire que l'équation $h(z) = 0$ admet une solution réelle que l'on déterminera.

2) Mettre z-2 en facteur dans h(z).
En déduire les solutions de l'équation $h(z) = 0$.

6 - Electronique 1981

j désigne le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$.

Soit P la fonction polynôme de la variable complexe z définie par :

$$P(z) = z^3 + az^2 + bz + c.$$

1) Déterminer les trois nombres complexes a, b, c sachant que :

$$P(2j) = 0 \quad ; \quad P(j) = -2-j \quad ; \quad P(1) = 1-2j .$$

2) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation d'inconnue u :

$$u^2 - 2u + 2 = 0 .$$

3) Déduire de ce qui précède les solutions de l'équation :

$$P(z) = 0 .$$

7 - Electronique 1986

Soit le polynôme P de la variable complexe z défini par :

$$P(z) = z^3 - 2(1+j)z^2 + 5jz + 1-7j$$

où j est le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$.

1 - Calculer P(1-j), puis résoudre l'équation P(z) = 0.

2 - Représenter dans le plan muni d'un repère orthonormal les points A, B et C d'affixes respectives z_1, z_2 et z_3 où z_1, z_2 et z_3 sont les solutions de l'équation P(z) = 0.

Calculer l'aire $\mathcal{A}$ du triangle ABC (on rappelle que $\mathcal{A} = \frac{1}{2} \|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\|$).

8 - Exploitation des véhicules à moteurs 1985

j est le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$.

Soit le polynôme P de la variable complexe z tel que :

$$P(z) = z^3 + (6-3j)z^2 + (9-14j)z - 15j .$$

1) Calculer P(-3) puis résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation P(z) = 0.

2) Représenter dans le plan complexe par leurs images M_1, M_2, M_3, les solutions z_1, z_2, z_3 de l'équation P(z) = 0 et montrer que les points M_1, M_2, M_3 sont alignés.

9 - Exploitation des véhicules à moteurs 1983

1) Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation :

$$x^2 + 12 = 0.$$

On donnera, pour chaque solution, d'une part sa partie réelle et sa partie imaginaire, d'autre part son module et un argument.

2) Calculer module et argument du nombre complexe $1 + i\sqrt{3}$ (i désigne le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$).

En déduire les solutions de l'équation $z^2 = 1 + i\sqrt{3}$.

On donnera, pour chaque solution, les mêmes éléments que ceux demandés dans la première question.

3) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$$z^4 + 2z^2 + 4 = 0.$$

Démontrer que, dans le plan complexe, les quatre points d'affixes respectives les quatre racines de l'équation précédente sont les sommets d'un rectangle que l'on représentera.

---

10 - Etude de prix du bâtiment 1986

On donne le polynôme de la variable complexe z :

$$P(z) = z^3 - (7+3i)z^2 + (16+15i)z + 2-36i$$

où i est le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$.

1 - Démontrer que l'équation $P(z) = 0$ admet dans $\mathbb{C}$ une solution z_1 de la forme $z_1 = bi$, où b est un nombre réel que l'on déterminera.

2 - Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$.

3 - Placer, dans le plan complexe, les points A, B, C, d'affixes respectives $z_1 = 2i$, $z_2 = 3-2i$ et $z_3 = 4+3i$.

Calculer la valeur exacte de la longueur de chaque côté du triangle ABC.

Calculer, en degrés décimaux, à 10^{-2} près, une mesure de chaque angle du triangle ABC.

---

11 - Blanchiment 1987

---

1 - Calculer $\Omega = (3-2i)^2$.

2 - On considère l'équation (1)

$$\begin{cases} z \in \mathbb{C} \\ z^3 - (1+4i)z^2 + (-9+i)z + 18i - 6 = 0 \end{cases}$$

a) Montrer que (1) admet une solution réelle.

b) Résoudre l'équation (1).

3 - Placer, dans le plan complexe, les images des solutions de l'équation (1). Quelle est la nature du triangle obtenu ?

12 - Adjoint technique d'entreprise du bâtiment 1982

A tout nombre complexe z non nul, on associe le nombre complexe :

$$Z = \frac{1}{2}\left(z - \frac{i}{z}\right).$$

On désigne par M et P les images respectives de z et Z dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormal.

1 - Déterminer les valeurs de z pour lesquelles on a $Z = 2+2i$.

2 - On utilise la forme trigonométrique $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ ($r > 0$ et $-\pi < \theta \leq \pi$).

Calculer, en fonction de r et θ, les coordonnées (X , Y) du point P.

3 - On appelle (C) l'ensemble des points M du plan tels que Z soit imaginaire pur. Déterminer une relation entre r et θ caractérisant les points M appartenant à (C).

13 - Maintenance 1987

1 - Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation :

$$z^2 - z + 1 = 0$$

Donner les solutions sous forme algébrique et trigonométrique.

2 - Soit : $P(z) = z^3 - (1+i)z^2 + (1+i)z - a.$

2.1 - Trouver le nombre complexe a pour que i soit solution de l'équation $P(z) = 0$.

2.2 - Montrer qu'on peut mettre $(z-i)$ en facteur dans $P(z)$.

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$.

3 - Déduire de la question 1 la résolution de l'équation :

$$Z^4 - Z^2 + 1 = 0$$

Donner les solutions sous forme trigonométrique et les représenter dans le plan complexe.

NOMBRES COMPLEXES ET TRANSFORMATIONS GEOMETRIQUES

14 - Electronique 1977

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormal, on considère les points :

m d'affixe $z = x+iy$

M d'affixe $Z = X+iY$ tel que $Z = \frac{1+z}{1-z}$

A d'affixe 1.

1 - a) Démontrer que si le nombre complexe $z = x+iy$ a l'unité pour module, le nombre $Z = \frac{1+z}{1-z}$ $(z \neq 1)$ est imaginaire pur.

Préciser alors l'ensemble (C) des points m et l'ensemble (Δ) des points M.

b) Démontrer que pour tout z appartenant à $\mathbb{C} - \{1\}$ et tel que $|z| = 1$, les points A, m et M sont alignés.

En déduire la construction du point M connaissant m.

2 - Déterminer une équation cartésienne de l'ensemble (Γ) des points m tels que $|Z| = \sqrt{2}$.

Préciser la nature de (Γ).

15 - Informatique industrielle 1989

On se propose d'utiliser les nombres complexes et leur lien avec des transformations géométriques pour construire, sur un écran graphique, une figure formée de carrés concentriques emboîtés à partir de la donnée d'un point.

Le plan complexe $\mathcal{P}$ est muni d'un repère orthonormal direct $(O\ ;\ \vec{u}\ ,\ \vec{v})$.

I - Construction d'un carré de centre O à partir d'un point.

Soit A un point du plan $\mathcal{P}$, distinct de O. On note z_A son affixe, (X_A , Y_A) ses coordonnées. On se propose de déterminer une procédure permettant de tracer le carré ABCD, de centre O, direct (c'est-à-dire tel que $(\overrightarrow{OA} , \overrightarrow{OB}) = + \frac{\pi}{2}$).

1 - Faire une figure (on prendra pour A le point d'affixe $z_A = 2 + i$).

2 - On revient au cas où A est un point quelconque distinct de O.
On note z_B, z_C, z_D les affixes respectives des points B, C, D.

a) Montrer que $z_B = i\, z_A$.

b) Calculer z_C et z_D en fonction de z_A.

3 - On note (X_B , Y_B), (X_C , Y_C), (X_D , Y_D) les coordonnées respectives des points B, C et D.

a) Calculer (X_B , Y_B) en fonction de (X_A , Y_A).

b) Calculer (X_C , Y_C) et (X_D , Y_D) en fonction de (X_A , Y_A).

4 - On suppose que l'on dispose d'une procédure graphique :

TRACE (X_M , Y_M , X_N , Y_N) traçant le segment [MN], les points M et N étant définis par leurs coordonnées respectives (X_M , Y_M) et (X_N , Y_N).
Ecrire une procédure CARRE (X_A , Y_A) traçant le carré ABCD direct de centre O et dont un sommet est A.

II - Construction de carrés de centre O à partir d'un point.

1 - Soit $\mathcal{S}$ l'application du plan complexe $\mathcal{P}$ dans lui-même qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe $z' = \frac{1}{2}(1+i)\, z$

Déterminer la nature géométrique de $\mathcal{S}$.

2 - Le carré ABCD construit à partir du point A dans la partie I est supposé donné. On note A', B', C', D' les images respectives par $\mathcal{S}$ des points A, B, C, D.

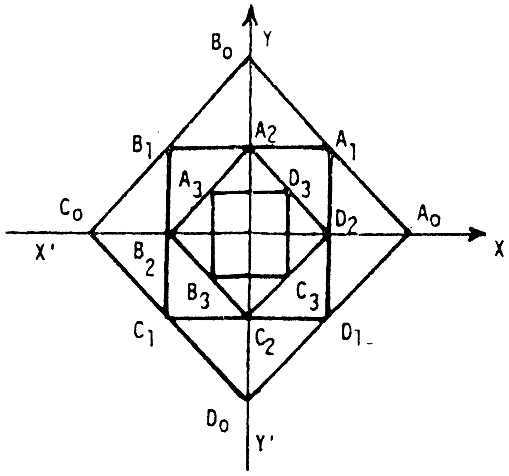
a) Montrer que A' est le milieu de [AB].

b) En déduire que B', C', D' sont les milieux respectifs des segments [BC], [CD], [DA] et que A'B'C'D' est un carré direct de centre O.

c) Calculer les coordonnées $(X_{A'} , Y_{A'})$ du point A' en fonction des coordonnées (X_A , Y_A) du point A.

3 - On se propose de réaliser un dessin correspondant à la figure ci-dessous avec dix carrés emboîtés. Le premier carré est $A_0B_0C_0D_0$ défini par le point A_0 de coordonnées (k , 0) où k est un réel strictement positif.

Le deuxième est le carré $A_1B_1C_1D_1$. On itère le même procédé jusqu'au dixième carré.



En utilisant la procédure CARRE définie dans la partie I donner un algorithme permettant de réaliser un tel dessin.

16 - Géomètre Topographe 1993

Dans le plan complexe orienté, d'origine O, on considère un triangle ABC dont les sommets A, B et C ont respectivement pour affixes les nombres complexes a, b et c.

Le triangle est choisi de telle sorte que le sens de parcours A B C soit le sens trigonométrique.

A' désigne le milieu du segment [BC].

1° On construit, extérieurement au triangle ABC, les triangles rectangles isocèles BPC, CQA et ARB (respectivement rectangles en P, en Q et en R).

a) Montrer que l'affixe p du point P est donnée par : $p = \dfrac{b + c}{2} + i\,\dfrac{b - c}{2}$.

b) Exprimer de la même façon les affixes q et r des points Q et R.

c) Déduire de ces résultats que les triangles ABC et PQR ont même isobarycentre (centre de gravité).

2° Quelle est la nature du triangle A'QR ?

3° Etablir que p-a = i(r-q) ; en déduire que les droites (AP) et (QR) sont perpendiculaires.

4° Déduire de ce qui précède que les droites (AP), (BQ) et (CR) sont concourantes.

17 - Electronique 1988

Le but de cet exercice est d'étudier une méthode de représentation rapide d'un cercle sur un terminal graphique d'ordinateur, en n'utilisant que des calculs peu coûteux en temps d'exécution. Pour cette raison, l'usage des fonctions trigonométriques, ou la représentation à l'aide d'une équation cartésienne ne conviennent pas. On se propose donc de construire un arc de cercle comme image d'un segment par une transformation géométrique simple, le reste du cercle étant obtenu à l'aide de symétries convenables.

Soit $\mathcal{P}$ le plan complexe rapporté au repère orthonormal $(O\ ;\ \vec{u}\ ,\ \vec{v}\ )$ (unité graphique : 5 cm).

i est le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$.

Soit $\mathcal{C}$ l'ensemble des points N(t) d'affixe $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{it}$, où t parcourt l'intervalle $[-\pi\ ;\ +\pi]$.

1°) Montrer que $\mathcal{C}$ est un cercle et préciser son centre Ω et son rayon R.

Représenter $\mathcal{C}$ et placer les points $A_k = N\left(k\frac{\pi}{4}\right)$ d'affixe $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{\frac{ik\pi}{4}}$, pour k entier relatif variant de -4 à 4.

Sur la même figure, représenter en couleur l'arc Γ de $\mathcal{C}$ décrit par N(t) lorsque t varie de 0 à $\frac{\pi}{4}$.

2°) Démontrer que les points $N\left(\frac{\pi}{2} - t\right)$ et N(t) sont symétriques par rapport à la droite ΩA_1.

Quel est l'arc de $\mathcal{C}$ décrit par $N\left(\frac{\pi}{2} - t\right)$ lorsque t varie de 0 à $\frac{\pi}{4}$?

Démontrer que les points $N(\pi - t)$ et N(t) sont symétriques par rapport à la droite ΩA_2.

Quel est l'arc de $\mathcal{C}$ décrit par $N\left(\pi - t\right)$ lorsque t varie de 0 à $\frac{\pi}{2}$?

Démontrer que les points N(-t) et N(t) sont symétriques par rapport à l'axe réel.

Quel est l'arc de $\mathcal{C}$ décrit par N(-t) lorsque t varie de 0 à π ?

3°) Soit $\mathcal{D}$ la droite ensemble des points m, d'affixe $z = 1 + iu$, où u est un nombre réel.

A tout point m de $\mathcal{D}$, d'affixe z, on fait correspondre le point M dont l'affixe est $Z = \dfrac{1}{\bar{z}}$ où $\bar{z}$ désigne le conjugué de z.

a) Comparer Arg(z) et Arg(Z) ; Que peut-on en déduire pour les points O, m et M ?

b) Calculer la partie réelle X et la partie imaginaire Y du nombre complexe Z en fonction de u.

Donner, en fonction de u, les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{\Omega M}$.

Calculer le module de $Z - \frac{1}{2}$.

Quel est l'ensemble des points M lorsque m décrit $\mathcal{D}$?

c) Déterminer u tel que $M = A_0$ puis tel que $M = A_1$.

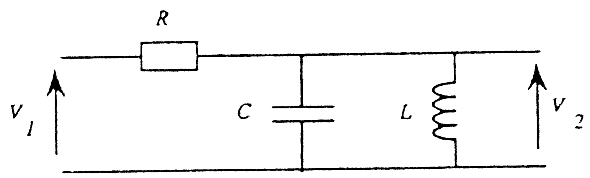
(Les points A_0 et A_1 étant ceux définis à la question 1).

d) Quel est l'ensemble des points M lorsque u varie de 0 à $\sqrt{2} - 1$?

---

18 - CIRA 1990

A l'aide d'une résistance R, d'une inductance L et d'une capacité C, on réalise le quadripôle ci-contre.



Le signal d'entrée est une tension alternative V_1 de pulsation ω ($\omega \in]0,+\infty[$) et le signal de sortie la tension V_2.

La transmittance du montage est alors la fonction F définie sur $]0,+\infty[$ par :

$$F(\omega) = \frac{1}{1 + jR\left(C\omega - \frac{1}{L\omega}\right)} \qquad (R > 0\ ;\ C > 0\ ;\ L > 0).$$

1) On note $H(\omega)$ le module de $F(\omega)$ (gain du système).
Montrer que :

$$H(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + R^2\left(C\omega - \frac{1}{L\omega}\right)^2}}$$

2-a) Soit U la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par :

$$U(\omega) = 1 + R^2\left(C\omega - \frac{1}{L\omega}\right)^2$$

On note U' la dérivée de la fonction U. Montrer que :

$$U'(\omega) = \frac{2R^2}{L\omega}\left(C + \frac{1}{L\omega^2}\right)\left(LC\omega^2 - 1\right).$$

b) Montrer que $H'(\omega)$ et $U'(\omega)$ sont de signes contraires.

Etudier les variations de la fonction H sur $]0,+\infty[$. On précisera ses limites en 0 et $+\infty$.

3) Donner l'allure de la représentation graphique de la fonction H dans un repère orthogonal.

4) On note ω_0 la valeur de ω pour laquelle la fonction H admet un maximum. On appelle alors "pulsation de coupure à -3 dB (décibel)" toute valeur de ω telle que :

$$H(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}} H(\omega_0).$$

Montrer graphiquement que le filtre présente deux pulsations de coupure ω_1 et ω_2 $(0 < \omega_1 < \omega_2)$. Calculer ω_1 et ω_2.

5) L'intervalle $[\omega_1,\omega_2]$ est appelé "bande passante" du filtre. Déterminer la longueur de la bande passante du filtre.

Seules les fréquences situées dans la bande passante du filtre sont transmises. Ce filtre est donc appelé "passe -bande".

6) On se propose, dans cette question, de construire l'ensemble des points d'affixe $F(\omega)$ lorsque ω décrit $]0,+\infty[$ (diagramme de Nyquist)

a) On pose : $$h(\omega) = R\left(C\omega - \frac{1}{L\omega}\right)$$

Etudier les variations de la fonction h lorsque ω décrit $]0,+\infty[$.

b) Représenter dans le plan complexe l'ensemble des points d'affixe $1 + j\,h(\omega)$.

c) En utilisant les propriétés de l'inversion complexe, en déduire l'ensemble Γ des points d'affixe $\frac{1}{1 + j\,h(\omega)}$.

On construira ces deux ensembles sur une même figure.

19 - Electronique 1990

En électronique on utilise la fonction T de la pulsation ω définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$T(\omega) = \frac{K}{R + j\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)}$$

où j désigne le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$,
K est une constante complexe,
R, L et C sont des constantes réelles strictement positives.
La pulsation ω est exprimée en radians/seconde.
On pose $h(\omega) = \frac{1}{R}\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)$, où ω appartient à $]0\,;\,+\infty[$.

Dans ces conditions, $T(\omega) = \frac{K}{R}\,\frac{1}{1 + jh(\omega)}$.

1 - Etudier les variations de la fonction h. Déterminer, en fonction de L et C, la valeur de ω qui annule h.

2 - On se propose d'étudier l'ensemble (E) du plan complexe décrit par le point d'affixe $T(\omega)$ quand ω parcourt $]0\,;\,+\infty[$.

a) Représenter dans le plan complexe l'ensemble Δ des points d'affixe $1+jh(\omega)$.

b) En utilisant les propriétés de l'inversion complexe (définie dans $\mathbb{C}^*$ par $z \longmapsto \frac{1}{z}$), en déduire l'ensemble Γ des points d'affixe $\frac{1}{1 + jh(\omega)}$.

c) Préciser enfin la nature de l'ensemble (E).

d) Avec les données numériques fournies à la fin du texte, représenter graphiquement l'ensemble (E) lorsque $\alpha = 0$ et colorier la partie de (E) correspondant aux valeurs de la fréquence f comprises entre 50 Hz et 100 Hz.

e) En utilisant les résultats précédents, traiter, de même, le cas où $\alpha = \frac{\pi}{6}$.

Données numériques :

La fréquence $f = \frac{\omega}{2\pi}$ est exprimée en Hertz ;

$L = 0{,}05$; $C = 20.10^{-6}$; $R = 50$; $K = 220\, e^{j\alpha}$.

Pour les représentations graphiques, le choix du repère et des unités est laissé à l'initiative du candidat.

20 - Electrotechnique 1991 (Nouvelle Calédonie)

On se propose de déterminer le diagramme d'admittance d'un circuit RLC à partir du diagramme d'impédance par la transformation élémentaire définie dans le plan complexe par $z \longmapsto z' = \frac{1}{z}$.

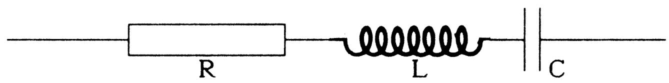
A - A tout point M du plan complexe, différent de l'origine O, d'affixe z, on associe le point M', d'affixe $z' = \frac{1}{z}$.

On donne un réel a strictement positif.

1° Montrer que si $z = a + iy$, alors $\left| z' - \frac{1}{2a} \right| = \frac{1}{2a}$.

2° En déduire que si M est sur la droite (D) d'équation $x = a$ ($a > 0$), son image M' appartient au cercle de centre I $(\frac{1}{2a}$; $0)$ et de rayon $\frac{1}{2a}$.

B - On considère le circuit série suivant :



Son impédance complexe est $Z = R + i\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)$ où ω est la pulsation du courant qui parcourt ce circuit. Un dispositif électronique permet de faire varier ω sur $]0\ ;\ +\infty\ [$.

1° Etudier la fonction $f :]0 ; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$

$$\omega \longmapsto L\omega - \frac{1}{C\omega}$$

En déduire que le diagramme d'impédance, ensemble des points du plan complexe d'affixe Z, est alors la droite d'équation $x = R$. Déduire de l'étude faite dans la partie **A** que le diagramme d'admittance, ensemble des points d'affixe Y telle que $Y = \frac{1}{Z}$, se situe sur un cercle que l'on précisera.

2° Faire une figure. Indiquer sur la droite et le cercle précédents les sens respectifs de déplacement des images de l'impédance et de l'admittance lorsque ω croît.

---

21 - C.I.R.A. 1992

On note j le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$.

La fonction de transfert H(p) d'un système est définie par :

$$H(p) = \frac{2p}{p^2 + 2p + 4}.$$

On se propose, dans cet exercice, de déterminer le "lieu de transfert" associé à la fonction de transfert H(p).

Pour cela on pose $p = j\omega$ avec $\omega \in]0 ; +\infty[$.

1° Montrer que l'on peut écrire : $$H(j\omega) = \frac{1}{1 + j\,f(\omega)}$$

où f est la fonction numérique définie par : $$f(\omega) = \frac{\omega}{2} - \frac{2}{\omega}.$$

2° Etudier les variations de la fonction f sur $]0 ; +\infty[$. On ne demande pas le tracé de la courbe représentative de la fonction f.

3° Quel est l'ensemble (E_1) décrit par le point d'affixe $z = 1 + j\,f(\omega)$ lorsque ω décrit l'intervalle $]0 ; +\infty[$?

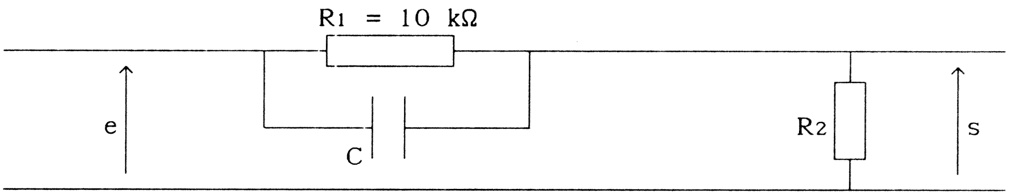
4° Quelle transformation complexe associe au point d'affixe $1 + j\,f(\omega)$ le point d'affixe $Z = \frac{1}{1 + j\,f(\omega)}$?

En déduire l'ensemble (E_2) décrit par le point d'affixe Z lorsque ω décrit l'intervalle $]0 ; +\infty[$.

5° Tacer, sur une même figure, les ensembles (E_1) et (E_2).

L'ensemble (E_2) est le lieu de transfert associé à la fonction de transfert H(p).

22 - Electronique 1993



On considère le filtre ci-dessus où C désigne la capacité d'un condensateur exprimée en Farad, et R_2 la valeur d'un résistor exprimée en Ohm.

Le but de l'exercice consiste à ajuster les valeurs de C et de R_2 pour obtenir un filtre dont les propriétés sont fixées.

La fonction de transfert, en régime harmonique, de ce filtre peut s'écrire :

$$T(\omega) = \alpha \frac{1 + ia\omega}{1 + ib\omega}$$

où :

$$\alpha = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \quad ; \quad a = R_1C \quad ; \quad b = \alpha a \quad ; \quad \omega \in \left]0 \,;\, +\infty\right[$$

et i désigne le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$.

On remarquera que : $0 < \alpha < 1$.

A - 1° Montrer que, pour tout $\omega > 0$, $\quad T(\omega) = \alpha + (1-\alpha) \dfrac{1}{1 - i\dfrac{1}{b\omega}}$

2° Le plan (P) est muni du repère orthonormal $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

Quel est l'ensemble (Δ) des points M d'affixe $z = 1 - i\frac{1}{b\omega}$ lorsque ω décrit $]0 \,;\, +\infty[$?

3° Soit la fonction f définie de $\mathbb{C}^*$ dans $\mathbb{C}$ par :

$$f(z) = \alpha + \frac{1-\alpha}{z} = \alpha + (1-\alpha)\frac{1}{z}$$

et soit F la transformation ponctuelle associée, qui à tout point M d'affixe z du plan privé de O associe le point M' d'affixe f(z).

a) En utilisant les propriétés de la transformation $z \longmapsto \frac{1}{z}$, définir l'ensemble (C_1) des points M_1 d'affixe $\frac{1}{z}$, obtenu lorsque M décrit (Δ).

b) Quelle est la transformation ponctuelle faisant passer de M_1 à M_2 d'affixe $(1-\alpha)\frac{1}{z}$? En déduire l'ensemble (C_2) décrit par le point M_2 lorsque M décrit (Δ).

c) Soit M' le point d'affixe $f(z) = \alpha + (1-\alpha)\frac{1}{z}$; quelle est la transformation faisant passer de M_2 à M' ?

Quel est l'ensemble (C') des points M' obtenus lorsque M décrit (Δ) ?

d) Tracer (Δ), (C_1), (C_2) et (C') dans le cas où $\alpha = \frac{1}{2}$ en choisissant une unité graphique de 12 cm.

3° Soit θ un argument de $T(\omega)$, élément de $]0, \frac{\pi}{2}[$; déterminer graphiquement le point N' de (C') en lequel θ est maximum. On note $A(\omega)$ la valeur maximale de cet argument exprimée en radians. Calculer $\sin\left(A(\omega)\right)$ en fonction de α.

B - Dans cette partie, on se propose de calculer les valeurs de R_2 et de C de sorte que $A(\omega) = \frac{\pi}{6}$ pour une fréquence f = 1 kHz.

On rappelle que $\omega = 2\pi f$ (ω en $rd.s^{-1}$ et f en Hz).

1° De $A(\omega) = \frac{\pi}{6}$, déduire la valeur correspondante de α, puis celle de R_2 (on rappelle que $R_1 = 10 k\Omega$).

2° a) En admettant que $\alpha = \frac{1}{3}$, réaliser une nouvelle figure et construire le point N de (Δ) dont l'image par F est le point N'.

b) Calculer la distance HN (H étant le point d'affixe 1) ; en déduire la valeur de b correspondante, puis celle de C.

ANALYSE SPECTRALE - TRANSFORMATION DE LAPLACE

RECHERCHE DE LA TRANSFORMEE DE LAPLACE D'UNE FONCTION

1 - Informatique industrielle 1989

Soit $\mathcal{U}$ la fonction échelon unité définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par :

si $t < 0$ $\quad \mathcal{U}(t) = 0$
si $t \geq 0$ $\quad \mathcal{U}(t) = 1$

On considère les fonctions définies de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par :

$\sin : t \longmapsto \sin(t)$
$f : t \longmapsto \sin(t)\ \mathcal{U}(t)$
$g : t \longmapsto f(t-\pi)$
$h : t \longmapsto f(t) + g(t)$

1) Soit un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$, l'unité étant le centimètre.

1 - a) Construire les courbes représentatives des fonctions échelon et sinus.

1 - b) Exprimer, suivant la valeur de t, f(t), g(t) et h(t) en fonction de t.

Construire les courbes représentatives des fonctions f, g et h sur des figures distinctes.

2) Déterminer les transformées de Laplace de f, g et h.

3) En déduire, sans faire de calcul intégral, la valeur de l'intégrale

$$\int_0^{\pi} e^{-3t} \sin(t)\, dt$$

2 - Photonique 1991

On note $\mathcal{U}$ la fonction échelon unité.
Soient f et g les deux fonctions de la variable réelle t définies par :

$$f(t) = \mathcal{U}(t) \cos\left(t - \frac{\pi}{3}\right) \qquad g(t) = \mathcal{U}\left(t - \frac{\pi}{3}\right) \cos\left(t - \frac{\pi}{3}\right)$$

On note h la fonction définie par : $\quad h(t) = f(t) - g(t)$

1) Dessiner la courbe représentative de la fonction h (l'étude des variations de h n'est pas demandée).

2) Déterminer les transformées de Laplace F et G de f et g.

3) Calculer $H(p) = F(p) - G(p)$. Que représente H ?

4) Calculer H(1).
Le nombre H(1) représente l'aire d'une surface que l'on caractérisera.
Retrouver la valeur de H(1) par un calcul intégral direct.

TRANSFORMEE DE LAPLACE ET TRANSFORMEE DE LAPLACE INVERSE

3 - C.I.R.A. 1991

$\mathcal{U}$ est la fonction échelon unité définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$\text{si } t < 0 \qquad \mathcal{U}(t) = 0$$
$$\text{si } t \geq 0 \qquad \mathcal{U}(t) = 1$$

La réponse y(t) d'un système soumis à une excitation x(t)

$$\xrightarrow{x(t)} \boxed{\text{système}} \xrightarrow{y(t)}$$

est telle que :

$$Y(p) = \frac{1}{1+10p}\, X(p).$$

où X et Y sont les transformées de Laplace respectives des fonctions x et y.

On considère le signal d'entrée défini par :

$$x(t) = t \text{ si } t \in [0\ ,\ 10\ [$$
$$x(t) = 0 \text{ si } t \in\ ]-\infty\ ,\ 0\ [\ \cup\ [10\ ,\ +\infty\ [.$$

1) Tracer la courbe représentative de la fonction x dans un repère orthonormal.

2) Montrer que, pour tout p strictement positif :

$$X(p) = \frac{1}{p^2} - \frac{1+10p}{p^2}\, e^{-10p}$$

3 - a) Déterminer les nombres réels A, B et C tels que, pour tout p appartenant à $\mathbb{R} - \left\{-\frac{1}{10}\ ,\ 0\right\}$, on ait :

$$\frac{1}{p^2(1+10p)} = \frac{A}{p^2} + \frac{B}{p} + \frac{C}{1+10p}.$$

b) Déterminer la réponse y(t) et préciser son expression sur chacun des intervalles $]-\infty\ ,\ 0\ [$, $[0\ ,\ 10\ [$ et $[10\ ,\ +\infty\ [$.

4 - a) Dresser le tableau de variation sur $[0\ ,\ +\infty[$, de la fonction y.

b) Construire, dans le même repère qu'à la question 1, la courbe représentative de la fonction y.

4 - Electronique 1991

Lors de l'étude des filtres, on note :

v_e le signal d'entrée défini par : $v_e : t \longmapsto v_e(t)$

v_s le signal de sortie défini par $v_s : t \longmapsto v_s(t)$

(v_e et v_s sont des fonctions définies sur $\mathbb{R}^+$)

$\mathcal{U}$ la fonction échelon unité : $\begin{cases} \mathcal{U}(t) = 0 \text{ si } t < 0 \\ \mathcal{U}(t) = 1 \text{ si } t \geq 0 \end{cases}$

V_e et V_s les transformées de Laplace respectives de v_e et v_s.

L'étude physique conduit à définir la fonction de transfert du filtre par :

$$H(p) = \frac{V_s(p)}{V_e(p)}.$$

Dans cet exercice on considère un filtre tel que :

$$H(p) = \frac{p}{2p^2 + 2p + 1} = \frac{\frac{1}{2}p}{\left(p + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}}$$

1 - a) Calculer la transformée de Laplace de la fonction f telle que :

$f(t) = e^{-\alpha t}.\sin(\alpha t).\mathcal{U}(t)$ où α est un réel strictement positif.

b) On suppose $v_e(t) = \mathcal{U}(t)$. Calculer l'expression de $V_s(p)$ puis celle de $v_s(t)$

2 - a) On pose :

$$F(p) = \frac{p}{\left(p^2 + \frac{1}{4}\right)\left(2p^2 + 2p + 1\right)}.$$

Montrer que :

$$F(p) = \frac{\frac{2}{5}p + \frac{2}{5}}{\left(p^2 + \frac{1}{4}\right)} - \frac{\frac{2}{5}p + \frac{4}{5}}{\left(p + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}}$$

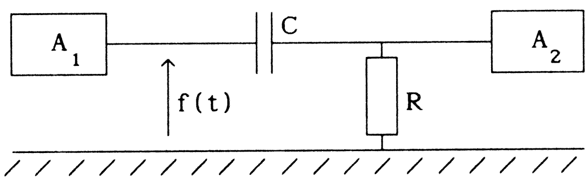
b) On suppose que $v_e(t) = \mathcal{U}(t).\sin\left(\frac{t}{2}\right)$. Calculer l'expression de $V_s(p)$ puis celle de $v_s(t)$.

c) Montrer que :

$$\lim_{t \to +\infty} \left(v_s(t)) - \frac{1}{5}\left[\cos\left(\frac{t}{2}\right) + 2\sin\left(\frac{t}{2}\right)\right]\mathcal{U}(t)\right) = 0.$$

5 - Electrotechnique 1991 (Nouvelle Calédonie)

Une liaison RC entre deux amplificateurs est représentée par le schéma ci-dessous :



On se propose de rechercher grâce à la transformation de Laplace la fonction du temps donnant l'intensité i(t) du courant dans le circuit.

La tension f est définie par :

$$\begin{array}{ll} f(t) = 0 & \text{si } t < 0 \\ f(t) = E & \text{si } 0 \leq t < \tau \\ f(t) = 0 & \text{si } \tau \leq t \end{array}$$

où E et τ sont des nombres réels strictement positifs.

L'intensité satisfait à la relation :

$$R\ i(t) + \frac{1}{C}\int_0^t i(u)\,du = f(t) \qquad (1).$$

On rappelle que la fonction échelon unité $\mathcal{U}$ est définie par :

$$\begin{array}{ll} \mathcal{U}(t) = 0 & \text{si } t < 0 \\ \mathcal{U}(t) = 1 & \text{si } t \geq 0. \end{array}$$

1° Représenter graphiquement f et exprimer f à l'aide de la fonction échelon unité.

2° Déterminer la transformée de Laplace de chacun des deux membres de la relation (1). On notera I(p) la transformée de Laplace $\mathcal{L}(i(t))$.

3° On pose $a = \frac{1}{RC}$. Montrer que I(p) peut s'écrire :

$$I(p) = \frac{E}{R}\left(\frac{1}{p + a} - \frac{e^{-p\tau}}{p + a}\right).$$

4° En déduire l'original de I(p).
On distinguera les trois cas $t < 0$, $0 \leq t < \tau$ et $\tau \leq t$.

5° <u>Application</u> <u>numérique</u> :

On donne :

$E = 200$ V $\quad R = 1\ 000\ \Omega \quad C = 10^{-6}$ F $\quad \tau = 10^{-3}$ s.

Représenter graphiquement la fonction i pour t appartenant à l'intervalle $[0\ ;\ 2.10^{-3}]$.

Unités graphiques : sur l'axe des abscisses 3 cm représentent 10^{-3} s
sur l'axe des ordonnées 2 cm représentent 0,1 A.

UTILISATION DE LA TRANSFORMATION DE LAPLACE POUR LA RESOLUTION D'UNE EQUATION DIFFERENTIELLE

6 - Electronique 1989

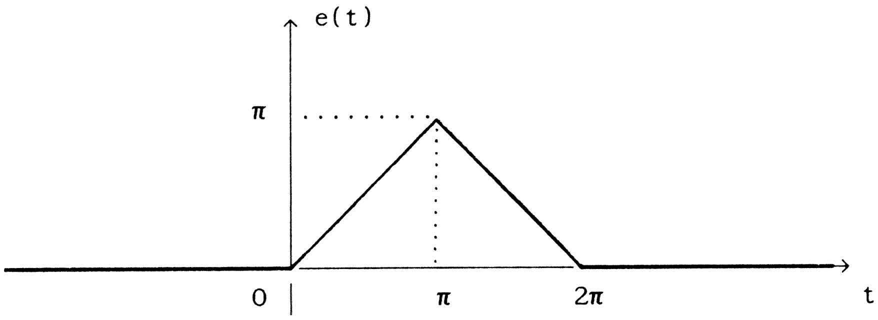
La fonction échelon unité apparaissant dans cet exercice est définie par

$\mathcal{U}(t) = 0$ si $t < 0$
$\mathcal{U}(t) = 1$ si $t \geq 0$.

On se propose de chercher une solution continue sur $\mathbb{R}$ *et dérivable par morceaux de l'équation différentielle :*

(E) $$i''(t) + i(t) = e(t)$$

avec les conditions initiales : $i(0) = i'(0) = 0$ *et où* $e(t)$ *est définie graphiquement par :*



1) *Montrer que, pour tout nombre réel* t, e(t) *peut s'écrire sous la forme :*

$$e(t) = t\,\mathcal{U}(t) - 2\,(t-\pi)\,\mathcal{U}(t-\pi) + (t-2\pi)\,\mathcal{U}(t-2\pi).$$

2) *Déterminer la transformée de Laplace de la fonction :*

$$t \longmapsto e(t)$$

3 - a) *En appliquant la transformation de Laplace aux deux membres de l'équation différentielle* (E), *déterminer la transformée de Laplace de la fonction :*

$$t \longmapsto i(t).$$

b) *Déterminer* $\mathcal{L}^{-1}\left(\dfrac{1}{p^2(p^2+1)}\right)$ *où* $\mathcal{L}^{-1}$ *désigne la transformation de Laplace inverse.*

(on pourra écrire $\dfrac{1}{p^2(p^2+1)} = \dfrac{A}{p^2} + \dfrac{B}{p} + \dfrac{Cp+D}{p^2+1}$ *où* A, B, C *et* D *sont des constantes réelles que l'on déterminera).*

c) *Déduire des questions précédentes une expression de la fonction*

$t \longmapsto i(t)$.

4 -a) *Préciser l'expression de* $i(t)$ *sur chacun des intervalles*
$]-\infty\ ,\ 0[$; $[0\ ,\ \pi[$; $[\pi\ ,\ 2\pi[$; $[2\pi\ ,\ +\infty[$.

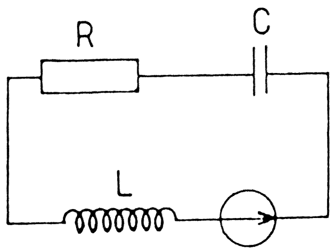
b) *Etudier les variations de* i *sur* $[0\ ,\ 4\pi]$. *Déterminer les solutions de l'équation* $i(t) = 0$, *où* t *appartient à* $[0\ ,\ 4\pi]$.

c) *Représenter graphiquement la fonction* i *sur l'intervalle* $[0\ ,\ 4\pi]$. *On choisira* 1 *cm pour unité sur l'axe des ordonnées et* 3 *cm pour* π *sur l'axe des abscisses.*

---

7 - C.I.R.A. 1988

Dans cet exercice, j *désigne le nombre complexe de module* 1 *et d'argument* $\frac{\pi}{2}$.



Le circuit électrique figuré ci-contre décrit un système dont le signal d'entrée est une tension e(t) et le signal de sortie l'intensité i(t).

On suppose que e *est une fonction dérivable et que* i *est deux fois dérivable sur* $[0,+\infty[$.

L'équation différentielle régissant le système est :

$$(1) \qquad L\frac{d^2i}{dt^2} + R\frac{di}{dt} + \frac{i}{C} = \frac{de}{dt}$$

On suppose que, si $t < 0$, $e(t) = 0$ *et* $i(t) = 0$. *En outre, à l'instant initial on a :*

$$e(0) = 0 \quad ; \quad i(0) = 0 \quad ; \quad \frac{di}{dt}(0) = 0.$$

1) *Appliquer la transformation de Laplace aux deux membres de l'équation différentielle* (1). *On notera* I *et* E *les transformées respectives des fonctions* i *et* e. *En déduire la fonction de transfert* H *du système, définie par :*

$$(2) \qquad I(p) = H(p).E(p)$$

2) *On suppose, dans toute la suite de l'exercice, que :*

L = 1 henry, R = 10 ohms et C = 4 000 microfarads.

Vérifier que l'on a alors :

$$H(p) = \frac{p}{(p+5)^2+15^2}$$

2-1) *Déterminer* $\mathcal{L}^{-1}(H)$ *(*$\mathcal{L}^{-1}$ *désignant la transformée de Laplace inverse).*

2-2) *On suppose, dans cette question, que :*

$$e(t) = \mathcal{U}(t-1) - \mathcal{U}(t-3)$$

a) *Représenter le signal* e(t).

b) *On admet que la relation (2), donnant* I(p), *reste valable dans cette question. Déterminer la transformée de* Laplace *E(p) de e(t) puis, en appliquant la relation* (2), *déterminer* I(p).

c) *Déterminer alors* i(t).

3) *On alimente le circuit par une tension sinusoïdale de pulsation* ω, *où* $\omega > 0$. *Le gain* $r(\omega)$ *du système est alors égal au module du nombre complexe* $H(j\omega)$.

3-1) *Calculer* $r(\omega)$.

3-2) *Etudier les variations de la fonction numérique* f *définie sur* $]0,+\infty[$ *par :*

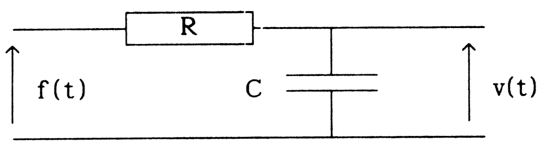
$$f(u) = u^2 - 400 + \frac{62\,500}{u^2}$$

(On ne demande pas de tracer la courbe représentative de f*).*

3-3) *Quelle relation a-t-on entre* $r(\omega)$ *et* $f(\omega)$ *?*
Pour quelle valeur de ω, *le gain atteint-il son maximum ?*

3-4) *Déterminer la limite de* $r(\omega)$ *lorsque* ω *tend vers* $+\infty$.

8 - Electrotechnique 1990



On se propose de rechercher, en utilisant la transformation de Laplace, la fonction du temps donnant la tension v(t) aux bornes du condensateur lorsque le circuit représenté ci-dessus est alimenté par un courant de tension f(t).

L'équation différentielle régissant ce circuit est :

$$\begin{cases} RC\,\dfrac{dv}{dt}(t) + v(t) = f(t) \\ v(t) = 0 \text{ pour } t \leq 0. \end{cases} \qquad (1)$$

1) On suppose que v est une fonction dérivable sur $[0\ ,\ +\infty\ [$ et que les fonctions f et v admettent des transformées de Laplace notées respectivement F et V. Déterminer, en appliquant la transformation de Laplace aux deux membres de l'équation différentielle (1), la fonction H telle que :

$$V(p) = H(p).F(p). \qquad (2)$$

2) La tension f appliquée aux bornes du circuit est définie en fonction de t par :

$$\begin{array}{ll} f(t) = 0 & \text{si } t < 0 \\ f(t) = E & \text{si } 0 \leq t < A \\ f(t) = 0 & \text{si } t \geq A \end{array}$$

où E et A sont des nombres strictement positifs.

2 - a) Représenter graphiquement la fonction f et exprimer f à l'aide de la fonction échelon unité $\mathcal{U}$ définie par :

$$\begin{array}{ll} \mathcal{U}(t) = 0 & \text{si } t < 0 \\ \mathcal{U}(t) = 1 & \text{si } t \geq 0. \end{array}$$

2 - b) En admettant que la relation (2) reste encore valable dans cette question, montrer que :

$$V(p) = E\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p + \frac{1}{RC}}\right)\left(1 - e^{-pA}\right).$$

2 - c) Calculer alors v(t) et donner son expression sur chacun des intervalles $]-\infty\ ,\ 0\ [$, $[0\ ,\ A\ [$ et $[A\ ,\ +\infty\ [$.

2 - d) Application numérique : On donne :

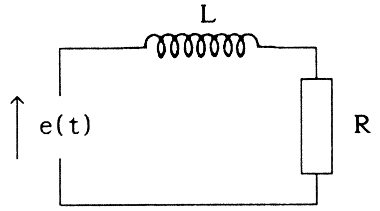
$R = 10^2\ \Omega \qquad C = 10^{-2}\ F \qquad A = 1\ s \qquad E = 1\ V.$

Tracer alors le signal associé à la fonction v.

---

9 - Electronique 1988

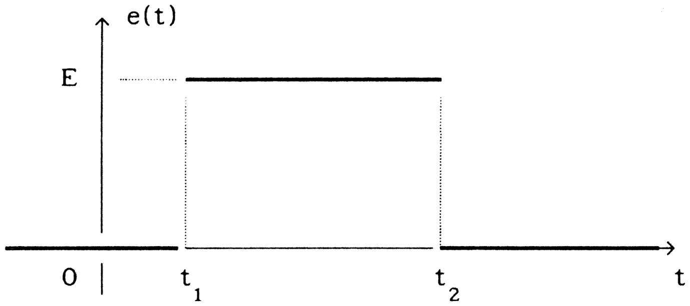
On se propose de rechercher grâce à la transformation de Laplace, la fonction du temps donnant l'intensité du courant : $t \longmapsto i(t)$ *dans le circuit suivant :*



$L > 0$

$R > 0$

auquel on applique aux bornes une force électromotrice $t \longmapsto e(t)$ *dont la courbe en fonction du temps est une impulsion rectangulaire représentée ci-après.*



$0 < t_1 < t_2$

$e(t) = E$ si $t_1 \leq t < t_2$

$e(t) = 0$ sinon

On admet que l'intensité i *est alors une fonction continue sur* $\mathbb{R}$ *et dérivable par morceaux.*

L'équation qui régit ce circuit s'écrit : $L\dfrac{di}{dt} + Ri = e(t)$.

On suppose qu'au temps $t \leq 0$ *le courant est nul dans le circuit.*

1° *Déterminer la transformée de Laplace de la fonction* $t \longmapsto e(t)$ *définie ci-avant.*

2° *Sachant que :* $\dfrac{1}{p(Lp+R)} = \dfrac{1}{R}\left[\dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{p+\frac{R}{L}}\right]$, *en déduire les originaux de* $\dfrac{1}{p(Lp+R)}$ *et de* $\dfrac{e^{-\tau p}}{p(Lp+R)}$ (τ *étant une constante réelle positive).*

3° *Déterminer, grâce à la transformation de Laplace, la solution de l'équation différentielle* $L\dfrac{di}{dt} + Ri = e(t)$ *vérifiant* $i(0) = 0$.

Donner les expressions de i(t) *sur les intervalles :*

$[0\ ;\ t_1[$, $[t_1\ ;\ t_2[$ et $[t_2\ ;\ +\infty\ [$.

4° *On donne :* $L = 1$ H, $R = 100\ \Omega$, $E = 10$ V, $t_1 = 10^{-2}$ s, $t_2 = 2.10^{-2}$ s.

i(t) *est alors en Ampères lorsque* t *est exprimé en secondes.*

Représenter graphiquement i *pour* t *variant de* 0 *à* 5.10^{-2} *seconde.*

Echelle : 4 *cm pour* 10^{-2} *seconde.*
10 *cm pour* 0,1 *Ampère.*

On se bornera à esquisser l'allure de la courbe sur papier millimétré, à partir des valeurs prises par i *aux instants :*

1.10^{-2} ; $1{,}5.10^{-2}$; 2.10^{-2} ; 3.10^{-2} ; 4.10^{-2} *et fournies dans le tableau ci-dessous :*

t	1.10^{-2}	$1{,}5.10^{-2}$	2.10^{-2}	3.10^{-2}	4.10^{-2}
i(t)	0	0,039	0,063	0,022	0,008

10 - Electrotechnique 1991

En physique, l'étude d'un mouvement amorti amène à considérer la fonction $t \longmapsto f(t)$ telle que :

a) $f(t) = 0$ pour $t < 0$

b) $f''(t) + 2\,f'(t) + 2\,f(t) = e^{-t}$ pour $t \geq 0$

c) $f(0) = 1$ et $f'(0) = 0$.

A Application de la transformation de Laplace

On suppose que la fonction f et ses dérivées admettent des transformées de Laplace. On note F celle de f.

1° Déterminer à l'aide de F, les transformées de Laplace des fonctions f' et f''. En déduire celle de $f'' + 2\,f' + 2\,f$.

2° Déterminer la transformée de Laplace de $t \longmapsto \mathcal{U}(t).e^{-t}$ où $\mathcal{U}$ est l'échelon unité.

3° Déduire de ce qui précède l'équation (E) vérifiée par la fonction F.

B Résolution de l'équation (E) et recherche de f

1° Déterminer les réels a, b, c tels que pour tout p appartenant à $\mathbb{R} - \{-1\}$ on ait :

$$\frac{1}{\left(p+1\right)\left(p^2+2p+2\right)} = \frac{a}{p+1} + \frac{bp+c}{\left(p^2+2p+2\right)}$$

2° En déduire la fonction f vérifiant les trois conditions a) b) c) données ci-dessus.

C Etude de la fonction f

1° Etudier les variations des fonctions g et h définies sur l'intervalle $[0\ ,\ \pi]$ par :

$$g(t) = e^{-t} \qquad \text{et} \qquad h(t) = e^{-t}.\sin(t).$$

On montrera que $h'(t) = \sqrt{2}\ e^{-t} \cos\left(t + \frac{\pi}{4}\right)$.

2° Construire dans le plan rapporté à un repère orthogonal (unités graphiques : 5 cm sur l'axe des abscisses, 10 cm sur l'axe des ordonnées) les courbes représentatives des fonctions g et h.

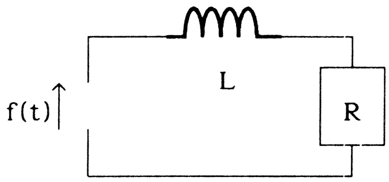
3° En déduire la courbe représentative dans le même repère de la fonction f égale à g + h sur $[0\ ,\ \pi]$. On précisera la tangente en $t = 0$.

4° Calculer la valeur moyenne de la fonction f sur $[0\ ,\ \pi]$.

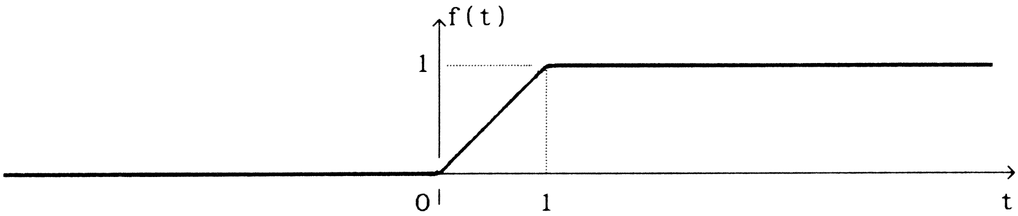
11 - Electrotechnique 1992 - Nouvelle Calédonie

Etablissement d'un courant dans un circuit (R, L).

On considère le circuit ci-dessous aux bornes duquel on applique une tension $t \longmapsto f(t)$.



On suppose que f est définie graphiquement par :



1) Exprimer f(t) en fonction de t sur chacun des intervalles $]-\infty ; 0[$, $[0 ; 1[$ et $[1 ; +\infty[$.

Déterminer la transformée de Laplace F de la fonction f en utilisant la définition de cette transformée.

On sera amené à scinder l'intervalle d'intégration en deux parties et à utiliser les expresssions de f définies précédemmment.

2) L'équation différentielle qui régit le circuit s'écrit :

$$\text{(E)} \qquad L \frac{di}{dt}(t) + R\, i(t) = f(t) \qquad \text{avec } i(0) = 0.$$

On suppose que la fonction $i : t \longmapsto i(t)$ est nulle sur l'intervalle $]-\infty ; 0[$ et qu'elle est transformable par la transformation de Laplace. On désigne par I sa transformée de Laplace.

a) Exprimer la tranformée de Laplace de la fonction $t \longmapsto \frac{di}{dt}(t)$ à l'aide de I(p).

b) En appliquant la transformation de Laplace aux deux membres de l'équation (E), déterminer la transformée de Laplace de la fonction i.

On montrera que I(p) s'écrit :

$$I(p) = \frac{1}{L}\left[\frac{1}{p^2\left(p + \frac{R}{L}\right)} - \frac{1}{p^2\left(p + \frac{R}{L}\right)}\, e^{-p}\right].$$

3) On donne L = 1 et R = 1 (exprimés respectivement en henrys et en ohms).

a) Déterminer les constantes réelles a, b, c, telles que pour tout p réel non nul et différent de -1 :

$$\frac{1}{p^2(p+1)} = \frac{a}{p^2} + \frac{b}{p} + \frac{c}{p+1}.$$

b) En déduire, pour les valeurs données de L et R, l'expression de i(t), à l'aide notamment de $\mathcal{U}(t)$ et $\mathcal{U}(t-1)$ (où $\mathcal{U}$ désigne la fonction échelon unité).

c) Vérifier que la fonction i est alors définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} i(t) = 0 & \text{si } t < 0 \\ i(t) = t - 1 + e^{-t} & \text{si } 0 \leq t < 1 \\ i(t) = 1 + (1 - e)\, e^{-t} & \text{si } t \geq 1 \end{cases}$$

d) Etudier les variations de la fonction i sur $\mathbb{R}$.

e) Représenter graphiquement la fonction i dans un repère orthonormal.

12 - Electronique 1993

Une fonction causale est une fonction numérique nulle sur $]-\infty\,;\,0\,[$.

En utilisant la transformation de Laplace, on envisage de déterminer une fonction causale f ($f : t \longmapsto f(t)$).

Cette fonction f est continue et à dérivée première continue sur $\mathbb{R}$; elle vérifie les conditions initiales $f(0) = 0$ et $f'(0) = 0$; elle est solution de l'équation différentielle :

$$f''(t) + 2\,f'(t) + f(t) = e(t)$$

où e est la fonction causale telle que :

si $t \in \,]-\infty\,;\,0\,[$, $e(t) = 0$,
si $t \in [0\,;\,1[$, $e(t) = 1$,
si $t \in [1\,;\,+\infty\,[$, $e(t) = 0$.

Pour les valeurs t = 0 et t = 1, la fonction f" n'est pas continue, mais la transformation de Laplace ne fera pas intervenir les valeurs de f" en ces deux points.

1° Tracer la courbe représentative de la fonction e dans un repère orthonormal puis déterminer sa transformée de Laplace E.

2° Déterminer les constantes réelles A, B et C telles que pour tout p réel non nul et différent de -1, on ait :

$$\frac{1}{p(p+1)^2} = \frac{A}{p} + \frac{B}{p+1} + \frac{C}{(p+1)^2}.$$

3° En déduire les originaux de : $\dfrac{1}{p(p+1)^2}$ et $\dfrac{e^{-p}}{p(p+1)^2}$.

4° a) Calculer la transformée de Laplace de la fonction causale f.
En déduire cette fonction f.

b) Donner les expressions de f sur chacun des intervalles $I_1 =]-\infty ; 0[$, $I_2 = [0 ; 1[$ et $I_3 = [1 ; +\infty[$.

Vérifier les conditions initiales $f(0) = f'(0) = 0$.

c) Vérifier que f est continue pour $t = 1$ puis que les dérivées à gauche et à droite de f sont égales en ce point.

Etudier les variations de f, calculer la limite de f en $+\infty$ puis présenter les résultats dans un tableau.

Représenter graphiquement cette fonction dans un repère orthogonal en prenant 10 cm pour unité sur l'axe des ordonnées et 2 cm pour unité sur l'axe des abscisses.

UTILISATION DE LA TRANSFORMATION DE LAPLACE POUR LA RESOLUTION D'UN SYSTEME D'EQUATIONS DIFFERENTIELLES LINEAIRES

13 - Electronicien 1985

1) Calculer l'intégrale : $I(x) = \int_0^x t\, e^{-(p+1)t}\, dt$ où p est un réel positif.

En déduire que la transformée de Laplace de la fonction $t \longmapsto t\, e^{-t}$ est : $\dfrac{1}{(p+1)^2}$.

2) On se propose de résoudre, en utilisant la transformation de Laplace le système différentiel :

$$(\mathcal{S}) \quad \begin{cases} \dfrac{dy_1}{dt} = -y_1 + 3\, y_2 \\[2ex] \dfrac{dy_2}{dt} = 2\, y_2 \\[2ex] \dfrac{dy_3}{dt} = 2\, y_1 + y_2 - y_3 \end{cases}$$

où y_1, y_2, y_3 sont trois fonctions dérivables de la variable réelle t ($t \in [0\ ;\ +\infty[$), telles que $y_1(0) = 1$, $y_2(0) = -1$ et $y_3(0) = 0$, et admettant des transformées de Laplace que l'on notera respectivement Y_1, Y_2 et Y_3.

a - Montrer, en appliquant la transformation de Laplace au système $(\mathcal{S})$ que l'on a :

$$(\mathcal{S}') \quad \begin{cases} (p+1)\, Y_1(p) - 3\, Y_2(p) = 1 \\ (p-2)\, Y_2(p) = -1 \\ 2\, Y_1(p) + Y_2(p) - (p+1)\, Y_3(p) = 0 \end{cases}$$

b - Résoudre le système $(\mathcal{S}')$ et déterminer les réels a, b, c, d, e et f tels que :

$$Y_1(p) = \frac{a}{p+1} + \frac{b}{p-2} \qquad Y_2(p) = \frac{c}{p-2} \qquad Y_3(p) = \frac{d}{(p+1)^2} + \frac{e}{p+1} + \frac{f}{p-2}$$

c - En déduire les fonctions y_1, y_2 et y_3.

14 - Photonique 93

t désigne une variable réelle positive, on se propose de chercher la solution $(x\ ,\ y)$ du système différentiel suivant :

$$(\mathrm{I}) \qquad \begin{cases} \dfrac{dx}{dt}(t) = x(t) + 2\,y(t) \\[2ex] \dfrac{dy}{dt}(t) = 2\,x(t) + y(t) \end{cases}$$

vérifiant les conditions initiales : $x(0) = 2$ et $y(0) = 4$.

Première méthode : Utilisation de la transformation de Laplace.

1.1 Déterminer les réels a, b, c, d tels que :

$$\frac{2(p+3)}{(p-3)(p+1)} = \frac{a}{p-3} + \frac{b}{p+1}$$

$$\frac{4p}{(p-3)(p+1)} = \frac{c}{p-3} + \frac{d}{p+1}$$

1.2 On suppose que les fonctions x et y admettent des transformées de Laplace notées respectivement X et Y.

Grâce à la méthode de la transformation de Laplace, trouver la solution du système (I) vérifiant les conditions initiales imposées.

Deuxième méthode : Résolution d'une équation différentielle linéaire du second ordre.

2.1 Montrer que la solution $t \longmapsto x(t)$ cherchée satisfait à l'équation différentielle :

$$(\mathrm{E}) \qquad \frac{d^2x}{dt^2} - 2\,\frac{dx}{dt} - 3\,x = 0.$$

2.2 Résoudre l'équation différentielle (E). En déduire la solution du système (I) vérifiant les conditions initiales imposées.

15 - Electrotechnique 1993

On se propose de résoudre à l'aide de la transformation de Laplace, le système différentiel suivant :

$$(\mathrm{S}) \qquad \begin{cases} 2\,\dfrac{dx}{dt} + x - 2y = v \\[2ex] \dfrac{dx}{dt} - 2\,\dfrac{dy}{dt} + 5x - 10y = 0 \end{cases}$$

où x et y sont des fonctions numériques de la variable réelle t définies sur $\mathbb{R}$

et telles que :

$$x(t) = 0 \text{ et } y(t) = 0 \text{ si } t < 0,$$
$$x(0) = 0 \text{ et } y(0) = 0,$$

et où v est la fonction de la variable réelle t définie sur ℝ par :

$$v(t) = 0 \qquad \text{si } t < 0 \text{ ou } t \geq \frac{\pi}{2}$$

$$v(t) = 8\sin(2t) \qquad \text{si } 0 \leq t < \frac{\pi}{2}.$$

A. Détermination de la transformée de Laplace de v.

Soient les fonctions numériques g et h définies sur ℝ par :

$$g(t) = 8\sin(2t)\,\mathcal{U}(t)$$

$$h(t) = g(t - \frac{\pi}{2}).$$

On rappelle que la fonction échelon unité $\mathcal{U}$ est définie par :

$$\mathcal{U}(t) = 0 \qquad \text{si } t < 0,$$
$$\mathcal{U}(t) = 1 \qquad \text{si } t \geq 0.$$

1. Déterminer les transformées de Laplace des fonctions g et h.

2. Tracer les courbes représentatives $\mathcal{C}_g$, $\mathcal{C}_h$ et $\mathcal{C}_v$ des fonctions g, h et v sur l'intervalle $[-\pi\ ;\ 2\pi]$.

Les courbes $\mathcal{C}_g$ et $\mathcal{C}_h$ seront tracées dans un même repère en utilisant des couleurs différentes ; la courbe $\mathcal{C}_v$ sera tracée dans un autre repère ; on prendra cependant les mêmes unités graphiques pour ces deux repères.

En déduire une expression de v(t) à l'aide de g(t) et h(t).

3. Utiliser les résultats précédents pour déterminer la transformée de Laplace $V(p) = \mathcal{L}\big(v(t)\big)$ de la fonction v.

B. Résolution du système (S).

On admet que les fonctions x et y et leurs dérivées admettent des transformées de Laplace et l'on note:

$$X(p) = \mathcal{L}\big(x(t)\big) \qquad \text{et} \qquad Y(p) = \mathcal{L}\big(y(t)\big).$$

1. A partir de (S), écrire le système vérifié par X(p) et Y(p).
Déterminer X(p) et Y(p).

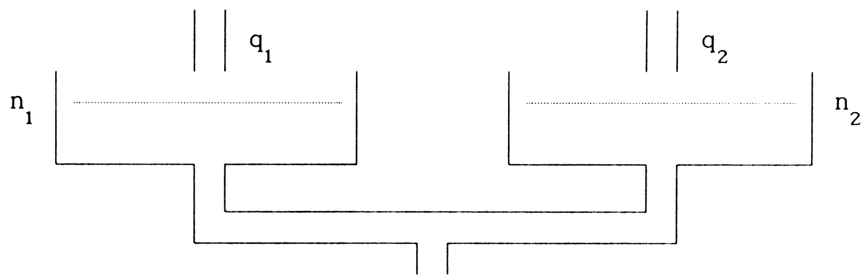
2. Déterminer les réels a, b et c tels que, pour tout p non nul, on ait :

$$\frac{4}{p(p^2+4)} = \frac{a}{p} + \frac{bp+c}{p^2+4}$$

En déduire les originaux respectifs de $\dfrac{4}{p(p^2+4)}$ et $\dfrac{4}{p(p^2+4)}\, e^{-\frac{\pi}{2}p}$

Déterminer les expressions de x(t) et y(t) sur chacun des intervalles $]-\infty\ ;\ 0[$ $[0\ ;\ \frac{\pi}{2}[$ et $[\frac{\pi}{2}\ ;\ +\infty[$.

16 - C.I.R.A. 1989



Le système représenté ci-dessus est composé de deux bacs cylindriques se vidant dans une même conduite.

Les signaux d'entrée sont les débits q_1 *et* q_2 *et les signaux de sortie sont les niveaux* n_1 *et* n_2 *correspondants. Il s'agit donc d'un système ayant deux entrées et deux sorties.*

Dans cet exercice, la modélisation du phénomène se traduit par le système différentiel :

$$(\Sigma) \qquad \begin{cases} n'_1(t) = q_1(t) - 2\,n_1(t) + n_2(t) \\ n'_2(t) = q_2(t) + n_1(t) - 2\,n_2(t) \end{cases}$$

où t *est un réel positif ou nul.*

A - *On suppose, dans cette partie* $n_1(0^+) = n_2(0^+) = 0$.

1 - *Démontrer, en appliquant la transformation de Laplace au système* (Σ), *qu'on a :*

$$\begin{cases} N_1(p) = \dfrac{p+2}{(p+1)(p+3)}\, Q_1(p) + \dfrac{1}{(p+1)(p+3)}\, Q_2(p) \\[2ex] N_2(p) = \dfrac{1}{(p+1)(p+3)}\, Q_1(p) + \dfrac{p+2}{(p+1)(p+3)}\, Q_2(p) \end{cases}$$

où N_1, N_2, Q_1, Q_2 *sont les transformées de Laplace respectives de* n_1, n_2, q_1, q_2.

2 - *Calculer* $n_1(t)$ *et* $n_2(t)$ *dans le cas où* $q_1(t) = q_2(t) = \mathcal{U}(t)$.
Représenter graphiquement la réponse n_1, *sans étudier la fonction* n_1.

3 - *Calculer* $n_1(t)$ *et* $n_2(t)$ *dans le cas où* $q_1(t) = 0$ *et* $q_2(t) = \mathcal{U}(t)$.

Déterminer alors $\lim\limits_{t\to+\infty} n_1(t)$ *et* $\lim\limits_{t\to+\infty} n_2(t)$.

B - *Dans cette partie le signal d'entrée* q_1 *est l'impulsion unité* δ *et le signal d'entrée* q_2 *est la fonction nulle.*

On admet que dans ces conditions le phénomène est régi par le système différentiel :

$$(\Sigma^*) \qquad \begin{cases} n'_1(t) + 2\,n_1(t) - n_2(t) = 0 \\ n'_2(t) - n_1(t) + 2\,n_2(t) = 0 \\ n_1(0^+) = 1 \quad \text{et} \quad n_2(0^+) = 0 \end{cases}$$

1 - *Déterminer, en utilisant la transformation de Laplace, les fonctions* n_1 *et* n_2 *solutions du système* (Σ^*).

2 - *Etudier et représenter graphiquement dans le même repère les fonctions* n_1 *et* n_2.

On déterminera notamment la valeur exacte du maximum de la fonction n_2.

---

17 - Electronique 1992

Soient les fonctions numériques x et y de la variable réelle positive t ; on se propose d'étudier une solution du système différentiel suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{dx(t)}{dt} = x(t) - 2\,y(t) \\ \dfrac{dy(t)}{dt} = x(t) - y(t) - \mathcal{U}(t) \end{cases} \qquad \text{avec les conditions initiales} \begin{cases} x(0) = 1 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

où $\mathcal{U}$ désigne la fonction échelon unité définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} \mathcal{U}(t) = 0 \text{ si } t < 0 \\ \mathcal{U}(t) = 1 \text{ si } t \geq 0 \end{cases}$$

1° a) On suppose que la méthode utilisant la transformation de Laplace est applicable pour la résolution de ce système. En utilisant cette méthode, et en notant respectivement X(p) et Y(p) les transformées de Laplace des fonctions x et y, déterminer le système d'équations vérifié par X(p) et Y(p).

b) Déterminer les réels a, b et c tels que pour tout p non nul,

$$\frac{1}{p(p^2+1)} = \frac{a}{p} + \frac{bp+c}{p^2+1}.$$

c) Déterminer les fonctions x et y solutions du système.

2° On considère la courbe $\mathscr{C}$ définie par le système d'équations paramétriques suivant :

$$\begin{cases} x(t) = 2 + \sin(t) - \cos(t) \\ y(t) = 1 - \cos(t) \end{cases} \qquad (t \in \mathbb{R}^+)$$

a) Montrer que l'on peut obtenir la courbe $\mathscr{C}$ à partir de l'étude des fonctions x et y sur l'intervalle $[0\ ,\ 2\pi]$.

b) Etudier les variations de x et y sur $[0\ ,\ 2\pi]$ et regrouper les résultats de cette étude dans un même tableau.

c) Préciser les points de la courbe $\mathscr{C}$ où la tangente est parallèle à l'un des axes du repère.

d) Tracer la courbe $\mathscr{C}$ dans un repère orthonormal $(O\ ;\ \vec{i}\ ,\ \vec{j}\ )$ (unité graphique : 5 cm).

18 - C.I.R.A. 1993

Le but de l'exercice est l'étude de l'intensité d'un courant électrique dans deux circuits d'un montage avec transformateur.

$\mathcal{U}$ est la fonction échelon unité définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par :

$\mathcal{U}(t) = 0$ si $t < 0$,

$\mathcal{U}(t) = 1$ si $t \geq 0$.

A - *Dans cette partie, on établit des résultats mathématiques qui seront utilisés dans la partie* **B.**

Soit τ un nombre réel strictement positif. On considère les fonctions H et G définies par :

$$H(p) = \frac{1}{p(1+\tau p)} \qquad \text{et} \qquad G(p) = \frac{1}{p^2(1+\tau p)}\ .$$

1 - Soit h la fonction définie par :

$$h(t) = \left(1 - e^{\frac{-t}{\tau}}\right)\mathcal{U}(t).$$

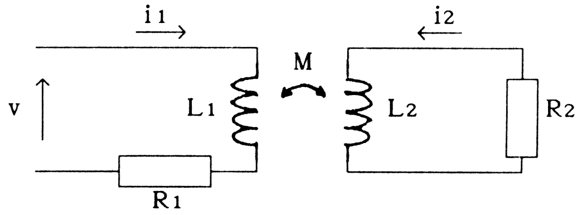
Montrer que H est la transformée de Laplace de h.

2 - Soit g la fonction définie par :

$$g(t) = \left(t - \tau + \tau\, e^{\frac{-t}{\tau}}\right)\mathcal{U}(t).$$

Montrer que G est la transformée de Laplace de g.

B - On considère le montage électrique suivant :



Les constantes L_1, L_2, R_1, R_2, M sont des réels strictement positifs caractéristiques du circuit.

Lorsque le circuit est excité par un signal d'entrée $t \longmapsto v(t)$, les intensités du courant dans les deux branches du montage sont les fonctions $t \longmapsto i_1(t)$ et $t \longmapsto i_2(t)$.

Pour t négatif ou nul, v(t), $i_1(t)$ et $i_2(t)$ sont nuls.

les lois de l'électricité montrent que les fonctions i_1 et i_2 sont solutions sur $[0 ; +\infty[$, du système différentiel suivant :

$$(S) \quad \left\{ \begin{array}{l} R_1\, i_1(t) + L_1 \dfrac{di_1}{dt}(t) + M \dfrac{di_2}{dt}(t) = v(t) \\ \\ M \dfrac{di_1}{dt}(t) + L_2 \dfrac{di_2}{dt}(t) + R_2\, i_2(t) = 0 \end{array} \right. \qquad \text{avec } i_1(0^+) = i_2(0^+) = 0.$$

On suppose que les fonctions v, i_1 et i_2 admettent des tranformées de Laplace que l'on notera respectivement V, I_1 et I_2.

1 - Montrer que l'application de la tranformation de Laplace au système differentiel (S) conduit au système :

$$(S_1) \quad \left\{ \begin{array}{l} (R_1 + L_1 p)\, I_1(p) + Mp\, I_2(p) = V(p) \\ \\ Mp\, I_1(p) + (L_2 p + R_2)\, I_2(p) = 0 \end{array} \right.$$

2 - Dans la suite, on suppose que :

$$L_1 = 0{,}5 \qquad L_2 = 2 \qquad R_1 = 2 \qquad R_2 = 4 \qquad M = 1.$$

Résoudre alors le système (S_1). On obtiendra :

$$I_1(p) = \frac{p + 2}{3p + 4}\, V(p) \qquad \text{et} \qquad I_2(p) = \frac{-p}{6p + 8}\, V(p).$$

3 - Dans cette question le signal d'entrée est la fonction v définie par :

$$v(t) = t\, \mathcal{U}(t).$$

Déterminer alors $i_1(t)$ et $i_2(t)$.

(On pourra observer que $I_1(p) = \dfrac{1}{4}\, \dfrac{1}{p(1 + \frac{3}{4}p)} + \dfrac{1}{2}\, \dfrac{1}{p^2(1 + \frac{3}{4}p)}$ et utiliser les résultats de la partie **A**).

4 - Dans cette question le signal d'entrée est la fonction v définie par :

$$v(t) = t\,\mathcal{U}(t) - 2\,(t-1)\,\mathcal{U}(t-1) + (t-2)\,\mathcal{U}(t-2).$$

a) Tracer la courbe représentative de la fonction v dans un repère orthonormal.

b) Déterminer la transformée de Laplace de la fonction v.

c) En utilisant les résultats de la question 3, déterminer $i_1(t)$ et $i_2(t)$. Sur chacun des intervalles $]-\infty\,;\,0[$, $[0\,;\,1[$, $[1\,;\,2[$ et $[2\,;\,+\infty\,[$, préciser l'expression de $i_1(t)$ et de $i_2(t)$, sans utiliser la fonction échelon unité.

UTILISATION DES THEOREMES DE LA VALEUR INITIALE OU DE LA VALEUR FINALE

19 - C.I.R.A. 1988

$\mathcal{U}$ est la fonction échelon unité définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par :

si $t < 0$ $\quad \mathcal{U}(t) = 0$
si $t \geq 0$ $\quad \mathcal{U}(t) = 1$

La réponse $y(t)$ *d'un système soumis à une excitation* $x(t)$ *est telle que :*

$$Y(p) = \frac{e^{-\tau p}}{p}\left(1 - \frac{e^{-\tau p}}{1 + 2\tau p}\right) X(p),$$

X *et* Y *étant les transformées de Laplace des fonctions* x *et* y *et* τ *un nombre réel strictement positif. Déterminer, en fonction de* τ*, la limite, quand* t *tend vers* $+\infty$*, de la réponse* $y(t)$*, lorsque le système est soumis à l'excitation* $x(t) = \mathcal{U}(t)$ *(échelon unité).*

On pourra appliquer le théorème de la valeur finale.

20 - C.I.R.A. 1989

$\mathcal{U}$ est la fonction échelon unité définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par :

si $t < 0$ $\quad \mathcal{U}(t) = 0$
si $t \geq 0$ $\quad \mathcal{U}(t) = 1$

La réponse $y(t)$ *d'un système soumis à un signal d'entrée* $x(t)$ *est telle que* $Y(p) = H(p).X(p)$, X *et* Y *étant les transformées de Laplace respectives des fonctions* x *et* y *et* H *la fonction de transfert du système.*

Dans cet exercice, $H(p) = \dfrac{p + 1}{p^2 + p + 1}$ *et le signal d'entrée est la fonction "rampe" définie par :* $\quad x(t) = t\,\mathcal{U}(t)$.

1 - a) *Calculer* $Y(p)$.

b) *En déduire* $y(0^+) = \lim\limits_{\substack{t \to 0 \\ t > 0}} y(t)$.

On pourra utiliser le théorème de la valeur initiale.

2 - a) *Déterminer la transformée de Laplace* Y_1 *de la dérivée* y' *de* y.

b) *En déduire* $y'(0^+) = \lim\limits_{\substack{t \to 0 \\ t > 0}} y'(t)$.

3) *Calculer* $\lim\limits_{\substack{t \to 0 \\ t > 0}} y''(t)$.

FONCTION DE TRANSFERT

21 - C.I.R.A. 1990

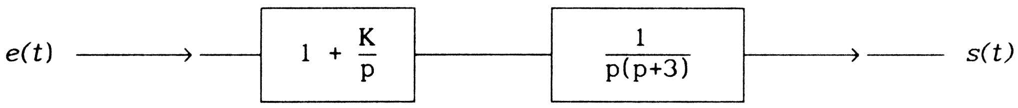
On définit la fonction de transfert $H(p)$ d'un système soumis à un signal d'entrée $e(t)$ et dont le signal de sortie est $s(t)$ par :

$$S(p) = H(p)\,E(p)$$

où $E(p)$ et $S(p)$ sont les transformées de Laplace respectives des signaux $e(t)$ et $s(t)$.

Le but de cet exercice est l'étude, sur un exemple, de la stabilité d'un système en boucle fermée.

A - On associe à un système donné un régulateur à action "proportionnel-intégral" :



La fonction de transfert de l'ensemble système-régulateur est la fonction $H(p)$ définie par :

$$H(p) = \left(1 + \frac{K}{p}\right)\left(\frac{1}{p(p+3)}\right), \qquad (K > 0).$$

1 - Soit ω un nombre strictement positif. Mettre le nombre complexe $H(j\omega)$ sous forme algébrique.

2 - On considère dans le plan complexe la courbe C_K de représentation paramétrique :

$$\begin{aligned}]\,0\,,+\infty\,[&\longrightarrow \mathbb{C} \\ \omega &\longmapsto -\frac{\omega^2 + 3K}{\omega^2\left(\omega^2 + 9\right)} + j\,\frac{K - 3}{\omega\left(\omega^2 + 9\right)} \end{aligned}$$

2 - a) Soient x et y les fonctions définies sur $]\,0\,,+\infty\,[$ par :

$$x(\omega) = -\frac{\omega^2 + 3K}{\omega^2\left(\omega^2 + 9\right)} \qquad \text{et} \qquad y(\omega) = \frac{K - 3}{\omega\left(\omega^2 + 9\right)}.$$

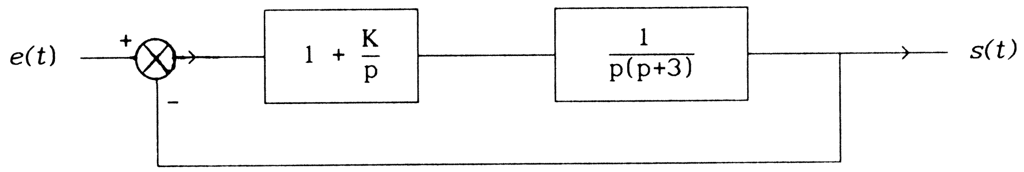
Montrer que :

$$x'(\omega) = \frac{2(\omega^4 + 6K\omega^2 + 27K)}{\omega^3\left(\omega^2 + 9\right)^2} \qquad \text{et} \qquad y'(\omega) = \frac{3(3-K)(\omega^2+3)}{\omega^2\left(\omega^2 + 9\right)^2}.$$

2 - b) Dans cette question K = 2. Dresser le tableau des variations conjointes des fonctions x et y (on en précisera les limites en 0 et en $+\infty$) et donner l'allure de la courbe $\mathscr{C}_2$ correspondante.

2 - c) Dans cette question K = 4. Dresser le tableau des variations conjointes des fonctions x et y (on en précisera les limites en 0 et en $+\infty$) et donner l'allure de la courbe $\mathscr{C}_4$ correspondante.

B -On va utiliser les dessins de la partie A pour en déduire, à l'aide d'un critère, la stabilité du système "en boucle fermée" (Σ) suivant :



Enoncé du critère de stabilité :

Le système (Σ) *est stable si la courbe* $\mathscr{C}_K$ *est entièrement située en dessous du point* N *de coordonnées* (-1 ; 0).

1) Le système (Σ) obtenu pour K = 2 est-il stable ? Le système (Σ) obtenu pour K = 4 est- il stable ?

2) Le système (Σ) introduit dans la partie B admet la fonction de transfert *G(p)* définie par :

$$G(p) = \frac{H(p)}{1 + H(p)} \, .$$

2 - a) On admet que pour K = 20 cette fonction de transfert peut s'écrire :

$$G_1(p) = \frac{p+20}{(p+4)(p^2-p+5)} = \frac{\frac{16}{25}}{p+4} - \frac{\frac{16}{25}\left(p - \frac{1}{2}\right)}{\left(p - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{19}}{2}\right)^2} + \frac{\frac{97}{25}}{\left(p - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{19}}{2}\right)^2}$$

Quelle est la réponse *s(t)* du système (Σ) lorsque *e(t)* = $\delta(t)$? (impulsion de Dirac).

Dans ce cas le système (Σ) *est instable.*

2 - b) On admet que pour K = 2,059 , cette fonction de transfert peut s'écrire :

$$G_2(p) = \frac{p + 2{,}059}{(p + 2{,}9)(p^2 + 0{,}1p + 0{,}71)}$$

Montrer que les pôles de $G_2(p)$ ont tous une partie réelle négative.

On sait alors que le système (Σ) *est stable.*

ANALYSE SPECTRALE - SERIES DE FOURIER

DECOMPOSITION D'UN SIGNAL PERIODIQUE EN SERIE DE FOURIER

1 - Informatique industrielle 1989

On considère le signal défini par la fonction f, périodique de période $T = \pi$, telle que pour tout t de l'intervalle $[0 ; \pi]$:

$$f(t) = t\,(\pi - t).$$

1 - a) Etudier les variations de la fonction f sur l'intervalle $[0 ; \pi]$.
Construire la courbe représentative de la restriction à $[0 ; \pi]$ de la fonction f.

1 - b) Construire la courbe représentative de la restriction à $[-3\pi ; 3\pi]$ de la fonction f.

2 - On admet que la fonction f est développable en série de Fourier.

2 - a) Calculer les coefficients de Fourier de la fonction f.

2 - b) Ecrire le développement en série de Fourier de la fonction f.

2 - C.I.R.A. 1988

Soit f la fonction numérique périodique, de période 2π, définie sur $\mathbb{R}$ et telle que :

$$f(t) = t \quad \text{si} \quad t \in [0 ; \pi]$$
$$f(t) = 0 \quad \text{si} \quad t \in]\pi ; 2\pi[.$$

1) Tracer la représentation graphique de la restriction de cette fonction à l'intervalle $]-3\pi ; 3\pi[$.

2) n étant un entier naturel, calculer les intégrales :

$$I_n = \int_0^{\pi} t\cos(nt)\,dt \qquad \text{et} \qquad J_n = \int_0^{\pi} t\sin(nt)\,dt.$$

3 - a) On admet que f est développable en série de Fourier. Déterminer les coefficients de Fourier de la fonction f.

3 - b) Préciser les trois premiers harmoniques de la fonction f.

3 - Photonique 1990

On se propose de développer en série de Fourier un signal périodique.

Soit la fonction numérique f de période 4, impaire et définie par :

$$\begin{array}{lll} f(x) = x & \text{si} & x \in [0 \,;\, 1[\\ f(x) = 1 & \text{si} & x \in [1 \,,\, 2[\\ f(2) = 0. & & \end{array}$$

1) Représenter le signal périodique défini par f sur $[-4 \,;\, 4]$ et calculer sa pulsation ω.

2) Calculer les quatre premiers termes du développement en série de Fourier de la fonction f.

4 - Assistance technique d'ingénieur 1991

1) On considère les intégrales :

$$I_n = \int_0^{\pi} x \sin(nx)\, dx$$

où n est un entier naturel.

Calculer I_0.
Calculer I_n pour n non nul.

2) Soit F la fonction périodique, de période 2π telle que pour tout x élément de l'intervalle $[-\pi \,;\, \pi]$, on ait :

$$F(x) = x \sin(x).$$

Calculer les coefficients de la série de Fourier associée à F.

5 - Chimiste 1985

Soit la fonction f, périodique, de période 2π définie par :

$$\begin{array}{lll} f(t) = \sin(t) & \text{si} & t \in [0 \,;\, \pi] \\ f(t) = 0 & \text{si} & t \in]\pi \,;\, 2\pi[. \end{array}$$

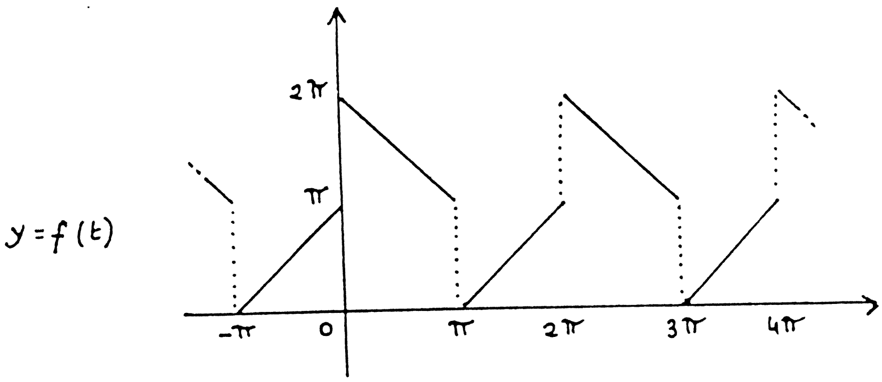
1) Représenter la restriction de la fonction f à l'intervalle $[-3\pi \,;\, 3\pi]$

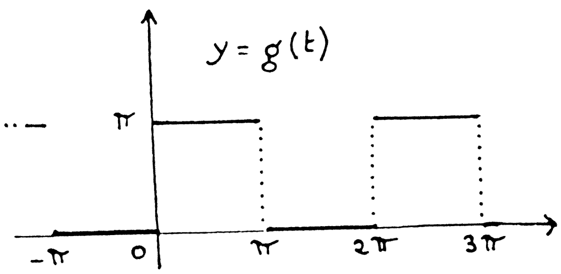
2) Calculer les coefficients de Fourier a_0, a_1, b_1 puis, pour n supérieur ou égal à 2, a_n et b_n.

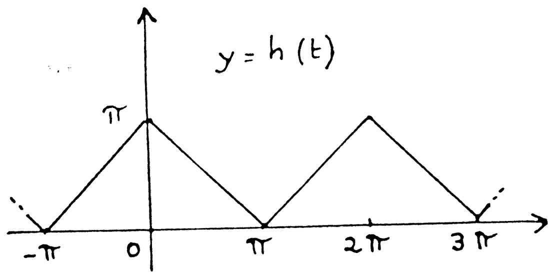
3) Ecrire le développement en série de Fourier de f.

6 - Electrotechnique 1989

On considère les signaux suivants de période 2π.







1) Déterminer les développements en série de Fourier des fonctions g et h.

2) En déduire le développement en série de Fourier de la fonction f.

7 - Electronique 1988

Le but de cet exercice est d'établir, avec un minimum de calculs, le développement en série de Fourier de quelques fonctions périodiques d'utilisation courante en électronique.

1° n étant un entier naturel strictement positif, montrer que :

$$\int_0^{\pi} \sin(t).\cos(2nt).dt = \frac{2}{1 - 4n^2}.$$

2° Soit la fonction numérique f, périodique de période π, telle que pour tout élément t de $[0 ; \pi]$,

$$f(t) = \sin(t).$$

a) Tracer, dans un repère orthonormal, la courbe représentative de f sur l'intervalle $[-3\pi ; 3\pi]$ (unité graphique : 1 cm).

b) Calculer les coefficients du développement en série de Fourier de f et expliciter ce développement.

3° Soit la fonction numérique g, périodique de période 2π, définie par :

$$\begin{array}{lll} g(t) = \sin(t) & \text{si} & t \in [0 ; \pi] \\ g(t) = 0 & \text{si} & t \in [\pi ; 2\pi]. \end{array}$$

Donner l'allure de la représentation graphique de g sur $[-3\pi ; 3\pi]$, ainsi que celle des fonctions h, i et j définies pour tout nombre réel t par :

$$\begin{array}{l} h(t) = g(-t) \\ i(t) = g(t) + g(-t) \\ j(t) = g(t) - g(-t). \end{array}$$

4° Après avoir reconnu les fonctions i et j, déduire des questions précédentes le développement en série de Fourier de la fonction g.

8 - Photonique 1992

1° Calculer les intégrales suivantes dans lesquelles a est un réel positif et n un entier naturel :

$$I_n(a) = \int_0^a t \cos(nt)\ dt \qquad\qquad J_n(a) = \int_0^a t \sin(nt)\ dt$$

En déduire $I_n(\pi)$, $I_n(2\pi)$, $J_n(\pi)$ et $J_n(2\pi)$.

2° Représenter sur un intervalle d'amplitude 4π, les fonctions définies de la façon suivante :

$$f\begin{cases}\text{Période } T = 2\pi \\ f(t) = t \text{ si } t \in [0 ; \pi] \\ f(-t) = f(t)\end{cases} \qquad g\begin{cases}\text{Période } T = 2\pi \\ g(t) = t \text{ si } t \in [0 ; \pi[\;;\; g(\pi) = 0 \\ g(-t) = -g(t)\end{cases}$$

$$h\begin{cases}\text{Période } T = 2\pi \\ h(t) = t \text{ si } t \in [0 ; 2\pi[\end{cases}$$

3° On admet que les fonctions f, g et h sont développables en série de Fourier ; en utilisant les résultats de la question 1°, écrire les développements en série de Fourier de ces trois fonctions.

9 - Informatique industrielle 1993

1° Soit n appartenant à $\mathbb{N}^*$.

Soit $I_n = \displaystyle\int_{-\pi}^{+\pi} (\pi^2-x^2)\cos(nx)\,dx$ et $J_n = \displaystyle\int_{-\pi}^{+\pi} x\sin(nx)\,dx$.

Montrer, par une intégration par parties, que :

$$I_n = \frac{2}{n} J_n.$$

Calculer J_n ; en déduire I_n.

2° Soit f la fonction numérique, périodique de période 2π, telle que pour x appartenant à $[-\pi ; +\pi]$, $f(x) = \pi^2 - x^2$.

a) Tracer la courbe représentant f sur $[-\pi ; 5\pi]$.

b) On admet que f est développable en série de Fourier.
Calculer les coefficients de Fourier a_0, a_n et b_n pour n appartenant à $\mathbb{N}^*$ puis donner le développement de f en série de Fourier.

10 - Géologie appliquée 1993

Soit f la fonction numérique de la variable réelle x, paire, périodique de période $T = 2\pi$, définie sur $[0 ; \pi]$ par : $f(x) = \pi$ si $x \in \left[0 , \frac{\pi}{3}\right[$;

$f(x) = 0$ si $x \in \left]\frac{\pi}{3} ; \frac{2\pi}{3}\right[$; $f(x) = -\pi$ si $x \in \left]\frac{2\pi}{3} ; \pi\right]$; $f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\pi}{2} = -f\left(\frac{2\pi}{3}\right)$.

1° Représenter graphiquement la fonction f sur $[-2\pi ; 2\pi]$.

2° Développer f en série de Fourier.

SERIE DE FOURIER - CALCUL DE LA SOMME D'UNE SERIE NUMERIQUE

11 - Maintenance et exploitation de matériels aéronautiques 1987

On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$, périodique de période 2π et telle que :

$$f(x) = \pi - x \quad \text{si} \quad 0 \leq x \leq \pi$$
$$f(x) = \pi + x \quad \text{si} \quad -\pi \leq x \leq 0.$$

1) Représenter graphiquement la fonction f dans le plan rapporté à un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ (unité graphique : 1 cm).

2) On admet que la fonction f est développable en série de Fourier.

Calculer les coefficients de Fourier de la fonction f puis écrire le développement de f en série de Fourier.

3) On considère la série numérique de terme général $u_p = \dfrac{1}{(2p+1)^2}$

a) Démontrer que cette série est convergente.

b) En utilisant la valeur de f en 0, calculer la somme :

$$\sum_{p=0}^{\infty} u_p$$

12 - Electrotechnique 1989

Soit la fonction f périodique de période 2π, impaire, définie par :

$$f(x) = x \quad \text{si} \quad 0 \leq x < \frac{\pi}{2}$$
$$f(x) = x - \frac{\pi}{2} \quad \text{si} \quad \frac{\pi}{2} \leq x < \pi$$
$$f(\pi) = 0$$

1° Le plan est muni d'un repère orthonormal (unité graphique : 1 cm).

Représenter graphiquement f sur l'intervalle $[-3\pi ; 3\pi]$.

2° a) Calculer pour tout entier n positif ou nul les coefficients de Fourier a_n et b_n de la fonction f.

b) Vérifier que f satisfait aux conditions de Dirichlet sur l'intervalle $[-\pi ; \pi]$ et préciser la somme de la série de Fourier de la fonction f pour tout réel x de l'intervalle $[0 , \pi]$.

c)En utilisant ce développement lorsque $x = \frac{\pi}{2}$, déterminer la somme de la série numérique :

$$\sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{2p+1} .$$

13 - Electronique 1987

Soit la fonction numérique f périodique de période 2π, définie sur l'intervalle $[-\pi ; \pi]$ par :

$$f(x) = \pi - x \qquad \text{si} \qquad x \in [0 ; \pi[$$
$$f(x) = -\pi + x \qquad \text{si} \qquad x \in [-\pi ; 0[$$

1) Tracer, dans un repère orthonormal, la courbe représentative de la fonction f.

2) On admet que la fonction f est développable en série de Fourier. On désigne le terme général de son développement par :

$$u_n(x) = a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx) \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

a - Calculer les coefficients a_0, a_n et b_n.

b - Ecrire la série de Fourier de la fonction f.

c - Enoncer le théorème qui permet de conclure que la série de Fourier converge en 0, en $\frac{\pi}{2}$.

d - Montrer que la série numérique de terme général

$$v_n = \frac{(-1)^n}{2n+1}$$

est convergente.

Calculer sa somme en utilisant le développement en série de Fourier de la fonction f.

14 - Electrotechnique 1985

Soit la fonction numérique f, définie sur $\mathbb{R}$, périodique de période 2π, et telle que sur l'intervalle $[-\pi\ ;\ \pi]$:

$$f(x) = \sin(x + \frac{\pi}{4}) \quad \text{si} \quad -\pi \le x \le 0$$
$$f(x) = \cos(x + \frac{\pi}{4}) \quad \text{si} \quad 0 \le x \le \pi$$

1) Montrer que f est une fonction paire.

2) Représenter graphiquement la restriction de la fonction f à l'intervalle $[-2\pi\ ;\ 2\pi]$.

3) On admet que la fonction f est développable en série de Fourier.
Calculer les coefficients de Fourier a_0, a_1, a_n, b_n du développement en série de Fourier de f (on précisera, suivant la parité de n, les coefficients a_{2p} et a_{2p+1}).

4) Soit la série numérique de terme général $u_p = \dfrac{1}{4p^2 - 1}$.

a - Démontrer que cette série est convergente.

b - En utilisant le développement en série de Fourier de f, vérifier l'égalité :

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{15} + \frac{1}{35} + \frac{1}{63} + \ldots + \frac{1}{4p^2 - 1} + \ldots$$

où p est élément de $\mathbb{N}^*$.

15 - Electrotechnique 1992

Soit un signal électrique défini par la fonction f telle que :

$$\begin{cases} f \text{ est paire, périodique de période } 2\pi \\ f(t) = -t^2 + 2\pi t \quad \text{si} \quad t \in [0\ ;\ \pi] \end{cases}$$

1° Représenter ce signal électrique pour $t \in [-3\pi\ ,\ 3\pi]$.

Calculer $\displaystyle\int_0^\pi f(t)\,dt$; en déduire la valeur moyenne de f sur une période.

2° On admet que la fonction f satisfait aux conditions de Dirichlet, ce qui permet d'affirmer que la fonction f est la somme de sa série de Fourier, à savoir :

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt)\right)$$

les nombres a_0, a_n et b_n étant les coefficients de Fourier de f.

a) Calculer a_0.

b) Calculer les intégrales suivantes où n désigne un entier strictement positif :

$$I_n = \int_0^{\pi} t \cos(nt)\, dt \qquad \text{et} \qquad J_n = \int_0^{\pi} t^2 \cos(nt)\, dt$$

Exprimer le coefficient a_n à l'aide de I_n et J_n. En déduire a_n.

3° En utilisant le développement de f(t) pour t = 0, déterminer la somme de la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

16 - Informatique industrielle 1992

I Soit n un entier naturel non nul.
Soit la série numérique dont le terme général est : $u_n = \frac{1}{4n^2-1}$

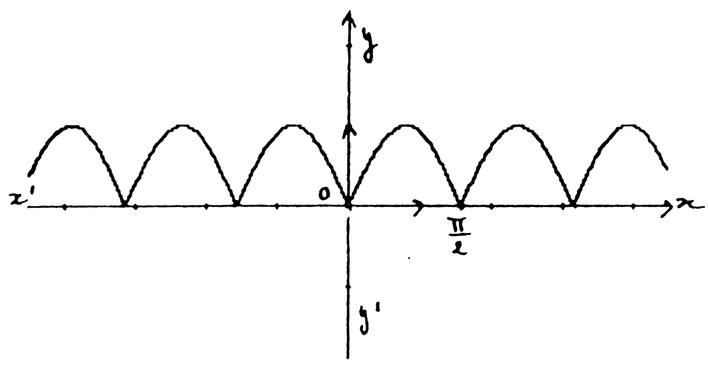
1° Montrer que cette série est convergente.

2° Vérifier l'égalité : $\frac{1}{4n^2-1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right)$.

3° a) En déduire que : $\sum_{n=1}^{N} u_n = \frac{N}{2N+1}$.

b) Quelle est la somme de la série de terme général u_n ?

II Soit f la fonction définie sur ℝ par : $f(x) = |\sin(2x)|$
et dont on donne la représentation graphique :



1° Montrer que f est une fonction paire et périodique de période $\frac{\pi}{2}$.

2° Calculer la valeur moyenne de f sur une période.

3° a) Transformer en somme le produit sin(2x) cos(4nx).

b) En déduire que :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2x)\cos(4nx)\,dx = \frac{-1}{4n^2-1}.$$

4° En utilisant le résultat de la question II 3° b, donner le développement en série de Fourier de la fonction f.

5° En utilisant ce développement pour x = 0 retrouver le résultat de I 3° b.

En utilisant ce développement pour $x = \frac{\pi}{4}$, mntrer que :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4n^2 - 1} = \frac{1}{2} - \frac{\pi}{4}.$$

SERIE DE FOURIER - FORMULE DE BESSEL - PARSEVAL

17 - Chimiste 1988

Soit le signal f, dit "dent de scie", périodique, de période 2π, tel que sur l'intervalle $]-\pi ; \pi]$:

$$f(t) = t$$

L'énergie E transportée par le signal est donnée par la formule :

$$E^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(t)\, dt$$

1) Tracer, dans un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$, la représentation graphique de f. Calculer l'énergie E transportée.

2) Calculer les coefficients de Fourier a_n et b_n de la fonction f. On admettra la convergence de la série de Fourier de f.

3) La formule de Bessel-Parseval :

$$E^2 = a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n^2 + b_n^2}{2}$$

donne l'énergie transportée par le signal en utilisant la série de Fourier associée.

Calculer l'énergie E' transportée par le signal obtenu en ne considérant que les 11 premiers harmoniques. Comparer la valeur de E' avec celle de E calculée à la question 1.

18 - Electronique 1990

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$, de période 4 telle que :

$$\begin{array}{lll} f(t) = t & \text{si} & 0 \leq t < 1 \\ f(t) = 1 & \text{si} & 1 \leq t < 3 \\ f(t) = 4-t & \text{si} & 3 \leq t < 4. \end{array}$$

1-a) Représenter graphiquement la fonction f sur l'intervalle [-6,6].

1-b) Etablir que f est une fonction paire.

1-c) Justifier que f satisfait aux conditions de Dirichlet.

Soit $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos(n\omega t)$ la série de Fourier associée à f.

Déterminer a_0 et ω. Montrer que, pour $n \geq 1$:

$$a_n = \frac{4}{n^2\pi^2}\left(\cos(n\frac{\pi}{2}) - 1\right)$$

2) Soit φ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\varphi(t) = \frac{3}{4} - \frac{4}{\pi^2}\cos(\frac{\pi}{2}t) - \frac{2}{\pi^2}\cos(\pi t)$$

2-a) Vérifier que φ est paire et a pour période 4.

2-b) Résoudre sur [0,2] l'équation $\varphi'(t) = 0$. Calculer à 10^{-2} près $\varphi(\frac{n}{3})$ pour les valeurs 0, 1, 2, 3, 4, 5 et 6 de l'entier n. Dresser le tableau de variation de φ pour $0 \leq t \leq 2$.

2-c) Construire, dans un même repère orthonormal, les courbes représentatives des fonctions f et φ pour $-2 \leq t \leq 2$ puis pour $-4 \leq t \leq 4$ (on prendra 2 cm pour unité graphique).

3-a) Calculer $I = \int_0^2 f^2(t)\,dt$. En déduire le carré de la valeur efficace de f.

3-b) Calculer le carré de la valeur efficace de φ (on pourra utiliser la formule de Parseval).

3-c) Comparer les résultats obtenus en a) et b).

---

19 - Electronique 1992

Soit la fonction numérique $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $t \longmapsto f(t)$

définie par : $\begin{cases} f \text{ est périodique de période } \pi \\ \text{pour } t \in [0\ ;\ \pi[\text{ on a : } f(t) = 1 + \cos(t) \end{cases}$

1° Représenter graphiquement f sur $[-\pi\ ;\ 2\pi]$.

2° Calculer f_e, valeur efficace de la fonction f.

3° Justifier que f satisfait aux conditions de Dirichlet.

4° Soit $S(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)\right)$

le développement en série de Fourier associé à f.

Montrer que $a_n = 0$ pour $n \geq 1$. Calculer a_0.

Calculer b_n.

5° Comparer les valeurs prises par f et par S pour les valeurs de la variable :

$$t = \frac{\pi}{4} \qquad \text{et} \qquad t = 0.$$

6° Soit g la fonction numérique définie par :

$$g(t) = 1 + \frac{8}{\pi}\left(\frac{\sin(2t)}{3} + 2\,\frac{\sin(4t)}{15}\right)$$

Calculer g_e, valeur efficace de g, en utilisant la formule de Parseval.

Comparer g_e et f_e.

---

20 - Photonique 1993

---

1. n désignant un entier naturel non nul, justifier la convergence des séries numériques de terme général $\frac{1}{n^2}$, $\frac{(-1)^n}{n^2}$, $\frac{1}{n^4}$.

2. On pose, pour tout n entier non nul :

$$I_n = \int_0^{\pi} t\cos(2nt)\,dt \qquad \text{et} \qquad J_n = \int_0^{\pi} t^2\cos(2nt)\,dt.$$

Calculer I_n. On admettra que $J_n = \frac{\pi}{2n^2}$.

3. On considère le signal défini par la fonction f paire, de période π telle que :

$$\text{pour tout } t \text{ de } [0\ ;\ \pi],\ f(t) = t(\pi - t).$$

3.1 Représenter le signal sur $[-2\pi\ ;\ 2\pi]$.

3.2 Calculer les coefficients de Fourier réels a_n et b_n de f (n entier naturel).

3.3 Vérifier que f satisfait aux conditions de Dirichlet ; en déduire le développement de f en série de Fourier.

4.1 En utilisant le développement en série de Fourier de f pour t = 0 puis pour $t = \frac{\pi}{2}$, déterminer $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ et $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$.

4.2 En utilisant la formule de Parseval, calculer $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$.

SERIE DE FOURIER - PROBLEMES DE SYNTHESE

21 - Assistance technique d'ingénieur 1988

Les constructeurs de pompes affirment : "Le débit est plus régulier si le nombre p *de pistons est impair". Cet exercice se propose de vérifier cette affirmation dans les deux cas particuliers* $p = 3$ *et* $p = 4$.

Soit f *la fonction de période* 2π *définie par :*

$$f(t) = \sin(t) \quad \text{pour} \quad 0 \le t \le \pi$$
$$f(t) = 0 \quad \text{pour} \quad \pi \le t \le 2\pi$$

Cette fonction décrit le débit d'un cylindre (un cylindre ne débite que pendant la phase de refoulement).

1° - Etude du cas $p = 3$

Les débits q_1, q_2, q_3 *des trois cylindres sont respectivement donnés par :*

$$q_1(t) = f(t) \quad ; \quad q_2(t) = f(t + \frac{2\pi}{3}) \quad ; \quad q_3(t) = f(t + \frac{4\pi}{3}).$$

Le débit de la pompe est :

$$Q_3 = q_1 + q_2 + q_3$$

a) *Représenter graphiquement* q_1 *sur l'intervalle* $[-2\pi\ ,\ 2\pi]$. *En déduire les représentations, sur le même intervalle, des fonctions* q_2 *et* q_3.

b) *Montrer que* $\quad Q_3(t) = Q_3(t + \frac{2\pi}{3}).$

Montrer que : *pour* $0 \le t \le \frac{\pi}{3}$, $\quad Q_3(t) = \sin(t + \frac{\pi}{3})$

pour $\frac{\pi}{3} \le t \le \frac{2\pi}{3}$, $\quad Q_3(t) = \sin(t)$

c) *Donner l'allure de la courbe représentative de* Q_3 *sur* $[-2\pi\ ,\ 2\pi]$.
On précisera les valeurs de $Q_3(0)$, $Q_3(\frac{\pi}{3})$, $Q_3(\frac{2\pi}{3})$.

2° - Etude du cas p = 4

Dans ce cas le débit de la pompe est

$$Q_4(t) = f(t) + f(t + \frac{\pi}{2}) + f(t + \pi) + f(t + \frac{3\pi}{2})$$

Montrer que Q_4 *a pour période* $\frac{\pi}{2}$ *et montrer que pour* $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$

$$Q_4(t) = \sqrt{2}\ \sin(t + \frac{\pi}{4}).$$

Préciser les valeurs de $Q_4(0)$ *et* $Q_4(\frac{\pi}{4})$ *et donner l'allure de la courbe représentative de* Q_4 *sur l'intervalle* $[-2\pi\ ,\ 2\pi]$.

3° Etude du taux d'irrégularité du débit

Par définition le taux d'irrégularité du débit θ_p *est donné par :*

$$\theta_p = \frac{Q_p \text{ maximum} - Q_p \text{ minimum}}{Q_p \text{ moyen}}$$

a) *Calculer le débit moyen* q *commun d'un cylindre (c'est-à-dire la valeur moyenne de la fonction* f *sur l'intervalle* $[0\ ,\ 2\pi]$).

En déduire le débit moyen Q_p *dans les cas* p = 3 *et* p = 4.

b) *En utilisant les résultats des questions* 1° *et* 2°, *calculer* θ_3 *et* θ_4 *et vérifier que* $\theta_4 > \theta_3$.

4° Etude du cas p = 4 à l'aide des séries de Fourier

a) *Calculer les coefficients de Fourier de la fonction* f.

b) *Ecrire le développement en série de Fourier de la fonction* f, *en déduire les développements en série de Fourier de* $f(t + \frac{\pi}{2})$, $f(t + \pi)$, $f(t + \frac{3\pi}{2})$.

c) *Déduire des questions précédentes que :*

$$Q_4(t) = \frac{4}{\pi} - \frac{8}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{16k^2 - 1} \cos(4kt).$$

22 - C.I.R.A. 1991

L'objet de cet exercice est une utilisation, en électricité, d'une série de Fourier pour étudier un filtre.

Partie A :

1 - Soient b un nombre réel et n un entier naturel non nul. A l'aide d'une intégration par parties, calculer l'intégrale :

$$I = \int_0^b t\cos(nt)\,dt.$$

2 - Un signal "triangle" est modélisé par la fonction u, définie sur $\mathbb{R}$, périodique, de période 2π, telle que :

$$\begin{array}{lll} u(t) = t & \text{si} & t \in [0 ; \pi] \\ u(t) = 2\pi - t & \text{si} & t \in]\pi ; 2\pi]. \end{array}$$

a) Tracer, dans un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$, la courbe représentative de la restriction de la fonction u à l'intervalle $[-4\pi ; 4\pi]$.

b) En observant que u est une fonction paire, calculer ses coefficients de Fourier. On pourra utiliser le résultat de la question 1.

c) Vérifier que la fonction f satisfait aux conditions de Dirichlet sur l'intervalle $[0 ; 2\pi]$ et en déduire que pour tout t réel :

$$u(t) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{p=0}^{\infty}\frac{\cos[(2p+1)t]}{(2p+1)^2}$$

3 - En choisissant des unités convenables, la puissance P du signal u est donnée par la formule :

$$P = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u^2(t)\,dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} u^2(t)\,dt.$$

a) Calculer P puis en donner une approximation décimale à 10^{-3} près.

b) La formule de Bessel-Parseval donne la puissance du signal u en fonction de ses coefficients de Fourier :

$$P = a_0^2 + \frac{1}{2}\left(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \dots + a_n^2 + \dots\right).$$

Dans la pratique, on décide de ne conserver que les harmoniques de rang 1 et 3. On obtient alors une valeur approchée P_1 de la puissance du signal :

$$P_1 = a_0^2 + \frac{1}{2}\left(a_1^2 + a_3^2\right).$$

Calculer P_1 puis en donner une approximation décimale à 10^{-3} près.

La comparaison de P et P_1 justifie que, dans la pratique, on néglige les harmoniques de rang supérieur ou égal à 4.

Partie B :

Dans cette partie, nous établissons des résultats mathématiques qui seront utilisés dans la partie C.

1 - R, C et α sont des nombres réels strictement positifs et λ est un nombre réel.

Montrer que, sur $\mathbb{R}^+$, la solution générale de l'équation différentielle :

$$RC\,\frac{ds}{dt}(t) + s(t) = \lambda\,\cos(\alpha t)$$

est la fonction s définie par :

$$s(t) = K\,e^{-\frac{t}{RC}} + \frac{\lambda}{1 + \alpha^2R^2C^2}\left(\cos(\alpha t) + RC\alpha\,\sin(\alpha t)\right)$$

où $K \in \mathbb{R}$.

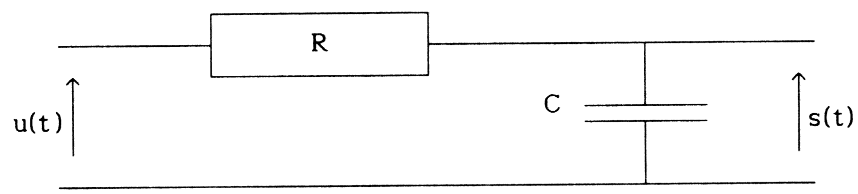
2 - Soit φ le nombre réel appartenant à l'intervalle $]0\,;\,\frac{\pi}{2}[$ tel que $\tan(\varphi) = RC\alpha$.

Montrer que, pour tout t appartenant à $\mathbb{R}^+$, on a :

$$\frac{\lambda}{1 + \alpha^2R^2C^2}\left(\cos(\alpha t) + RC\alpha\,\sin(\alpha t)\right) = \frac{\lambda}{\sqrt{1 + \alpha^2R^2C^2}}\cos(\alpha t - \varphi).$$

Partie C :

On considère le circuit électrique suivant :



Il est alimenté par le signal u défini dans la partie A. L'équation différentielle permettant de trouver le signal de sortie s est :

$$RC\,\frac{ds}{dt}(t) + s(t) = u(t) \qquad (E).$$

Nous supposerons dans la suite du problème que les valeurs de R et C sont telles que RC = 1.

Pour déterminer s, on remplace le signal d'entrée u par son développement en série de Fourier tronqué à l'harmonique de rang 3.

On prend donc : $u(t) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\cos(t) - \frac{4}{9\pi}\cos(3t)$.

1 - Montrer que, sur $\mathbb{R}^+$, la solution générale de l'équation différentielle (E) est la fonction s définie par :

$$s(t) = K\,e^{-t} + \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi\sqrt{2}}\cos\left(t - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{4}{9\pi\sqrt{10}}\cos\left(3t - \text{Arctan}(3)\right)$$

où $K \in \mathbb{R}$.

2 - On suppose, de plus que $s(0) = 0$. Donner alors une approximation décimale de K à 10^{-3} près.

COURBES PLANES

Courbes définies par une représentation paramétrique : x et y sont des fonctions polynômes ou des fonctions rationnelles du paramètre t.

1 - Plasticien de l'environnement architectural 1990

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ (unité graphique 0,5 cm). On considère la courbe (C) dont une représentation paramétrique est :

$$\begin{cases} x = f(t) = 2t^2 \\ y = g(t) = t^3 - 6t \end{cases} \qquad t \in [-3 ; +3]$$

1° Etudier les variations des fonctions f et g.

2° Construire la courbe (C).

3° Déterminer puis construire les tangentes à (C) aux points de paramètre 1 et 2.

4° Montrer que la courbe (C) admet un point double dont on précisera les coordonnées.

2 - Esthétique industrielle 1992

$(O ; \vec{i}, \vec{j})$ est un repère orthonormal du plan (unité graphique : 2 cm).

A chaque valeur du réel t de [-1 ; 3], on associe le point M_t de coordonnées :

$$\begin{cases} x(t) = t^2 \\ y(t) = t^2 - 3t \end{cases}$$

$\mathscr{C}$ est la courbe décrite par le point M_t.

1° Etudier, sur l'intervalle [-1 ; 3], le sens de variation des fonctions :

$$t \longmapsto x(t) \qquad \text{et} \qquad t \longmapsto y(t)$$

Recopier et compléter le tableau suivant :

t	-1	0	$\frac{3}{2}$	3
Signe de x'(t)				
Signe de y'(t)				
Sens de variation de x(t)				
Sens de variation de y(t)				

2° Tracer les tangentes à $\mathscr{C}$ aux points M_t pour les valeurs suivantes de t : -1, 0, $\frac{3}{2}$, 3. Tracer $\mathscr{C}$.

3 - Maintenance 1987

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ (unité graphique 10 cm). On considère la courbe (C) dont une représentation paramétrique est :

$$\begin{cases} x = f(t) = t - t^3 \\ y = g(t) = t^2 - t^4 \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}$$

1 - Montrer que la courbe (C) admet un axe de symétrie. On note (C') l'arc de (C) correspondant aux valeurs positives du paramètre t. Comment déduit-on la construction de (C) de celle de (C') ?

2 - Etudier les variations sur $[0 ; +\infty[$ des fonctions f et g puis rassembler les résultats de cette étude dans un tableau.

3 - Montrer que la courbe (C') passe par l'origine O du repère pour deux valeurs distinctes du paramètre t. Donner, pour chacune de ces valeurs, une équation de la tangente à (C').

4 - Tracer la courbe (C') pour les valeurs du paramètre appartenant à l'intervalle $[0 ; 1{,}1]$. En déduire le tracé de (C) pour t appartenant à $[-1{,}1 ; 1{,}1]$.

4 - Agencement de l'environnement architectural 1990

On se propose, dans cet exercice, de construire une courbe obtenue à l'aide d'un modèle utilisé en D.A.O. (dessin assisté par ordinateur).

Dans un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ (unité graphique : 5 cm), on donne les points A_0 $(-1 ; 0)$; A_1 $(-1 ; 2)$; A_2 $(1 ; -1)$; A_3 $(2 ; 0)$.

On définit le point M(t) par :

$$\overrightarrow{OM(t)} = (1-t)^3\, \overrightarrow{OA_0} + 3t(1-t)^2\, \overrightarrow{OA_1} + 3t^2(1-t)\, \overrightarrow{OA_2} + t^3\, \overrightarrow{OA_3}$$

pour t appartenant à [0 ; 1].

1° Calculer les coordonnées (x ; y) du point M(t).

2° Soit (C) la courbe définie par sa représentation paramétrique dans $(O\,;\,\vec{i},\,\vec{j}\,)$:

$$\begin{cases} x = f(t) = -3\,t^3 + 6\,t^2 - 1 \\ y = g(t) = 3(3\,t^3 - 5\,t^2 + 2\,t) \end{cases} \qquad t \in [0\,;\,1].$$

a) Etudier les variations des fonctions f et g sur [0 ; 1] et regrouper les résultats dans un même tableau.

b) Déterminer les points communs à (C) et à l'axe des abscisses.

c) Préciser les tangentes à (C) en chacun de ses points appartenant à l'axe des abscisses.

d) Placer les points A_0, A_1, A_2, A_3, tracer les tangentes à (C) déterminées en c puis construire la courbe (C).

5 - Fonderie sur modèle 1988

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O\,;\,\vec{i},\,\vec{j}\,)$ (unité graphique 2 cm). On note I l'intervalle $\left[-\sqrt{\frac{3}{2}}\,;\,\sqrt{\frac{3}{2}}\right]$.

On considère les applications f et g définies de I vers $\mathbb{R}$ par :

$$f(t) = \frac{2}{3}\,t^3 - t \qquad\qquad g(t) = \sqrt{2}\;t^2.$$

L'objectif de l'exercice est l'étude de la courbe (Γ) définie paramétriquement par :

$$\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases} \qquad (t \in I).$$

1° Comparer, pour tout réel t de I, f(-t) et f(t) d'une part, g(-t) et g(t) d'autre part. En déduire que (Γ) admet un axe de symétrie.

2° Etudier les variations de f et g sur $\left[0\,;\,\sqrt{\frac{3}{2}}\right]$. Rassembler les résultats précédents dans un tableau.

3° Tracer, en utilisant les résultats de la question 2°, la partie (Γ') de (Γ) pour t appartenant à $\left[0 \; ; \sqrt{\frac{3}{2}}\right]$, et préciser les demi-tangentes à (Γ') aux points de paramètre $t = 0$ et $t = \sqrt{\frac{3}{2}}$.

Tracer (Γ) en utilisant le résultat obtenu à la question 1°.

6 - Fabrication mécanique 1978

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O \; ; \vec{i}, \vec{j})$ (unité graphique 2 cm). On considère la courbe (C) dont une représentation paramétrique est :

$$\begin{cases} x = f(t) = \dfrac{t^2}{1 + t^2} \\ y = g(t) = \dfrac{t^3}{1 + t^2} \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}$$

1° Démontrer que la courbe (C) admet un axe de symétrie.

2° Etudier, sur $\mathbb{R}^+$, les variations des fonctions f et g ; dresser le tableau des variations conjointes, sur $\mathbb{R}^+$, des fonctions f et g.

3° Construire l'arc de courbe (C_1) correspondant aux valeurs positives du paramètre t. En déduire le tracé de la courbe (C).

7 - Industries céramiques 1992

On considère, dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O \; ; \vec{i}, \vec{j})$ (unité graphique : 0,5 cm), la courbe $\mathscr{C}$ définie paramétriquement par :

$$\begin{cases} x = f(t) = t - \dfrac{3}{t} \\ y = g(t) = t^3 - 6t - \dfrac{3}{t} \end{cases} \qquad \text{pour } t \in \mathbb{R}^* .$$

1° Montrer que le point O est centre de symétrie de la courbe $\mathscr{C}$; on appellera $\mathscr{C}_0$ l'arc de $\mathscr{C}$ obtenu en faisant varier t dans l'intervalle $]0 \; ;+\infty[$.

2° Calculer les dérivées respectives f' et g' des fonctions f et g et étudier leur signe.

3° Déterminer les limites de f(t) et de g(t) quand t tend vers 0 à droite, puis quand t tend vers $+\infty$.

4° Dresser le tableau des variations conjointes de f et g sur $]0\ ;+\infty\ [$.

en déduire que $\mathscr{C}_0$ possède une tangente parallèle à l'axe des abscisses en un point A dont on précisera les coordonnées.

5° Montrer que $\mathscr{C}_0$ admet une asymptote Δ d'équation $y = x$ (on pourra étudier la limite de $g(t) - f(t)$ quand t tend vers 0).

Montrer que $\mathscr{C}_0$ coupe Δ en un point et un seul.

6° Construire $\mathscr{C}_0$ sur une feuille de papier millimétré. On placera le point A et la droite Δ.

7° a) Calculer $\begin{cases} f(1) \\ g(1) \end{cases}$ et $\begin{cases} f(-3) \\ g(-3) \end{cases}$

Que peut-on en déduire pour la courbe $\mathscr{C}$?

b) En vous servant de la première question, montrer qu'il existe un autre point de même nature pour la courbe $\mathscr{C}$; donner ses coordonnées.

8° Compléter le tracé de la courbe $\mathscr{C}$.

Courbes définies par une représentation paramétrique : des fonctions trigonométriques apparaissent dans l'expression de x ou y.

8 - Productique 1989

Sur l'écran d'un oscillographe cathodique, on observe une courbe (C) décrite par un spot lumineux dont les coordonnées, dans le plan rapporté au repère orthonormal $(O\ ;\ \vec{i},\ \vec{j}\ )$ (unité graphique : 5 cm) sont :

$$\begin{cases} x = f(t) = \cos(t) - \dfrac{1}{2}\cos(2t) \\ y = g(t) = \sin(t) \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}$$

1° Démontrer que, pour construire (C), l'étude des fonctions f et g peut être réduite à l'intervalle $I = [0\ ;\ \pi]$. Soit (C_0) l'arc de la courbe (C) correspondant à l'intervalle I. Quelle transformation géométrique permet de construire (C) à partir de (C_0) ?

2° Dresser le tableau des variations conjointes de f et g sur I. Préciser les coordonnées des points où la tangente est parallèle à l'un des axes de coordonnées.

3° Construire (C_0) puis (C).

9 - Adjoint technique d'entreprise des T.P. 1980

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O\ ;\ \vec{i},\ \vec{j}\ )$ (unité graphique 5 cm). On considère la courbe (C) dont une représentation paramétrique est :

$$\begin{cases} x = f(t) = \sin(t) \\ y = g(t) = \cos(\dfrac{t}{4}) \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}$$

1° On note M_t le point de paramètre t de la courbe (C).
Calculer les coordonnées du point $M_{t+4\pi}$ puis celles du point M_{-t} ; en déduire que, pour construire (C), l'étude des fonctions f et g peut être réduite à l'intervalle $I = [0\ ;\ 2\pi]$. Soit (C_0) l'arc de la courbe (C) correspondant à l'intervalle I. Quelles transformations géométriques permettent de construire (C) à partir de (C_0) ?

2° Dresser le tableau des variations conjointes de f et g sur I. Préciser les points d'intersection de (C_0) et des axes de coordonnées, ainsi que les tangentes en ces points.

3° Tracer (C_0) puis (C).

10 - Maintenance 1982

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O\ ;\ \vec{i},\ \vec{j}\ )$ (unité graphique 3 cm). On considère la courbe (C) dont une représentation paramétrique est :

$$\begin{cases} x = f(t) = 2\cos(t) \\ y = g(t) = \sin(2t) \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}$$

1° Comparer les coordonnées des points de (C) de paramètre $\pi+t$ et t d'une part, les points de paramètre $-t$ et t d'autre part. En déduire que l'on peut obtenir le tracé de (C) en réduisant le domaine d'étude des fonctions f et g à l'intervalle $I = \left[0\ ;\ \frac{\pi}{2}\right]$.

2° Etudier les variations de f et g sur l'intervalle I et dresser le tableau des variations conjointes de ces fonctions.

3° Tracer l'arc de courbe (Γ) obtenu lorsque t décrit l'intervalle I. Comment obtient-on (C) à partir de (Γ) ?

Préciser les tangentes à (C) aux points de paramètre 0 et $\frac{\pi}{2}$.

11 - Fabrication textile 1989

Sur la figure ci-après, on a tracé, dans un repère orthonormal, la courbe (C) définie paramétriquement par :

$$\begin{cases} x = f(t) = \sin(2t) + 5\sin(t) \\ y = g(t) = \cos(5t) + \cos(t) \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}$$

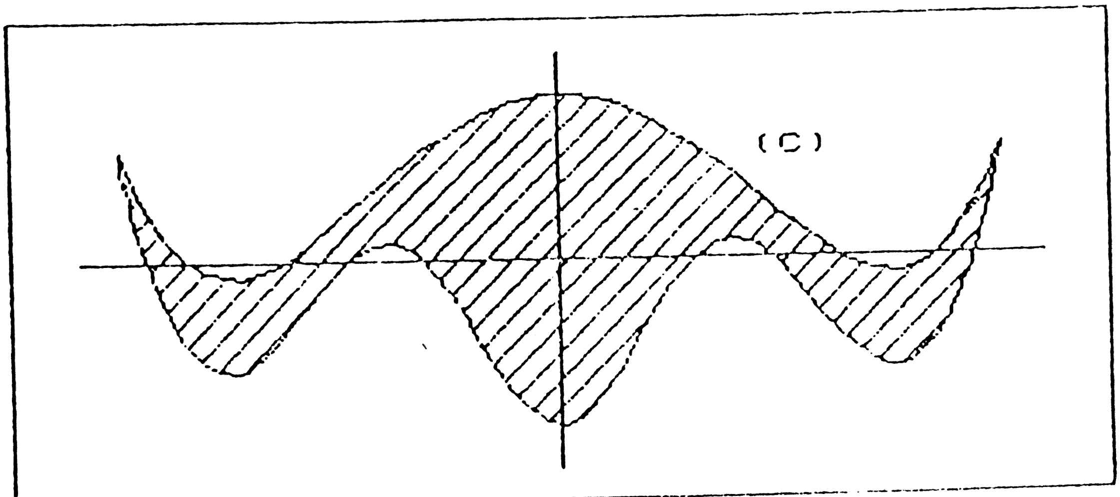
1° Justifier la symétrie de (C) et montrer que l'étude des fonctions f et g peut être réduite à l'intervalle $D = [0\ ;\ \pi]$.

2° (C) coupe l'axe des ordonnées en deux points. Déterminer les coordonnées de ces points d'intersection. Quelle est, en millimètres, l'unité de longueur utilisée sur la figure ?

3° La courbe (C) coupe l'axe des abscisses. Déterminer, par le calcul, les coordonnées des points d'intersection. On résoudra sur D l'équation :

$$\cos(5t) = \cos(\pi+t).$$

4° Calculer les dérivées f' et g' des fonctions f et g. Exprimer f'(t) et g'(t) sous la forme de polynômes respectifs en cos(t) et sin(t). En déduire à 10^{-3} près les valeurs de t (appartenant à D) qui annulent ces dérivées.



(Fig 1)

5° Etudier l'allure de la courbe (C) sur l'intervalle I = [1,2 ; 1,3].
La représenter à une échelle adaptée à cet intervalle afin qu'il soit possible à l'oeil nu de percevoir l'allure établie précédemment (ne pas hésiter à faire un fort "effet zoom").

6° On admet que l'aire du domaine plan hachuré est donnée par :

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\Big(f(t)\ g'(t) - f'(t)\ g(t)\Big)\ dt$$

Calculer $\mathcal{A}$.

Rappel :

La formule de De Moivre permet d'obtenir la relation :

$$\sin(5t) = 16\ \sin^5(t) - 20\ \sin^3(t) + 5\ \sin(t).$$

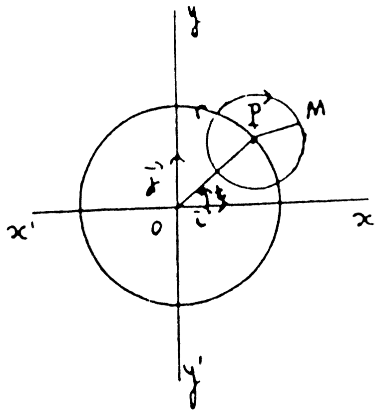
12 - Constructions métalliques 1993

Un manège d'enfant est constitué d'un disque tournant autour d'un axe, lui-même animé d'un mouvement circulaire.

Ce dispositif est schématisé par la figure ci-contre et les mouvements des points P et M sont définis par :

$$\overrightarrow{OP} = 2\left(\cos(t)\ \vec{i} + \sin(t)\ \vec{j}\right)$$

$$\overrightarrow{PM} = \cos(-2t)\ \vec{i} + \sin(-2t)\ \vec{j} = \cos(2t)\ \vec{i} - \sin(2t)\ \vec{j}$$



dans le repère orthonormal $(O\ ;\ \vec{i},\ \vec{j}\ )$, t appartenant à $\mathbb{R}$.

1° Exprimer les coordonnées x(t) et y(t) du point M en fonction de t.

Soit $\mathscr{C}$ la trajectoire du point M. On se propose, dans la suite de l'exercice, d'étudier cette trajectoire.

2° Démontrer que l'intervalle d'étude des fonctions $t \longmapsto x(t)$ et $t \longmapsto y(t)$ peut être réduit à l'intervalle $[0\ ;\ \pi]$.

3° Montrer que :

$$x'(t) = -2\sin(t)\left(1 + 2\cos(t)\right)$$

$$y'(t) = 2\left(1 - \cos(t)\right)\left(1 + 2\cos(t)\right).$$

4° Etudier les variations sur l'intervalle $[0\ ;\ \pi]$ des fonctions $t \longmapsto x(t)$ et $t \longmapsto y(t)$ puis rassembler les résultats dans un même tableau.

Préciser les coordonnées d'un vecteur directeur de la tangente à $\mathscr{C}$ au point de paramètre $t = \pi$.

5° Calculer au voisinage de 0 un développement limité à l'ordre 1 de la fonction $t \longmapsto x'(t)$ puis un développement limité à l'ordre 2 de la fonction $t \longmapsto y'(t)$.

En déduire le coefficient directeur de la tangente à $\mathscr{C}$ au point de paramètre $t = 0$.

6° On admettra que la tangente (T) à la courbe $\mathscr{C}$ au point de paramètre $t = \frac{2\pi}{3}$ a pour coefficient directeur $-\sqrt{3}$.

Vérifier que cette tangente passe par l'origine du repère.

7° Tracer la courbe $\mathscr{C}$ et la tangente (T).

8° L'aire limitée par la courbe $\mathscr{C}$ est donnée par :

$$A = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left[x(t)\ y'(t) - y(t)\ x'(t)\right]\,dt$$

a) En intégrant par parties et en remarquant que x et y sont des fonctions de période 2π, montrer que :

$$\int_0^{2\pi} x(t)\ y'(t)\ dt = -\int_0^{2\pi} y(t)\ x'(t)\ dt$$

En déduire :

$$A = -\int_0^{2\pi} y(t)\ x'(t)\ dt.$$

b) Calculer cette dernière intégrale et en donner une valeur décimale approchée à 10^{-2} près.

13 - Instruments d'optique et de précision 1992

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ (unité graphique 2 cm). On considère la courbe $\mathcal{C}$ définie par la représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = f(t) = 3\cos(t) - \cos(3t) \\ y = g(t) = 3\sin(t) - \sin(3t) \end{cases} \qquad (t \in \mathbb{R}).$$

1° Soit M_t le point de $\mathcal{C}$ de paramètre t. Comparer les points M_t et $M_{t+2\pi}$, les points M_t et M_{-t} puis les points M_t et $M_{\pi-t}$. En déduire qu'il suffit d'étudier les fonctions f et g sur l'intervalle $\left[0 ; \frac{\pi}{2}\right]$ pour en déduire ensuite le tracé de $\mathcal{C}$ (on précisera les transformations géométriques que l'on doit utiliser).

2° Etudier f et g sur l'intervalle $\left[0 ; \frac{\pi}{2}\right]$. Dresser un tableau des variations conjointes de ces fonctions.

3° Placer sur une feuille de papier millimétré les points de $\mathcal{C}$ de paramètre $0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}$ ainsi que les tangentes à $\mathcal{C}$ en ces points.

Tracer la courbe $\mathcal{C}$.

4° Sur la figure ci-après on suppose que :

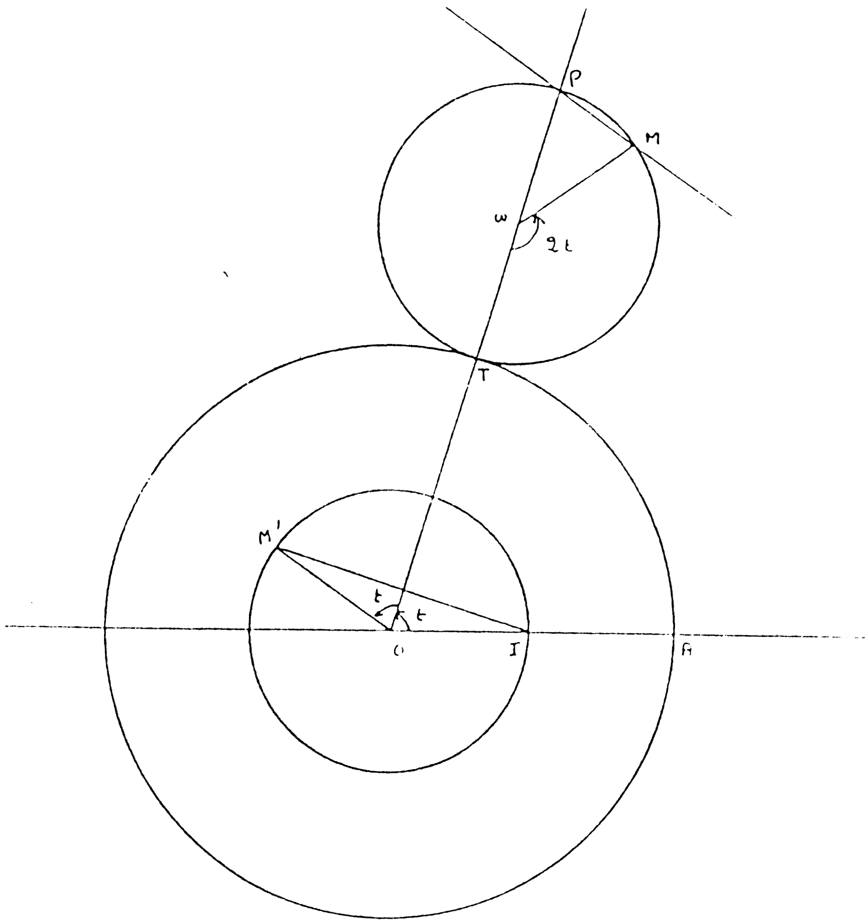
$\overrightarrow{OI} = \vec{i}$; $OI = IA = T\omega = 1$; $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OT}) = t$; $(\overrightarrow{\omega T}, \overrightarrow{\omega M}) = 2t$;

M' est le symétrique de I par rapport à (OT).

Calculer les coordonnées de M.

Comparer les longueurs des arcs de cercle $\overset{\frown}{AT}$ et $\overset{\frown}{MT}$; donner une interprétation cinématique de la courbe $\mathcal{C}$.

Quelles sont les coordonnées du point M' ? En déduire une construction de la tangente en M à $\mathcal{C}$.


P
M
ω
2t
T
M'
t
t
O
I
A

Courbes définies par une représentation paramétrique :
la fonction exponentielle apparaît dans l'expression de x ou y.

14 - Construction navale 1987

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O\ ;\ \vec{i},\ \vec{j}\ )$ (unité graphique 1 cm). On considère la courbe (C) dont une représentation paramétrique est :

$$\begin{cases} x = f(t) = e^t - t \\ y = g(t) = e^t - 4t \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}$$

1° Etudier les variations des fonctions f et g et dresser un tableau de leurs variations conjointes.

2° Démontrer que, lorsque t tend vers $-\infty$, la droite (D) d'équation $y - 4x = 0$ est asymptote à la courbe (C). Etudier la position de (C) par rapport à la droite (D).

3° Tracer la droite (D) et la courbe (C).

15 - Chaudronnerie 1989

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O\ ;\ \vec{i},\ \vec{j}\ )$ (unité graphique 2 cm). On considère la courbe (C) dont une représentation paramétrique est :

$$\begin{cases} x = f(t) = te^t \\ y = g(t) = -te^{-t} \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}$$

1° On désigne par M le point de coordonnées $\left(f(t)\ ;\ g(t)\right)$ et par M' le point de coordonnées $\left(f(-t)\ ;\ g(-t)\right)$. Exprimer les coordonnées du point M' en fonction de celles de M. En déduire que la courbe (C) admet un axe de symétrie ; donner une équation cartésienne de cet axe de symétrie.

2° Etudier les variations des fonctions numériques f et g. Dresser le tableau des variations conjointes de ces fonctions.

3° a) Déterminer les coordonnées du point A où la courbe (C) admet une tangente parallèle à l'axe des abscisses et celles du point B où la courbe (C) admet une tangente parallèle à l'axe des ordonnées.

b) Donner une équation de la tangente en O à la courbe (C).

c) Tracer la courbe (C) (on précisera ses asymptotes).

16 - Mise en oeuvre des plastiques 1991

Dans le plan rapporté à un repère orthonormal (unité graphique : 5 cm sur chaque axe), on considère la courbe $\mathscr{C}$ de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = f(t) = (t+1)e^{-t} \\ y = g(t) = t^2 e^{-t} \end{cases} \qquad t \in [0, +\infty[.$$

a) Etudier les variations des fonctions f et g et dresser le tableau des variations conjointes de ces deux fonctions.

b) Etudier la limite de $\frac{g(t)}{f(t)}$ lorsque t tend vers $+\infty$; interpréter graphiquement ce résultat.

c) Montrer que :

$$\frac{y}{x-1} = \frac{t^2}{1+t-e^t}$$

En utilisant le développement limité de la fonction $t \longmapsto e^t$ au voisinage de 0, à l'ordre 2, prouver que $\frac{y}{x-1}$ tend vers -2 quand t tend vers 0. En déduire l'équation de la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point I de paramètre t = 0. Etudier la position de la courbe $\mathscr{C}$ par rapport à cette tangente.

d) Tracer la courbe $\mathscr{C}$ ainsi que la tangente au point I.

17 - Etude et économie de la construction 1990

On considère les fonctions numériques f et g de la variable réelle t définies sur [0 ; 1] par :

$$f(t) = t^2 \qquad \text{et} \qquad g(t) = e^{2t}$$

On désigne par $\mathscr{C}$ la courbe d'équations paramétriques :

$$\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases} \qquad t \in [0 ; 1]$$

dans le plan rapporté à un repère orthogonal d'axes x'Ox, y'Oy (unités graphiques : 5 cm sur l'axe x'Ox et 1cm sur l'axe y'Oy).

1° Etudier les variations des fonctions f et g ; rassembler les résultats dans un tableau unique.

2° Déterminer la tangente à $\mathscr{C}$ au point A d'abscisse 0.

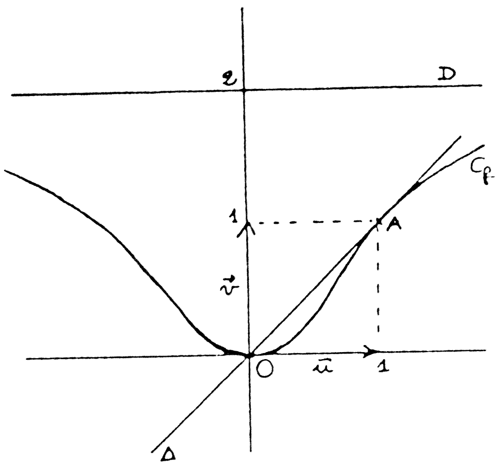
3° Construire la courbe $\mathscr{C}$.

4° Donner une équation cartésienne de $\mathscr{C}$.

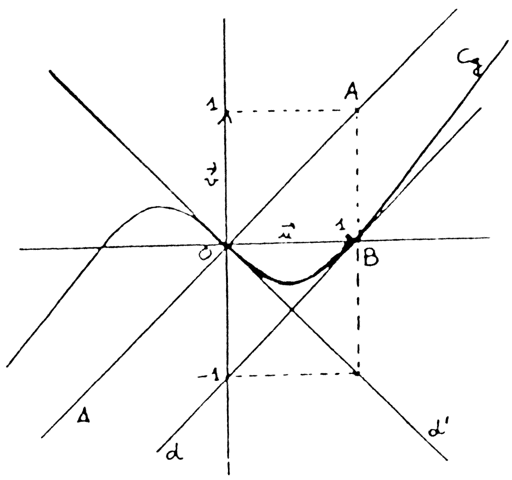
Courbes définies par une représentation paramétrique : Problèmes de synthèse.

18 - Construction navale 1993

I Le plan est muni d'un repère orthonormal $(O\ ;\ \vec{u},\ \vec{v})$. On donne ci-dessous les courbes C_f et C_g représentatives de deux fonctions dérivables f et g de la variable réelle t, pour lesquelles on ne connaît pas les expressions de f(t) et g(t).



La courbe Cf est tangente à l'axe des abscisses.
La courbe Cf est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.
La droite D est asymptote à la courbe Cf.
La droite Δ est tangente à Cf en A(1,1)



La courbe Cg est symétrique par rapport à O.
La droite Δ est asymptote à la courbe Cg.
La courbe Cg est tangente en B(1,0) à la droite d et tangente en O(0,0) à la droite d'.

On note t_1 le réel positif qui annule la dérivée de g.

$t_1 \approx 0{,}48$ $\quad f(t_1) \approx 0{,}38$ $\quad g(t_1) \approx -0{,}3$

Donner les tableaux de variation de f et de g en y faisant apparaître, en particulier le signe des dérivées et les valeurs de f(0), f(1), f'(0), f'(1), g(0), g(1), g'(0), g'(1).

II Le plan est cette fois muni d'un repère orthonormal $(O\ ;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\ )$ (unité graphique : 2 cm). Soit $\mathscr{C}$ la courbe d'équation paramétrique :

$$\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases} \qquad (t \in \mathbb{R})$$

où les fonctions f et g sont celles qui ont été introduites dans la partie I.

Le but de cette partie est de tracer la courbe $\mathscr{C}$ à l'aide des renseignements obtenus au I.

1° Démontrer que l'axe des abscisses est un axe de symétrie de $\mathscr{C}$.

2° Donner le tableau des variations conjointes de f et de g pour t appartenant à $[0\ ;\ +\infty\ [$.

Préciser les coordonnées des points de la courbe $\mathscr{C}$ correspondant aux valeurs suivantes de t : 0 ; t_1, 1. Donner pour chacun de ces points un vecteur directeur de la tangente à $\mathscr{C}$.

3° Démontrer que $\mathscr{C}$ possède une droite asymptote. En donner une équation.

4° Tracer la courbe $\mathscr{C}$. On placera en particulier les trois points de $\mathscr{C}$ obtenus au II 2°, ainsi que les tangentes en ces points.

---

19 - Construction navale 1992

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O\ ;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\ )$ (unité graphique 4 cm).

On note f et g les fonctions définies sur $]0\ ;\ 2]$ par :

$$f(t) = t^2 - 2t \qquad \text{et} \qquad g(t) = -\ t\ \ln(t)$$

La courbe d'équations paramétriques $\begin{cases} x=f(t) \\ y=g(t) \end{cases}$ où t décrit $]0\ ;\ 2]$ est notée (C).

1° Etudier les variations des fonctions f et g ; résumer les résultats obtenus dans un même tableau.

2° a) Quels sont les points de la courbe (C) où la tangente est parallèle à l'un des axes ?

b) On note A le point de (C) obtenu pour t = 2. Donner un vecteur directeur de la tangente à (C) au point A.

c) Justifier pourquoi la courbe (C) admet l'origine O comme point limite (on admettra que la tangente à (C) en ce point est l'axe des ordonnées).

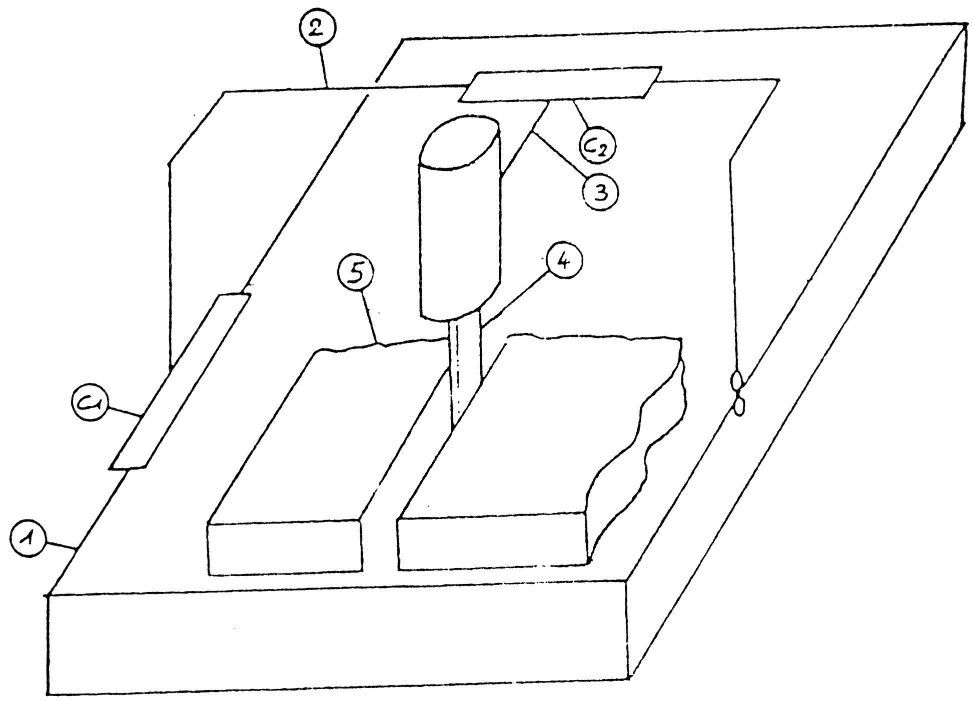
3° Construire la courbe (C).

20 - Conception de produits industriels 1989

L'unité schématisée ci-dessous est utilisée pour couper des plaques de pierre d'épaisseur constante (réalisation, par exemple, de dessus de tables de bar).

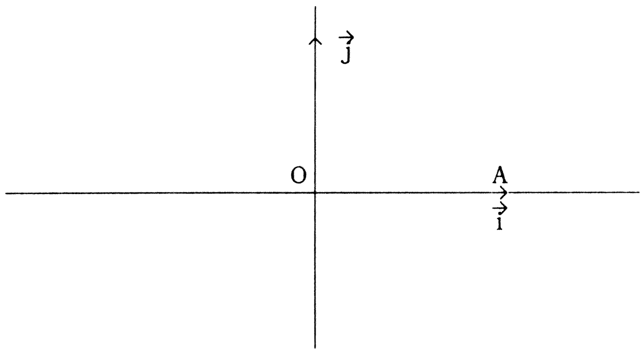
Elle est composée :

- d'un bâti support 1 sur lequel est bridée une plaque de pierre 5,
- d'un coulisseau 2 en liaison glissière d'axe horizontal par rapport à 1 par l'intermédiaire d'un dispositif C_1,
- d'un ensemble coulisseau, moteur, broche, 3 en liaison glissière par rapport à 2 par l'intermédiaire d'un dispositif C_2, selon un axe horizontal, orthogonal au précédent,
- d'un outil 4 d'axe vertical, appelé carotte diamantée, qu'on considérera comme étant de rayon nul, dans ce problème.



Les dispositifs $\mathbf{C_1}$ et $\mathbf{C_2}$ sont commandés par des moteurs à courant continu dont le fonctionnement peut être programmé.

On choisit sur **1** un repère orthonormé $(O\ ,\ \vec{i}\ ,\ \vec{j}\ )$ tel que l'axe $(O\ ,\ \vec{i}\ )$ soit parallèle à l'axe de translation de $\mathbf{C_1}$ et l'axe $(O\ ,\ \vec{j}\ )$ parallèle à l'axe de translation de $\mathbf{C_2}$. (Unité graphique : 10 cm).



On amène l'outil en un point A de la plaque puis on programme le fonctionnement des moteurs pour obtenir le profil (Γ) désiré.

On se propose d'étudier le cas où les coordonnées de l'outil, en fonction du temps compté en minutes à partir de l'instant 0 où l'outil est en A, sont :

$$\begin{cases} x = f(t) = \cos(t) \\ y = g(t) = \dfrac{1}{2}\sin(t)\left(1 + \cos^2(2t)\right) \end{cases}$$

1° - a) Montrer que, au bout d'un certain temps à déterminer, l'outil est revenu en A.

b) Montrer que la courbe (Γ) présente deux axes de symétrie et en déduire qu'il suffit de faire l'étude pour t appartenant à $\left[0\ ;\ \dfrac{\pi}{2}\right]$.
On appellera (Γ_1) la partie de (Γ) correspondant à cet intervalle.

2° - a) Exprimer g(t) en fonction de sin(t).

b) Calculer g'(t) et montrer que, pour tout t de $\left[0\ ;\ \dfrac{\pi}{2}\right]$, g'(t) est strictement positif.

3° Dresser le tableau des variations conjointes des fonctions f et g sur l'intervalle $\left[0\ ;\ \dfrac{\pi}{2}\right]$.

4° - a) Calculer à 10^{-2} près, les ordonnées y des points de (Γ_1) dont les abscisses x sont égales à $\dfrac{k}{10}$, pour k prenant toute valeur entière de 0 à 10. Consigner ces valeurs dans un tableau.

b) Tracer (Γ_1) en faisant apparaître les tangentes aux points d'abscisse 0 et 1.

c) Tracer la courbe (Γ).

5° On admet que l'aire $\mathcal{S}$, exprimée en unités d'aire, du domaine plan intérieur à la courbe (Γ) est donnée par la formule :

$$\mathcal{S} = 4 \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} g(t)\, f'(t)\, dt.$$

a) Calculer cette intégrale.

En déduire l'aire $\mathcal{S}$ de la table exprimée en cm^2.

---

21 - Travaux publics 1989

Le but de cet exercice est de construire une courbe définie paramétriquement et de l'utiliser pour l'étude du système d'ouverture des portes des cabines téléphoniques publiques.

A - Construction d'une courbe définie paramétriquement :

Dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unité graphique 2 cm) on appelle (Γ) la courbe définie paramétriquement par :

$$\begin{cases} x = f(\theta) = -2\cos(\theta) \\ y = g(\theta) = 4\sin(\theta) \end{cases} \qquad \theta \in \left[0 ; \frac{\pi}{2}\right].$$

1) Etudier le sens de variation de chacune des fonctions f et g. Récapituler les résultats dans un tableau unique.

2) Tracer la courbe (Γ).

B - Etude du mouvement de la porte d'une cabine téléphonique :

Le système d'articulation de la porte peut être schématisé par les figures ci-jointes où OC = CM = a ; a est une longueur fixée, C est le milieu de [MP], M est le milieu de [PN], O est un point fixe et OC une barre pivotant autour d'un axe vertical passant par O.

Le segment [NP] est la trace horizontale de la porte articulée en C et en M. Le point M est assujetti à glisser dans une rainure [OO']. La longueur OO' est égale à 4a.

θ est une mesure de l'angle $\widehat{POC}$, θ étant élément de $\left[0 ; \frac{\pi}{2}\right]$.

On choisit le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ représenté sur la figure 2.

1) Déterminer, en fonction de a et θ, les coordonnées des points C, M, P. En déduire que P décrit un segment porté par l'axe $(O, \vec{i})$.

2) Donner un système d'équations paramétriques de la courbe décrite par le point N.

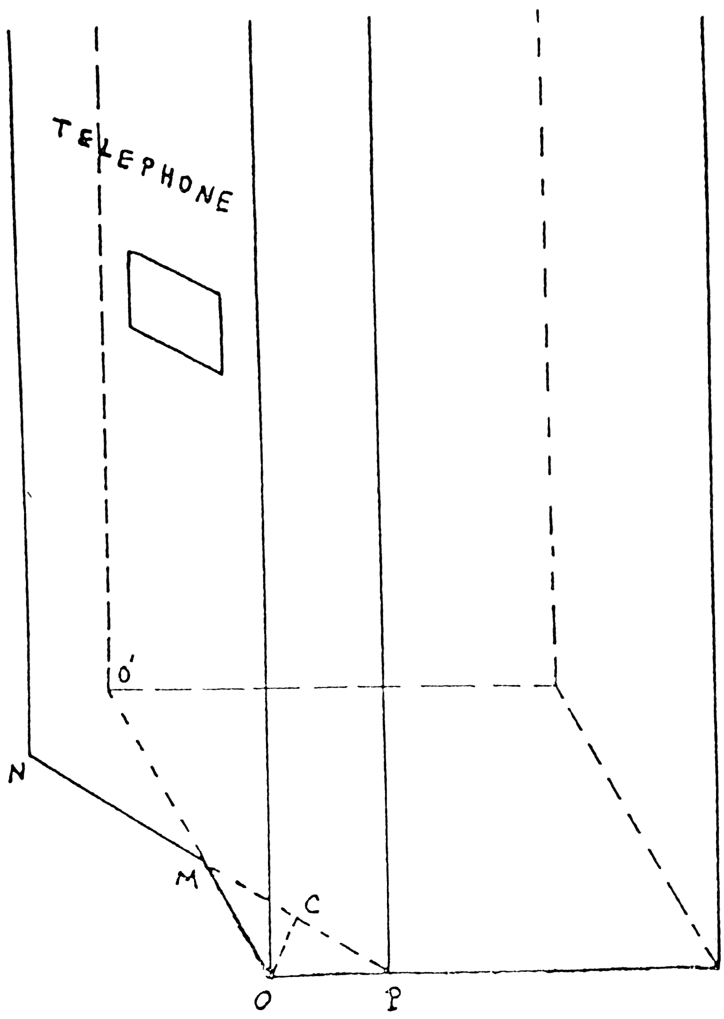


Figure 1

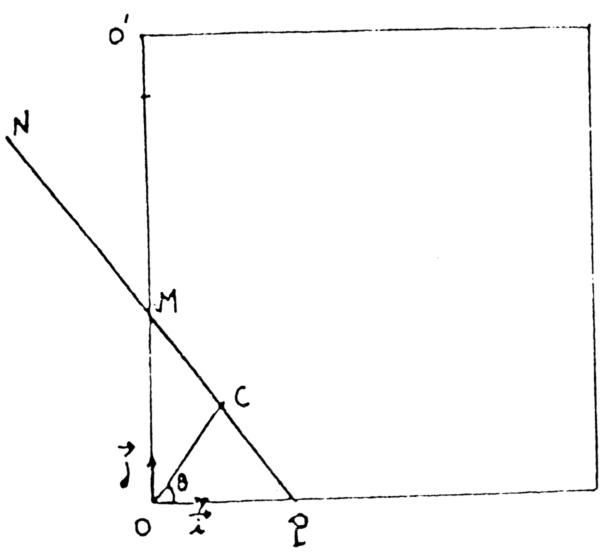
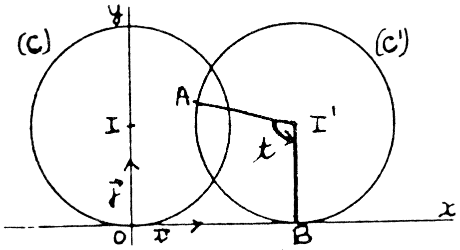


Figure 2

Vue de dessus

22 - Equipements techniques du bâtiment 1987

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O\ ,\ \vec{i}\ ,\vec{j}\ )$ et l'unité de longueur est le centimètre.



Soit le cercle (C) de rayon R et de centre I. (C) roule sans glisser sur l'axe $(O\ ,\ \vec{i}\ )$ du repère.

Lorsque le cercle occupe la position (C'), le point qui initialement coïncidait avec le point O occupe la position A et le roulement sans glissement se traduit par l'égalité de la longueur du segment [OB] et de la longueur de l'arc de cercle $\overset{\frown}{AB}$.

Soit t une mesure en radians de l'angle $(\widehat{\overrightarrow{I'A}, \overrightarrow{I'B}})$.

1° - 1) Déterminer en fonction de t les coordonnées x et y de A. On pourra utiliser la relation :

$$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BI'} + \overrightarrow{I'A}$$

1° - 2) Déterminer en fonction de t les coordonnées x et y du point A' tel que :

$$\overrightarrow{I'A'} = \frac{3}{2}\,\overrightarrow{I'A}$$

2° Soit (Γ) la courbe définie par les équations paramétriques :

$$\begin{cases} x = f(t) = 2t - 3\sin(t) \\ y = g(t) = 2 - 3\cos(t) \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}$$

2° - 1) Soit (Γ_1) la portion de (Γ) obtenue lorsque t décrit $[0\ ,\ 2\pi]$.

Etudier les variations de f et g sur $[0\ ,\ 2\pi]$ et rassembler les résultats dans un seul tableau.

Déterminer les coordonnées exactes des points de (Γ_1) admettant des tangentes parallèles aux axes de coordonnées.

On ne recherchera pas les intersections de (Γ_1) et de l'axe $(O, \vec{j})$ du repère.

Tracer (Γ_1).

2° - 2) Comment peut-on déduire de (Γ_1) le tracé de (Γ) ?

Esquisser l'allure de la courbe (Γ).

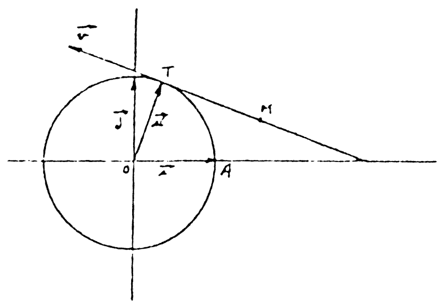
---

23 - Assistance technique d'ingénieur 1990

Soit $\mathcal{P}$ un plan muni d'un repère orthonormal direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
L'unité de longueur est le centimètre.

On considère le cercle (C) de centre O et de rayon 1. On désigne par A le point de coordonnées (1 ; 0). A tout réel t on associe le point T du cercle (C) tel que la mesure de l'angle $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OT})$, en radians ait une détermination égale à t.

On désigne par $\vec{u}$ le vecteur $\overrightarrow{OT}$ et par $\vec{v}$ le vecteur unitaire tel que l'angle $(\vec{u}, \vec{v})$ ait pour mesure $+\frac{\pi}{2}$. Ce vecteur $\vec{v}$ est donc un vecteur directeur de la tangente en T au cercle (C). Sur cette tangente on considère le point M tel que $\overrightarrow{MT} = t\,\vec{v}$.



Lorsque le point T se déplace sur le cercle (C) le point M décrit une courbe (Γ) que l'on se propose de construire.

1° Montrer que les coordonnées de M dans le repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ sont :

$$\begin{cases} x = f(t) = \cos(t) + t\sin(t) \\ y = g(t) = \sin(t) - t\cos(t) \end{cases}$$

On pourra utiliser la relation : $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OT} + \overrightarrow{TM}$.

2° Etudier les variations des fonctions f et g sur l'intervalle $\left[0 ; \frac{5\pi}{2}\right]$. Dresser le tableau des variations conjointes de ces deux fonctions sur cet intervalle.

3° a) Montrer que l'équation $f(t) = 0$ admet deux solutions dans l'intervalle $\left[0 ; \frac{5\pi}{2}\right]$. On note t_1 et t_2 ces solutions ($t_1 < t_2$). Donner une valeur approchée de t_1 à 10^{-2} près. Vérifier que $6,12 < t_2 < 6,13$.

b) Montrer que l'équation $g(t) = 0$ admet deux solutions dans l'intervalle $\left[0 ; \frac{5\pi}{2}\right]$. On note t_3 et t_4 ces solutions.

Vérifier que :

$$4,49 < t_3 < 4,50 \text{ et } 7,72 < t_4 < 7,73.$$

4° On désigne par (Γ_1) la partie de (Γ) parcourue par le point M lorsque t décrit l'intervalle $\left[-\frac{5\pi}{2} ; \frac{5\pi}{2}\right]$.

Vérifier que le point A appartient à (Γ_1). Déterminer la tangente en A (on admettra que le coefficient directeur de la tangente en A à (Γ_1) est $\lim_{t \to 0} \frac{g'(t)}{f'(t)}$).

Construire (Γ_1).

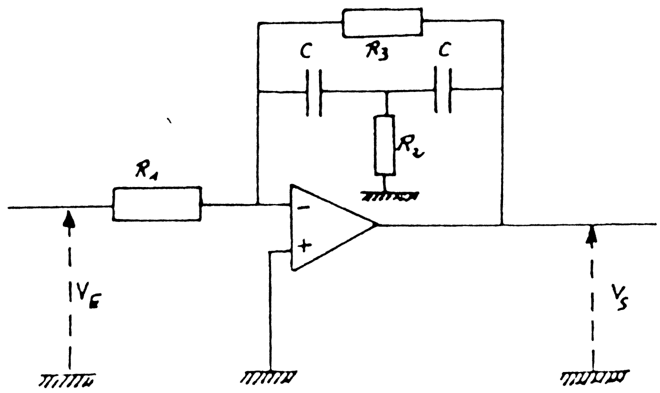
5° La longueur de l'arc de courbe (Γ_1) est donnée par :

$$\ell = \int_{-\frac{5\pi}{2}}^{\frac{5\pi}{2}} \sqrt{f'(t)^2 + g'(t)^2}\, dt$$

Calculer ℓ et en donner une valeur approchée à 10^{-1} près.

24 - Electrotechnique 1988

Dans l'étude des filtres actifs, on définit en électronique la fonction de transfert T du système qui à la pulsation variable ω, en radians par seconde, du signal d'entrée, fait correspondre le nombre complexe $T(\omega)$, quotient de la tension complexe de sortie V_s par la tension complexe d'entrée V_e.



Dans le cas schématisé ci-avant, T est définie pour tout réel strictement positif ω par :

$$T(\omega) = -\frac{R_3}{R_1}\cdot\frac{1 + 2jR_2C\omega}{1 + 2jR_2C\omega - R_2R_3C^2\omega^2}$$

où j est le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$,

avec :

$R_1 = 68.10^3\ \Omega \qquad R_3 = 3\ R_2 \qquad R_3 = 10^6\ \Omega \qquad$ et $\qquad C = 0{,}47.10^{-6}$ F.

L'objet du problème est la détermination du maximum du module de $T(\omega)$ et de la pulsation ω_0 correspondante, à l'aide d'une courbe définie paramétriquement étudiée dans la première partie.

1ère partie

1° Pour simplifier les calculs on pose $t = R_2C\omega$.

Montrer que $T(\omega)$ peut s'écrire :

$$f(t) = -\frac{250}{17}\cdot\frac{1 + 2jt}{1 + 2jt - 3t^2} \qquad (1)$$

2° Mettre f(t) sous la forme $f(t) = g(t) + j\ h(t)$ où g et h sont deux fonctions réelles de la variable réelle t.

3° - a) Etudier le signe des expressions bicarrées : $3t^4 + 6t^2 - 1$ et $9t^4 + 2t^2 - 3$, pour t positif ou nul.

b) Soit (Γ) la courbe dont une représentation paramétrique dans le plan rapporté à un repère orthonormal $(O\ ;\ \vec{u}\ ,\ \vec{v}\ )$ (unité graphique 1 cm) est :

$$\begin{cases} x = g(t) = -\dfrac{250}{17} \cdot \dfrac{1 + t^2}{9t^4 - 2t^2 + 1} \\ \\ y = h(t) = \dfrac{1\,500}{17} \cdot \dfrac{t^3}{9t^4 - 2t^2 + 1} \end{cases}$$

où t varie dans l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.

Etudier les variations des fonctions g et h. et dresser le tableau résumant les variations conjointes de ces fonctions.

On admet que le coefficient directeur de la tangente à (Γ) au point de paramètre t = 0 est $\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{h'(t)}{g'(t)}$; déterminer la tangente à (Γ) en ce point.

$2^{ième}$ partie

1° Par mesure directe sur la représentation graphique de (Γ), marquer le point M_0 où le module de $T(\omega)$ est maximum et indiquer une valeur approchée de ce maximum.

2°- a) Calculer, en fonction de t, $|f(t)|^2$ (on aura intérêt à utiliser directement l'égalité (1)).

b) Soit φ la fonction définie sur $[0\ ,\ +\infty[$ par :

$$\varphi(t) = \frac{250^2}{17^2\ |f(t)|^2}$$

Montrer que :

$$\varphi(t) = \frac{9}{4}\,t^2 - \frac{17}{16} + \frac{33}{16(1 + 4t^2)}.$$

Etudier les variations de la fonction φ ; déterminer le nombre t_0 pour lequel $\varphi(t)$ est minimum et calculer $\varphi(t_0)$.
(On ne demande pas de construire la courbe représentative de la fonction φ).

c) En déduire le maximum de $|f(t)|$ et la pulsation ω_0 correspondante.

25 - Construction navale 1991

Partie I :

Dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$, où l'unité graphique est le centimètre, on désigne par (C) la courbe d'équations paramétriques :

$$\begin{cases} x = 2u - 1,4\ \sin(u) \\ y = -2 + 1,4\ \cos(u) \end{cases} \qquad \text{où } u \text{ décrit } \mathbb{R}.$$

M, M' et M_k désignent respectivement les points de (C) associés aux valeurs u, -u et $u+2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}^*$) du paramètre.

1° Soit (C_1) la portion de (C) décrite par le point M lorsque u décrit l'intervalle $[-\pi ; \pi]$.

Exprimer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{MM_k}$. Comment peut-on déduire (C) de la courbe (C_1) ?

2° Démontrer que les points M' et M sont symétriques dans la symétrie orthogonale par rapport à l'axe des ordonnées.

3° Etudier le sens de variation des fonctions f et g définies sur $[0 ; \pi]$ par :

$$f(u) = 2u - 1,4\ \sin(u)$$

$$g(u) = -2 + 1,4\ \cos(u)$$

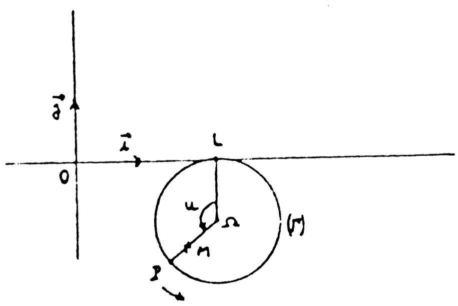
4° Construire les droites tangentes à (C) aux points de paramètre 0 et π puis tracer la courbe (C).

5° Calculer l'aire $\mathcal{A}$ du domaine plan limité par (C), l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 0$ et $x = 4\pi$; on admettra que :

$$\mathcal{A} = -\int_0^{2\pi} g(u)\ f'(u)\ du \qquad (\text{en cm}^2).$$

Partie II :

Dans la schématisation de la houle de GERSTNER, on admet que le profil de la houle, dans un plan vertical contenant la direction de propagation, est la trajectoire d'un point M lié à un cercle (Γ) qui roule sans glisser sur une droite comme l'indique le schéma ci-après, L étant le point de contact de ce cercle avec la droite :



(Γ) a pour centre Ω et pour rayon R.

P est le point du cercle (Γ) repéré par u, avec $u = (\overrightarrow{\Omega L},\overrightarrow{\Omega P})$, et tel que OL = Ru.

Ainsi pour u = 0, L et O coïncident.

M est défini par : $\overrightarrow{\Omega M} = h\ \overrightarrow{\Omega P}$ où h est un réel donné compris entre 0 et 1.

1° Exprimer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{L\Omega}$, $\overrightarrow{\Omega M}$, $\overrightarrow{OM}$ relativement au repère orthonormal $(O\ ;\ \vec{i}\ ,\ \vec{j}\ )$.

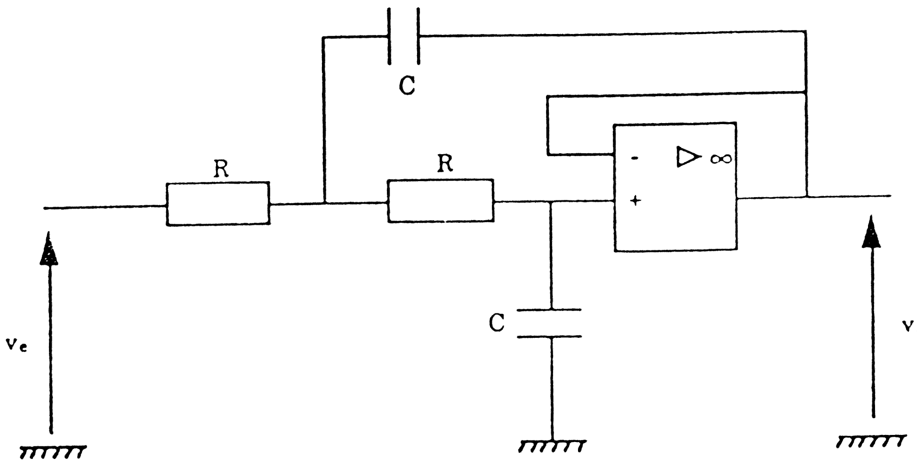
2° Proposer une valeur de h et une valeur de R pour lesquelles la courbe (C) de la partie I représente le profil de la houle.

Courbes définies par une représentation polaire.

26 - C.I.R.A. 1993

On note j le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$.

Le but de cet exercice est le tracé du "lieu de transfert" du filtre passe-bas représenté ci-dessous :



la fonction de transfert H de ce filtre est définie par :

$$H(p) = \frac{1}{R^2C^2p^2 + 2RCp + 1} = \frac{1}{(RCp + 1)^2}.$$

On suppose que RC = 1. On a donc :

$$H(p) = \frac{1}{(1+p)^2}.$$

Soit ω un nombre réel positif.

1.a) Calculer, en fonction de ω, le module du nombre complexe $H(j\omega)$. ce module sera noté $|H(j\omega)|$.

b) Soit f la fonction définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par : $f(\omega) = |H(j\omega)|$.

Préciser f(0) et la limite de f en $+\infty$. Etudier les variations de f. Dresser son tableau de variation.

2.a) Montrer qu'on peut trouver un argument du nombre complexe $1 + j\omega$ dans l'intervalle $[0\ ;\ \frac{\pi}{2}[$; exprimer cet argument en utilisant la fonction arctangente. En déduire qu'on peut trouver un argument du nombre complexe $H(j\omega)$ dans l'intervalle $]-\pi\ ;\ 0]$; on le notera $g(\omega)$. On définit ainsi, sur $[0\ ;\ +\infty[$ une fonction g.

b) Préciser g(0) et la limite de g en $+\infty$. Dresser le tableau de variation de la fonction g.

3. Le "lieu de transfert" du filtre est la courbe décrite, dans le plan rapporté à un repère orthonormal, par le point d'affixe $H(j\omega)$, lorsque ω parcourt $[0\ ;\ +\infty[$. C'est donc la courbe définie par la représentation polaire

$$\omega \longmapsto f(\omega)\ e^{j\ g(\omega)}$$

où f et g sont les fonctions introduites précédemment.

En s'aidant des questions 1 et 2, tracer le "lieu de transfert" de ce filtre.

MODELISATION GEOMETRIQUE

Courbes de Bézier

1 - Informatique industrielle 1988

On se propose d'étudier une courbe définie paramétriquement (partie I) appartenant à un modèle de courbe utilisé pour la modélisation des formes en C.F.A.O. (Conception et Fabrication Assistées par Ordinateur) (parties II et III).

Partie I : Etude d'un exemple de courbe définie par une représentation paramétrique.

Soient A_0 (0 ; 0), A_1 (1 ; -1), A_2 (3 ; 2), A_3 (4 ; 1) quatre points du plan $\mathcal{P}$ muni d'un repère orthonormal $\mathcal{R}$ $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ (unité graphique : 4 cm).

Soit (C) la courbe définie pour t appartenant à [0 ; 1] par :

$$\begin{cases} x = f(t) = -2\,t^3 + 3\,t^2 + 3\,t \\ y = g(t) = -8\,t^3 + 12\,t^2 - 3\,t \end{cases}$$

1 - 1) Etudier sur [0 ; 1] les fonctions f et g ; dresser le tableau des variations conjointes de ces fonctions puis tracer la courbe (C).

1 - 2) Etablir que (C) est tangente en A_0 à la droite (A_0A_1) et tangente en A_3 à la droite (A_2A_3).

Partie II : Etude d'une suite de nombres réels définie à l'aide d'un graphe.

La notation b_n^p représente un nombre réel dépendant de deux indices n et p, où n est un entier naturel, et p un entier naturel inférieur ou égal à n. (Dans cette notation, l'indice p n'a pas la signification d'une puissance).

On considère le graphe suivant :

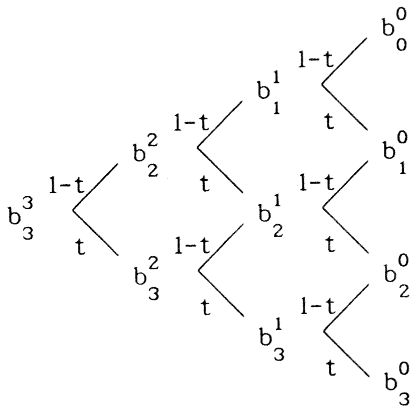
$$\alpha \begin{array}{l} \overset{1-t}{\nearrow}\ \beta \\ \underset{t}{\searrow}\ \gamma \end{array}$$

La signification de ce graphe est : $\alpha = (1-t)\,\beta + t\,\gamma$.

2 - 1) Exprimer à l'aide de ce graphe la relation :

$$b_n^p = (1-t)\ b_{n-1}^{p-1} + t\ b_n^{p-1} \qquad \text{où } 1 \leq p \leq n.$$

2 - 2) A l'aide du graphe ci-dessous :



montrer que b_3^3 s'exprime en fonction de b_0^0, b_1^0, b_2^0, b_3^0 sous la forme :

$$b_3^3 = (1-t)^3\ b_0^0 + 3t(1-t)^2\ b_1^0 + 3t^2(1-t)b_2^0 + t^3\ b_3^0$$

2 - 3) En s'inspirant du graphe précédent, expliciter un algorithme permettant de calculer b_n^n en fonction de b_0^0, b_1^0, ... , b_i^0, ...,b_n^0.

Partie III : Description du modèle de courbes.

On donne quatre points A_0^0, A_1^0, A_2^0, A_3^0 du plan de coordonnées respectives $(x_0^0 ; y_0^0)$, $(x_1^0 ; y_1^0)$, $(x_2^0 ; y_2^0)$, $(x_3^0 ; y_3^0)$.

Pour $1 \leq p \leq n \leq 3$, on considère le point A_n^p dont les coordonnées $(x_n^p ; y_n^p)$ sont définies par les relations :

$$(2) \quad \begin{cases} x_n^p = (1-t)\ x_{n-1}^{p-1} + t\ x_n^{p-1} \\ \\ y_n^p = (1-t)\ y_{n-1}^{p-1} + t\ y_n^{p-1} \end{cases} \qquad \text{où} \quad t \in [0\ ;\ 1].$$

Enfin on note plus simplement $(x ; y)$ les coordonnées du point $M = A_3^3$.

3 - 1) Calculer x en fonction de t, x_0^0, x_1^0, x_2^0, x_3^0 et y en fonction de t, y_0^0, y_1^0, y_2^0, y_3^0.

3 - 2) Etablir que l'on obtient la représentation paramétrique de la courbe (C) de la partie I si :

$$\begin{cases} x_0^0 = 0 \\ y_0^0 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1^0 = 1 \\ y_1^0 = -1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2^0 = 3 \\ y_2^0 = 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_3^0 = 4 \\ y_3^0 = 1 \end{cases}$$

3 - 3) *Cette représentation va être exploitée pour donner une construction géométrique d'un point de la courbe (C).*

Sur une deuxième figure placer les points A_0 (0 ; 0), A_1 (1 ; -1), A_2 (3 ; 2), A_3 (4 ; 1).

En utilisant le système (2),

a) montrer que, pour $t = \frac{1}{2}$, le point A_1^1 (x_1^1 ; y_1^1) est le milieu de $[A_0A_1]$, et que le point A_3^1 est le milieu de $[A_2A_3]$.

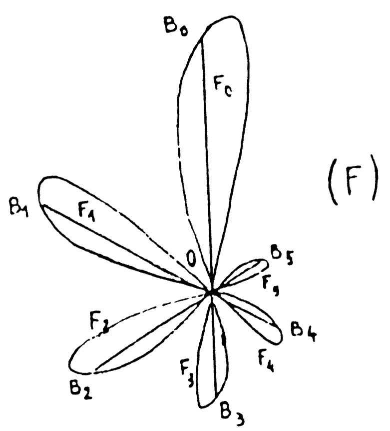
En déduire la construction géométrique du point A_3^3 pour $t = \frac{1}{2}$ (on notera E ce point sur la figure).

b) En s'inspirant de la méthode expliquée dans la question précédente, construire le point A_3^3 pour $t = \frac{1}{3}$ (on notera F ce point).

2 - Informatique industrielle 1990

On se propose de déterminer une modélisation d'une forme graphique plane (F) obtenue à partir de transformations successives d'un motif de base.

N.B. La représentation de (F) ci-dessous n'est pas à l'échelle.



Le plan complexe (P) est muni d'un repère orthonormal $(O ; \vec{u}, \vec{v})$, l'unité graphique étant le centimètre.

Une courbe de Bézier est définie à partir de n + 1 points de contrôle successifs M_0, M_1, ..., M_k, ..., M_n d'affixes respectives z_0, z_1, ..., z_k, ..., z_n comme étant l'ensemble des points M d'affixe z telle que :

$$z = \sum_{k=0}^{k=n} C_n^k \, t^k \, (1-t)^{n-k} \, z_k$$

t étant une variable réelle de l'intervalle [0 ; 1].

A - Réalisation du motif de base :

1 - Soit (Γ_0) la courbe de Bézier définie à partir des trois points de contrôle successifs O (0 ; 0), A_0 (3 ; 12) et B_0 (0 ; 9).

a) Montrer qu'une représentation paramétrique de (Γ_0) est :

$$\begin{cases} x = f(t) = 6t - 6t^2 \\ y = g(t) = 24t - 15t^2 \end{cases} \qquad t \in [0 ; 1].$$

b) Etudier les variations des fonctions f et g sur [0 ; 1].
Montrer que la droite (OA_0) est tangente en O à (Γ_0) et que la droite (B_0A_0) est tangente en B_0 à (Γ_0). Représenter (Γ_0).

2 - Soit (Γ'_0) la courbe de Bézier définie à partir des trois points de contrôle successifs O (0 ; 0), A'_0 (a ; b) et B_0, où a et b appartiennent à $\mathbb{R}$.

a) Déterminer a et b pour que :

- (Γ'_0) admette une tangente parallèle à l'axe des ordonnées au point d'abscisse -1,

- (Γ'_0) admette (B_0A_0) comme tangente en B_0.

b) Ces conditions étant réalisées, en déduire que (Γ'_0) admet, pour t appartenant à [0 ; 1], une représentation paramétrique de la forme :

$$\begin{cases} x = -4t + 4t^2 \\ y = 14t - 5t^2 \end{cases}$$

Montrer que la droite (OA'_0) est tangente en O à (Γ'_0).

Montrer que les points A'_0, B_0 et A_0 sont alignés et que la droite (A'_0A_0) est tangente en B_0 aux deux courbes (Γ_0) et (Γ'_0).

Représenter (Γ'_0).

On appelle "feuille" $\mathcal{F}_0$ le motif obtenu par la réunion des deux courbes (Γ_0) et (Γ'_0).

B - Réalisation de la forme :

La forme graphique que l'on veut réaliser est composée de 6 feuilles $\mathcal{F}_0$, $\mathcal{F}_1$, ..., $\mathcal{F}_5$. La feuille $\mathcal{F}_0$ est le motif de base défini dans la partie A.

Pour k entier, tel que $1 \leq k \leq 5$, la feuille $\mathcal{F}_k$ est la transformée de la feuille $\mathcal{F}_{k-1}$ par une similitude S de centre O, de rapport R, d'angle α où R est un réel strictement positif et α un réel de l'intervalle $]0 ; \pi[$.

1 - Détermination de la similitude S :

a) Calculer R et α sachant que, dans le repère précédent, le point B_3 a pour coordonnées $(0 ; -\frac{243}{64})$.

b) Vérifier que S est l'application qui, à tout point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe z' telle que :

$$z' = \frac{3}{8}\left(1 + i\sqrt{3}\right) z$$

c) En déduire les coordonnées (x' ; y') du point M' en fonction des coordonnées (x ; y) du point M.

2 - Réalisation :

On se propose de représenter la forme (F) sur un écran graphique.

On dispose, à cet effet, de la procédure $BZ(x_0,y_0,x_1,y_1,x_2,y_2)$ permettant de tracer la courbe de Bézier admettant comme points de contrôle successifs les points M_0, M_1, M_2 de coordonnées respectives $(x_0 ; y_0)$, $(x_1 ; y_1)$, $(x_2 ; y_2)$.

a) Proposer un algorithme relatif à la procédure TR(x,y,x',y') permettant de calculer les coordonnées (x' ; y') du point M' transformé de M (x ; y) par la similitude S.

b) Proposer un algorithme permettant de réaliser la forme (F) en partant de la feuille $\mathcal{F}_0$ et en utilisant les procédures BZ et TR précédentes.

3 - Informatique industrielle 1993

I. On considère la fonction f définie par :

$$f : [1 ; 4] \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$f : x \longmapsto x\sqrt{5 - x}.$$

On appelle (C1) sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ (unité graphique : 2 cm).

1° Etudier les variations de f.
Donner un vecteur directeur de chacune des tangentes à (C1) aux points d'abscisses 1 et 4.
Construire (C1) ainsi que les tangentes précédentes.

2° Calculer, en cm^2, l'aire du domaine plan, ensemble des points M de coordonnées (x ; y) telles que :

$$\begin{cases} 1 \leq x \leq 4 \\ 2 \leq y \leq f(x). \end{cases}$$

On pourra utiliser le changement de variable d'intégration défini par :

$$w = \sqrt{5 - x}.$$

II. On dispose d'un logiciel permettant le tracé des courbes de Bézier à partir de points de contrôle. Après quelques essais, on choisit d'approcher la courbe (C1) précédente par la courbe de Bézier (C2) définie pour tout t de [0 ; 1] par :

$$\overrightarrow{OM}(t) = \sum_{i=0}^{i=3} C_3^i\, t^i\, (1-t)^{3-i}\, \overrightarrow{OA_i}$$

où les points de contrôle ont pour coordonnées respectives :

(1 ; 2) pour A_0, $(2 ; \frac{7}{2})$ pour A_1, (3 ; 5) pour A_2 et (4 ; 4) pour A_3.

1° Ecrire sous forme développée et ordonnée les fonctions polynômiales B_i définies sur [0 ; 1] par :

$$B_i(t) = C_3^i\, t^i\, (1-t)^{3-i} \qquad \text{pour } i \in \{0,1,2,3\}.$$

2° Montrer que les coordonnées du point M de (C2) sont :

$$\begin{cases} x = u(t) = 3t + 1 \\ y = v(t) = -\frac{5}{2}t^3 + \frac{9}{2}t + 2 \end{cases}$$

3° Etudier les variations des fonctions u et v.

4° Montrer que $\overrightarrow{A_0A_1}$ est un vecteur tangent à (C2) au point A_0 et que $\overrightarrow{A_2A_3}$ est un vecteur tangent à (C2) au point A_3. Tracer (C2).

5° Donner une équation cartésienne $y = g(x)$ de (C_2) où g est une fonction polynômiale de degré 3, sans développer les puissances de $(x-1)$.

III. On souhaite établir un critère permettant de guider le choix de la courbe de Bézier utilisée pour l'approximation de (C_1).

Pour cela, dans l'intervalle $[1 ; 4]$ on choisit N valeurs x_i formant une suite arithmétique (x_i) de premier terme $x_1 = 1$ et de dernier terme $x_N = 4$.

En considérant que les sous programmes relatifs aux fonctions f et g sont déja écrits, donner un algorithme de calcul de la moyenne des carrés des écarts entre $f(x_i)$ et $g(x_i)$.

B-Spline

4 - Informatique industrielle 1992

Un exemple de courbe B-Spline :

1°/ On considère les polynômes R_i de degré 2, où i appartient à {0, 1, 2}, définis pour t, variable réelle appartenant à [0 ; 1], par :

$$R_i(t) = 3 \sum_{j=0}^{j=2-i} (-1)^j \frac{(t+2-i-j)^2}{j!\ (3-j)!}$$

a) Montrer que :

$$R_0(t) = \frac{t^2}{2} - t + \frac{1}{2}$$

$$R_1(t) = -t^2 + t + \frac{1}{2}$$

b) Déterminer $R_2(t)$; vérifier que : $\sum_{i=0}^{i=2} R_i(t) = 1.$

2°/ Soit un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$, (unité graphique : 2 cm).

Soient, dans ce repère, les points P_1 (0 ; 1), P_2 (4 ; 1), P_3 (6 ; 5) et P_4 (8 ; 1). On définit la courbe B-Spline associée à ces quatre points, formée de deux arcs de courbe (C_1) et (C_2) :

(C_1) est l'ensemble des points $M_1(t)$ tels que :

$$\overrightarrow{OM_1}(t) = R_0(t)\ \overrightarrow{OP_1} + R_1(t)\ \overrightarrow{OP_2} + R_2(t)\ \overrightarrow{OP_3}$$

(C_2) est l'ensemble des points $M_2(t)$ tels que :

$$\overrightarrow{OM_2}(t) = R_0(t)\ \overrightarrow{OP_2} + R_1(t)\ \overrightarrow{OP_3} + R_2(t)\ \overrightarrow{OP_4}.$$

a) Montrer que l'arc (C_1) est défini par la représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x_1 = f(t) = -t^2 + 4t + 2 \\ y_1 = g(t) = 2t^2 + 1 \end{cases} \qquad t \in [0 ; 1]$$

Etudier les variations de f et g pour t appartenant à [0 ; 1] et construire (C_1).

b) Déterminer une représentation paramétrique de l'arc (C_2) ; montrer que cet arc est un arc de parabole. Construire (C_2).

c) Vérifier que les arcs (C_1) et (C_2) se raccordent au point I (5 ; 3). Montrer que (C_1) et (C_2) ont même tangente en I et que cette tangente est la droite (P_2P_3).

d) Montrer que $M_1(0)$ est le milieu du segment $[P_1P_2]$, que $M_1(1)$ est le milieu du segment $[P_2P_3]$, que $M_2(1)$ est le milieu du segment $[P_3P_4]$.

3°/ On dispose de la procédure TRACE(XA,YA,XB,YB) permettant de tracer le segment [AB] sur un périphérique graphique, (XA ; YA) et (XB ; YB) étant les coordonnées respectives de A et de B.

Donner un algorithme d'un sous programme ARC(XA,YA,XB,YB,XC,YC) traçant l'arc de courbe B-Spline défini à partir de points A, B, C, de coordonnées respectives (XA ; YA), (XB ; YB) (XC ; YC) selon le processus décrit dans la question 2. Ecrire un algorithme permettant de tracer la courbe B-Spline de la question 2.

4°/ On ajoute un point P' (2 ; 0) aux quatre points P_1, P_2, P_3, P_4 de la question 2 en intercalant P' entre P_1 et P_2.

a) Donner la définition en coordonnées paramétriques de chacun des arcs formant la nouvelle courbe B-Spline.

b) Représenter la courbe B-Spline de la question 2. Dans le même repère, donner, sans calculs, l'allure de la nouvelle courbe B-Spline.