PUBLICATION N° 27 DU GROUPE INTER IREM "LYCEES TECHNIQUES"

EXERCICES ET PROBLEMES POUR STS

FASCICULE 3

(OCTOBRE 1994)

Université PARIS-NORD

IREM - Institut Galilée

Avenue J.B. Clément
93430 VILLETANEUSE

UNIVERSITE PARIS-NORD

IREM

EXERCICES ET PROBLEMES DE BTS
classés par modules

ISBN 2 86 240 80 7

Michel CHAVIGNY :	**(IREM de Besançon)**
Hélène DELCLAUX :	**(IREM de Paris)**
Françoise DELZONGLE :	**(IREM Paris-Nord)**
Jean MATIVET :	**(IREM Paris-Nord)**
Bernard VERLANT :	**(IREM Paris-Nord)**

Retirage Juin 1994

600 ex.

40.00 F

SOMMAIRE

AVANT PROPOS

AVANT PROPOS

Cette brochure regroupe des exercices ou problèmes posés aux épreuves de BTS de ces dernières années.

Afin d'élargir les champs d'investigation, les textes ont été classés par thèmes. Dans chaque thème, les sujets ont été généralement regroupés par grandes filières.

Certains énoncés ont été modifiés pour améliorer la compréhension.
Pour chaque exercice ont été indiqués le ou les modules et travaux pratiques correspondant à l'exercice et qui font partie du programme de la section.

Les problèmes qui correspondent au TP n°5 du module "équations différentielles (2)" (Transformation de Laplace pour la résolution d'équations où de systèmes d'équations linéaires) ont été placés dans la brochure "EXERCICES ET PROBLEMES POUR STS, Fascicule 2", plus spécialement destinée à la filière électronique.

CALCUL DIFFERENTIEL ET INTEGRAL

LES TEXTES PROPOSES

LISTE DES TRAVAUX PRATIQUES DES MODULES "CALCUL DIFFERENTIEL ET INTEGRAL"

Calcul différentiel et intégral 1

TP1 : Exemple d'emploi du calcul différentiel pour la recherche d'extremums, l'étude de la variation et de la construction des représentations graphiques des fonctions.
TP2 : Exemples de calculs d'intégrales à l'aide d'une primitive.
TP3 : Exemples de calculs d'aires, de volumes, de valeurs moyennes, de valeurs efficaces.
TP4 : Exemples de mise en oeuvre d'algorithmes d'approximation d'une intégrale.

Calcul différentiel et intégral 2

TP1 : Exemple d'emploi du calcul différentiel pour la recherche d'extremums, l'étude de la variation et de la construction des représentations graphiques des fonctions.
TP2 : Exemples simples d'emploi des développements limités pour l'étude locale des fonctions.
TP3 : Exemples d'étude des solutions d'une équation numérique, et d'algorithmes d'approximation d'une solution à l'aide de suites.
TP4 : Calcul d'une primitive figurant au formulaire officiel ou s'en déduisant par un changement de variable du type : $t \mapsto t + b$ ou $t \mapsto at$.
TP5 : Calcul d'une primitive d'une fonction rationnelle dans le cas de pôles simples ou d'une fonction exponentielle polynôme (de la forme $t \mapsto e^{at}P(t)$, où a est complexe, et où P est un polynôme).
TP6 : Exemples de calculs d'intégrales.
TP7 : Exemples d'algorithmes d'approximation d'une intégrale.
TP8 : Exemples de calculs d'aires, de volumes, de centres d'inertie, de moments d'inertie, de valeurs moyennes, de valeurs efficaces.

Calcul différentiel et intégral 3

TP1 : Exemple d'emploi du calcul différentiel pour la recherche d'extremums, l'étude de la variation et de la construction des représentations graphiques des fonctions.
TP2 : Exemples simples d'emploi des développements limités pour l'étude locale des fonctions.
TP3 : Exemples de tracé de courbes planes définies par : une représentation paramétrique : $t \mapsto f(t) + ig(t)$, ou une représentation polaire : $t \mapsto f(t) = r(t)\exp(\,i\varphi(t)\,)$, où $r(t) \geq 0$.
TP4 : Exemples simples d'obtention de développement en série entière et d'emploi de tels développements pour l'approximation d'une fonction par un polynôme.
TP5 : Exemples de recherche des solutions d'une équation numérique, et de mise en oeuvre d'algorithmes d'approximation d'une solution à l'aide de suites.
TP6 : Calcul d'une primitive figurant au formulaire officiel ou s'en déduisant par un changement de variable du type : $t \mapsto t + b$ ou $t \mapsto at$.
TP7 : Calcul d'une primitive d'une fonction rationnelle dans le cas de pôles simples ou d'une fonction exponentielle polynôme (de la forme $t \mapsto e^{at}P(t)$, où a est complexe, et où P est un polynôme).
TP8 : Exemples de calculs d'intégrales.
TP9 : Exemples d'algorithmes d'approximation d'une intégrale.
TP10 : Exemples de calculs d'aires, de volumes, de centres d'inertie, de moments d'inertie, de valeurs moyennes, de valeurs efficaces.

A. Etudes de fonctions

1. Moteurs à combustion interne - 89

Fonction d'une variable réelle 1 ; calcul différentiel et intégral 2 (TP1)

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

Soient (C_1) et (C_2) les courbes d'équations respectives $y = e^x$ et $y = e^{-x}$.

1° Tracer les courbes (C_1) et (C_2) sans faire l'étude des fonctions et placer les tangentes à (C_1) et (C_2) au point A commun à ces deux courbes.

2° Pour tout réel t, on note M et M' les points d'abscisse t appartenant respectivement à (C_1) et (C_2), et **(T)** et **(T')** les tangentes en ces points.

a) Montrer que les droites **(T)** et **(T')** sont perpendiculaires.

b) Calculer, en fonction de t, les coordonnées du point I commun à **(T)** et **(T')**.

2. Photonique - 90 - exercice 2

Fonction d'une variable réelle 2 ; calcul différentiel et intégral 3 (TP1)

Etude de l'intensité i dans un circuit R, L, C en série.

L'intensité i est une fonction du temps t telle que : $i(t) = e^{-2t} \sin(\pi t)$ $(t \geq 0)$.

On note **(C)** la courbe représentative de la fonction i dans un repère orthogonal avec les unités graphiques suivantes : 5 cm en abscisse et 10 cm en ordonnée.

1° Calculer $i(t + 2)$ en fonction de $i(t)$.

2° Soient (C_1) et (C_2) les courbes représentatives des fonctions f et g définies par :

$$f(t) = e^{-2t} \quad ; \qquad g(t) = -e^{-2t}$$

Montrer que (C_1) est tangente à **(C)** en un point A_1 d'abscisse comprise entre 0 et 2. Calculer une valeur approchée à 10^{-2} près des coordonnées de A_1.
Faire la même étude avec la courbe (C_2).

3° Etudier la fonction i sur l'intervalle [0; 2]. Dresser le tableau de variation de i sur cet intervalle.
Tracer les arcs de courbes (C_1), (C_2) et **(C)** correspondants.

3. Comptabilité et gestion - 92

Analyse des phénomènes exponentiels (TP1)

Un distributeur étudie l'incidence du nombre de diffusions journalières d'un spot publicitaire télévisé sur la vente d'un de ses produits. Il constate que, pour n diffusions journalières du spot, l'efficacité correspondante peut s'évaluer par un nombre approximativement égal à $\dfrac{6}{1+5e^{-\frac{n}{3}}}$.

On considère donc la fonction f, définie sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{6}{1+5e^{-\frac{x}{3}}}$$

et sa fonction f' qui exprime le rendement.
Le but principal de ce problème est de déterminer le nombre de diffusions journalières du spot, pour lequel le rendement est maximal.
Dans toute la suite, pour chaque question où il interviendra, x désignera un quelconque élément de l'intervalle $[0 ; +\infty[$.

1° Calculer $f(0)$ et déterminer la limite de f en $+\infty$.

2° Calculer $f'(x)$.

3° *Etude des variations de la fonction dérivée f' :*

a) Montrer que, pour tout x, $f'(x) = \frac{1}{18} f(x)[6 - f(x)]$ puis, en dérivant les deux membres de cette égalité, que, pour tout x, $f''(x) = \frac{1}{9} f'(x)[3 - f(x)]$.
($f''(x)$ désigne la fonction dérivée de la fonction $f'(x)$.)

b) *Etude du signe de $f''(x)$:*
Etudier le signe de $f'(x)$.
Résoudre l'inéquation $f(x) \geq 3$; en déduire le signe de $3 - f(x)$.
Conclure, à partir de la question 3-a), sur le signe de $f''(x)$.

c) Dresser le tableau de variation de la fonction dérivée f'.
(On y fera figurer la valeur exacte x_0 en laquelle f' atteint son maximum, ainsi que $f'(x_0)$, $f'(0)$ et $\lim\limits_{+\infty} f'$.)

4° *Mise en évidence des résultats concernant la fonction f :*
Dresser le tableau de variation de f.

5° *Retour à la situation initiale :*
Il est décidé de choisir, pour nombre de diffusions journalières du spot, le nombre entier n_0 le plus proche de la valeur x_0 déterminée à la question 3-c).
Donner n_0.

4. Comptabilité et gestion - 90

Analyse des phénomènes exponentiels (TP1)

Dans un pays, une étude a permis de chiffrer les dépenses de fonctionnement d'une administration, de 1980 à 1988.
Ces dépenses sont exprimées en points PIB (Produit Intérieur Brut). Les résultats suivants ont été obtenus :

Année	1980	1981	1982	1983	1984	1985	1986	1987	1988
Rang de l'année x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Dépenses y_i	0,47	1,52	1,99	2,21	2,30	2,26	2,15	2,05	2,00

On recherche une fonction qui rende compte approximativement du phénomène.
Dans la suite de l'exercice, on dira qu'une fonction h est "acceptable" si, pour chaque valeur x_i,

$$|h(x_i) - y_i| < 10^{-1}.$$

1° Représenter les neuf points de coordonnées $(x_i ; y_i)$ dans un repère orthogonal

(unités graphiques : 2 cm pour les abscisses, 10 cm pour les ordonnées).
(Utiliser la feuille de papier millimétrée jointe).

2° Constatant, sur le graphique précédent, qu'un ajustement affine n'est pas justifié, on essaie la fonction polynôme f, définie sur l'intervalle $[0, +\infty[$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$ (où a, b et c sont des nombres réels), dont la représentation graphique passe par les points de coordonnées respectives (1; 1,5), (2; 2) et (4; 2,3).
a) Déterminer les nombres a, b et c.
b) En calculant $f(0)$, montrer que la fonction f n'est pas acceptable.

3° Une étude annexe conduit à essayer ensuite la fonction g, définie sur l'intervalle $[0, +\infty[$ par :

$$g(x) = (mx + p)e^{-\frac{x}{3}} + \frac{3}{2} \text{ (où } m \text{ et } p \text{ sont des nombres réels),}$$

qui admet un maximum au point d'abscisse 4 et dont la courbe représentative passe par le point de coordonnées (0; 0,5).
a) Calculer les nombres m et p. (On trouvera $m = 1$ et $p = -1$)

b) Déterminer la limite de g en $+\infty$. Etudier le sens de variation de g sur $[0, +\infty[$ et dresser son tableau de variation.

4° a) Reproduire le tableau du début de l'énoncé de l'exercice, puis le compléter par les valeurs décimales arrondies à 10^{-2} près des nombres $g(x_i)$.

b) Tracer, sur le graphique obtenu à la question 1°, la courbe représentative de g, dans l'intervalle $[0, +\infty[$.

c) Montrer que la fonction g est acceptable.

5. Géologue prospecteur - 89

Fonction d'une variable réelle 1 ; calcul différentiel et intégral 2 (TP1)

Objectif du problème :
On prouve, pour la courbe représentative de la fonction proposée dans le problème, l'existence d'un centre de symétrie. Ce centre de symétrie est ensuite utilisé pour le calcul d'une aire sans avoir recours au calcul préalable d'une primitive.

Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie sur $\left]-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right[$ par la relation :

$$f(x) = ln(1 + tan\, x)$$

1° Vérifier que f est bien définie et continue sur l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right[$.

2° Etudier les variations de f et déterminer les limites de f aux bornes de son domaine de définition.

3° Soit (C) la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.
Déterminer, à l'aide de votre calculatrice, des valeurs approchées des ordonnées des points de (C) d'abscisses respectives :

$$-\frac{\pi}{6}, -\frac{\pi}{8}, 0, \frac{\pi}{16}, \frac{\pi}{8}, \frac{3\pi}{16}, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{8}, \frac{5\pi}{12}$$

Construire (**C**).

4° On se propose, dans cette question, de montrer que (**C**) admet un centre de symétrie.

a) Si la courbe (**C**) admet un centre de symétrie, déterminer la seule valeur possible pour son abscisse. Les résultats numériques précédents semblent-ils confirmer l'existence de ce centre de symétrie ?

b) Montrer que pour tout x de $\left]-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right[$, $\left(1 + tan\left(\frac{\pi}{4} - x\right)\right)(1 + tan\, x)$ est une constante.

En déduire que, pour tout x de $\left]-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right]$, $f\left(\frac{\pi}{4}-x\right)+f(x)$ est une constante.

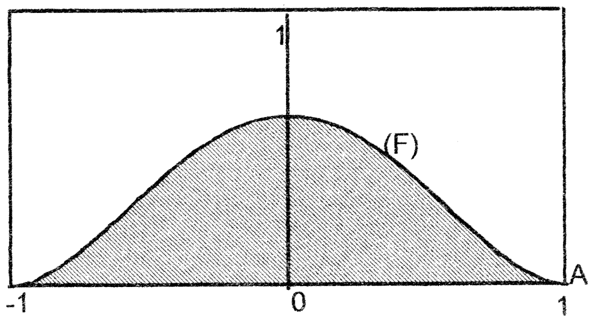
Justifier alors l'existence du centre de symétrie de (**C**).

5° Soit D le domaine plan limité par (**C**), l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 0$ et $x = \frac{\pi}{4}$. En utilisant le centre de symétrie montrer que l'aire de D est égale à celle d'un rectangle dont deux côtés sont portés par les droites d'équations $x = 0$ et $x = \frac{\pi}{4}$.

Calculer alors cette aire sans chercher à déterminer une primitive de la fonction f.

6. Agencement - 93

Calcul différentiel et intégral 2 (TP1 - TP6 - TP8) ; fonction d'une variable réelle 1



On veut réaliser sur un panneau mural rectangulaire une décoration dont la forme approximative est représentée ci-contre.
L'aire de la décoration (région hachurée sur le dessin) doit mesurer le tiers de l'aire totale du panneau.

On décide, pour des raisons de symétrie en particulier, de définir la courbe frontière (F) de la décoration comme la représentation graphique dans le repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ d'une fonction f, définie sur l'intervalle $[-1 ; +1]$ par $f(x) = ax^4 + bx^2 + c$, où a, b et c sont des nombres réels.

1° En exprimant que (F) passe par A, que (F) est tangente à l'axe $(O ; \vec{i})$ en A et que l'aire de la décoration est égale au tiers de l'aire du panneau, montrer que a, b et c vérifient le système :

$$\begin{cases} a+b+c=0 \\ 2a+b=0 \\ 3a+5b+15c=5 \end{cases}$$

En déduire a, b et c.

2° On considère maintenant la fonction g définie sur $[0 ; 1]$ par : $g(x) = \frac{5}{8}\left(x^2-1\right)^2$.

a) Etudier les variations de g sur $[0 ; 1]$. Tracer la courbe (G) représentant g dans un repère orthonormal (unité graphique : 10 cm). Préciser une équation de la tangente à la courbe (G) au point K d'abscisse $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

b) La tangente précédente coupe l'axe des abscisses au point I et l'axe des ordonnées au point J. Montrer que $\overrightarrow{JK} = \frac{2}{3}\overrightarrow{JI}$.

c) On appelle S le symétrique de O par rapport à I.
En utilisant le b), montrer que la droite (OK) coupe le segment [JS] en son milieu.

7. Industrie du cuir (option chaussures) - 88

Fonction d'une variable réelle 1 ; calcul différentiel et intégral 1 (TP1 - TP2 - TP3)

L'espace est rapporté au repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

A - 1° On considère le point A de coordonnées (0, 0, 2), et le point B de coordonnées (2, 0, 0).

a) Représenter le repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ et placer les points A et B.

b) Soit C le point du plan $(O; \vec{i}, \vec{j})$, de coordonnées $(x_c, y_c, 0)$, $y_c > 0$, tel que OBC soit un triangle équilatéral.
Déterminer x_c et y_c. Placer le point C sur la figure.

2° m étant un nombre réel tel que $0 < m < 2$, on désigne par M le point du segment [OB] d'abscisse m. Placer M sur la figure.
D_m désigne la droite passant par M et parallèle à la droite (BC). Tracer D_m.
On note S le point d'intersection de D_m avec (OC).

3° Q_m désigne le plan contenant D_m et orthogonal au plan $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
Q_m coupe la droite (AB) au point N et la droite (AC) au point R.

a) Montrer que la droite (MN) (intersection des plan Q_m et $(O; \vec{i}, \vec{k})$) et la droite RS (intersection des plan Q_m et (OAC)) sont parallèles à (OA).

b) Montrer que les droites (NR) et (BC) sont parallèles.

c) Déduire des deux questions précédentes que le quadrilatère MNRS est un rectangle.

B - Calcul et étude de l'aire du rectangle MNRS.

1° a) Montrer que MS = OM = m et que MN = MB = $2 - m$. (on pourra réaliser deux figures, l'une dans le plan $(O; \vec{i}, \vec{j})$, l'autre dans le plan $(O; \vec{i}, \vec{k})$.

b) Exprimer en fonction de m, l'aire $A(m)$ du rectangle MNRS.

2° a) Après étude de ses variations, représenter graphiquement la fonction A, sur l'intervalle $]0, 2[$, dans un repère orthonormal $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

b) Quelle particularité le rectangle MNRS offre-t-il lorsque $A(m)$ est maximum ?

B. Etudes de fonctions et calcul d'aires

1. Art textile - 88

Fonction d'une variable réelle 1 ; calcul différentiel et intégral 1 (TP1 - TP2 - TP3)

Soit la fonction numérique de la variable réelle x définie par :

$$f(x) = \frac{1}{2}x^3 - 3x^2 + \frac{9}{2}x + 1$$

Dans le plan rapporté à un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ (unité graphique : 2 cm) , on désigne par $\mathbf{C_1}$ l'arc de courbe représentant la fonction f sur l'intervalle $I = \left[0 ; \frac{7}{2}\right]$.

1° Calculer la dérivée f' de la fonction f. Dresser son tableau de variation sur l'intervalle I.

2° Tracer soigneusement l'arc de courbe $\mathbf{C_1}$.

3° Tracer dans le même repère l'arc $\mathbf{C_2}$ symétrique de $\mathbf{C_1}$ par rapport à l'axe des abscisse, l'arc $\mathbf{C_3}$ symétrique de $\mathbf{C_1}$ par rapport à l'axe des ordonnées, puis l'arc $\mathbf{C_4}$ symétrique de $\mathbf{C_1}$ par rapport à l'origine O du repère.

4° Calculer l'intégrale : $\int_0^{\frac{7}{2}} f(x)\,dx$.

2. Expression visuelle - 91

Fonction d'une variable réelle 1 ; calcul différentiel et intégral 1 (TP2 - TP3)

1° Soit f la fonction de la variable réelle x définie par : $f(x) = ax^2 + bx + c$, a, b et c réels.
Soit (**C**) sa courbe représentative tracée dans le plan muni du repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$. (unité de longueur 1 cm).
Déterminer les réels a, b et c sachant que (**C**) est la parabole de sommet S(2 ; 0) et qu'elle passe par le point A(1 ; 2).

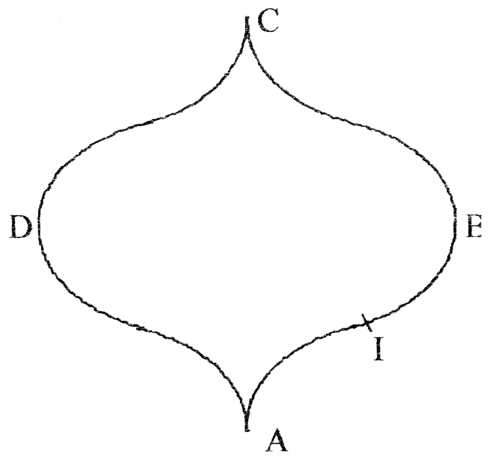
2° Tracer la portion (**P**) de parabole représentant la fonction g définie par $g(x) = 2x^2 - 8x + 8$, pour $x \in [1; 3]$.

3° Tracer (**P'**) et (**P"**) les symétriques de (**P**) par rapport aux droites d'équation $x = 1$ et $x = 3$.
Reproduire le motif (**P**) de façon à obtenir 6 portions de parabole avec $x \in [-5 ; 7]$.
Tracer la droite horizontale d'équation $y = 8$.
Tracer les droites verticales d'équation $x = -5$ et $x = 7$.

4° On obtient une réduction au 1/100ème du rideau de l'écran d'un cinéma. Cet écran mesure 12 mètres de large et 8 mètres de haut.
Calculer en m² l'aire de ce rideau.

3. Expression visuelle - 87

Fonction d'une variable réelle 1 ; calcul différentiel et intégral 1 (TP1 - TP2 - TP3)



Un fabriquant de carrelage veut réaliser un carreau de grès dont la forme est dessinée ci-contre.
Le carreau doit satisfaire aux contraintes suivantes :

a) les droites (AC) et (BD), orthogonales sont les axes de symétrie du carreau,

b) le milieu I du segment [AB] est le centre de symétrie de l'arc AB,

c) AC = BD = 12 cm.

On définit sur le carreau un repère orthonormal $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ tel que O soit le point d'intersection des droites (AC) et (BD).

$$\vec{\imath} = \frac{1}{6}\overrightarrow{OB} \text{ et } \vec{\jmath} = \frac{1}{6}\overrightarrow{OC}$$

1° Si, dans ce repère, le point E(1; -4) est un point du bord AIB du carreau, montrer qu'il existe une fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, telle que $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ (a, b, c, d étant des nombres réels à déterminer) dont le graphique sur [0; 6] a la forme recherchée pour le bord AIB et permettrait de réaliser un carreau satisfaisant aux contraintes imposées.

2° Construire soigneusement la représentation graphique de l'application :

$$\begin{cases} f : [0;6] \to]-\infty;+\infty[\\ f : x \mapsto f(x) = 0{,}1x^3 - 0{,}9x^2 + 2{,}8x - 6 \end{cases}$$

dans un repère orthonormal $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ (unité graphique : 1 cm).
Préciser en particulier les demi-tangentes au point A d'abscisse 0 et au point B d'abscisse 6, ainsi que la tangente au point I d'abscisse 3.

En utilisant ce graphique, tracer, en vraie grandeur, le dessin d'un carreau respectant toutes les conditions imposées. Il sera tenu compte de la valeur esthétique des tracés réalisés.

3° Calculer le nombre réel : $\int_0^6 \left(0{,}1x^3 - 0{,}9x^2 + 2{,}8x - 6\right)dx$
En déduire, en cm², l'aire du carreau précédemment réalisé.
Grâce à des remarques géométriques, expliquer et justifier ce dernier résultat.

4. Stylisme de mode - 88

Fonction d'une variable réelle 1 ; calcul différentiel et intégral 1 (TP1 - TP2 - TP3)

Les parties I et II - 1°, 2°, 3° sont indépendantes.

Partie 1

Soit f la fonction numérique de la variable réelle x, définie par $f(x) = -x^3 + 7x^2 - 11x + 5$.
On note **C** la courbe représentative de f dans le plan rapporté au repère orthonormal $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$; (unité graphique : 1 cm).

1° Déterminer l'ensemble de définition de f et les limites de f aux bornes de cet ensemble.

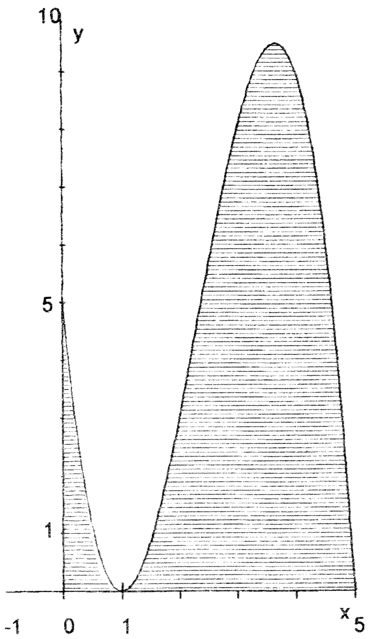
Calculer la dérivée de f et dresser le tableau de variation de f.
Indication : On montrera que la dérivée de f s'écrit sous la forme $f'(x) = (x - 1)(11 - 3x)$.

2° Montrer que $f(x) = (x - 1)^2(5 - x)$. En déduire les coordonnées des points d'intersection de la courbe **C** avec les axes de coordonnées.

3° Construire **C** sur une feuille de papier millimétrée.

4° Calculer, en cm^2, une valeur approchée à 10^{-2} près de l'aire du domaine situé entre la courbe, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 0$ et $x = 5$.

Partie 2



On considère un rectangle de largeur 5 cm et de longueur 10 cm et le dessin ci-contre.

Le motif est limité par les axes Ox et Oy et une courbe Γ.

1° Comparer la courbe Γ et la courbe **C** étudiée dans la partie 1.

2° En plaçant les axes sensiblement au milieu de la seconde feuille de papier millimétrée, reproduire le motif précédent.

a) En dessiner l'image par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$ radians (dans le sens de Ox vers Oy).

b) Dessiner le symétrique par rapport à l'axe Ox du dessin obtenu en a).

3° En utilisant le résultat de la question I - 4°, calculer l'aire intérieure du motif dessiné au 2° b).

5. Domotique - 93

Calcul différentiel et intégral 2 (TP1 - TP8) ; fonction d'une variable réelle 1

On considère la fonction numérique f définie dans $\mathbb{R}$ par : $f(x) = ln|cos\,x + sin\,x|$.

1° a) Déterminer le nombre réel φ tel que, pour tout réel x, $cos\,x + sin\,x = \sqrt{2}\,cos(x + \varphi)$.

b) Donner l'ensemble de définition de f. Montrer qu'elle est périodique, de période π et que sa dérivée est :

$$f'(x) = -tan\left(x - \frac{\pi}{4}\right).$$

2° Etablir le tableau de variation de la fonction f pour x appartenant à l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{4};\frac{3\pi}{4}\right[$.

3° Construire la représentation graphique **C** de la fonction f pour x appartenant à l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{4};\frac{3\pi}{4}\right[$. (unités graphiques : 5 cm en abscisses ; 10 cm en ordonnées).

4° On appelle A, B et C les points de **C** d'abscisses respectives 0, $\frac{\pi}{4}$ et $\frac{\pi}{2}$.

a) Déterminer les réels a, b et c tels que la parabole (Γ) d'équation $y = ax^2 + bx + c$ passe par les points A et B et admette au point B une tangente parallèle à l'axe des abscisses.

b) Vérifier que (Γ) passe par le point C.

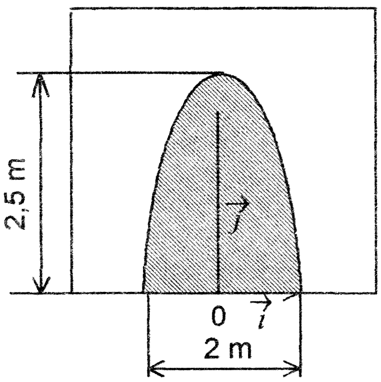
c) En se limitant à l'intervalle fermé $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ construire sur le même graphique l'arc de parabole et l'arc de courbe **C**.

d) Calculer, en cm^2, l'aire du domaine délimité par l'axe des abscisses, la parabole (Γ) et les droites d'équation $x = 0$ et $x = \frac{\pi}{2}$; on admettra que cette aire est une bonne approximation de l'aire du domaine $D = \left\{M(x;y) / 0 \le x \le \frac{\pi}{2} \quad et \quad 0 \le y \le f(x)\right\}$.

6. Architecture intérieure - 91

Fonction d'une variable réelle 1 ; calcul différentiel et intégral 1 (TP1 - TP2 - TP3)

figure 1



On veut faire dans un mur une ouverture arrondie schématisée ci-contre.
La hauteur aux points les plus hauts est 2,5 m.
La largeur à la base est de 2 m.
On décide de prendre un arc de parabole.

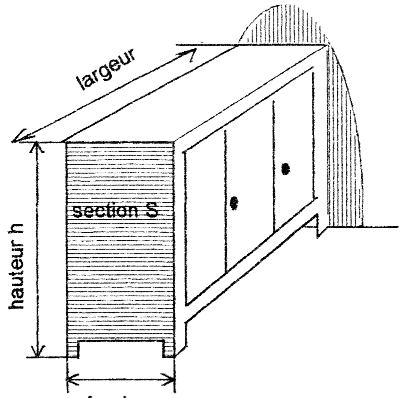
I - On veut déterminer la "formule" de cette ouverture : pour cela on considère un repère orthonormal (O; $\vec{i}$, $\vec{j}$) dont l'origine O est au milieu de la base d'ouverture, $\vec{i}$ est horizontal, $\vec{j}$ est vertical, et l'unité est le mètre (voir figure 1).
Dans ce repère, le contour de l'ouverture est la courbe d'une fonction polynôme du second degré du type : $f(x) = ax^2 + bx + c$, pour $x \in [-1; 1]$.

1° En utilisant les valeurs de $f(0)$ et $f(1)$ que l'on peut déduire des hypothèses et la parité de f que l'on peut déduire de la symétrie du projet ou de la valeur de $f(-1)$, déterminer les coefficients a, b et c.

2° Dessiner cette ouverture à l'échelle 1/20ème (c'est-à-dire : dans un repère d'unité 5 cm, représenter la fonction f).

3° Quelle est, en mètres carrés, l'aire de cette ouverture (en vraie grandeur) ?

figure 2



II - Pour la suite, on admet que l'ouverture a été réalisée en appliquant la formule :

$$f(x) = 2,5(1 - x^2) \text{ pour } x \in [-1; 1].$$

On veut étudier les dimensions maximales des meubles pouvant passer dans cette ouverture.

1° Quelle est la hauteur h maximale d'une armoire de 1 m de profondeur, de 2,5 m de largeur et qui passerait de justesse ?

2° Une armoire de 2 m de hauteur et de 90 cm de profondeur peut-elle passer ? (largeur 2,5 m)

3° Déterminer en fonction de la profondeur p d'une armoire de

2,5 m de largeur, sa hauteur maximale $h = g(p)$ lui permettant de passer.

7. Constructions métalliques - 88

Calcul différentiel et intégral 2 (TP6)

On veut calculer simultanément les trois intégrales suivantes :

$$A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 x\, dx \,;\; B = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x\, dx \,;\; C = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\sin^2 x \cos^2 x\, dx$$

1° Calculer A – B et A + B + C

2° Montrer que $\cos^4 x + \sin^4 x - 6\sin^2 x \cos^2 x = \cos 4x$.
En déduire la valeur de A + B – 3C ; puis celles de A, B et C.

8. Industries graphiques - 90

Calcul différentiel et intégral 2 (TP6)

1° a) Soit l'intégrale suivante : $I_1 = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \cos^3 x\, dx$

Donner la valeur exacte de I_1, en utilisant le changement de variable $t = \sin x$ (on remarquera que $\cos^3 x\, dx$ peut s'écrire $f(t)\, dt$).

b) En utilisant la même méthode, calculer la valeur exacte de : $I_2 = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \cos^5 x\, dx$

2° En déduire la valeur exacte de : $J = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \cos^3 x \sin^2 x\, dx$

9. Industries graphiques - 92

Calcul différentiel et intégral 2 (TP6)

1° Calculer $I = \int_0^{\pi} \sin^2 x\, dx$.

2° Soit $J = \int_0^{\pi} x \sin^2 x\, dx$.
En utilisant le changement de variable défini par $u(x) = \pi - x$, montrer que $J = \pi I - J$.
En déduire la valeur exacte de J.

10. Industries du bois - 81

Calcul différentiel et intégral 1 (TP2)

Calculer l'intégrale : $I = \displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos^3 x}{\sin^2 x} dx$

On pourra remarquer que : $\cos^3 x = \left(1 - \sin^2 x\right)\cos x$.

11. Architecture intérieure - 88

Fonction d'une variable réelle 1 ; calcul différentiel et intégral 1 (TP1 - TP2 - TP3)

Soit la fonction de la variable réelle x , définie par :

$$f(x) = \frac{e^x}{e^x + 1} \quad \text{où } e^x \text{ désigne la fonction "exponentielle de } x\text{".}$$

1° Etude de la fonction :

a) Déterminer l'ensemble de définition de f.

b) Déterminer la fonction dérivée f' de f. Etudier son signe.

c) Donner le sens de variation de f. Préciser les coordonnées du point A d'abscisse $x = -1$ et du point B d'abscisse $x = +1$ sur la courbe représentative de f notée (C).
Etudier les limites de f et préciser les asymptotes de (C).

d) Tracer la courbe représentative (C) de f dans un repère orthonormal (unité graphique 3 cm).

2° Soit la fonction g de la variable x , définie par $g(x) = ln(1 + e^x)$.
Calculer la dérivée g' de g. Que remarque-t-on ?
En déduire l'aire du domaine plan compris entre la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = -1$ et $x = +1$, (soit l'arc AB et l'axe des x). La mesure de l'aire sera donnée en cm^2.

12. Comptabilité et gestion - 87

Analyse des phénomènes exponentiels (TP1 - TP3)

Soit la fonction numérique de la variable réelle x définie par :

$$f(x) = \frac{3}{2}e^{2x} - 7e^x + 2x + 6$$

et C sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$ du plan (unité : 1cm).

1° Etudier les variations de f.

2° Etudier les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
Démontrer que la droite D d'équation $y = 2x + 6$ est asymptote à C.

3° Calculer $f(-4)$, $f(-3)$, $f(0)$, $f(1)$, $f(1,5)$, $f(2)$. On donnera des valeurs décimales approchées à 10^{-2} près.

4° Tracer D et C. Préciser la tangente à C au point d'abscisse 0 et déterminer les coordonnées du point d'intersection de C et D.

5° Soit λ un réel strictement inférieur à $ln\,3$ (ln désignant le logarithme népérien)
On considère la partie du plan délimitée par la courbe C, les droites d'équations $x = \lambda$ et $x = ln3$ et la droite D. Calculer l'aire $A(\lambda)$ de ce domaine (unité : $1cm^2$). Cette aire admet-elle une limite quand λ tend vers $-\infty$?

13. Industries des matériaux souples - 91

Fonction d'une variable réelle 1 ; calcul différentiel et intégral 1 (TP1 - TP2 - TP3)

Soit la fonction numérique de la variable réelle x définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = e^{2x} - e^{x} + \frac{1}{4}$$

On note **C** sa courbe représentative dans un repère orthonormal (unité graphique 4 cm).

1° Etudier les limites de f aux bornes de son ensemble de définition. En déduire que la courbe **C** admet une asymptote D au voisinage de $-\infty$ dont on donnera une équation.

2° Etudier les variations de f, et établir son tableau de variation.

3° Déterminer une équation de la tangente T_A à la courbe **C** au point A d'abscisse 0.

4° Construire la courbe **C** ainsi que la tangente T_A et la droite D.

5° La partie de la courbe représentative de f correspondant aux abscisses x appartenant à l'intervalle $[-\ln 2 ; \ln 2]$ est un élément de la ligne de découpe d'une poche dans un morceau de tissu.
La chute de tissu est alors représentée par l'ensemble E des point **M** dont les coordonnées $(x ; y)$ vérifient : $-\ln 2 \leq x \leq \ln 2$ et $0 \leq y \leq f(x)$
Calculer l'aire, en cm^2, de cet ensemble.

14. Stylisme de mode - 90

Fonction d'une variable réelle 1 ; calcul différentiel et intégral 1 (TP1 - TP2 - TP3)

Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie par : $f(x) = (x - 1)e^{-x}$

On note (C) la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ (unité graphique : 3 cm).

1° Déterminer les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$.
Calculer la dérivée de f et dresser le tableau de variation de f.

2° Construire la tangente à (C) au point d'abscisse 0. Tracer (C).

3° Soit F la fonction numérique de la variable réelle x définie par : $F(x) = -xe^{-x}$.
Montrer que F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.
En déduire l'aire, en cm^2, à 10^{-2} près, du domaine plan limité par l'axe des abscisses, les droites d'équation $x = 1$ et $x = 3$ et la courbe (C).

C. *Exemples de fonctions réciproques*

1. Géomètre topographe - 92

Fonction d'une variable réelle 1 ; calcul différentiel et intégral 2 (TP1 - TP3)

On considère la fonction f définie sur [-1 ; +1] par :

$$f(x) = x \operatorname{Arc} \cos x.$$

1° a) Déterminer la fonction dérivée première f' de la fonction f sur]-1 ; +1[.

b) Si f'' désigne la fonction dérivée seconde de la fonction f sur]-1 ; +1[, montrer que l'on a :

$$f''(x) = \frac{x^2 - 2}{\left(1 - x^2\right)\sqrt{1 - x^2}}$$

c) Etudier le signe de f'' et en déduire le tableau de variation de f'.

d) Démontrer que la fonction f' s'annule pour une unique valeur α sur]0 ; +1[. On donnera de α une valeur approchée à 0,1 près (*aucune justification n'est demandée pour la détermination de cette valeur approchée*).

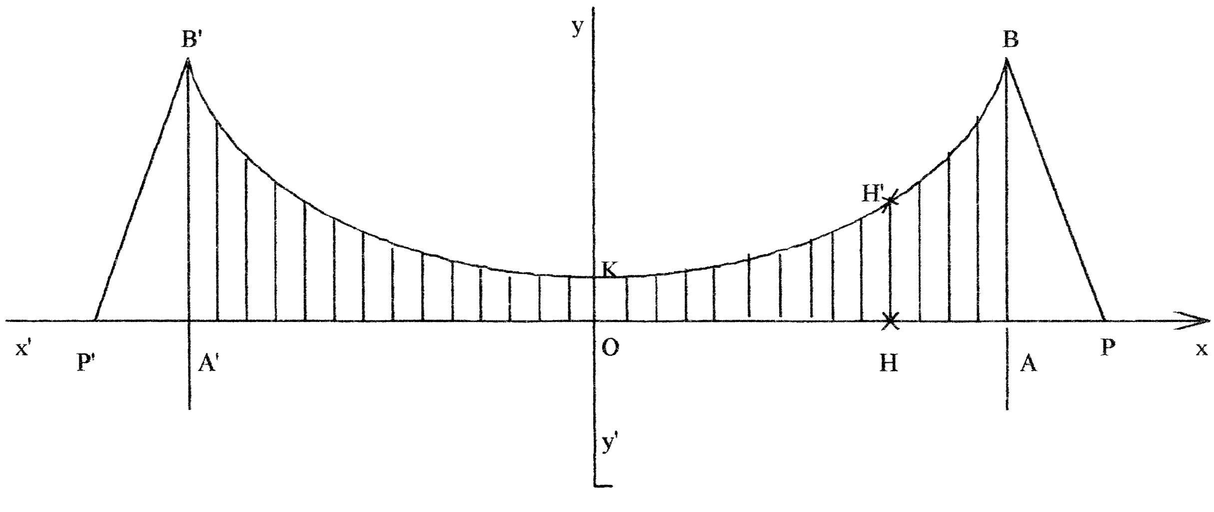
c) Déduire de l'étude précédente le tableau de variation de la fonction f, et montrer que f admet un extremum égal à $\dfrac{\alpha^2}{\sqrt{1 - \alpha^2}}$

2° Tracer la courbe (**C**) représentative de f dans un repère orthonormal $(O\ ;\ \vec{i}, \vec{j})$ d'unité graphique 5 cm, en précisant les demi-tangentes aux points d'abscisse −1 et +1.

2. Etude et économie de la construction - 91

Fonction d'une variable réelle 1 ; calcul différentiel et intégral 2 (TP1 - TP4 - TP6 - TP8)

La figure ci-dessous schématise l'un des deux côtés verticaux d'un pont suspendu. Les filins verticaux tels que HH' sont régulièrement espacés les uns des autres. Il n'y a pas de filin en AB, ni en A'B'.
La longueur AA' est de 360 mètres.



On se propose de représenter avec précision l'arc B'KB et d'exploiter cette représentation.
On admet que, dans le repère orthonormal d'axes x'Ox et y'Oy dans lequel le point A a pour coordonnées (180 ; 0) l'arc B'KB est représenté par l'arc de courbe (C) d'équation $y = f(x)$, où f est la fonction définie sur l'intervalle I = [-180 ; 180] par :

$$f(x) = 2\,ch\,\frac{x}{41} = e^{\frac{x}{41}} + e^{-\frac{x}{41}}$$

I - 1° Etudier la parité de la fonction f. En déduire une conséquence graphique.

2° Etudier les variations de la fonction f et tracer avec précision l'arc de courbe (C) (unité graphique : 1 mètre est représenté par 1/20 cm).

II - 1° Quelle est la hauteur de la tour AB ?

2° Résistance au vent : pour conserver une marge de sécurité, on considère que la surface exposée à l'action du vent est égale au dixième de la surface plane, pleine et fermée A'B'KBA. Calculer, en mètres carrés, l'aire de la surface exposée au vent.

3. En assistance technique d'ingénieur - 94

Calcul différentiel et intégral 2 (TP1 - TP3 - TP6 - TP8) ; fonctions d'une variable réelle 1.

L'objet de ce problème est le calcul de la longueur d'un câble suspendu entre deux pylônes.

Première partie :
Cette première partie propose la résolution sur $\mathbb{R}$ de l'équation (1) ci-dessous :

$$ch(X) = \frac{1}{8}X + 1 \qquad (1)$$

1° Le plan est muni d'un repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j})$, d'unité graphique dix centimètres.
Recopier le tableau suivant, puis le compléter en donnant des valeurs décimales approchées à 10^{-3} près de $ch(X)$, obtenues à l'aide d'une calculatrice.

X	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,6	0,8	1
$ch(X)$								

Dessiner sur le même graphique, pour X appartenant à l'intervalle [-1 ; 1], la chaînette d'équation $Y = ch(X)$ et la droite d'équation $Y = \frac{1}{8}X + 1$.
On constate graphiquement que la chaînette et la droite se coupent en deux points dont les abscisses sont les solutions de l'équation (1).

2° Donner un intervalle d'amplitude 0,1 contenant la solution X_0 non nulle de l'équation (1).
Montrer que, plus précisément, X_0 est compris entre 0,248 et 0,249.

Seconde partie :
Un câble est suspendu aux sommets A et C de deux pylônes de 50 m de hauteur, distants de 400 m ; son point le plus bas, B, est situé à une hauteur de 25 m.
On admet que, soumis à la seule pesanteur, ce câble a la forme d'une chaînette.
Pour modéliser ce problème, on définit dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O\,;\vec{u},\vec{v})$, où l'unité représente 1 m, les points A, B et C de coordonnées respectives (200 ; 50), (0 ; 25), (-200 ; 50), et la courbe $\mathcal{C}$ d'équation $y = \frac{1}{\alpha}ch(\alpha x) + \beta$, où α et β désignent deux constantes réelles non nulles.

1° Ecrire un système de deux équations à deux inconnues α et β traduisant l'appartenance des points A et B à la courbe $\mathcal{C}$.

2° a) On effectue le changement d'inconnue $X = 200\,\alpha$. Montrer que l'on peut écrire un système équivalent au précédent où figure l'équation (1) de la première partie.

b) En déduire l'expression de α et β en fonction du nombre X_0, solution de l'équation (1). Remarque : on ne demande donc pas de valeur numérique pour α et β.

3° Exprimer en fonction de α, puis en fonction de X_0, la longueur L de l'arc ABC de la courbe $\mathcal{C}$, d'équation :

$$y = \frac{1}{\alpha} ch(\alpha x) + \beta.$$

(On rappelle la formule donnant la longueur L d'un arc de la courbe représentative d'une fonction f :

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx$$

où a et b sont les abscisses des extrémités de cet arc de courbe, avec $a \leq b$.)

Les questions suivantes ont pour but de calculer une valeur approchée de L.

4° a) La fonction h est définie sur l'intervalle [0 ; 1] par :

$$h(X) = X - th(X) = X - \frac{sh(X)}{ch(X)}.$$

Calculer $h(0)$.
Déterminer la fonction dérivée h' de h.
En utilisant les résultats obtenus, préciser le signe de $h(x)$ lorsque X appartient à l'intervalle]0 ; 1].

b) La fonction Φ est définie sur l'intervalle]0 ; 1] par :

$$\Phi(X) = 400 \frac{sh(X)}{X}.$$

Calculer $\Phi'(X)$ et montrer que, pour tout X de]0 ; 1], $\Phi'(X)$ a le même signe que $h(X)$.
En déduire le sens de variation de Φ.

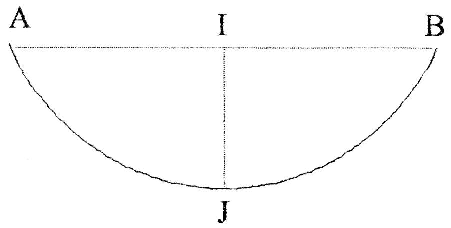
5° Quelle est la longueur du câble ABC, à deux centimètres près ?

4. Conception des produits industriels - 91

Fonction d'une variable réelle 2 ; calcul différentiel et intégral 3 (TP1 - TP5 - TP6 - TP8)

Le but du problème est de calculer, pour un fil de longueur donnée accroché à deux points donné A, B, la flèche IJ.
On admet que le fil prend la forme de la courbe ci-dessous, appelée chaînette.
On admet aussi que cette courbe a, dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$, une équation de la forme :

$$y = \frac{1}{\lambda} ch(\lambda x)$$



où λ est un paramètre réel positif dépendant des données physiques.

A - Etude de fonctions f_λ définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_\lambda(x) = \frac{1}{\lambda} ch(\lambda x)$$

1° Etudier les variations de la fonction f_1 sur l'intervalle [-2; +2].

2° Etudier les variations de la fonction f_2 sur le même intervalle.

3° Construire les courbes représentatives $(\mathcal{C}_1)$ et $(\mathcal{C}_2)$ des fonctions f_1 et f_2 dans un même repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

4° Vérifier, par le graphique, que l'équation $f_1(x) = f_2(x)$ a une solution unique α sur [0; 2].
Utiliser le graphique pour donner un encadrement de α d'amplitude 0,5.
Donner une valeur approchée de α à 10^{-2} près.

B - Longueur des arcs de chaînette $(\mathcal{C}_1)$ et $(\mathcal{C}_2)$ entre les points d'abscisses -1 et $+1$.
(On rappelle que $ch^2t - sh^2t = 1$)

1° On admet que la longueur de l'arc de chaînette $(\mathcal{C}_l)$ entre les points d'abscisses -1 et +1 est égale à :

$$\int_{-1}^{1}\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx$$

Calculer cette intégrale en fonction de λ.

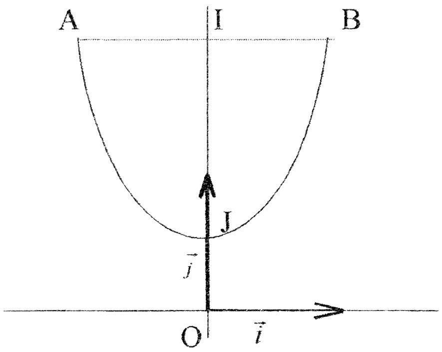
2° Calculer à 1 mm près, les longueurs des arcs de chaînette $(\mathcal{C}_1)$ et $(\mathcal{C}_2)$ sur l'intervalle [-1; +1].

C - Calcul de la flèche pour un fil de longueur donnée.

On suppose la longueur du fil égal à 4 mètres et la distance AB égale à deux mètres.
On admet que, dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$, le fil prend la forme d'une chaînette d'équation :

$$y = \frac{1}{\lambda}ch(\lambda x)$$

les points A et B ayant des abscisses égales respectivement à -1 et à +1.
Il s'agit de déterminer λ, puis la distance IJ.



1° Exprimer IJ en fonction de λ.

2° En utilisant le résultat de la question B - 1°, démontrer que la valeur de λ cherchée est solution de l'équation :

$$\frac{1}{2}sh\,\lambda = \lambda, \text{ pour } \lambda \geq 0.$$

Par une lecture graphique, vérifier que la valeur de λ cherchée est comprise entre 2 et 3.

3° Déterminer une valeur de λ à 0,1 près.
En déduire une valeur de la flèche IJ à 10 cm près.

D. Calcul de primitives et d'intégrales

1. Exercice

Calcul différentiel et intégral 1 (TP2)

Calculer l'intégrale $\int_0^{\ln\sqrt{3}} \frac{ch(x)+1}{ch(x)}dx$ en faisant le changement de variable défini par : $t = e^x$

(ln désigne le logarithme népérien et $ch(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

2. Fonderies en moules métalliques - 89

Calcul différentiel et intégral 1 (TP2)

1° Calculer l'intégrale suivante : $I = \int_1^2 \frac{2dt}{t^2+4}$

2° En déduire, en utilisant le changement de variable $t = \sqrt{e^x - 1}$, l'intégrale suivante :

$$J = \int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{e^x\,dx}{\left(e^x+3\right)\sqrt{e^x-1}}$$

la notation ln désigne le logarithme népérien

3. Mise en œuvre des plastiques - 88

Calcul différentiel et intégral 1 (TP2)

Calculer l'intégrale : $I = \int_1^2 \frac{dx}{x\sqrt{2x-1}}dx$

on utilisera le changement de variable défini par $u = \sqrt{2x-1}$.

4. Exercice

Calcul différentiel et intégral 1 (TP2)

1° Calculer $I_1 = \int_3^5 \frac{dt}{(1+t)(t-2)}$

On pourra déterminer les réels A et B tels que pour tout réel différent de -1 et 2, on ait :

$$\frac{1}{(1+t)(t-2)} = \frac{A}{1+t} + \frac{B}{t-2}$$

2° Calculer $I_2 = \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{5}} \frac{x\,dx}{x^4 - x^2 - 2}$ (on pourra utiliser le changement de variable : $t = x^2$).

5. Exercice

Calcul différentiel et intégral 2 (TP5 - TP6)

1° Déterminer les réels a, b, c tels que pour tout t différent de -1

$$\frac{3}{1+t^3} = \frac{a}{1+t} + \frac{bt+c}{t^2-t+1}$$

2° Calculer $f(x) = \int_0^x \frac{3}{1+t^3}dt$. Déterminer la limite quand t tend vers $+\infty$ de $f(x)$

6. Exercice

Calcul différentiel et intégral 2 (TP5 - TP6)

1° Trouver les complexes a et b pour que le polynôme P défini sur $\mathbb{C}$ par : $P(z) = z^4 + az + b$ admette les racines $z_1 = -1 + i$ et $z_2 = 1 - i$

2° Calculer les deux autres racines de P et factoriser $P(z)$ dans $\mathbb{C}$ puis dans $\mathbb{R}$.

3° Trouver les réels A, B, C, D pour lesquels on a, pour tout réel x :

$$\frac{8}{x^4+4} = \frac{Ax+B}{x^2+2x+2} + \frac{Cx+D}{x^2-2x+2}$$

4° Trouver des primitives sur $\mathbb{R}$ de chacune des fonctions f et g définies par :

$$f(x) = \frac{x+2}{(x+1)^2+1} \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{x-2}{(x-1)^2+1}$$

En déduire pour tout réel a la valeur de

$$F(a) = \int_0^a \frac{dx}{x^4+4}$$

La fonction $F : a \mapsto F(a)$ a-t-elle une limite lorsque a tend vers $+\infty$?

7. Bureau d'étude - 87

Calcul différentiel et intégral 2 (TP5)

On considère les fonctions numériques f et g définies sur $]0 ; \infty[$ par :

$$f(t) = \frac{1}{t(1+t)^2} \quad \text{et} \quad g(t) = \frac{-1}{(1+t)t^2}$$

1°) Déterminer les nombres réels a, b et c tels que, quels que soit le réel t différent de 0 et de -1, on ait :

$$f(t) = \frac{a}{(1+t)^2} + \frac{b}{1+t} + \frac{c}{t}$$

En déduire la valeur de l'intégrale $A(x)$ définie ,pour $x > 0$ par : $A(x) = \int_1^x f(t)dt$

2°)Calculer $g(t) - f(t)$; en déduire une primitive de la fonction numérique $(g - f)$

3°) Soit $B(x)$ l'intégrale définie , pour $x > 0$, par : $B(x) = \int_1^x g(t)dt$

Montrer que : $B(x) = \frac{1-x}{x} + ln\left(\frac{2x}{x+1}\right)$, où ln désigne le logarithme népérien.

Quelle est la limite de $B(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$?

8. Chaudronnerie et tuyauterie industrielle - 88

Calcul différentiel et intégral 2 (TP5 - TP6)

Pour x réel , $x \neq 6$, on pose : $f(x) = \dfrac{17x-12}{(x-6)(x^2+9)}$

1° Déterminer les réels a, b et c tels que pour tout x, x différent de 6, on ait :

$$f(x) = \frac{a}{x-6} + \frac{bx+c}{x^2+9}$$

2° Déterminer les primitives F de f sur l'intervalle $]-\infty\ ,\ +6[$

3° Déduire de ce qui précède la valeur de l'intégrale

$$\int_0^3 f(x)dx$$

9. Constructions métalliques - 87

Calcul différentiel et intégral 2 (TP5 - TP6)

On se propose de calculer $\mathrm{I} = \int_2^4 \frac{-t^3 - t^2 + 5t + 7}{t^3 + 3t^2 + t - 5} dt$

1° Résoudre $\begin{cases} t \in \mathbb{R} \\ t^3 + 3t^2 + t - 5 = 0 \end{cases}$ et justifier l'existence de I.

2° Trouver des réels a, b, c, d tels que pour tout t de l'intervalle $[2\ ;\ 4]$ on ait :

$$\frac{-t^3 - t^2 + 5t + 7}{t^3 + 3t^2 + t - 5} = \frac{at + b}{t^2 + 4t + 5} + \frac{c}{t - 1} + d$$

3° Calculer $\mathrm{I}_1 = \int_2^4 \frac{1}{t^2 + 4t + 5} dt$ (on posera $u = t + 2$)

4° Calculer $\mathrm{I}_2 = \int_2^4 \frac{t + 2}{t^2 + 4t + 5} dt$

5° Calculer I

10. Ennoblissement textile - 88

Calcul différentiel et intégral 2 (TP5 - TP6)

Pour tout $x \neq -1$, on pose $f(x) = \frac{4x + 2}{(x^2 + 1)(x + 1)}$

1° Déterminer les réels a, b, c tels que $f(x) = \frac{ax + b}{x^2 + 1} + \frac{c}{x + 1}$

2° Calculer $F(t) = \int_0^t f(x)dx$ pour $t \geq 0$

3° Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} F(t)$.

11. Ennoblissement textile - 90

Calcul différentiel et intégral 2 (TP5 - TP6)

Pour x réel non nul , on pose : $f(x) = \frac{x + 1}{x(x^2 + 1)}$

1° Déterminer les réels A, B, et C tels que : $f(x) = \frac{A}{x} - \frac{Bx + C}{x^2 + 1}$

2° t étant un réel strictement positif, calculer l'intégrale : $\mathrm{I}(t) = \int_1^t f(x)dx$

Déterminer la limite de $\mathrm{I}(t)$ quand t tend vers $+\infty$.

12. Mise en œuvre des plastiques - 90

Calcul différentiel et intégral 2 (TP5 - TP6)

On considère la fonction f définie pour tout réel différent de -1 et +1 par : $f(x) = \dfrac{4 - x + 2x^2 - x^3}{1 - x^4}$

1° Déterminer trois réels a , b et c pour que $f(x)$ s'écrive sous la forme :

$$f(x) = \frac{a}{1+x^2} + \frac{b}{1-x} + \frac{c}{1+x}$$

pour tout x différent de -1 et $+1$.

2° Calculer $A = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(x)dx$

On en donnera la valeur exacte puis une valeur approchée au centième.

13. Industries graphiques - 93

Calcul différentiel et intégral 2 (TP4 - TP5 - TP6)

a désigne un réel appartenant à l'intervalle]0 ; 1].

1° Déterminer trois réels u, v, et w tels que, pour tout réel x non nul, on ait :

$$\frac{1}{\left(x^2+1\right)x} = \frac{u}{x} + \frac{vx+w}{x^2+1}$$

2° En déduire la valeur en fonction de a, de l'intégrale :

$$\int_a^1 \frac{dx}{\left(x^2+1\right)x}$$

3° Soit $F(a) = \displaystyle\int_a^1 \frac{x \ln x}{\left(1+x^2\right)^2} dx$

En intégrant par parties, calculer $F(a)$, *en fonction de* a.

Puis, déterminer la limite de $F(a)$ quand a tend vers 0.

14. Fabrication mécanique - 85

Calcul différentiel et intégral 2(TP2)

Pour tout entier naturel $n \neq 0$ on considère l'intégrale :

$I_n = \int_{-2}^{0} x^n \sqrt{x+2}\, dx$ et on pose $I_0 = \int_{-2}^{0} \sqrt{x+2}\, dx$

1° Calculer I_0.

2° A l'aide d'une intégration par parties, calculer : $I_1 = \int_{-2}^{0} x\sqrt{x+2}\, dx$.

3° Par la méthode d'intégration par parties établir la relation :

pour tout x de $\mathbb{N}^*$, $I_n = -\dfrac{4n}{3+2n} I_{n-1}$.

En déduire la valeur exacte de I_7 ; donner la valeur décimale approchée de I_7 à 10^{-3} prés par défaut.

15. Industrie du bois - 81

Calcul différentiel et intégral 1 (TP2)

Calculer $I = \int_0^{\frac{3\pi}{4}} e^x \cos x \, dx$. (On utilisera deux intégrations par parties successives)

16. Mise en œuvre des plastiques - 89

Calcul différentiel et intégral 1 (TP2)

Calculer l'intégrale $I = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{x^2} \ln\left(1+x^2\right) dx$

On utilisera une intégration par parties

17. En assistance technique d'ingénieur - 82

Calcul différentiel et intégral 2 (TP6) (cet exercice devra comporter des indications de résolution, les formules d'Euler du formulaire etc)

Soient f une fonction de la variable réelle continue sur l'intervalle $[0\ ;\ \pi]$ et n un entier strictement positif. On considère l'intégrale :

$$f_1(n) = \int_0^{\pi} f(x) \cos nx \, dx$$

Calculer $f_1(n)$ dans les cas suivants :

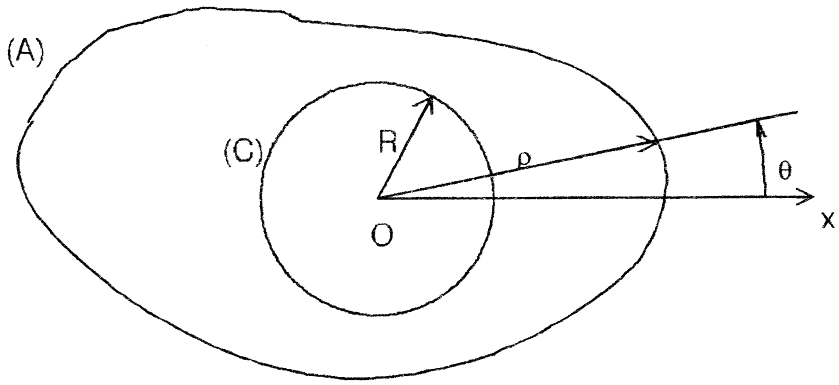
1° $f(x) = \sin kx$, où k désigne un entier strictement positif.
(On distinguera deux cas : $k = n$ et $k \neq n$).

2° $f(x) = x^2 - 2\pi x$.

18. Mécanique et automatismes industriels - 89

Calcul différentiel et intégral 2 (TP4 - TP5 - TP6)

On se propose de déterminer, sur un exemple, la charge maximale applicable sur une plaque dans le cas où l'appui est circulaire et ne correspond pas au contour de la plaque.

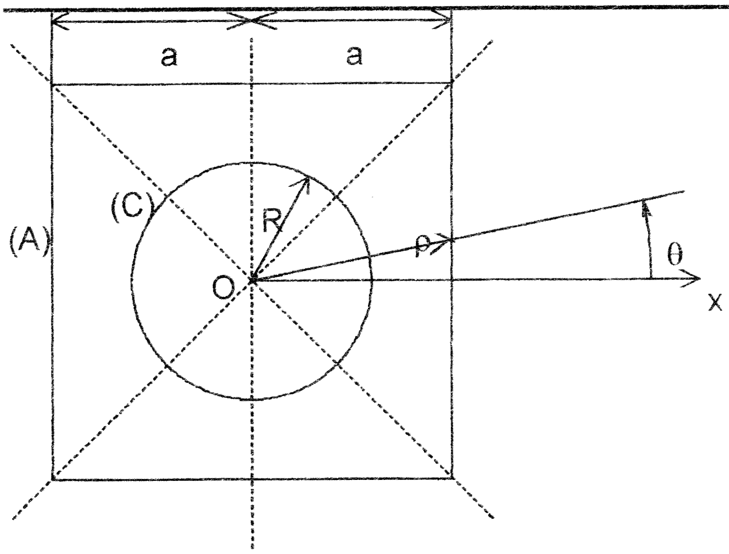


La charge est supposée s'appliquer en 0; le contour d'appui (C) est le cercle de centre O et de rayon R.

Le contour de la plaque (A) est défini par $\rho = \rho(\theta)$. On admet que la charge maximale est donnée par la formule :

$P_{max} = m \int_0^{2\pi} \frac{\rho(\theta)}{R} d\theta$, où m est le moment fléchissant (exprimé en newton).

Exemple : (A) est une plaque carrée de centre O et de côté 2a.



1° a) Justifier l'égalité :

$$P_{max} = 8m\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\rho(\theta)}{R}\,d\theta$$

b) Déterminer $\rho(\theta)$ pour θ variant de 0 à $\frac{\pi}{4}$.

2° On se propose de comparer et de calculer les intégrales :

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{d\theta}{\cos\theta} \quad \text{et} \quad J = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{dt}{1-t^2}$$

a) A l'aide du changement de variable : $t = \sin\theta$, montrer que $I = J$.

b) Déterminer les réels A et B tels que, pour tout $t \in \left[0; \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$, on ait :

$$\frac{1}{1-t^2} = \frac{A}{1+t} + \frac{B}{1-t}$$

En déduire une expression de I ainsi qu'une valeur approchée à 10^{-2} près.

3° Application numérique : calculer P_{max} pour m = 160 N, a = 20 mm, R = 15 mm.

19. Microtechnique - 92

Fonction d'une variable réelle 1 ; calcul différentiel et intégral 2 (TP1 - TP4 - TP6 - TP8)

1° On considère la fonction numérique g de la variable réelle x définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$g(x) = x^3 - 1 + 2\,ln\,x$$

$ln\,x$ désignant le logarithme népérien de x.

a) Etudier les variations de g sur $]0; +\infty[$.

b) Calculer $g(1)$.

c) En déduire le signe de $g(x)$ sur $]0; +\infty[$.

2° Soit la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par : $f(x) = x - 1 - \frac{ln\,x}{x^2}$

et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormal (unité de longueur 2 cm);

a) Calculer sa fonction dérivée. Montrer qu'elle s'écrit : $f'(x) = \frac{g(x)}{x^3}$.

Déduire de la question 1° c) les variations de f.

b) Déterminer les limites de f pour x tendant vers 0 par valeurs positives et x tendant vers $+\infty$.

c) Soit $\varphi(x) = f(x) - (x - 1)$. Calculer la limite de φ pour x tendant vers $+\infty$.
Etudier le signe de $\varphi(x)$ pour $x \in]0; +\infty[$, puis interpréter graphiquement les résultats trouvés.
Résumer l'étude menée (signe de $f'(x)$, variations de $f(x)$, signe de $\varphi(x)$) dans un tableau.

d) Construire la courbe (C), et son asymptote oblique (D) d'équation $y = x - 1$.

3° Calculer l'aire de la partie du plan limitée par :
la courbe (C), la droite (D) et la droite d'équation $x = \sqrt{e}$
(on donnera la valeur exacte en cm^2; on procédera à une intégration par parties).

20. Comptabilité et gestion - 90

Analyse des phénomènes exponentiels (TP1 - TP3)

Un produit est vendu sur un marché de concurrence parfaite. Sa fonction d'offre f et sa fonction de demande g s'exprime par :

$$f(p) = 10\, pe^{p} \quad \text{et} \quad g(p) = 1000\, pe^{-p}$$

où p désigne le prix de vente unitaire, exprimé en milliers de francs, et e la base du logarithme népérien.

1° Déterminer la limite de f quand p tend vers $+\infty$.
Etudier le sens de variation de f sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$; dresser le tableau de variation de f.

2° Déterminer la limite de g quand p tend vers $+\infty$
Etudier le sens de variation de g sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$; dresser le tableau de variation de g.

3° Tracer sur un même graphique, les courbes représentatives des fonctions f et g, dans un repère orthonormal (unités graphiques : 2cm sur l'axe des abscisses 0,05 cm sur l'axe des ordonnées).

4° Déterminer le nombre réel non nul b tel que $f(b) = g(b)$. (le nombre correspond au prix d'équilibre du marché).

5° A l'aide d'une intégration par parties, calculer l'intégrale $I(\alpha) = \int_{ln10}^{\alpha} g(p)\,dp$, où α désigne un nombre réel supérieur à $ln10$. Calculer la limite de $I(\alpha)$ quand α tend vers $+\infty$ cette limite correspond à la rente du consommateur).

E. Calcul d'aires et de volumes

1. Fonderie sur modèle - 89

Fonction d'une variable réelle 1 ; calcul différentiel et intégral 2 (TP1 - TP3 - TP8)

On considère les fonctions f et g définies sur $]0\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = ln(x) + \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2} \quad \text{et} \quad g(x) = ln\, x$$

(C_f) et (C_g) désignent les courbes représentatives des fonctions f et g dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ orthonormal (unité graphique 2 cm).

1° Chercher la dérivée de la fonction f. Déterminer la limite de la fonction f quand x tend vers $+\infty$. Déterminer la limite de la fonction f lorsque x tend vers 0; à cet effet on remarquera que $f(x)$ peut s'écrire sous la forme :

$$f(x) = \frac{x^2\, ln\, x + 2x - 1}{x^2}.$$

Déterminer les variations de la fonction f.

2° Déterminer la limite de $f(x) - g(x)$ quand x tend vers $+\infty$. Interpréter graphiquement le résultat. Etudier la position de (C_f) par rapport à (C_g).

3°Construire dans un même repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ les courbes (C_f) et $C_g)$.

4° Calculer l'aire, en cm^2, du domaine plan E ensemble des points M de coordonnées $(x\ ,\ y)$ telles que :

$$1 \leq x \leq e \quad \text{et} \quad g(x) \leq y \leq f(x).$$

5° Dans cette question on souhaite résoudre l'équation : $x^2\ ln\, x + 2x - 1 = 0$
Déterminer graphiquement le nombre de solutions de cette équation.
Donner une valeur approchée à 0.1 près par excès de la solution.

2. Fonderie sur modèle - 88

Fonctions d'une variable réelle 1 ; calcul différentiel et intégral 2 (TP1 - TP4 - TP6 - TP8)

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (2x - 1)\, e^{-x}$.

1° a) Déterminer la limite de f en $-\infty$.

b) Déterminer la limite de f en $+\infty$ (à cet effet, on remarquera que l'on peut écrire : $f(x) = \frac{2x}{e^x} - e^{-x}$).

c) Etudier le sens de variation de la fonction f.

d) Tracer la courbe représentative (C) de f dans un repère orthonormal (unité graphique : 2 cm), (on ne demande pas l'étude de la branche infinie quand x tend vers $-\infty$).

2° a) Un réel t étant donné, calculer, à l'aide d'une intégration par parties, l'intégrale définie :

$$\int_{0,5}^{t} (2x - 1)\, e^{-x}\, dx$$

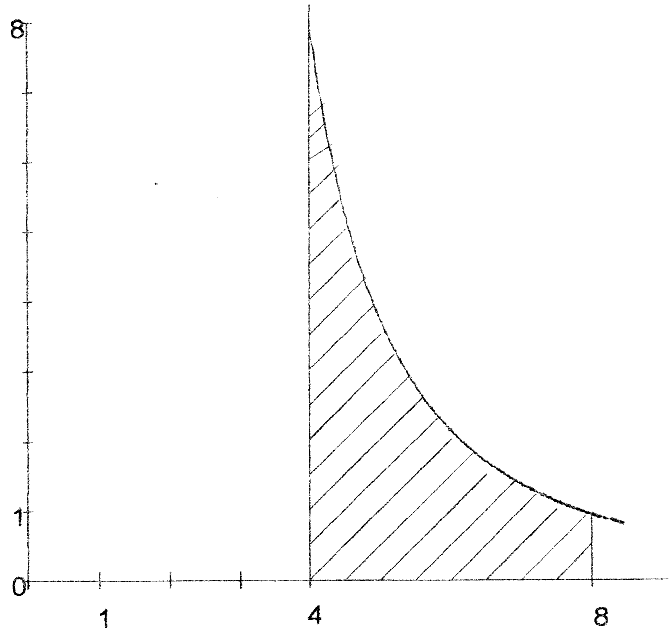
b) Soit t un réel strictement supérieur à 0,5.

Calculer l'aire $\mathcal{A}(t)$, exprimée en cm^2 , du domaine plan limité par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives : $x = 0,5$ et $x = t$.

Déterminer la limite L de $\mathcal{A}(t)$ lorsque t tend vers $+\infty$, puis en donner une valeur approchée à 10^{-2} près par défaut.

3. Industries du cuir - 92

Fonction d'une variable réelle 1 ; calcul différentiel et intégral 1 (TP1 - TP2 - TP8)



Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]2 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{200x}{\left(x^2 - 4\right)^2} \ln x.$$

Sur le graphique ci-contre figure une partie de la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ (unité graphique : 1 cm).

Les objectifs de cet exercice sont :

- pour les deux premières parties, de calculer l'aire A du domaine hachuré, exprimé en cm^2, c'est-à-dire

$$A = \int_4^8 f(x)\,dx \,;$$

ce calcul sera fait à l'aide d'une intégration par parties.

- pour la troisième partie, de visualiser sur un graphique l'aire correspondant à la nouvelle intégrale intervenant dans cette intégration par parties.

<u>Première partie</u> : Intégration par parties :

1° Déterminer la primitive G de la fonction g, définie sur l'intervalle $]2 ; +\infty[$ par $g(x) = \dfrac{200x}{\left(x^2 - 4\right)^2}$, telle que $G(3) = -20$.

2° A l'aide d'une intégration par parties utilisant la fonction G, montrer que :

$$A = \frac{35}{3} \ln 2 + \int_4^8 \frac{100}{x\left(x^2 - 4\right)} dx$$

<u>Deuxième partie</u> : Calcul de A :

On note I le nombre $\displaystyle\int_4^8 \frac{100}{x\left(x^2 - 4\right)} dx$.

Soit h la fonction définie sur l'intervalle $]2 ; +\infty[$ par $h(x) = \dfrac{100}{x\left(x^2 - 4\right)}$.

On désigne par Γ sa courbe représentative dans le repère $(O\,;\,\vec{i},\vec{j})$.

1° a) Montrer que, pour tout élément x de l'intervalle $]2\,;+\infty[$, $h(x) = \dfrac{25}{2}\left(\dfrac{1}{x+2} - \dfrac{2}{x} + \dfrac{1}{x-2}\right)$.

b) Déterminer une primitive H de la fonction h, sur l'intervalle $]2\,;+\infty[$.

2° a) Calculer la valeur exacte de I.

b) En déduire la valeur exacte de A ; donner la valeur décimale de A, approchée à 10^{-2} près par excès.

<u>Troisième partie</u> : Interprétation de I par une aire :

1° a) Déterminer les limites de la fonction h en 2 et en $+\infty$; en déduire les équations des droites asymptotes à la courbe Γ.

b) Etudier le sens de variation de la fonction h et dresser son tableau de variation.

2° a) Tracer la courbe Γ, pour les abscisses comprises entre 2,5 et 9.
Seront placés, en particulier, les points d'abscisses 2,5 ; 3 ; 3,5 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 et 9.
(*On utilisera une feuille de papier millimétrée ; unité graphique : 1 cm.*)

b) Hachurer sur le graphique une partie du plan dont I est l'aire.

4. Domotique - 92

Fonctions d'une variable réelle 1 ; calcul différentiel et intégral 2 (TP1 - TP6 TP8)

Partie 1

On considère la fonction f définie sur l'intervalle I : $I = \left[-\dfrac{3\pi}{2};\dfrac{3\pi}{2}\right]$ par : $f(x) = e^{-x}(\cos x - \sin x)$.

1° Calculer la dérivée de f, et étudier son signe sur l'intervalle I.

2° Construire le tableau des valeurs numériques de f pour les valeurs suivantes de x :

$$-\frac{3\pi}{2};-\pi;-\frac{\pi}{2};-\frac{\pi}{4};0;\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{4};\pi;\frac{3\pi}{2}.$$

Les valeurs numériques seront données à 0,01 près.

3° Déterminer sur I les solutions de l'équation $f(x) = 0$.

4° On désigne par (C) la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormal d'unité graphique 2 cm sur chaque axe.

a) La courbe (C) admet une tangente (T) en son point d'abscisse 0. Donner une équation cartésienne de cette droite (T).

b) En se limitant à l'intervalle $\left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{3\pi}{4}\right]$, construire sur un même graphique la courbe (C) et la droite (T). On prendra pour valeur approchée de π la valeur 3,1.

Partie 2

On pose $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-x}\cos x\,dx$ et $J = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-x}\sin x\,dx$.

1° Au moyen d'une intégration par parties sur chacune des intégrales I et J, montrer que I et J sont les solutions du système de deux équations à deux inconnues u et v :

$$u - v = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{-\frac{\pi}{4}} \ ; \ u + v = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} e^{-\frac{\pi}{4}}.$$

Calculer les valeurs exactes de I et J.

2° Calculer, en unité d'aire, la valeur exacte de l'aire de la portion de plan comprise entre l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la portion de courbe (C) correspondant à l'intervalle $\left[0;\frac{\pi}{4}\right]$.

Donner une valeur approchée de cette aire en cm^2 à 0,01 près.

5. Informatique de gestion - 93

Calcul différentiel et intégral 2 (TP1 - TP3 - TP4 - TP5 - TP6 - TP8) ; fonction d'une variable réelle 1 ;

Partie A

Soit la fonction numérique f définie sur l'intervalle $]-1\ ;\ 0]$ par :

$$f(x) = ln\left(1 - x^2\right) - x.$$

On désigne par (C) la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormal (unité graphique : 10 cm).

1° Déterminer la limite de f en -1. Que peut-on en déduire pour la courbe (C) ?

2° Etudier les variations de la fonction f.

3° Donner une équation de la tangente (D) à la courbe (C) au point origine du repère.

4° Tracer (C) et (D).

5° On admet que l'équation $f(x) = 0$ a deux solutions : 0 et α.
Vérifier que α appartient à l'intervalle $]-0,72\ ;\ -0,71[$.

Partie B

1° Vérifier l'égalité :

$$\int_\alpha^0 ln\left(1 - x^2\right)dx = \int_\alpha^0 ln(1 + x)dx + \int_\alpha^0 ln(1 - x)dx$$

2° A l'aide d'intégrations par parties, calculer, en fonction de α, les intégrales :

$$\mathrm{I} = \int_\alpha^0 ln(1 + x)dx \text{ et } \mathrm{J} = \int_\alpha^0 ln(1 - x)dx.$$

On pourra remarquer que : $\frac{x}{1+x} = 1 - \frac{1}{1+x}$ et que $\frac{x}{1-x} = -1 + \frac{1}{1-x}$.

3° Calculer en fonction de α l'intégrale :

$$K = \int_\alpha^0 f(x)dx.$$

4° On désigne par $\mathcal{A}$ l'aire, exprimée en cm^2, du domaine limité par l'axe des abscisses, la courbe (C) et les droites d'équation $x = \alpha$ et $x = 0$.

a) Calculer $\mathcal{A}$ en fonction de α.

b) Montrer qu'en prenant $\alpha = -0,71$ on obtient une valeur approchée de $\mathcal{A}$ par défaut.

En admettant que l'erreur commise sur la valeur de $\mathcal{A}$ en prenant $\alpha = -0{,}71$ est inférieure à 10^{-2}, donner la valeur approchée de $\mathcal{A}$ à 10^{-1} près par défaut.

6. Maintenance et exploitation des matériels aéronautiques - 90

Fonction d'une variable réelle 1 ; calcul différentiel et intégral 1 (TP1 - TP2 - TP3)

Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie par : $f(x) = \left(\frac{3}{2}x^2 - 3x\right)e^{-x}$.

1° a) Etudier les variations de f quand x décrit $\mathbb{R}$.

b) Tracer la courbe représentative C de f dans le plan rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (unité graphique : 1 cm).

2° Calculer, à l'aide d'une intégration par parties : $\int f(t)dt$; en déduire les fonctions primitives de f sur $\mathbb{R}$.

3° Soit m un nombre réel strictement supérieur à 2.

a) Calculer, en cm^2, l'aire A(m) du domaine plan délimité par la courbe C, l'axe des abscisses, et les droites d'équations $x = m$ et $x = 2$.

b) Calculer la limite de A(m) lorsque m tend vers $+\infty$.

7. Conception des produits industriels - 92

Fonction d'une variable réelle 2 ; calcul différentiel et intégral 3 (TP8 - TP10)

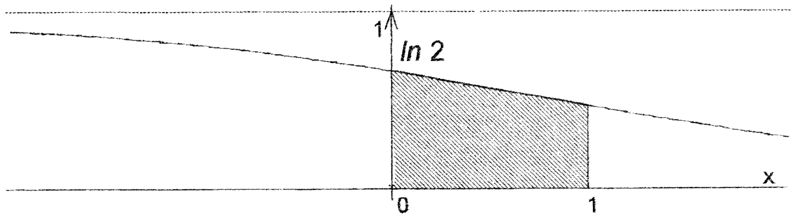
On donne dans un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ d'unité graphique 4 cm la courbe C représentative de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = e^{-x}\,ln\left(1+e^{x}\right)$$

On se propose de calculer l'aire S de la partie hachurée du plan ensemble des points M(x ; y) tels que :

$$\begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ 0 \le y \le f(x) \end{cases}$$

voir figure ci-contre :



1° a) Calculer les réels A et B tels que pour tout réel t strictement positif :

$$\frac{1}{t(t+1)} = \frac{A}{t} + \frac{B}{t+1}$$

b) Calculer l'intégrale $I = \int_1^e \frac{dt}{t(t+1)}$.

2° Soit l'intégrale $J = \int_0^1 f(x)\,dx$.

a) En utilisant le changement de variable défini par $t = e^x$, montrer que $J = \int_1^e \frac{ln(1+t)}{t^2}\,dt$.

b) Calculer alors J en utilisant une intégration par parties et le résultat de la question 1° b).

3° En déduire la valeur exacte, en cm^2, de S puis la valeur arrondie au mm^2.

8. Etude et économie de la construction - 93

Calcul différentiel et intégral 2 (TP1 - TP5 - TP6 - TP8) ; fonction d'une variable réelle 1

Partie A

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O\ ;\ \vec{i}, \vec{j})$ (unité graphique 4 cm).
Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ par :

$$f(x) = 2e^{-x}\sqrt{x}$$

1° Calculer $f(0)$.

2° Etudier les variations de la fonction f, et déterminer la limite de f en $+\infty$.

3° Construire dans le repère $(O\ ;\ \vec{i}, \vec{j})$ la représentation graphique (C) de la fonction f.
Préciser la tangente à la courbe (C) au point d'abscisse 0.

Partie B

On considère le solide de révolution engendré par la rotation autour de l'axe des abscisses, de la courbe (C), définie à la question 3° de la partie A.
On désigne par $S(x)$ l'aire de la section de ce solide par le plan P perpendiculaire à l'axe des abscisses et passant par le point M de (C) d'abscisse x.
On désigne par $V(x)$ le volume de la partie du solide limitée par le plan P et le plan P_0 parallèle à P et passant par le point d'abscisse 0.

1° Montrer que l'on a $S(x) = 4\pi x e^{-2x}$. Déterminer la valeur pour laquelle $S(x)$ est maximum.
Donner une valeur approchée de ce maximum à 10^{-2} près.
On rappelle que : $V(x) = \int_0^x S(t)\,dt$.

Montrer que $V(x) = \pi\left[1-(2x+1)e^{-2x}\right]$. *(on pourra utiliser une intégration par parties).*

2° Déterminer la limite de $V(x)$ quand x tend vers $+\infty$.

9. Géologue prospecteur - 90

Fonction d'une variable réelle 1 ; calcul différentiel et intégral 2 (TP1 - TP5 - TP6 - TP8)

Une sphère fixe (S) de rayon R reposant sur le plan horizontal (P), on considère les cônes de révolution d'axes verticaux limités au plan de base (P) tels que (S) soit la sphère inscrite à ces cônes. Le problème propose l'étude des variations du volume V d'un tel cône et la détermination d'un cône dont le volume V soit minimum.

1° Etude préalable d'une fonction

Soit la fonction numérique qui à tout réel de l'intervalle $]0; 1[$ fait correspondre :

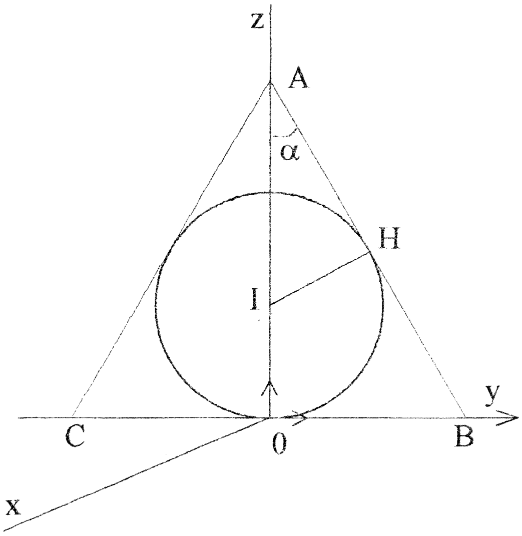
$$f(x) = \frac{(1+x)^2}{x(1-x)}.$$

a) Etudier les variations de f et déterminer les limites de f lorsque x tend vers 0 et lorsque x tend vers 1 dans l'intervalle $]0; 1[$.

b) Dessiner la courbe représentative de f dans un repère orthogonal où les unités graphiques sont les suivantes : 9 cm pour l'unité de l'axe des abscisses, 0,5 cm pour l'unité de l'axe des ordonnées.

c) Soit k un nombre réel arbitraire. Indiquer suivant les valeurs de k, le nombre des solutions de l'équation $f(x) = k$.

d) Résoudre $f(x) = 9$.



2° Calcul du volume V d'un cône de révolution

L'espace est rapporté au repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Soient les points A, B et C de coordonnées respectives :
$(0, 0, h)$, $(0, r, 0)$ et $(0, -r, 0)$,
h et r étant deux réels positifs donnés.

On note α une mesure en radian de l'angle géométrique $(\widehat{OAB})$ $(0 < \alpha < \frac{\pi}{2})$.

Le segment [AB] en tournant autour de Oz engendre un cône de révolution qu'on limite à sa base dans le plan (P) des axes Ox et Oy. On désigne par R le rayon du cercle inscrit dans le triangle ABC qui est aussi le rayon de la sphère inscrite dans le cône de révolution.

a) Exprimer $\sin \alpha$ dans le triangle AIH et $\tan \alpha$ dans le triangle AOB.

b) Déduire de ce qui précède r et h à l'aide de R et α.

c) Calculer V volume du cône de révolution à l'aide de R et de α.

3° Utilisation de f et résolution du problème posé

a) R étant supposé fixé, montrer que V s'exprime par $V = K f(\sin \alpha)$ où K est un coefficient positif que l'on exprimera à l'aide de R.

b) En déduire les variations de V.

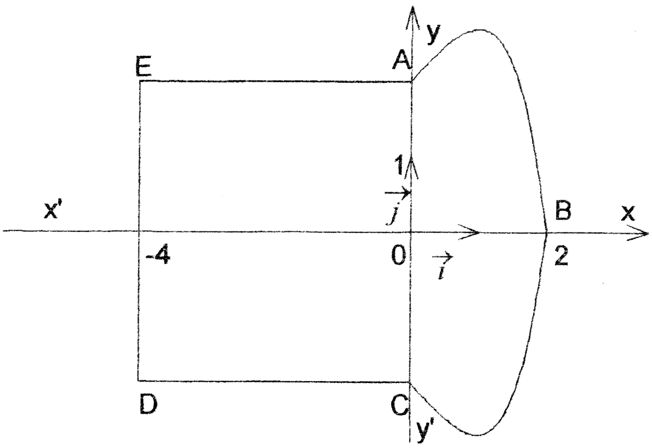
c) Pour quelles valeurs de α, le volume V est-il minimum ? Calculer alors la hauteur du cône et son volume.

F. Centre et moment d'inertie, longueur d'un arc

1. Productique - 92

Calcul différentiel et intégral 2 (TP6 - TP8)

On se propose dans ce problème, de déterminer, dans un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$, les coordonnées du centre d'inertie d'une plaque P d'épaisseur négligeable.



Cette plaque P est obtenue en soudant deux plaques P_1 et P_2 de masse surfacique ρ.

1° La plaque P_1 est un carré dont les sommets sont les points : A(0; 2), C(0; -2), D(-4 ; -2), E(-4 ; 2). Quelles sont les coordonnées du centre de gravité G_1 de la plaque P_1 ?

2° La plaque P_2 a l'axe des abscisses pour axe de symétrie et la moitié supérieure P_2' de cette plaque est limitée par les segments [BO], [OA] et la courbe d'équation :

$$y = (2 - x)e^x \quad (x \in [0;2]).$$

a) On considère les intégrales : $I_n = \int_0^2 x^n e^x dx \quad (n \in \mathbb{N})$.

Déterminer les valeurs exactes de : $I_0 = \int_0^2 e^x dx \qquad I_1 = \int_0^2 xe^x dx \qquad I_2 = \int_0^2 x^2 e^x dx$.

b) Exprimer l'aire de la plaque P_2' en fonction des intégrales I_0 *et* I_1. En déduire la valeur exacte de cette aire, puis la masse M de P_2' en fonction de ρ.

c) On rappelle que pour une plaque homogène de masse M, ensemble des points N(x ; y) tels que $a \le x \le b$ et $0 \le y \le f(x)$ l'abscisse du centre d'inertie est :

$$x_g = \frac{1}{M}\int_a^b x.f(x).\rho.dx$$

Exprimer l'abscisse du centre d'inertie de P_2' en fonction des intégrales I_1 *et* I_2.
En déduire la valeur exacte de l'abscisse du centre d'inertie G_2 de la plaque P_2.

3° Quelle est l'ordonnées du centre d'inertie G de la plaque P ?
Calculer la valeur exacte de son abscisse. En donner une valeur approchée à 10^{-1} près.

2. Maintenance - 91

Calcul différentiel et intégral 2 (TP4 - TP6 - TP8)

1° a) Calculer la valeur exacte de $I_0 = \int_0^1 e^x dx$

b) Soit $I_1 = \int_0^1 xe^x dx$ et $I_2 = \int_0^1 x^2 e^x dx$

Montrer en utilisant des intégrations par parties que $I_1 = 1$ et $I_2 = e - 2$

2° ***Application***

Dans un repère orthonormal (unité 1cm) on considère la courbe représentative de la fonction f définie par : pour tout x de $[0 ; 1]$, $f(x) = e^x$.

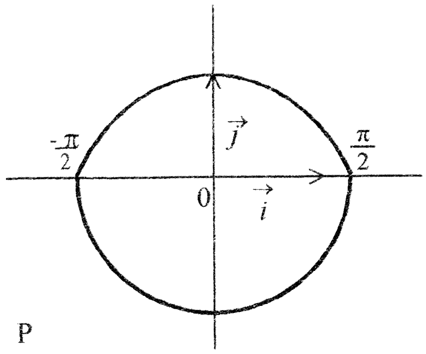
Une plaque homogène de masse surfacique 1g/cm^2 est délimitée par l'axe x'Ox, la courbe (C) et les droites d'équations : $x = 0$ et $x = 1$.

Le moment d'inertie de cette plaque en g.cm^2 par rapport à la droite d'équation $x = 1$ est donné par $J = \int_0^1 (1-x)^2 e^x dx$

Calculer la valeur exacte de J. En donner une valeur approchée à 10^{-2} près.

3. Conception des produits industriels - 90

Fonction d'une variable réelle 2 ; calcul différentiel et intégral 3 (TP6 - TP8 - TP10)



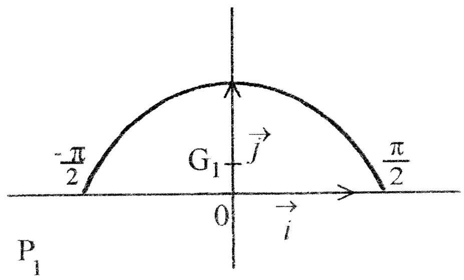
Le but de ce problème est de déterminer, dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$, les coordonnées du centre d'inertie d'une plaque homogène d'épaisseur négligeable.

Cette plaque est obtenue en soudant deux plaques P_1 et P_2 de masse surfacique ρ.

1° La plaque P_1 a pour contour la courbe d'équation $y = \cos x$, avec x compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$ et la droite d'équation $y = 0$.

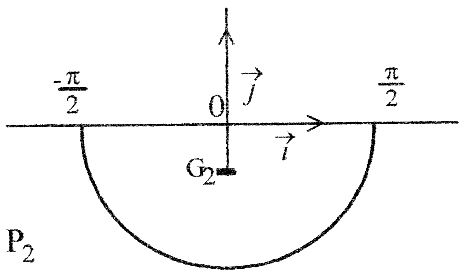
Calculer l'aire de P_1.

En déduire sa masse M_1 en fonction de ρ.



2° La plaque P_2 est un demi-disque de centre O et de rayon $\frac{\pi}{2}$.

Calculer sa masse M_2 en fonction de ρ.



3° On rappelle que si une plaque homogène est limitée par l'axe des abscisses et la courbe d'équation $y = f(x)$, comme l'indique le schéma ci-contre, alors l'ordonnée de son centre d'inertie est :

$$\frac{1}{M}\int_a^b \frac{1}{2} y \, dm$$

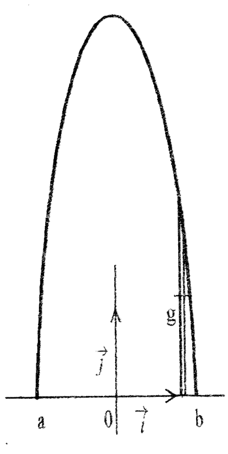
avec $dm = \rho \, . \, f(x) \, dx$.

C'est à dire :

$$\frac{1}{M}\int_a^b \frac{1}{2} \rho f^2(x) \, dx$$

M étant la masse de la plaque.

Calculer les coordonnées y_1 et y_2 des centres d'inertie G_1 et G_2 des plaques P_1 et P_2.

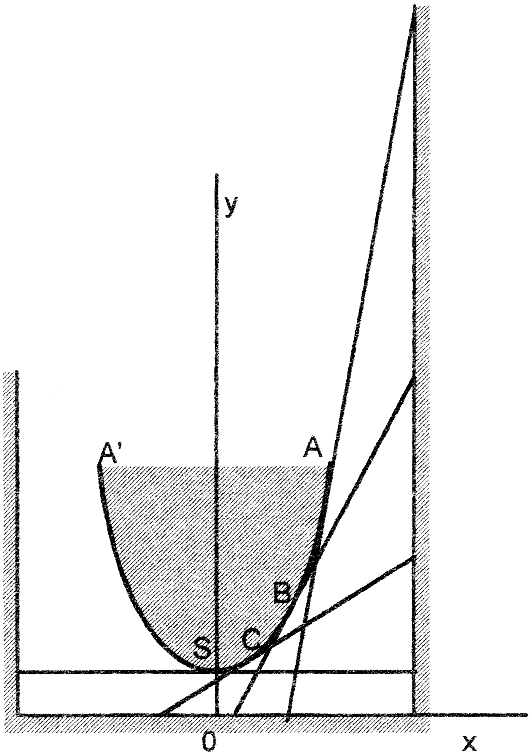


4° Calculer l'ordonnée y du centre d'inertie G de la plaque P.

(On donnera la valeur exacte et une valeur approchée à 10^{-1} près de cette ordonnée).

4. Plasticien de l'environnement architectural - 89

Fonction d'une variable réelle 1 ; calcul différentiel et intégral 1 (TP2 - TP3)



Dans une cour rectangulaire de 24 m sur 30 m fermée par un mur sur trois côtés, on donne des spectacles en plein air.

Pour abriter la scène du soleil, on tend un vélum (une bâche). Ce vélum est tendu dans un plan horizontal (H) par 7 filins; chaque filin rectiligne est lui même tendu entre deux crochets fixés aux murs dans le même plan que (H) conformément au croquis ci-contre (qui n'est pas la figure exacte).
Le mur du fond mesure 24 m.

On rapporte le plan (H) au repère (O; x, y) défini par :

- l'axe Ox est porté par le mur du fond,
- l'axe Oy est l'axe de symétrie de la cour,
- L'origine O est donc le milieu du mur du fond.

Vélum :

C'est une pièce de toile dont le contour est formé d'un segment [A, A'] de longueur 12 m et de l'arc de parabole d'équation :

$$\begin{cases} y = \dfrac{x^2}{16} + 2 \\ -6 \leq x \leq 6 \end{cases} \quad \text{dans } (0,\ x,\ y)$$

Filins :

Ils sont fixés au vélum tangentiellement au bord parabolique en chacun des sept points A, B, C, S, C', B', A'.

1° Calculer la quantité $I = \int_{-3}^{3} \left(\dfrac{x^2}{16} + 2 \right) dx$; en déduire en m^2, à 10^{-1} près par excès, la surface du vélum.

2° Les points A, B, C, S ont respectivement pour abscisses 3, 2, 1, 0 dans le repère Oxy; A', B', C' sont les symétriques de A, B, C par rapport à Oy.

a) Déterminer les équations des tangentes à la parabole en chacun de ces points.

b) En déduire les coordonnées dans le repère Oxy des extrémités de ces quatre filins passant par A, B, C ou S.

3° En prenant pour échelle 1/200, représenter sur papier millimétré les 3 murs de la cour, la forme du vélum et les 7 filins dans le plan Oxy.
En utilisant cette représentation, déterminer une estimation en mètres de la longueur de filin nécessaire.

G. *Développements limités*

1. Géologie appliquée - 89 (Extrait)

Fonction d'une variable réelle 1 ; calcul différentiel et intégral 2 (TP2 - TP5)

Soit f la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ par $f(x) = (x+1)e^{-\frac{1}{x}}$. On appelle (C) la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormal.

1° Etudier les variations de f sur $]0 ; +\infty[$ et préciser les limites de f aux bornes de cet intervalle.

2° Donner le développement limité à l'ordre 2, au voisinage de 0, de la fonction $h : t \to e^{-t}(1+t)$.

En déduire, en posant $t = \frac{1}{x}$, que la courbe (C) admet, quand x tend vers $+\infty$, une asymptote que l'on construira. Préciser la position de (C) par rapport à cette asymptote.

2. Conception des produits industriels - 93

Calcul différentiel et intégral 2 (TP1 - TP2 - TP4 - TP6 - TP8) ; fonction d'une variable réelle 1

On se propose de calculer l'aire d'une plaque plane et de calculer une intégrale qui permet de déterminer le moment d'inertie de cette plaque par rapport à un axe.

I - Etude de fonction

Soit la fonction f définie sur l'intervalle $[0 ; 1]$ par $f(x) = e^{x} - \frac{1}{2}\sqrt{4-x^2}$.

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormal d'unité graphique 4 cm.

1° a) Déterminer la dérivée f' de la fonction f.

b) Donner des valeurs décimales approchées à 0,1 près de $f(1)$ et de $f'(1)$.

c) Donner le tableau de variation de la fonction f.

2° a) En utilisant le développement limité de $(1-u)^{\frac{1}{2}}$ au voisinage de $u = 0$, écrire le développement limité de $\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}$ à l'ordre 2, au voisinage de $x = 0$.

En déduire le développement limité de la fonction f, à l'ordre 2, au voisinage de $x = 0$.

b) Déduire du résultat précédent une équation cartésienne de la tangente D à la courbe $\mathscr{C}$ en son point d'abscisse zéro et la position relative de la courbe par rapport à cette tangente au voisinage de ce point.

3° Construire la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ en son point d'abscisse 1 ;

tracer la droite D et la courbe $\mathscr{C}$.

II - Le plan est muni d'un repère orthonormal d'unité graphique 4 cm.

Soit P la plaque plane ensemble des points M(x ; y) du plan tels que : $\begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ 0 \le y \le f(x) \end{cases}$ où f désigne la fonction étudiée dans la partie I.

La plaque P est limitée par la courbe $\mathcal{C}$, l'axe des abscisses et la droite d'équation $x = 1$.

La partie A propose le calcul de l'aire de la plaque P.

Cette plaque étant supposée homogène, le calcul de son moment d'inertie par rapport à l'axe des ordonnées se ramène au calcul de l'intégrale $J = \int_0^1 x^2 f(x)\,dx$ qui est proposé dans la partie B.

Partie A :

1° On considère l'intégrale $I = \int_0^1 \sqrt{4 - x^2}\,dx$.

En utilisant le changement de variable défini par $x = 2\sin t$, calculer I.

2° Calculer l'intégrale $\int_0^1 f(x)\,dx$.

En déduire l'aire $\mathcal{A}$, en cm^2, de la plaque P.

On donnera la valeur exacte et la valeur décimale arrondie à 0,01 près.

Partie B :

1° Calculer, à l'aide de deux intégrations par parties successives l'intégrale $K = \int_0^1 x^2 e^x\,dx$.

2° On considère l'intégrale $L = \int_0^1 x^2 \sqrt{4 - x^2}\,dx$.

Montrer, en utilisant le changement de variable défini par $x = 2\sin t$, que :

$$L = 2\int_0^{\frac{\pi}{6}} (1 - \cos 4t)\,dt.$$

Calculer L.

3° En utilisant les résultats précédents, calculer l'intégrale $J = \int_0^1 x^2 f(x)\,dx$.

On donnera la valeur exacte et la valeur décimale arrondie à 0,01 près.

3. Bâtiment - 89

Fonctions d'une variable réelle 1 ; calcul différentiel et intégral 2 (TP1 - TP2 - TP6)

Un des objectifs de cet exercice est d'obtenir une valeur approchée d 'une intégrale.

On considère la fonction numérique de la variable réelle x définie sur]–1; 1] par :

$$f(x) = \frac{e^x}{\sqrt{x+1}}$$

Soit (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (unité graphique : 5 cm)

A) Etude des variations de f , construction de sa courbe représentative

1° Etudier les variations de f sur]–1; 1]

2° Déterminer le coefficient directeur de la tangente (T) à (C) au point abscisse 0.

3° Construire la tangente (T) et la courbe (C).

B) Recherche d'une valeur approchée d'une intégrale

1° En utilisant le formulaire, montrer que le développement limité d'ordre 2 de f en 0 est :

$$f(x)=1+\frac{1}{2}x+\frac{3}{8}x^2+x^2\varepsilon(x)\ avec\ \lim_{x\to 0}\varepsilon(x)=0$$

2° Etudier les variations de la fonction g définie sur l'intervalle $\left[0;\frac{1}{2}\right]$ par $g(x) = 1+\frac{1}{2}x+\frac{3}{8}x^2$.

3° On se propose de tracer sur la figure de la partie A la courbe représentative (C') de g.

a) Monter que (C) et (C') ont la même tangente au point d'abscisse 0

b) Calculer les ordonnées des points de la courbe (C') d'abscisses respectives : 0,1; 0,2; 0,3; 0,4; 0,5.
Placer ces points sur la figure de la partie A et vérifier que (C') coïncide pratiquement avec (C) sur l'intervalle $\left[0;\frac{1}{2}\right]$.

4° Pour déterminer l'aire de la partie de plan limitée par la courbe (C), l'axe x'Ox , l'axe y'Oy et la droite d'équation $x=\frac{1}{2}$, on convient de remplacer le calcul de cette aire par celui de l'aire S de la partie de plan limitée par (C'), l'axe x'Ox , l'axe y'Oy et la droite d'équation $x=\frac{1}{2}$.
Calculer S en unités d'aire.
Donner une valeur approchée de cette aire S, exprimée en cm^2 à 10^{-3} près.

4. Moteurs à combustion interne - 90 - Exercice

Fonction d'une variable réelle 1 ; calcul différentiel et intégral 2 (TP1 - TP2 - TP4 - TP6 - TP8)

Soit f la fonction de la variable réelle x définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\frac{2x}{x^2+1}-\mathrm{Arctan}(x)$.

On note (C) sa courbe représentative dans un repère orthogonal (unités graphiques : 1,5 cm sur l'axe des abscisses et 3 cm sur l'axe des ordonnées).

1° a) Déterminer les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$.

b) Montrer que la dérivée de la fonction f est telle que : $f'(x)=\frac{1-3x^2}{\left(x^2+1\right)^2}$.

c) Dresser le tableau de variation de la fonction f.

2° a) Donner une équation de la tangente à la courbe (C) au point d'abscisse 0. Préciser la position de la courbe par rapport à cette tangente (on pourra, à cet effet, étudier les variations de la fonction ω définie par $\omega(x) = f(x) - x$).

b) Démontrer qu'au voisinage de 0, on a : $f(x)=x-\frac{5x^3}{3}+x^3\varepsilon(x)$ avec $\lim_{x\to 0}\varepsilon(x)=0$.

c) Tracer la courbe (C).

3° a) A l'aide d'une intégration par parties, calculer la primitive s'annulant en 0 de la fonction *Arc tangente*, sur $\mathbb{R}$.

b) En déduire l'aire en cm^2 du domaine plan limité par (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.
On en donnera la valeur exacte puis une valeur décimale approchée à 10^{-2} près par défaut.

5. C.I.R.A. - 94

Calcul différentiel et intégral 2 (TP2 - TP4).

On mélange dans une enceinte adiabatique et à pression constante, une masse m de liquide à la température absolue T avec une masse égale du même liquide à la température absolue T' (<u>T et T' sont donc des réels strictement positifs</u>).

La température d'équilibre du mélange est : $T_f = \dfrac{T+T'}{2}$

On note c_p la chaleur massique de ce liquide. La variation totale d'entropie ΔS est donnée par :

$$\Delta S = mc_p\left[\int_T^{T_f}\frac{dx}{x}+\int_{T'}^{T_f}\frac{dx}{x}\right].$$

1° Montrer que : $\Delta S = mc_p\, ln\left(\dfrac{(T+T')^2}{4TT'}\right)$. ($ln$ désigne la fonction logarithme népérien).

2° On pose : $u = \dfrac{T'-T}{T}$. Montrer qu'alors : $\left(1+\dfrac{u}{2}\right)^2(1+u)^{-1} = \dfrac{(T+T')^2}{4TT'}$.

3° On suppose dans cette question que $T' - T$ est "très petit" devant T et donc que u est "voisin" de 0.

a) Donner le développement limité, au voisinage de 0, de $\left(1+\dfrac{u}{2}\right)^2$ puis celui de $(1+u)^{-1}$ à l'ordre 2.

b) Justifier alors que : $\left(1+\dfrac{u}{2}\right)^2(1+u)^{-1} = 1+\dfrac{u^2}{4}+u^2\varepsilon(u)$ avec $\lim\limits_{u\to 0}\varepsilon(u)=0$.

c) En déduire que ΔS est équivalent à $mc_p\left(\dfrac{u^2}{4}+u^2\varepsilon(u)\right)$ au voisinage de 0.

Puisque $\lim\limits_{u\to 0} u^2\varepsilon(u)=0$, *on écrit :* $\Delta S = mc_p\dfrac{u^2}{4}$, *soit ici :* $\Delta S \approx mc_p\dfrac{(T'-T)^2}{4T^2}$.

H. Encadrements

1. Informatique de gestion - 90

Fonctions d'une variable réelle 2 ; calcul différentiel et intégral 2 (TP1 - TP4 - TP6)

Cet exercice a pour but de calculer une valeur approchée d'une intégrale dont l'une des bornes, abscisse d'un point particulier d'une courbe, est définie par un encadrement.
Soit f la fonction définie , pour tout nombre réel x strictement supérieur à -1 , par :

$$f(x) = ln(x+1) + e^{-x}$$

ln désigne la fonction logarithme népérien

A - Etude de la fonction f

1° Donner la limite de f en -1 et la limite de f quand x tend vers $+\infty$; justifier les réponses.

2° a) En étudiant le sens de variation de la fonction g définie pour tout réel t par $g(t) = e^t - t - 1$, démontrer que pour tout réel t on a : $e^t \geq t+1$

b) Etudier les variations de f.

3° Tracer la courbe représentative (C) de f dans le plan rapporté au repère orthogonal $(O; \vec{i}, \vec{j})$. On prendra pour unités 2 cm sur l'axe des abscisses et 5 cm sur l'axe des ordonnées.

4° a) Calculer la dérivée f'' de f'.

b) Montrer que $f''(x) = 0$ si et seulement si $(x+1)^2 - e^x = 0$

On admet que $(x+1)^2 - e^x = 0$ admet une solution α comprise entre $\alpha_1 = 2{,}51$ et $\alpha_2 = 2{,}52$

B - Calcul d'une valeur approchée de $\int_0^{\alpha} f(t)dt$

1° Pour tout nombre réel x positif ou nul on pose :

$$h(x) = \int_0^x ln(1+t)dt \quad \text{et} \quad F(x) = \int_0^x f(t)dt$$

En utilisant une intégration par parties, calculer $h(x)$.
En déduire F(x)

2° Démontrer que : $F(\alpha_1) < F(\alpha) < F(\alpha_2)$

3° En déduire une valeur décimale approchée de F(α) à 10^{-2} près.

2. Informatique de gestion - 91

Fonction d'une variable réelle 1 ; calcul différentiel et intégral 2 (TP1 - TP4 - TP6 - TP8)

Cet exercice a pour but de déterminer une valeur approchée de l'intégrale $\int_{-2}^{-1} \frac{xe^x}{e^x+1}dx$.

I Soit la fonction numérique φ de la variable réelle x définie sur $\mathbb{R}$ par : $\varphi(x) = e^x + x + 1$

1° Le tableau de variation de la fonction j est le suivant :

x	$-\infty$		$+\infty$
$\varphi'(x)$		$+$	
$\varphi(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

Montrer que l'équation $\varphi(t) = 0$ admet une solution unique α comprise entre -2 et -1 ; pour la suite on prendra -1,28 comme valeur approchée de α à 10^{-2} près par défaut.

2° Donner le signe de $\varphi(x)$ sur $\mathbb{R}$.

II Soit la fonction numérique f définie sur [-3 ; -1] par : $f(x) = \dfrac{xe^x}{e^x + 1}$

1° a) Montrer que $f'(x)$ peut s'écrire : $f'(x) = \dfrac{e^x \varphi(x)}{\left(e^x + 1\right)^2}$

En déduire le signe de $f'(x)$ sur [-3 ; -1].
Dresser le tableau de variation de f.

b) Montrer que $f(\alpha) = \alpha + 1$; en déduire une valeur approchée de $f(\alpha)$ à 10^{-2} près par défaut.

2° On désigne par (C) la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormal (unité graphique : 4 cm).
Construire la courbe (C).

III 1° a) On définit les fonctions g et h sur [0,1 ; 0,4] par :
$g(t) = ln(1 + t) - t + 0{,}39\, t^2$
$h(t) = ln(1 + t) - t + 0{,}47\, t^2$

Les tableaux de variation des fonctions g et h sont donnés :

t	0,1		$\frac{11}{39}$		0,4
$g'(t)$		−	0	+	
$g(t)$	$g(0,1)$	↘	a	↗	$g(0,4)$

t	0,1		0,4
$h'(t)$		+	
$h(t)$	0,1	↗	$h(0,4)$

En déduire le signe de $g(t)$ et celui de $h(t)$ sur [0,1; 0,4]. Justifier dans chaque cas la méthode utilisée.

b) En posant $t = e^x$, montrer que, pour tout x élément de l'intervalle [-2 ; -1], on a :

$$e^x - 0{,}47\, e^{2x} \geq ln(1 + e^x) \geq e^x - 0{,}39\, e^{2x}$$

2° On pose $\mathrm{I} = \int_{-2}^{-1} ln\left(1 + e^x\right) dx$

a) En utilisant une intégration par parties, calculer en fonction de I l'intégrale :

$$\mathrm{J} = \int_{-2}^{-1} x \cdot \frac{e^x}{e^x + 1} dx$$

b) Expliquer comment on peut déduire de l'encadrement obtenu à la question III 1° b) un encadrement de l'intégrale I.
En déduire une valeur approchée à 10^{-3} près de I.

c) Donner une valeur approchée à 10^{-3} près de J.

3. Bâtiment - 90

Fonctions d'une variable réelle 1 ; calcul différentiel et intégral 2 (TP1 - TP2 - TP6)

Le but de l'exercice est de trouver un encadrement de l'intégrale :

$$I = \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}\, dx$$

1° Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie sur $[-1; 1]$ par : $f(x) = e^{-\frac{1}{2}x^2}$.

a) Vérifier que f est paire.

b Etudier les variations de f

c) Construire la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (unité graphique : 5 cm sur chaque axe)

2° Donner à l'aide du graphique précédent une interprétation de l'intégrale

$$J = \int_{-1}^{1} e^{-\frac{1}{2}x^2}\, dx$$

Quelle propriété de f permet de déduire $J = 2\int_{0}^{1} e^{-\frac{1}{2}x^2}\, dx$?

3° Du développement limité de e^t qui figure dans le formulaire, déduire les développements limités à l'ordre 6 de f en 0.
On note $g(x) + x^6\,\varepsilon(x)$, avec $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$, le développement limité de f à l'ordre 6 en 0
et $h(x) + x^4\,\varepsilon(x)$, avec $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$, le développement limité de f à l'ordre 4 en 0

4° On admet que, pour tout x de l'intervalle $[0; 1]$

$$g(x) \le e^{-\frac{1}{2}x^2} \le h(x)$$

En déduire un encadrement de $\int_{0}^{1} e^{-\frac{1}{2}x^2}\, dx$,

puis de $\int_{-1}^{1} e^{-\frac{1}{2}x^2}\, dx$,

et enfin de $\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}\, dx$.

5° En utilisant une table de la loi normale, en probabilité on obtient :

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}\, dx \approx 0{,}6826$$

Vérifier que cette valeur est compatible avec l'encadrement trouvé au 4°.

4. Froid et climatisation - 87

Fonctions d'une variable réelle 1 ; calcul différentiel et intégral 1 (TP1 - TP4)

1° a étant un nombre réel fixé, on considère les fonctions h et H définies sur $]-a ; +\infty[$ par :

$$h(x) = \ln(x+a) \text{ et } H(x) = (x+a)\ln(x+a) - x$$

Montrer que H est une primitive de h.

2° Tracer sans étude préalable dans un même repère cartésien, les courbes (γ) et (γ') d'équations respectives $y = e^{-x}$ et $y = -x - 1$

Utiliser ce schéma pour déterminer l'ensemble de la fonction f telle que :

$$f(x) = ln\left(e^{-x} + x + 1\right)$$

3° Etudier la fonction f.

On appelle (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormal (O; $\vec{i}$, $\vec{j}$), l'unité graphique étant 1cm. (On ne demande pas l'étude des branches infinies).

Tracer (C).

4° Soit S le domaine plan limité par (C) , les axes de coordonnées et la droite Δ d'équation $x = 3$.

a) Dans l'intervalle E = [0; 3], montrer que :

$$ln\left(x + 1 + e^{-x}\right) \leq f(x) \leq ln(x + 2).$$

Calculer les intégrales

$$\mathrm{I} = \int_0^3 ln\left(x + 1 + e^{-x}\right)dx \text{ et } \mathrm{J} = \int_0^3 ln(x + 2)dx.$$

En déduire un encadrement de l'aire A de S.

On donnera les résultats avec deux chiffres significatifs.

b) On partage E en 6 intervalles de même longueur. Déterminer une valeur approchée de A par la méthode des trapèzes.

Faire figurer le détail des calculs.

NB : tous les calculs seront indiqués sur la copie.

5. Comptabilité et gestion - 88

Analyse des phénomènes exponentiels (TP1) ; calcul différentiel et intégral 2 (TP1 - TP2 - TP3)

Soit la fonction numérique définie sur]0; + ∞ [par

$$f(x) = x + ln\left(\frac{x}{x+1}\right)$$

On désigne par C la courbe représentative de f dans un repère orthonormal (O; $\vec{i}$, $\vec{j}$). (unité graphique : 2cm)

1° Etudier le sens de variation de f et dresser son tableau de variation.

2° a) Prouver que la droite D d'équation $y = x$ est une asymptote de la courbe C.

b) Déterminer la limite de f en 0

c) Tracer, sur un même graphique, la droite D et la courbe C (utiliser une feuille de papier millimétré)

3° Soit g et h les fonctions numériques définies sur]0; +∞[par

$$g(x) = x + \frac{2}{x} \text{ et } h(x) = g(x) - f(x)$$

Etudier le sens de variation de h et dresser son tableau de variation(on ne demande pas les limites de f aux bornes de l'ensemble de définition)

4° a) Vérifier que $0 \leq h(3) \leq \frac{1}{10}$,

puis déduire de la question 3° que, pour tout nombre réel $x \geq 3$ on a :

$$0 \leq h(x) \leq \frac{1}{10}$$

En conclure que $\int_3^4 g(x)dx - \frac{1}{10} \leq \int_3^4 f(x)dx \leq \int_3^4 g(x)dx$

b) Calculer $\int_3^4 g(x)dx$

c) Déduire des questions 4° a) et 4° b) un encadrement de l'aire, en cm^2, du domaine plan limité par la courbe C, l'axe des abscisses, la droite d'équation $x = 3$ et la droite d'équation $x = 4$.

6. Maintenance - 88

Calcul différentiel et intégral 1 (TP4)

Soit $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}$. Le but de l'exercice est de calculer une valeur approchée de A = $\int_0^1 f(x)dx$.

1° Calculer $f'(x)$; en déduire le sens de variation de f sur [0; 1].
Soient $x_0 = 0$; $x_1 = 0{,}2$; $x_2 = 0{,}4$; $x_3 = 0{,}6$; $x_4 = 0{,}8$; $x_5 = 1$.Calculer $y_0 = f(x_0)$,y_1 ,y_2, y_3, y_4 ,y_5.
Construire les points M_0 ,M_1, ...M_5 de coordonnées (x_0 ; y_0).........(x_5 ; y_5) et en déduire l'allure de la courbe (C) représentative de $y = f(x)$.
On prendra comme unités : 20 cm sur Ox et 40 cm sur Oy.

2° Soit H_0, H_1 ,..........., H_5 les projections orthogonales de M_0, M_1, ...M_5 sur Ox.
Montrer que l'on peut, à l'aide des 5 trapèzes : (H_0 H_1 M_1 M_0), (H_1 H_2 M_2 M_1),.........,(H_4 H_5 M_5 M_4) donner une valeur approchée B de l'intégrale A = $\int_0^1 f(x)dx$.
Calculer une valeur approchée décimale de B (on rappelle que l'aire d'un rectangle est égale à la demi-somme des bases multipliée par la hauteur).

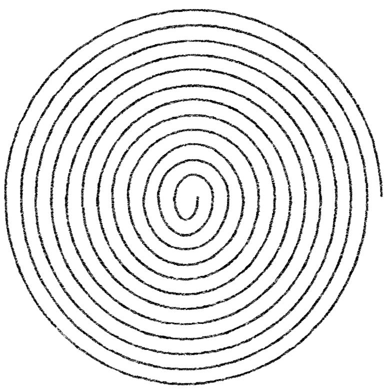
3° On admettra que l'erreur commise $|A - B|$ a pour majorant E = $\frac{M}{12n^2}$ où M est le majorant de $|f''(x)|$ sur [0; 1] et n le nombre de trapèzes. On admet que l'on peut prendre M = $\frac{1}{2}$.
Calculer le majorant E de l'erreur commise. En déduire un intervalle dans lequel se trouve A.

7. Fabrication textile - 90

Calcul différentiel et intégral 1 (TP1 - TP2)

A - PREMIERE PARTIE

Une pièce de tissu est enroulée sur un cylindre de diamètre d, pour former un rouleau de diamètre D. Soit a, l'épaisseur de tissu. Le bord de cette pièce de tissu représente une spirale d'Archimède (cf. figure) de représentation paramétrique, dans un repère orthonormal dont l'origine est sur l'axe du cylindre :



$$\begin{cases} x(t) = \frac{a}{2\pi} t \cos t \\ y(t) = \frac{a}{2\pi} t \sin t \end{cases}$$

1° Calculer la distance qui sépare le point M de paramètre t du point M' de paramètre $t + 2\pi$. Expliquer ce résultat.

2° La longueur L de tissu entre les points M_1 paramètre t_1 et M_2 de paramètre t_2 est donnée par l'intégrale :

$$\int_{t_1}^{t_2} \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}\, dt$$

Calculer $[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2$ et montrer que $L = \frac{a}{2\pi} \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{1+t^2}\, dt$

B) DEUXIEME PARTIE

On se propose de trouver une approximation de L. On a désormais : $t_1 = \frac{\pi d}{a}$ et $t_2 = \frac{\pi D}{a}$

1° Calculer $\ell = \frac{a}{2\pi}\int_{t_1}^{t_2} t\,dt$ en fonction de a, d et D.

2° Résoudre l'équation en x : $\frac{1}{4\pi} ln\, x = 1$.

Calculer $\frac{a}{2\pi}\int_{t_1}^{t_2} \frac{dt}{t}$ en fonction de a , d et D

En déduire que si $D < 1$ m et $d = 12$ cm , alors $0 < \frac{a}{2\pi}\int_{t_1}^{t_2} \frac{dt}{t} < a$

3° Montrer que pour tout t, $t > 0$

a) $0 < t < \sqrt{1+t^2}$

b) $\sqrt{1+t^2} - t = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}+t}$

En déduire que : $0 < \sqrt{1+t^2} - t < \frac{1}{2t}$

Justifier alors que :

$$0 < \frac{a}{2\pi}\int_{t_1}^{t_2} \sqrt{1+t^2}\,dt - \frac{a}{2\pi}\int_{t_1}^{t_2} t\,dt < \frac{a}{2\pi}\int_{t_1}^{t_2} \frac{dt}{2t}$$

4° En déduire que, si $D < 1$m et $d = 12$ cm, $0 < L - \ell < a$ et que :

$$\frac{D^2 - d^2}{4a}\pi < L < \frac{D^2 - d^2}{4a}\pi + a$$

C) APPLICATION

a) Calculer la longueur, en mètres, d'une pièce de tissu formant un rouleau de 80 cm de diamètre, enroulée sur un cylindre de 12cm de diamètre sachant que l'épaisseur du tissu est de 0,2 cm.

b) Est-il possible d'enrouler une pièce de 100 m de moquette, de 0,5 cm d'épaisseur, sur un cylindre de 12 cm de diamètre, sachant que le diamètre maximum du rouleau ne peut, pour des raisons de stockage, dépasser 1m ?

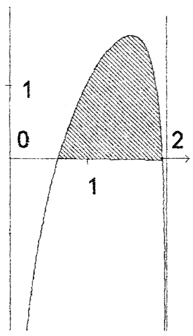
8. Microtechnique - 94

Calcul différentiel et intégral 2 (TP1 - TP3 - TP5 - TP6 - TP8) ; fonctions d'une variable réelle 1.

Soit f la fonction numérique de la variable réelle x, définie sur l'intervalle $J =]0;2[$ par :

$$f(x) = x + 2\,ln\,x + ln(2-x),$$

où ln désigne la fonction logarithme népérien.



La courbe (Γ) dessinée ci-contre est la représentation graphique de la fonction f dans le repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$, (unité graphique : 1 cm).
Le but de l'exercice est de calculer l'aire de la partie hachurée.

1° Détermination d'une valeur approchée des solutions de l'équation $f(x) = 0$.

a) Combien de solutions réelles l'équation $f(x) = 0$ admet-elle sur]0, 2[.
On justifiera la réponse à l'aide de la représentation graphique.

b) Déterminer une valeur approchée à 10^{-3} près par défaut de $f(0{,}6)$ et de $f(0{,}7)$.
Que peut-on en déduire ?

c) Montrer que $f'(x) = \dfrac{x^2 + x - 4}{x(x-2)}$.

d) On appelle A le point de la courbe (Γ) d'abscisse 0,6.
Soit (T) la droite tangente en A à la courbe (Γ).
Etablir une équation de la droite (T) de la forme $y = ax + b$ dans laquelle les coefficients a et b seront exprimés à l'aide des nombres $f(0{,}6)$ et $f(0{,}7)$.
Déterminer la valeur approchée décimale α, arrondie à 10^{-3} près par excès, de l'abscisse du point d'intersection de (T) avec l'axe des abscisses.

e) Soit x_0 et x_1 $(x_0 < x_1)$ les solutions.
Montrer que α est une valeur approchée, à 10^{-3} près, de la plus petite solution x_0 de l'équation $f(x) = 0$.
De même, montrer que le réel $\beta = 1{,}964$ est, à 10^{-3} près, une valeur approchée de l'autre solution x_1.

2° Calcul de l'aire

Pour la suite du problème, on prendra $x_0 = 0{,}624$ et $x_1 = 1{,}964$.

a) Calculer, à l'aide d'une intégration par parties, une primitive de la fonction h, définie sur J par :
$$h : x \mapsto ln(x)$$

b) Vérifier que la fonction G, définie sur J par : $G(x) = (x-2)ln(2-x) - x$ est une primitive de la fonction g définie sur J par :
$$g : x \mapsto ln(2-x).$$

c) Déduire de 2° a) et 2° b) une primitive de f dans l'intervalle J.

d) En déduire une valeur approchée, à 10^{-2} près, de l'aire de la partie hachurée du plan.

9. Adjoint technique d'entreprises de travaux publics - 88

Fonction d'une variable réelle 1 ; calcul différentiel et intégral 2 (TP1 - TP4 - TP6 - TP8) ; configurations géométriques (TP1)

BARRAGE DE CHÛTE

Le but de cet exercice est d'analyser un solide correspondant à un ouvrage réalisé dans le domaine du génie civil et de déterminer un encadrement du volume de béton nécessaire pour le réaliser.

Les deux figures ci-dessous représentent un barrage de chute pour une vallée étroite encaissée entre des parois rocheuses.

L'épaisseur du mur du barrage est relativement faible par rapport à la hauteur aussi le barrage a-t-il été construit en courbe, la convexité étant tournée vers l'amont, pour bénéficier de l'effet de voûte.

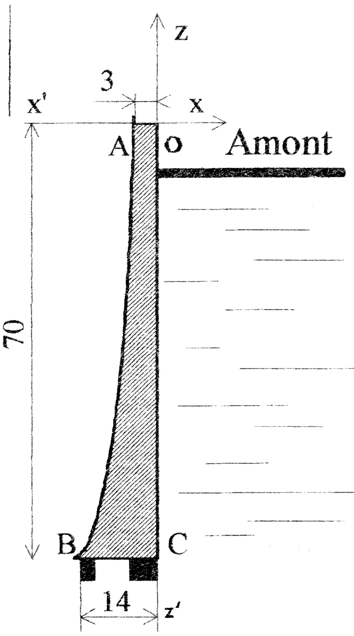


figure 1

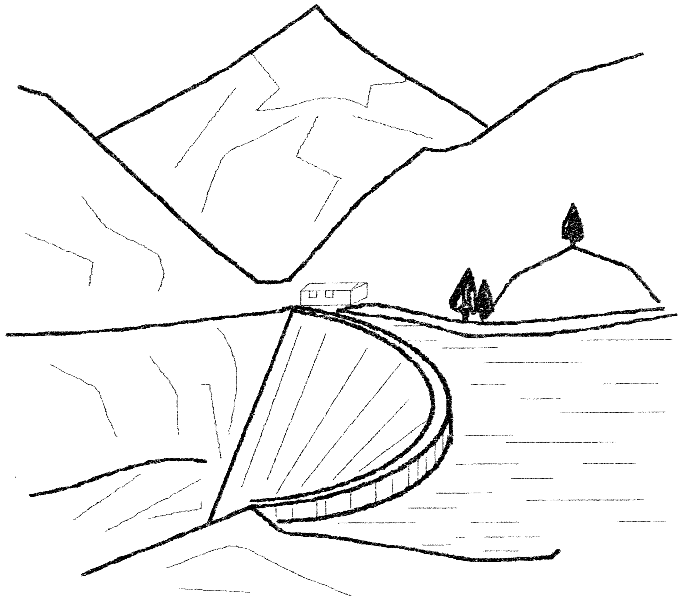


figure 2

L'espace est muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ et la figure 1 est réalisée dans le plan rapporté au repère $(O; \vec{i}, \vec{k})$ d'axes x'Ox et z'Oz; les dimensions sont exprimées en mètres.

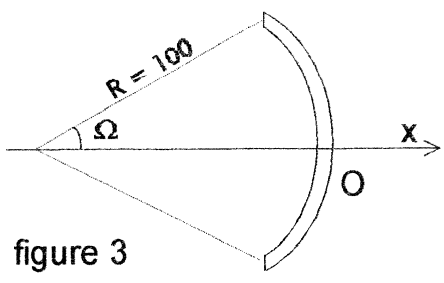


figure 3

La figure 3 est une vue de dessus montrant que le barrage a été construit en "quart de cercle". Le mur du barrage est donc un solide engendré par la rotation d'un quart de tour de la surface AOCB, représentée sur la figure 1, autour d'un axe vertical Ωz_1 parallèle à l'axe Oz.
Les deux points Ω et O sont supposés être dans un même plan muni du repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
Le rayon ΩO est 100 mètres.

A. <u>Détermination d'une équation de l'arc AB et réalisation d'une figure</u>

L'arc de courbe AB est un arc d'une hyperbole (H) dont le centre est l'origine O, dont les axes de symétrie sont x'Ox et z'Oz et un sommet A.

1° Montrer qu'une équation de (H) est dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{k})$:

$$\text{(E)} \qquad \frac{x^2}{9} - \frac{z^2}{235{,}83} = 1$$

où 235,83 est une valeur approchée à 10^{-2} près.

2° Utiliser l'équation et les données de la figure 1 pour construire l'arc AB de (H) dans le plan muni du repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{k})$ (unité graphique : 1 centimètre pour 5 mètres).
On placera sur la figure les points A, B, C.

3° a) Vérifier que l'arc AB est l'ensemble des points $M(x, y)$ du plan tels que :

$$\begin{cases} -14 \leq x \leq -3 \\ z = -\sqrt{235{,}83}\sqrt{\dfrac{x^2}{9} - 1} \end{cases}$$

b) Soit f la fonction définie sur $]-\infty; -3]$ par :

$$f(x) = -\sqrt{235,83}\sqrt{\frac{x^2}{9}-1}$$

α) Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty}\left(f(x) - \frac{\sqrt{235,83}}{3}x\right)$.

β) Que peut-on en déduire pour la courbe représentative de f ?

c) Construire sur le graphique du 2° la droite D d'équation $z = \frac{\sqrt{235,83}}{3}x$

d - α) Déterminer une valeur approchée, à 10^{-2} près, de l'abscisse du point I de Δ d'ordonnée : - 70.

β) Déterminer une valeur approchée, à 10^{-2} près, de l'ordonnée du point J de Δ d'abscisse : -3.

γ) Déterminer une valeur approchée à 10^{-2} près de l'abscisse du point K de l'arc AB d'ordonnée -35.

δ) Placer I, J, K sur la figure.

e) Tracer avec une couleur différente de celle utilisée pour l'arc AB, les segments [A, K], [K, B] et [A, J].

B <u>Détermination d'un encadrement du volume V (en cm^3) du mur du barrage</u>

En calculant les volumes de trois troncs de cônes différents et de deux cylindres différents, tous de révolution autour de l'axe Ωz_1, donner un encadrement de V.
On justifiera cet encadrement par des considérations graphiques.
En déduire une valeur approchée du volume V.
On rappelle la formule du volume du tronc de cône : $V = \frac{\pi h}{3}\left(R^2 + r^2 + Rr\right)$.

I. Divers problèmes de synthèse

1. Maintenance et après-vente automobile - 93

Calcul différentiel et intégral 2 (TP1 - TP2 - TP4 - TP6 - TP8) ; fonction d'une variable réelle 1

On se propose d'étudier, sous une forme schématique, la régularité d'un moteur en fonction du nombre de pistons agissant sur l'arbre de ce moteur. Pour mener à bien cette étude on utilisera une fonction périodique f, de période 2π, définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $\begin{cases} f(u) = \sin u \text{ si } u \in [0\,;\,\pi] \\ f(u) = 0 \text{ si } u \in [\pi\,;\,2\pi] \end{cases}$

Partie A :

Dans cette partie on étudie un moteur actionné par quatre pistons. Les développées par chacun des quatre pistons sur l'arbre du moteur, exprimées en newton, sont données par quatre fonctions du temps : "p_1, p_2, p_3, p_4" définies par :

$$\begin{cases} p_1(t) = f(t) \quad ; \quad p_3(t) = f(t+\pi) \\ p_2(t) = f\left(t+\dfrac{\pi}{2}\right) \quad ; \quad p_4(t) = f\left(t+\dfrac{3\pi}{2}\right) \end{cases}$$

L'ensemble des quatre pistons fournit alors une résultante F telle que :

$$F(t) = p_1(t) + p_2(t) + p_3(t) + p_4(t) \quad (1)$$

1° Représenter p_1 sur $[0\,;\,4\pi[$. En déduire les représentations de p_2, p_3 et p_4 sur $[0\,;\,4\pi[$ (utiliser le document réponse - Annexe n°1).

2° Calculer $F\left(t+\dfrac{\pi}{2}\right) - F(t)$.

3° On admettra que F est périodique de période $\dfrac{\pi}{2}$.

a) Montrer que si $t \in \left[0;\dfrac{\pi}{2}\right[$ alors $F(t) = \sqrt{2}\sin\left(t+\dfrac{\pi}{4}\right)$.

b) Etudier les variations de F sur $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right[$ et dresser le tableau de ces variations.

c) Représenter F sur $[0\,;\,4\pi[$ (utiliser le document réponse - Annexe n°1).

Partie B :

On considère maintenant un moteur actionné par cinq pistons.

On pose $\begin{cases} q_1(t) = f(t) \\ q_2(t) = f\left(t+\dfrac{2\pi}{5}\right) \quad ; \quad q_4(t) = f\left(t+\dfrac{6\pi}{5}\right) \\ q_3(t) = f\left(t+\dfrac{4\pi}{5}\right) \quad ; \quad q_5(t) = f\left(t+\dfrac{8\pi}{5}\right) \end{cases}$

On pose $G(t) = q_1(t) + q_2(t) + q_3(t) + q_4(t) + q_5(t)$.

En annexe 2 vous trouverez les graphiques des fonctions : q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, sur l'intervalle [0 ; 2π] et le graphique représentant G sur [0 ; π].

Au moyen d'une lecture graphique pouvez vous donner la valeur de la période de la fonction G.

Partie C :

On étudie maintenant le taux d'irrégularité du moteur.

On appelle taux d'irrégularité de F sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right[$ le réel $T_F = \dfrac{max(F) - min(F)}{M(F)}$, où $max(F)$, $min(F)$ et $M(F)$ désignent respectivement le maximum, le minimum et la valeur moyenne de F sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right[$. On définit de même le taux T_G d'irrégularité de G sur l'intervalle $\left[0;\frac{\pi}{5}\right[$.

On rappelle que la valeur moyenne d'une fonction u, de période K, est définie par :

$$M(u) = \frac{1}{K}\int_0^K u(t)\,dt$$

1° Calculer T_F (on donnera sa valeur exacte, puis une valeur approchée à 10^{-2} près par défaut).

2° Une étude semblable montrerait que pour la fonction G (définie dans la **partie B**) :

$$T_G = \frac{\left(1 - sin\frac{2\pi}{5}\right)\pi}{10\,cos\frac{2\pi}{5}}$$

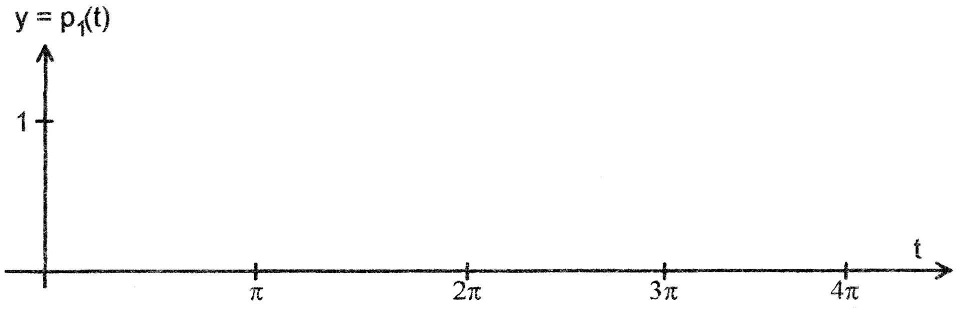
Dans le cas d'un moteur actionné par six pistons, la fonction H correspondante a un taux d'irrégularité :

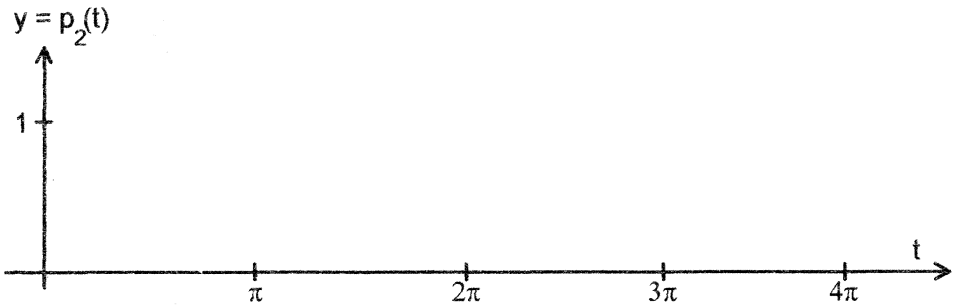
$$T_H = \frac{\left(2 - \sqrt{3}\right)\pi}{6}$$

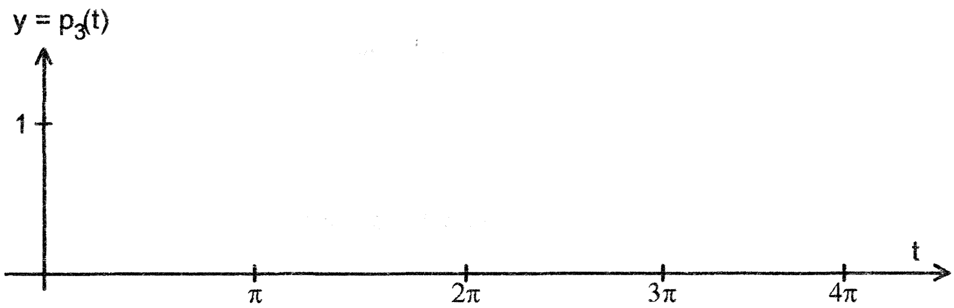
a) Comparer les réels T_F, T_G, T_H .

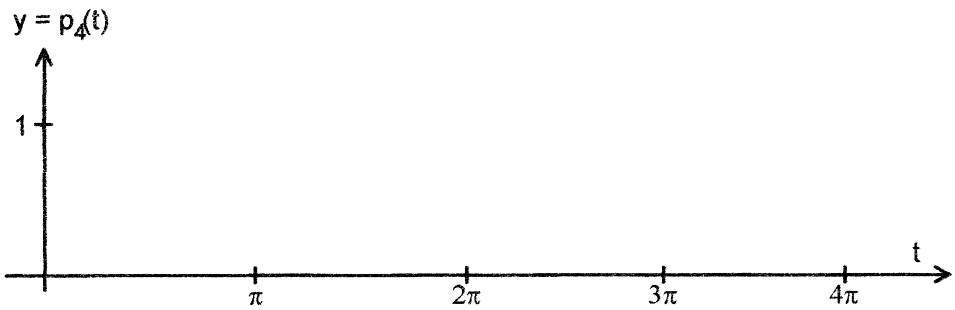
b) Que peut-on en conclure ?

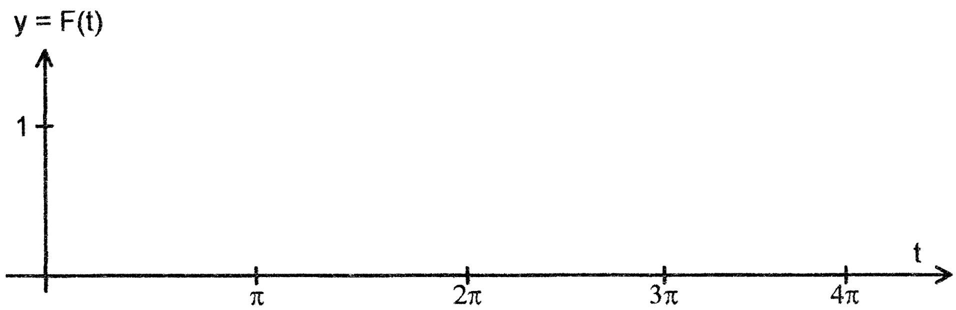
Document réponse n°1 (Annexe n°1 à rendre avec le devoir).



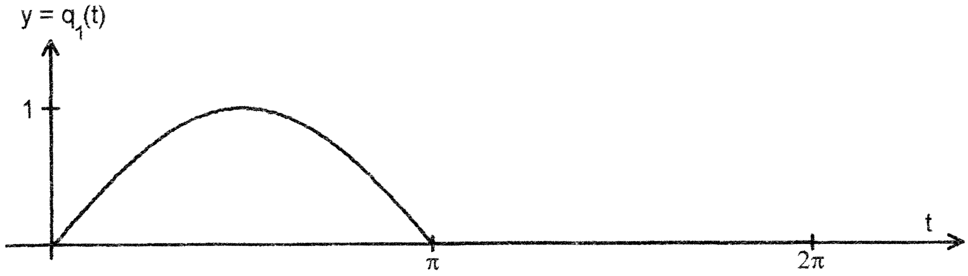


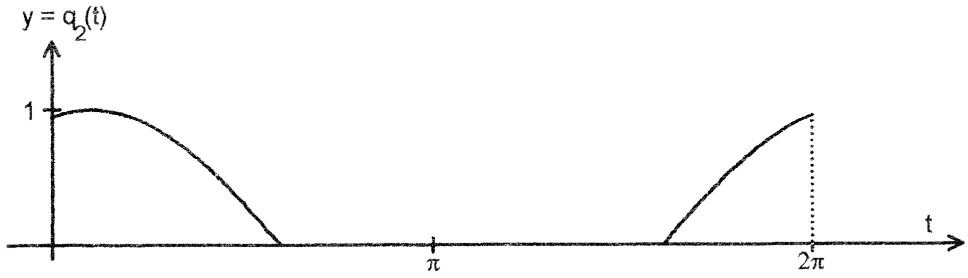


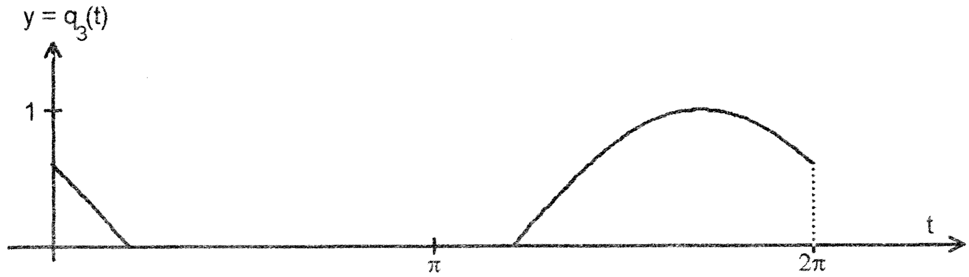


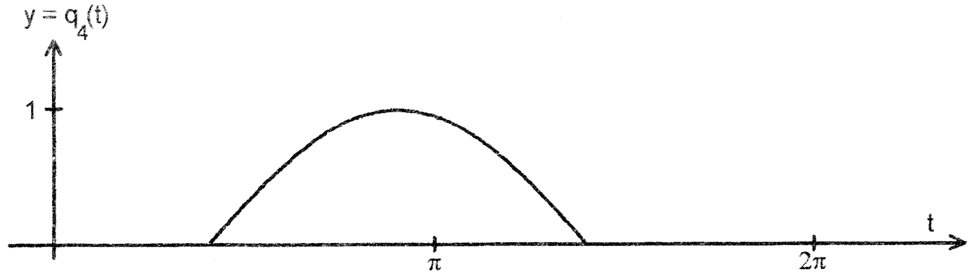


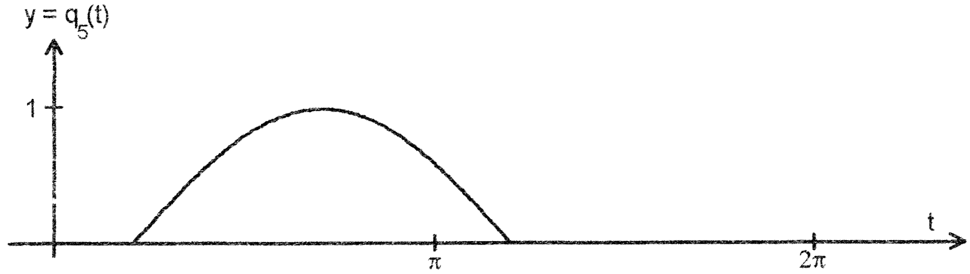
Annexe 2 (à rendre avec le devoir)

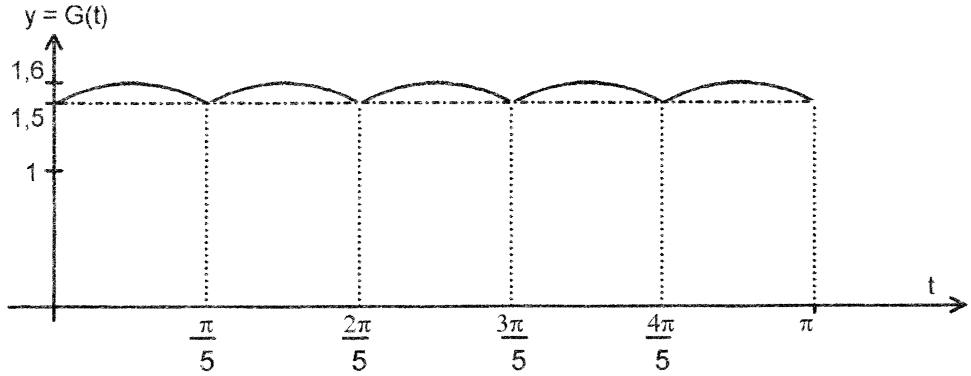












2. Forge et estampage - 92

Synthèse : Fonctions d'une variable réelle 1 - calcul différentiel et intégral 2 (TP1) - statistique descriptive (TP2)

Etude du coefficient de diffusion en fonction de la température absolue

Les parties A et B sont indépendantes.
Les unités utilisées dans ce qui suit sont : le centimètre (cm), la seconde (s), le degré Kelvin (K), le kilojoule (kJ), et la mole.
Lorsqu'on maintient en contact deux blocs de métal à haute température, les deux blocs se soudent au bout d'un certain temps, des atomes d'un bloc s'étant déplacés sur l'autre et réciproquement : on dit alors qu'il y a diffusion.

Le but de ce problème est d'étudier la variation du coefficient de diffusion D (exprimé en cm.s^{-1}) en fonction de la température T (exprimée en degrés Kelvin).

Cette variation obéit à la loi dite d'Arrhénius, $D = D_0 e^{-\frac{Q}{RT}}$. D_0, Q et R sont indépendants de T ; R est, de plus, indépendant des métaux.

A - Etude expérimentale de l'auto diffusion de l'or irradié 198 Au* dans l'or.

On pose : $X = \dfrac{10^3}{T}$ et $Y = -\log D$

où $\log$ désigne le logarithme décimal, c'est à dire que : $\log A = \dfrac{\ln A}{\ln 10}$, $\ln$ désignant le logarithme népérien, et que $10^{\log A} = A$, pour tout $A \in \mathbb{R}^+$.
On obtient expérimentalement le tableau suivant :

X	0,8	0,9	1	1,1
Y	8,31	9,25	10,16	11,06

1° Les valeurs numériques demandées dans cette question seront données directement d'après les valeurs affichées sur une calculatrice.

a) Déterminer une valeur approchée, à 10^{-3} près par défaut, du coefficient de corrélation r entre X et Y.

b) Déterminer l'équation réduite de la droite de régression de Y en X (les coefficients seront donnés à 10^{-2} près).

2° a) Déduire de la question précédente l'existence de deux réels strictement positifs α et β, que l'on déterminera avec deux chiffres significatifs, tels que : $D = \alpha e^{-\frac{\beta}{T}}$.

b) Dresser le tableau des valeurs de D (avec deux chiffres significatifs) associés aux valeurs de T suivantes : 900, 1 000, 1 100, 1 200 et 1 300.

B - Etude générale des fonctions f définies sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$f(x) = ae^{-\frac{b}{x}}, \text{ si } x \neq 0, \text{ et } f(0) = 0.$$

où a et b sont deux réels strictement positifs.
On note $\mathscr{C}$ la courbe représentant f dans un repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

1° Calculer les limites de f aux bornes de $\mathbb{R}^+$.
En déduire l'asymptote de $\mathscr{C}$.

2° Calculer les dérivées première et seconde de f.

3° Dresser le tableau de signes de f'', étudier la concavité de $\mathscr{C}$ et montrer que $\mathscr{C}$ admet un unique point d'inflexion E dont on calculera les coordonnées.

4° Déterminer une équation de la demi-tangente T_0 à $\mathscr{C}$ en O .
(on pourra utiliser le fait qu'ici, $f'(0) = \lim\limits_{x \to 0^+} f'(x)$.)

5° Dresser le tableau de variation de f.

6° Application numérique et graphique.

Dans cette question, on pose $a = 5$ et $b = 2$.

a) Donner dans ce cas les coordonnées de E, et le coefficient directeur de la tangente à $\mathscr{C}$ en E.

b) Tracer $\mathscr{C}$ (en repère orthonormal, unité graphique : 2 cm).

3. Informatique industrielle (extrait) - 91

Fonction d'une variable réelle 2 ; calcul différentiel et intégral 3 (TP1 - TP2 - TP5)

1° Etudier les variations de la fonction h définie sur $]0\,;\,4]$ par :

$$h(t) = \frac{t^2}{4} - \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\ln t$$

Tracer la courbe représentative (C) de h, dans le plan rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$, l'unité graphique étant 2 cm.

2° Déterminer le développement limité de h à l'ordre 3 au voisinage de 1(on pourra poser $t - 1 = u$).

En déduire la position de (C) par rapport à la parabole (P) d'équation $y = \dfrac{(t-1)^2}{2}$, au voisinage du point A (1 ; 0).
Construire l'arc de la parabole (P) correspondant à t élément de [0 ; 4]

3° Montrer que l'équation $h(t) = 1$ a une solution unique c dans [1 ; 4]. Donner un encadrement de c par deux entiers a_0 et b_0 tels que l'amplitude de l'intervalle soit $b_0 - a_0 = 1$.

4° On se propose d'encadrer c en utilisant la méthode de dichotomie.
Soit k la fonction définie sur $[a_0\,;\,b_0]$ par $k(t) = h(t) - 1$, c est l'unique réel de $[a_0\,;\,b_0]$ vérifiant $k(c) = 0$.

Le principe de la première itération de la méthode de dichotomie est le suivant :
On pose $t_0 = \dfrac{a_0 + b_0}{2}$; le signe de $k(t_0)$ permet de définir un nouvel encadrement $[a_1\,;b_1]$ de c, d'amplitude 0,5 tel que $[a_1\,;\,b_1] \subset [a_0\,;\,b_0]$
Dans un tableau, présenter les premiers encadrements et leurs amplitudes.

Ecrire un algorithme permettant le calcul du nombre n d'itérations, ainsi que le calcul de a_n et b_n encadrant c avec une amplitude donnée ε.

4. Photonique - 92

Fonction d'une variable réelle 2 ; calcul différentiel et intégral 3 (TP1 - TP4 - TP6) ; calcul des probabilités 1 (TP2)

La fonction d'erreur

On appelle fonction d'erreur la fonction $\theta(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^t e^{-x^2}\,dx$.

Soit C la courbe représentative de θ dans un repère orthonormal. L'unité graphique est de 10 cm en abscisse et de 2 cm en ordonnée.

Cette fonction apparaît souvent dans les calculs de perturbations de transmissions.

1° Relation avec la fonction de Gauss : $f(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2}$.

a) Combien valent $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ *et* $\int_{-\infty}^{0} f(x)\,dx$?

b) On note p(t) la fonction intégrale de la loi normale.
On a donc $p(t) = \frac{1}{2} + \int_0^t f(x)\,dx$. On pose $J = \int_0^t f(x)\,dx$.
Effectuer, dans J, le changement de variable $x = u\sqrt{2}$.
En déduire que $\theta(\alpha) = 2p(\alpha\sqrt{2}) - 1$.

c) Application : à l'aide des tables du formulaire donner les valeurs de $\theta(\alpha)$ à 10^{-2} près pour :
$\alpha = 0,1$; $\alpha = 0,5$; $\alpha = 0,8$; $\alpha = 1$.

2° Développement en série entière

a) Donner l'expression de $\theta'(t)$.

b) Développer (à l'ordre 4) e^{-t^2}, puis $\theta'(t)$, et enfin $\theta(t)$ (à l'ordre 5).

c) La série obtenue est alternée, l'erreur commise en prenant pour valeur approchée de $\theta(t)$ le développement d'ordre 4 est donc majorée par la valeur absolue du terme d'ordre 5.

Pour $t = 0,1$, $\frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(0,1 - \frac{(0,1)^3}{3}\right)$ est donc une valeur approchée, par défaut, de $\theta(0,1)$ avec une erreur dont on déterminera un majorant.

Faire le calcul et comparer avec la valeur obtenue en 1° c).

3° Tracé de la courbe entre 0 et 1.

a) Dresser le tableau de variation de la fonction $\theta : t \mapsto \theta(t)$.

b) Placer les points d'abscisses 0,1 ; 0,5 ; 0,8 ; 1.
Tracer la courbe C.

5. Industries papetières - 93

Calcul différentiel et intégral 2 (TP1 - TP3) ; fonction d'une variable réelle 1 ; équation différentielle 1 (TP1)

L'objectif des parties A et B est d'étudier les bénéfices réalisés par une entreprise. La partie C peut être traitée indépendamment des deux premières.

Partie A : Etude d'une fonction

On considère la fonction numérique f définie dans l'intervalle $I = [0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = e^{-\frac{3}{4}x+\frac{1}{2}} + \frac{3}{4}x$$

et sa courbe représentative (**C**) dans un repère orthonormal $(O\,;\,\vec{i},\,\vec{j})$ d'unité graphique 5 cm.

1° Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.

2° a) Résoudre sur l'intervalle I l'inéquation : $1 - e^{-\frac{3}{4}x+\frac{1}{2}} \geq 0$.

b) Déterminer la fonction dérivée f' de la fonction f. Etudier le signe de $f'(x)$ sur I.

c) Etablir le tableau de variation de la fonction f.

3° a) Tracer la courbe (**C**) puis la droite Δ d'équation $y = \frac{4}{5}x$; on précisera la tangente à la courbe (**C**) en son point d'abscisse 0.

b) Vérifier graphiquement que Δ et (**C**) se coupent en un seul point. Lire l'abscisse α de ce point.

Partie B : Etude des bénéfices

La fonction f représente le prix de revient des cahiers fabriqués par une entreprise. x est le nombre de centaines de cahiers fabriqués en $f(x)$ leur prix de revient en milliers de francs.

1° Un cahier est vendu 8 francs pièce. On désigne par $g(x)$ le bénéfice (en milliers de francs) réalisé par la vente de x centaines de cahiers, c'est à dire la différence entre le prix de vente de ces cahiers et leur prix de revient. Vérifier que :

$$g(x) = 0{,}05x - e^{-\frac{3}{4}x+\frac{1}{2}}.$$

2° a) Etudier la fonction g sur l'intervalle I et justifier que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique sur I.

b) Montrer que cette solution est le nombre α définie dans la partie A.
Donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-2} en précisant la méthode utilisée.

3° Quelle est la quantité minimale de cahiers que doit vendre l'entreprise pour réaliser des bénéfices ?

Partie C : Résolution d'une équation différentielle

Soit l'équation différentielle (E) : $4y' + 3y = \frac{9}{4}x + 3$.

1° Résoudre l'équation différentielle : $4y' + 3y = 0$.

2° Trouver une solution polynômiale solution de (E) et en déduire l'ensemble des solutions de (E).

3° Déterminer la solution particulière dont la courbe représentative passe par le point A de coordonnées $\left(\frac{2}{3};\frac{3}{2}\right)$

6. Géomètre Topographe - 94

Calcul différentiel et intégral 2 (TP1 - TP2) ; fonctions d'une variable réelle 1 ; courbes planes 2 (TP1).

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j})$ d'unité graphique 5 cm.
Soit la fonction g de la variable réelle t définie, sur l'ensemble des nombres réels par $g(t) = te^t$.

1° a) Déterminer $\lim\limits_{t\to+\infty} g(t)$.

b) Déterminer $\lim\limits_{t\to-\infty} g(t)$ et en déduire l'équation d'une asymptote à la courbe $\mathscr{C}$.

2° Donner le tableau de variation de g.

3° On désigne par $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction g. Calculer le rayon du cercle de courbure (Γ) à l'origine ; on utilisera la formule : $R = \dfrac{\left(1+y'^2\right)^{\frac{3}{2}}}{y''}$.

4° a) Déterminer les coordonnées du centre de courbure et en déduire l'équation du cercle de courbure (Γ).

b) Montrer que l'ordonnée d'un point du cercle (Γ) peut s'exprimer en fonction de son abscisse t par $y = 1-\sqrt{1-2t-t^2} = h(t)$ ou par $y = 1+\sqrt{1-2t-t^2}$.

c) Donner de développement limité à l'ordre 3 au voisinage de 0 de $\sqrt{1-u}$. En déduire le développement limité à l'ordre 3 au voisinage de 0 de $\sqrt{1-\left(2t+t^2\right)}$ puis celui de h.

d) Ecrire le développement limité de g à l'ordre 3 au voisinage de 0.

e) Déduire des calculs précédents la position relative en 0 du cercle (Γ) et de la courbe (E) représentative de g.

5° Dessiner la courbe (E) et le cercle (Γ).

EQUATIONS DIFFERENTIELLES

LISTE DES MODULES ET TRAVAUX PRATIQUES

EQUATIONS DIFFERENTIELLES (1)

TP1 : Résolution d'équations différentielles linéaires du premier ordre ou du second ordre.

TP2 : Exemples simples de résolution d'équation différentielles non linéaires, du premier ordre à variables séparables.

TP3 : Exemples simples de recherche de solutions approchées d'une équation différentielle du premier ordre par la méthode d'EULER.

EQUATIONS DIFFERENTIELLES (2)

TP1 : Résolution d'équations différentielles linéaires du premier ordre ou du second ordre.

TP2 : Exemples simples de résolution d'équation différentielles non linéaires, du premier ordre à variables séparables.

TP3 : Exemples d'emploi de la transformation de Laplace (ou du calcul opérationnel) pour la résolution des équations différentielles linéaires.

TP4 : Exemples d'emploi de la transformation de Laplace (ou du calcul opérationnel) pour la résolution de systèmes différentiels linéaires d'ordre 1.

TP5 : Exemples simples de recherche de solutions approchées d'une équation différentielle du premier ordre par la méthode d'EULER.

Les exercices et problèmes relevant des travaux pratiques 4 et 5 du module "équations différentielles (2)" sont regroupés dans le fascicule 2 de la brochure 27.

EQUATIONS DU PREMIER ORDRE

LES TEXTES PROPOSES

1. Equations différentielles linéaires, du premier ordre, à coefficients constants

1. Chaudronnerie et tuyauterie industrielle - 91

Equations différentielles 1 ; fonctions d'une variable réelle 1, calcul différentiel et intégral 2 (TP1 - TP6 - TP8)

1° On considère l'équation différentielle (E) : $y' - y = x - 1$ où y est une fonction de x et y' sa dérivée.

a) Montrer que la fonction h, définie par : $h(x) = -x$ est solution de (E).

b) Résoudre l'équation différentielle (E') : $y' - y = 0$.

c) En déduire les solutions de (E).

d) Déterminer la solution particulière f qui vérifie $f(1) = 0$.

2° Soit g la fonction définie de [0; 1] dans $\mathbb{R}$ par $g(x) = e^{x-1} - x$ et (C) l'arc de courbe représentant g dans un repère orthonormal $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ tel que $\|\vec{\imath}\| = \|\vec{\jmath}\| = 4$ cm.

a) A l'aide d'une étude rapide de g, représenter (C).

b) A et B représentant les points de (C) d'abscisses respectives 0 et 1, calculer en cm^2 l'aire du domaine fermé (D) limité par l'arc (C) et les segments [OA] et [OB].

2. Etude et économie de la construction - 89

Equations différentielles 1 ; fonctions d'une variable réelle 1, calcul différentiel et intégral 2 (TP1 - TP6 - TP8) ; suites géométriques

I - Soit l'équation différentielle : $10y' - y = -110 + 3x$ (1)

1° Résoudre l'équation : $10y' - y = 0$ (2)

2° Trouver une solution particulière y_0 de l'équation (1)

3° Trouver la solution générale de l'équation (1).

II - Déterminer la solution de (1) vérifiant $y(0) = 100$.

III - Le prix d'un produit, sur une période de cinq années se compose :

a) d'une partie fixe : $P_1(x) = 50$.

b) d'une partie «linéaire» : $P_2(x) = 30 - 3x$.

c) d'une partie « exponentielle » $P_3(x) = 20\, e^{\frac{x}{10}}$.

Le prix du produit est ainsi défini par une fonction numérique :

$$P(x) = P_1(x) + P_2(x) + P_3(x)$$

où x est un nombre réel compris entre 0 et 5 ($x \in [0; 5]$).
Etudier les variations de P pour $x \in [0; 5]$.
Pour quelle valeur de x le prix P sera-t-il minimal ?
Tracer la courbe de $z(x) = P(x) - 100$ en repère orthonormal (on prendra 2 cm pour unité).

IV - Calculer, à 10^{-2} près la valeur moyenne $\overline{P}$ du produit : on donne $\overline{P} = \frac{1}{5}\int_0^5 P(x)dx$.

V - L'inflation annuelle prévue pendant la période de 5 ans à venir est de 2,5 %.

Soit la suite géométrique de premier terme $U_0 = 100$ et de raison $a = 1{,}025$.

Calculer (à 10^{-2} près) les termes U_1, U_2, U_3, U_4, U_5.

Le terme général de la suite est donné par la relation $U_n = U_0\, a^n$ pour tout entier n.

En déduire les variations annuelles (à 10^{-2} près) du prix P hors inflation, c'est-à-dire la valeur de $q_n = P(n) - U_n$ avec $0 \leq n \leq 5$, n entier.

3. Chaudronnerie et tuyauterie industrielle - 90

Equations différentielles 1 ; fonctions d'une variable réelle 1, calcul différentiel et intégral 2 (TP1)

1° Soit l'équation différentielle $y' - y = x^2$.
Donner la solution générale de cette équation (on pourra rechercher une solution particulière sous la forme d'un polynôme du second degré).

2° On réalise une expérience pour laquelle les conditions initiales sont : $y = 0$ pour $x = 0$.
Donner l'expression de la solution de l'équation vérifiant ces conditions. On notera f cette solution.

3° Par une étude rapide de la fonction g définie par : $g(x) = e^x - (x + 1)$
montrer que $g(x)$ est toujours positif sur $\mathbb{R}^+$.

4° Etudier la fonction f sur $\mathbb{R}^+$.
On notera (C) la courbe représentant f sur $\mathbb{R}^+$ dans un repère orthonormal $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.
(On prendra $\|\vec{\imath}\| = 4$ cm et $\|\vec{\jmath}\| = 2$ cm)

4. Informatique de gestion - 92

Equations différentielles 1 (TP1) ; fonctions d'une variable réelle 1 ; calcul différentiel et intégral 2 (TP1 - TP2)

Cet exercice a pour but : dans la partie II, l'étude d'une fonction solution d'une équation différentielle; dans la partie III, la détermination d'une approximation locale de cette fonction.
Les parties I, II et III peuvent se traiter indépendamment l'une de l'autre.

Partie I

On veut résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle :

$$(1) \qquad y' - 2y = -2x^2 - 2x$$

c'est-à-dire que l'on cherche les fonctions y de la variable réelle x, définies et dérivables sur $\mathbb{R}$, et telles que, pour tout réel x, on ait :

$$y'(x) - 2y(x) = -2x^2 - 2x$$

1° a) Vérifier que la fonction φ définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(x) = (x + 1)^2$ est une solution particulière de (1).

b) Déterminer la solution générale de l'équation (1).

2° Déterminer la solution particulière de l'équation (1) qui s'annule pour $x = 0$.

Partie II

1° On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x + 1 - e^{2x}.$$

On donne le tableau de variation de f' :

x	$-\infty$		α		$-\frac{1}{2}\ln 2$		0		$+\infty$
$f'(x)$			$+$		0		$-$		
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	M	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

avec $-0{,}80 < \alpha < -0{,}79$

Déterminer, selon les valeurs de x, le signe de $f(x)$.

2° Soit la fonction numérique g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = (x+1)^2 - e^{2x}$$

a) Déterminer la limite de g en $-\infty$.
On admet que $\lim\limits_{+\infty} g = -\infty$.

b) Etudier les variations de g et établir son tableau de variations.

c) Tracer la courbe C représentative de g, dans le plan rapporté à un repère orthonormal (unité graphique : 4 cm).

Partie III

1° a) Donner le développement limité à l'ordre 3, au voisinage de 0, de la fonction $x \mapsto e^{2x}$.

b) En déduire le développement limité à l'ordre 3, au voisinage de 0, de la fonction g.

2° On considère les fonctions h et k, définies sur $\mathrm{I} = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ par :

$$h(x) = -x^2 - \frac{4}{3}x^3$$

$$k(x) = g(x) - h(x) = \frac{4}{3}x^3 + 2x^2 + 2x + 1 - e^{2x}.$$

On désigne par k' et k'' les fonctions dérivées première et seconde de la fonction k.

a) Calculer $k'(x)$ et $k''(x)$ en fonction de x.

b) On admet que pour tout x réel non nul, le réel $2x + 1 - e^{2x}$ est strictement négatif.
Etudier les variations de k' sur I. En déduire le signe de k' sur I, puis les variations de k sur I.

c) En déduire que pour tout x de I, on a : $-0{,}052 \leq k(x) \leq 0$

d) La fonction h est une fonction polynôme qui approche la fonction g sur l'intervalle I.
Justifier que la fonction h majore la fonction g sur I.
Donner un majorant de l'erreur commise en remplaçant $g(x)$ par $h(x)$ sur I.

5. Microtechnique - 90

Equations différentielles 1 ; fonctions d'une variable réelle 1, calcul différentiel et intégral 2 (TP1)

Les questions 2° et 3° sont indépendantes de la question 1°.

1° Soit (E) l'équation différentielle :

$$y'(x) - y(x) = x^2 - x - 1$$

dans laquelle y est une fonction, dérivable sur $\mathbb{R}$, de la variable x et y' sa fonction dérivée.

a) Déterminer une solution particulière de (E) sous forme d'un polynôme.

b) Trouver la solution générale de l'équation (E).

c) Quelle est la solution de (E) vérifiant la condition $y(0) = 1$?

2° Soit la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = e^x - x^2 - x$.

a) Déterminer les fonctions dérivées première et seconde : f' et f''.
En déduire le tableau de variation de f'. On précisera les limites de f' en $+\infty$ et en $-\infty$.
En déduire que l'équation $f'(x) = 0$ a deux solutions :
l'une inférieure à $\ln 2$, et l'autre, notée x_0, supérieure à $\ln 2$.

b) Montrer que $f(x_0) = -x_0^2 + x_0 + 1$.

c) Construire, dans un plan rapporté à un repère orthonormal (unité de longueur : 2 cm), la courbe C et la droite D d'équations respectives :

$$y = e^x \qquad \text{et } y = 2x + 1$$

Déduire de 2° a) que C et D ont deux points communs.
Quelle est la plus petite des solutions de l'équation $f'(x) = 0$?

d) Montrer qu'une valeur approchée à 0,01 près, de x_0 est $\alpha = 1{,}25$.

3° a) Etudier les variations de f.
Calculer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

b) Tracer, sur un second graphique (repère orthonormal - unité de longueur : 2 cm) :

- la parabole P d'équation : $y = -x^2 - x$.
- la courbe Γ représentant la fonction f.

(On prendra pour valeur approchée de $f(x_0)$, la valeur approchée de $f(\alpha)$ à 0,1 près)
Que peut-on dire des courbes P et Γ, quand x tend vers $+\infty$.

6. Microtechnique - 93

Equations différentielles 1 (TP1) ; calcul différentiel et intégral 2 (TP1) ; fonction d'une variable réelle 1

Les parties A et B sont indépendantes

Partie A :

Soit (E) l'équation différentielle $y' + y = \frac{1}{2}e^{-x}$ où y est une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

1° Résoudre l'équation (E_0) : $y' + y = 0$.

2° Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = \frac{x}{2}e^{-x}$.

a) Montrer que h est une solution particulière de (E).

b) En déduire la solution générale de (E).

c) Trouver la solution particulière g de (E) telle que $g(0) = \frac{1}{2}$.

Partie B :

Soit f la fonction définie sur $[0 ; +\infty[$ par $f(x) = \left(\frac{x}{2} + \frac{1}{2}\right)e^{-x}$ et sur $]-\infty ; 0[$ par $f(x) = 0$.

1° Etudier les variations de f ; déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

Dresser le tableau de variation de f et construire la courbe (C) représentant f dans un repère orthonormal (unité de longueur = 1 cm).

2° On pose : $F(t) = \int_0^t f(x)\,dx$.

a) En utilisant une intégration par parties, montrer que :

$$F(t) = 1 - \left(1 + \frac{t}{2}\right)e^{-t}$$

b) En déduire $\lim\limits_{t \to +\infty} F(t)$.

<u>Remarque</u> : f définit une densité de probabilité d'une certaine variable aléatoire T.

7. Exercice

Equations différentielles 1 (TP1) ; fonctions d'une variable réelle 1; calcul différentiel et intégral 1 (TP1 - TP4)

1° Soit (E) l'équation différentielle $y' - y = e^x - 1$.

a) Donner l'ensemble des solutions de l'équation sans second membre.

b) Montrer qu'il existe une solution particulière de (E) du type $y_0 = z(x)\,e^x$ où z est une fonction numérique définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

c) Donner alors l'expression de l'ensemble des solutions de l'équation (E).

d) Déterminer la solution particulière g vérifiant la condition initiale $g(0) = 0$.

2° Soit f la fonction numérique définie sur $[1; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{1}{x}\left(e^x - x - 1\right)$$

et C sa courbe représentative dans un repère orthonormal, unité 4 cm.

a) Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

b) Calculer la fonction dérivée f' de f et montrer que $f'(x)$ s'exprime sous la forme :

$$f'(x) = \frac{1}{x^2} g(x),\ g \text{ étant la fonction obtenue en 1° d)}$$

c) Etudier le sens de variation de g. En déduire le signe de $g(x)$ pour $x \geq 1$.

3° a) Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation.

b) Déterminer le coefficient directeur de la tangente T à C au point d'abscisse 1.

c) Construire T et C après avoir déterminé les coordonnées d'une dizaine de points dont les abscisses appartiennent à l'intervalle $[1 ; 3]$: (en particulier $1, \frac{5}{4}, \frac{3}{2}, \frac{7}{4}, 2$).

4° On se propose de déterminer une valeur approchée de l'intégrale :

$$I = \int_1^2 f(x)dx$$

a) Calculer les valeurs approchées arrondies à 10^{-4} près des nombres $f\left(\frac{n}{4}\right)$ pour n entier naturel variant de 4 à 8.

b) Calculer la somme $S = \sum_{n=4}^{8} \frac{1}{8}\left(f\left(\frac{n}{4}\right) + f\left(\frac{n+1}{4}\right)\right)$ en utilisant les valeurs calculées au a).

c) Interpréter graphiquement la somme S comme somme d'aires de trapèzes que l'on représentera.

d) En déduire une valeur approchée de I à 10^{-2} près.

8. Batiment - 91

Equations différentielles 1 (TP1) ; fonctions d'une variable réelle 1 ; calcul différentiel et intégral 2 (TP1 - TP6 - TP8)

PARTIE A

Soit (E) l'équation différentielle $y' + y = 1 - e^{-x}$ où l'inconnue y est une fonction de la variable réelle x, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

1° Résoudre l'équation différentielle (E_1) : $y' + y = 0$.

2° Déterminer une fonction numérique U, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que la fonction définie par :

$$x \mapsto y_0 = U(x)\, e^{-x}$$

soit solution de (E).

3° Quel est l'ensemble des solutions de (E).

4° Déterminer la solution particulière g de (E) vérifiant la condition initiale $g'(0) = 0$.

PARTIE B

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 1 - (x + 1)e^{-x}$ et (C) sa courbe représentative dans le plan muni du repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$, unité 2 cm.

1° Déterminer la limite de g en $-\infty$ et en $+\infty$. En déduire l'existence d'une asymptote Δ pour (C).

2° Etudier les variations de g.

3° Construire la droite Δ et la courbe (C), après avoir déterminé les coordonnées d'une dizaine de ses points à l'aide d'une calculatrice programmable.

4° a) A l'aide d'une intégration par parties, calculer l'intégrale : $I = \int_{-1}^{2} (x+1)e^{-x} dx$.

b) En déduire l'aire **A**, en cm^2, de la partie du plan limité par (C), D et la droite d'équation $x = 2$.

c) Donner un encadrement de **A** d'amplitude 10^{-2}.

9. Etude et réalisation d'outillages de mise en forme des materiaux -93

Calcul différentiel et intégral 2 (TP1 - TP4 - TP8) ; fonction d'une variable réelle 1

1° Question préliminaire :

Soit la fonction F, définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = (x-1)e^{x}$. Calculer la dérivée de cette fonction. En déduire la valeur de l'intégrale $I = \int_0^1 xe^{x}\,dx$.

2° a) Résoudre l'équation différentielle : $y' + y = 0$.

b) Montrer que F est une solution particulière de l'équation différentielle (E) :

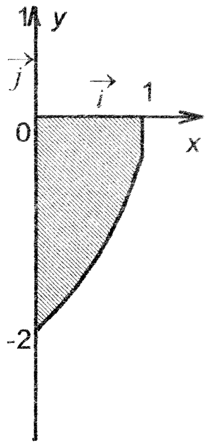
$$y' + y = (2x-1)e^{x}.$$

c) Déduire des résultats précédents les solutions de l'équation (E).

3° Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = xe^{x} - e^{x} - e^{-x} = (x-1)e^{x} - e^{-x}$.

a) Vérifier que h est une solution de (E).

b) Etudier les variations de h sur [0 ; 1]. Etablir le tableau de variation.
En déduire que h est négative sur [0 ; 1].



c) Calculer $\int_0^1 h(x)\,dx$.

d) Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ (unité graphique :1 cm), on considère l'ensemble (D) des points M(x ; y) tels que :

$0 \leq x \leq 1$ et $h(x) \leq y \leq 0$ représenté ci-contre.

Calculer la valeur approchée au mm^2 près par défaut de l'aire de (D).

2. Equations linéaires à coefficients non constants sans second membre

1. Etude et économie de la construction (extrait) - 90

Equations différentielles 1 (TP1)

Dans cette question, on se propose de résoudre sur l'intervalle $]0; +\infty[$ l'équation différentielle du premier ordre :

$$(E_1) \quad : \quad t\,x' - 2x = 0$$

où x désigne une fonction inconnue de la variable réelle strictement positive t.

1° Déterminer sur l'intervalle $]0; +\infty[$ une primitive de la fonction f définie, pour $t > 0$, par $f(t) = \frac{2}{t}$.

2° Résoudre l'équation différentielle (E_1).

3° Déterminer la solution de (E_1) vérifiant la condition : $x = 1$ pour $t = 1$.

2. Exploitation des véhicules à moteur - 90

Equations différentielles 1 (TP1)

Soit (E) l'équation différentielle : $xy' \ln x = (\ln x + 2)\,y$ où y est une fonction de x définie sur $]1; +\infty[$.

1° Calculer, sur l'intervalle $]1; +\infty[$, une primitive de la fonction h définie par :

$$h(x) = \frac{1}{x \ln x} \quad (\text{avec } x > 1)$$

en remarquant que cette fonction est de la forme $\frac{u'(x)}{u(x)}$.

2° Résoudre l'équation différentielle (E). Vérifier que la fonction f définie par $f(x) = x\,(\ln x)^2$, pour x variant dans l'intervalle $]1; +\infty[$, est une solution particulière de cette équation.

3. Fonderie en moules métalliques - 85

Equations différentielles 1 (TP1) ; calcul différentiel et intégral 2 (TP5)

1° Résoudre, sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$, l'équation différentielle du premier ordre : $(e^x - 1)y' + y = 0$.
Pour l'intégration, on pourra poser $u = e^x - 1$ et utiliser une identité de la forme :

$$\frac{1}{(u+1)u} = \frac{A}{u+1} + \frac{B}{u}.$$

2° Déterminer la solution particulière y_1 de l'équation différentielle, qui prend la valeur 2 pour $x = \ln 2$, ($\ln$ est le logarithme népérien).

3. Equations linéaires à coefficients non constants avec second membre

1. Moteurs à combustion interne (extrait) - 91

Equations différentielles 1 (TP1)

Une fonction $t \mapsto x(t)$ vérifie, pour tout t de l'intervalle $]0; \pi[$ l'équation différentielle :

$$x'(t)\ \sin t - x(t)\ \cos t = -\cos^2 t$$

Résoudre cette équation différentielle sur l'intervalle $]0; \pi[$ et déterminer la solution $t \mapsto x(t)$ vérifiant la condition :

$$x\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$$

Calculer $x(0)$ et $x(\pi)$.

2. Chaudronnerie et tuyauterie industrielle - 89

Equations différentielles 1 (TP1) , calcul différentiel et intégral (TP1).

1° A l'aide d'une intégration par parties, déterminer les fonctions primitives F de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x \cos x.$$

2° Déterminer toutes les fonctions y de la variable x, définies sur $\mathbb{R}^{*+}$, qui vérifient l'équation différentielle :

$$x\,y' + y = 0$$

où y' désigne la dérivée première de y.

3° Soit l'équation différentielle : (E) $\quad x\,y' + y = x \cos x$.
Déduire de la première question une solution particulière de l'équation (E) que l'on cherchera sous la forme : $y_0 = \dfrac{K(x)}{x}$ où K est une fonction à déterminer.

4° Déduire des questions précédentes la solution g de l'équation différentielle (E), définie sur $\mathbb{R}^{*+}$, telle que $g(\pi) = 0$.

3. Industries céramiques - 87

Equations différentielles 1 (TP1) ; calcul différentiel et intégral 2 (TP2)

1° Résoudre l'équation différentielle du premier ordre :

$$y' + xy = 0$$

2° Résoudre l'équation différentielle :

$$y' + xy = e^{-\frac{x^2}{2}}$$

On pourra poser $y = K(x)\ e^{-\frac{x^2}{2}}$

3° Calculer $I = \displaystyle\int_0^1 x\,e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx$.

4. Industries céramiques - 85

Equations différentielles 1 (TP1) ; calcul différentiel et intégral 2 (TP5)

Soit l'équation différentielle du premier ordre :

$$(E) \quad x(1+t^2) = t(1-t^2)x'$$

dans laquelle x désigne une fonction de la variable réelle t et x' sa dérivée première.

1° Vérifier que la fonction constante $x = 0$ est une solution de (E).
Déterminer sur $\mathbf{R} - \{-1\ ;\ 1\}$ les nombres réels A, B et C tels que l'on ait l'identité :

$$\frac{1+t^2}{t\left(1-t^2\right)} = \frac{A}{t} + \frac{B}{1-t} + \frac{C}{1+t}$$

et résoudre (E) sur $\mathbf{R} - \{-1\ ;\ 1\}$.

2° Déterminer la solution particulière x_1 de (E) telle que $x_1(2) = -\frac{2}{3}$.
On considère le réel α qui satisfait, pour chaque t différent de 1 et de -1, aux conditions suivantes :

$$\tan\alpha = t\ ,\ -\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}\ ,\ \begin{cases} \alpha \neq \frac{\pi}{4} \\ \alpha \neq -\frac{\pi}{4} \end{cases}$$

Exprimer simplement $x_1(t)$ en fonction de α.

5. Informatique industrielle (extrait) - 91

Equations différentielles 1 (TP2)

Soit (E) l'équation différentielle : $ty' - 2y = \ln t$ où $\ln$ est la fonction logarithme népérien.

On désigne par f une fonction de la variable réelle t, définie et dérivable sur $]0; +\infty[$, solution de (E) et vérifiant la condition $f(1) = 0$.

On se propose de déterminer f.

1° Déterminer la solution générale de l'équation différentielle : $ty' - 2y = 0$

2° Vérifier que la fonction g, définie sur $]0; +\infty[$ par : $t \mapsto g(t) = -\frac{1}{2}\ln t - \frac{1}{4}$ est une solution de l'équation (E).

3° En déduire la solution générale de l'équation (E).

4° Déterminer la fonction f.

6. Industries papetières - 88

Equations différentielles 1 (TP1) ; fonctions d'une variable réelle 1 ; calcul différentiel et intégral 1 (TP1)

1° Soit l'équation différentielle (E) : $x(1+x^2)y' - y = x^3$.

a) Montrer qu'il existe deux constantes réelles a et b telles que :

$$\forall x \in \mathbf{R}^*,\ \frac{1}{x\left(1+x^2\right)} = \frac{a}{x} + \frac{bx}{x^2+1}$$

b) Résoudre sur $\mathbf{R}^*$ l'équation différentielle (E_0) : $x(1+x^2)y' - y = 0$

c) Trouver une solution particulière de (E) de la forme $y = ax + b$, a et b étant des réels à déterminer.

d) En déduire la solution générale de (E).

e) Trouver la solution particulière f de (E) vérifiant : $f'(0) = 2$.

2° On considère la fonction f de la variable réelle x définie par :

$$f(x) = x + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

Soit (C) la représentation graphique de f dans le plan rapporté au repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

a) Etudier la parité de f. Qu'en déduit-on pour (C).

b) Etudier la fonction f sur l'intervalle $[0; +\infty[$.

c) Montrer que la droite d'équation $y = x + 1$ est asymptote à (C) quand x tend vers $+\infty$.

d) Tracer (C) ainsi que les asymptotes et la tangente au point O.
N.B. Les deux questions peuvent être traitées de façon indépendante.

7. Productique textile - 92

Equations différentielles 1 (TP1) ; fonctions d'une variable réelle 1 ; calcul différentiel et intégral 1 (TP1 - TP3)

1° On considère l'équation différentielle (E) : $xy' + (x-1)y = x^2$, où x appartient à l'intervalle $]0\,;+\infty[$.

a) Vérifier que la fonction φ définie sur $]0\,;+\infty[$ par $\varphi(x) = x$ est une solution particulière de l'équation (E).

b) Résoudre l'équation (E) dans $]0\,;+\infty[$. (On commencera par résoudre l'équation sans second membre associée).

c) Déterminer la solution particulière g de (E) définie sur $]0\,;+\infty[$ telle que : $g(1) = 1 + \frac{1}{e}$

2° Dans cette question, on considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x + xe^{-x}$.

a) Calculer $f'(x)$ et $f''(x)$. Démontrer que la fonction f' admet un minimum positif et en déduire le signe de $f'(x)$ sur $\mathbb{R}$.

b) Dresser le tableau des variations de la fonction f. (On rappelle $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$)

c) Soit C la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (unité graphique 2 cm). Démontrer que la droite D d'équation $y = x$ est asymptote à C et étudier la position de C par rapport à D quand $x \to +\infty$.
Tracer la tangente en O à la courbe C, puis la droite D et la courbe C.

d) Soit G définie sur $\mathbb{R}$ par $G(x) = (ax + b)e^{-x}$.

Déterminer les réels a et b tels que $G'(x) = xe^{-x}$. Calculer alors, en cm^2, l'aire de la portion de plan comprise entre la courbe C, la droite D et la droite d'équation $x = 2$.

8. Informatique de gestion (Nouméa - septembre 89)

Equations différentielles 1 (TP1) ; fonctions d'une variable réelle 1 ; calcul différentiel et intégral 2 (TP1 - TP6 - TP8)

Cet exercice a pour but d'étudier une solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle :

$$4xy + y' = e^{-2x^2} \qquad \text{(E)}$$

1° Résolution de l'équation différentielle

a) Vérifier que la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x\, e^{-2x^2}$ est solution de (E).

b) Déterminer la solution générale sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle : $4xy + y' = 0$

c) En déduire la solution générale de l'équation (E).

2° Etude de la fonction f définie au 1° a).

a) Etudier les variations de f et préciser ses limites aux bornes de son ensemble de définition.

b) Soit (C) la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$, (unité : 8 cm).
Déterminer une équation de la tangente T à la courbe (C) au point d'abscisse 0.
Quelle est la position de (C) par rapport à T ?

c) Tracer la droite T et la courbe (C).

3° Calcul d'aire

a) Calculer, en cm^2, l'aire du domaine plan limité par la courbe (C), les axes du repère et la droite d'équation $x = a$, a étant un réel strictement positif.

b) Déterminer la limite de cette aire quand a tend vers $+\infty$.

9. Informatique de gestion (Nouméa - septembre 91)

Equations différentielles 1 (TP1)

L'objet de cet exercice est de déterminer une primitive d'une fonction numérique à l'aide de la résolution d'une équation différentielle.

Soit f la fonction définie pour tout nombre réel x de $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = \left(1 - \frac{1}{x}\right)e^{\frac{1}{x}}$$

On note F la primitive de f sur $]0; +\infty[$ qui prend la valeur e pour $x = 1$ (e est l'exponentielle de 1).
Soient les équations différentielles :

$$(1) \quad x^2 y'(x) - y(x) = x^2 - x \qquad \text{et} \qquad (2) \quad x^2 y'(x) - y(x) = 0$$

dans lesquelles y désigne une fonction numérique définie et dérivable sur $]0; +\infty[$.

1° a) Résoudre l'équation différentielle (2).

b) Montrer que l'équation différentielle (1) admet une solution particulière y_0 définie pour tout x de $]0 ; +\infty[$ par $y_0(x) = ax + b$, où a et b sont deux constantes réelles à déterminer.

c) En déduire la solution générale de l'équation différentielle (1).

2° Soit y une solution de l'équation différentielle (1) et z la fonction définie pour tout x de $]0; +\infty[$ par :

$$z(x) = y(x)e^{\frac{1}{x}}.$$

a) Utiliser la relation $y(x) = z(x)e^{-\frac{1}{x}}$ pour calculer l'expression $y'(x)$ de la dérivée de y en fonction de $z'(x)$, $z(x)$ et x.
En déduire que pour tout x de $]0; +\infty[$, $z'(x) = f(x)$.

b) Exprimer $z(x)$ puis $y(x)$ à l'aide de $F(x)$.

3° Soit y une solution de l'équation différentielle (1). Comparer les expressions de $y(x)$ obtenues aux questions 1° c) et 2° b) et utiliser la condition $F(1) = e$ pour déterminer $F(x)$.

10. Industries graphiques - 91

Equations différentielles 1 (TP1) ; calcul différentiel et intégral 1 (TP2)

1° a) Résoudre sur $]0; +\infty[$ l'équation différentielle : $xy' + 2y = 0$.

b) Résoudre sur $]0; +\infty[$ l'équation différentielle : $xy' + 2y = \frac{x}{1+x^2}$ (E).

c) Déterminer la solution particulière f de (E) telle que $f(1) = 1 - \frac{\pi}{4}$.

2° La fonction f étant solution de (E) :

a) Montrer que $\int_1^{\sqrt{3}} xf'(x)dx = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{x}{1+x^2}dx - 2\int_1^{\sqrt{3}} xf(x)dx$.

b) En intégrant par parties, et après justification, montrer que :

$$\int_1^{\sqrt{3}} f(x)dx = \sqrt{3}f(\sqrt{3}) - f(1) - \int_1^{\sqrt{3}} xf'(x)dx$$

c) La fonction f étant la solution particulière de (E) déterminée au 1° b), déduire de 2 a) et b) que :

$$\int_1^{\sqrt{3}} f(x)dx = f(1) - \sqrt{3}f(\sqrt{3}) + \int_1^{\sqrt{3}} \frac{x}{1+x^2}dx$$

Indiquer une valeur exacte de cette intégrale, puis une valeur approchée par excès à 10^{-3}.

11. Chaudronnerie et tuyauterie industrielle -

Calcul différentiel et intégral 2 (TP1 - TP4 - TP6 - TP8) ; fonction d'une variable réelle 1 ; équations différentielles (TP1)

Partie A : Résolution d'une équation différentielle.

On considère l'équation différentielle :

$$xy' + y = 1 + \ln x \quad (1)$$

où y désigne une fonction de x définie sur $]0 ; +\infty[$.

1° Résoudre l'équation différentielle : $xy' + y = 0$.

2° Vérifier que la fonction g définie sur $]0 ; +\infty[$ par $g(x) = \ln x$ est solution de l'équation (1).

3° a) Déduire des deux questions précédentes la forme générale des solutions de l'équation (1).
b) Déterminer parmi les solutions de l'équation (1) la solution f vérifiant $f(1) = 1$.

Partie B :

Soit f la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{x} + \ln x$.

On désigne par (C) la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ d'unité graphique 2 cm.

I - Etude d'une fonction

1° a) Etudier le sens des variations de f sur $]0\,;+\infty[$.

b) Sachant que $\lim\limits_{x \to 0}(x \ln x) = 0$, étudier la limite de $f(x)$ quand x tend vers 0.
Etudier la limite de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$.

c) Etablir le tableau de variations de f.

2° a) Calculer la dérivée seconde de f et étudier son signe suivant les valeurs de x.

b) Soit I le point de (C) en lequel la dérivée seconde s'annule. Calculer les coordonnées de I et déterminer une équation de la tangente (T) à (C) au point I.

3° Tracer (T) et (C) en plaçant en particulier sur (C) les points d'abscisses 4 et 6.

II - Calcul d'aire et de volume

1° a) En utilisant une intégration par parties, calculer l'intégrale :

$$J_1 = \int_1^2 \ln x \, dx$$

b) En déduire une valeur approchée à 10^{-2} près en cm^2 de l'aire du domaine limité par la courbe (C) tracée au B - I - 3°, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = 2$.

2° a) Calculer l'intégrale :

$$J_2 = \int_{\frac{1}{2}}^{1} x^2 f'(x) \, dx$$

b) A et B étant les points de la courbe (C) d'abscisses respectives 1 et $\frac{1}{2}$, A′ et B′ étant leurs projections respectives sur l'axe des ordonnées, on appelle (D) le domaine limité par les segments [AA′], [B′A′], [B′B] et l'arc $\overset{\frown}{AB}$ de (C).
Déduire du a) ci-dessus une mesure, en cm^3, du volume engendré par la rotation du domaine (D) autour de l'axe des ordonnées.

12. Travaux publics - 90

Equations différentielles 1 (TP1) ; fonctions d'une variable réelle 1 ; calcul différentiel et intégral 2 (TP1 - TP7 - TP8)

PARTIE A

1° Résoudre sur l'intervalle $]0; +\infty[$ l'équation différentielle à variables séparables :

$$x^2 y' + y = 0$$

2° Soit (E) l'équation différentielle :

$$x^2 y' + y = x^2 e^{\frac{1}{x}}$$

Vérifier que la fonction g définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par $g(x) = x\,e^{\frac{1}{x}}$ est une solution de (E).

3° En déduire la solution générale de l'équation (E) sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.

PARTIE B

1° Soit f la fonction définie sur l'intervalle $I =]1 ; \frac{3}{2}]$ par : $f(x) = (x - 1)\, e^{\frac{1}{x}}$

et (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$; unité : 10 cm.

a) Montrer que f est dérivable sur I et que $f'(x) = \dfrac{x^2 - x + 1}{x^2} e^{\frac{1}{x}}$.

En déduire le sens de variation de f.

b) Tracer la courbe (C). On précisera les valeurs de la fonction f pour les valeurs suivantes de la variable : 1; 1,1; 1,2; 1,3; 1,4 et 1,5.
On présentera les résultats sous la forme d'un tableau dans lequel apparaîtront les valeurs approchées à 10^{-4} près par défaut des nombres demandés.

2° Soit (D) la partie du plan comprise entre (C), l'axe $(O ; \vec{i})$ et la droite d'équation : $x = \frac{3}{2}$.

Calculer par la méthode des trapèzes une valeur approchée exprimée en mm^2, de l'aire de (D); on divisera I en cinq parties égales.

13. Travaux publics - 92

Equations différentielles 1 (TP1) ; fonctions d'une variable réelle 1 ; calcul différentiel et intégral 1 (TP1 - TP7 - TP8)

Partie I

Soit l'équation différentielle :

$$(E) \qquad (1 + x^2)\, y' + xy = 2x$$

1° Déterminer les fonctions φ, définie sur $\mathbb{R}$, solutions de l'équation différentielle (E') :

$$(E') \qquad (1 + x^2)\, y' + xy = 0$$

2° a) Vérifier que l'équation (E) admet pour solution une fonction g telle que :
pour tout x réel, $g(x) = k$, k étant un nombre réel à déterminer.

b) En déduire la solution générale de l'équation différentielle (E).

c) Déterminer la fonction h, solution de (E), qui vérifie la condition : $h(0) = 0$

Partie II

On considère la fonction f, définie sur $\mathbb{R}$, par :

$$f(x) = 2 - \frac{2}{\sqrt{1 + x^2}}$$

1° a) Etudier la parité de la fonction f.

b) Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$; interpréter géométriquement le résultat obtenu.

c) Etudier les variations de f sur $[0 ; +\infty[$.

2° Tracer la courbe C représentative de la fonction f dans un repère R orthogonal d'unités graphiques : en abscisse 2 cm, en ordonnées 5 cm.

3° On note D la portion de plan, ensemble des points $M(x,y)$ vérifiant les deux conditions :

$$0 \le x \le \sqrt{3} \qquad \text{et} \qquad 0 \le y \le f(x)$$

On se propose de déterminer une valeur approchée de l'aire A de D, exprimée en unités d'aire.

a) Reproduire sur la copie et compléter le tableau suivant :

x	0	$\frac{\sqrt{3}}{5}$	$\frac{2\sqrt{3}}{5}$	$\frac{3\sqrt{3}}{5}$	$\frac{4\sqrt{3}}{5}$	$\sqrt{3}$
valeur approchée de $f(x)$ à 0,01 près par défaut						
valeur approchée de $f(x)$ à 0,01 près par excès						

b) On considère les sommes :

$$S_1 = \frac{\sqrt{3}}{5}\left(f(0)+f\left(\frac{\sqrt{3}}{5}\right)+f\left(\frac{2\sqrt{3}}{5}\right)+f\left(\frac{3\sqrt{3}}{5}\right)+f\left(\frac{4\sqrt{3}}{5}\right)\right)$$

$$S_2 = \frac{\sqrt{3}}{5}\left(f\left(\frac{\sqrt{3}}{5}\right)+f\left(\frac{2\sqrt{3}}{5}\right)+f\left(\frac{3\sqrt{3}}{5}\right)+f\left(\frac{4\sqrt{3}}{5}\right)+f\left(\sqrt{3}\right)\right)$$

Interpréter les sommes S_1 et S_2 comme sommes d'aires de rectangles que l'on représentera sur le graphique de la question Partie II - 2°.

Justifier, à l'aide de considérations géométriques, l'encadrement suivant :

$$S_1 \leq \int_0^{\sqrt{3}} f(x)dx \leq S_2$$

c) En utilisant les résultats notés dans le tableau de la question Partie II - 3° a) déterminer un encadrement de A.

14. Microtechnique - 89 (Extraits)

Equations différentielles 1 (TP1) ; fonctions d'une variable réelle 1 ; calcul différentiel et intégral 2 (TP1 - TP2)

1° Déterminer toutes les fonctions y de la variable x, définies sur $]0; +\infty[$ qui vérifient l'équation différentielle :

$$xy' - 2y = 0$$

où y' désigne la dérivée première de y.

Soit l'équation différentielle (E) : $xy' - 2y = \ln x$, définie sur $]0; +\infty[$.

On pose $g(x) = x^2 \times h(x)$. Déterminer la fonction h telle que g soit solution de l'équation différentielle (E).

Déduire de ce qui précède la solution Y de l'équation différentielle (E), définie sur $]0; +\infty[$, telle que $Y(1) = 0$.

2° Soit f la fonction numérique définie sur $]0; +\infty[$ par : $f(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{x^2-1}{2} - \ln x\right)$.

Etudier les variations de f quand x décrit $]0; +\infty[$.

3° Dans le plan rapporté au repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$ l'unité étant 2 cm, tracer très soigneusement la représentation graphique (Γ) de la fonction f.

4° En posant $u = x - 1$, donner le développement limité à l'ordre 3 de $f(x)$, au voisinage de $x = 1$.

En déduire, au voisinage de 1, la position de la courbe (Γ) par rapport à la parabole d'équation :

$$2y = (x-1)^2$$

15. Constructions métalliques - 94

Equations différentielles 1 (TP1) ; calcul différentiel et intégral 2 (TP1 - TP2 - TP3) ; fonctions d'une variable réelle 1.

Partie A :

On considère l'équation différentielle, définie sur]-1 ; +∞[:

$$(E) \quad (x+2)y' + y = \frac{1}{x+1}.$$

1° a) Intégrer l'équation : $(x+2)y' + y = 0$ sur]-1 ; +∞[.

b) Intégrer l'équation (E).

2° Déterminer la solution de (E) qui vérifie $f(0) = 0$.

Partie B :

Soit la fonction f définie sur]-1 ; +∞[par : $f(x) = \dfrac{ln(x+1)}{x+2}$.

On note **C** sa courbe représentative dans un repère orthonormal (O ; $\vec{i}$, $\vec{j}$), (unité graphique : 2 cm).

1° Calculer la dérivée f' de f.

2° Etudier les variations de la fonction g, définie sur]-1 ; +∞[par : $g(x) = \dfrac{x+2}{x+1} - ln(x+1)$.
Dresser son tableau de variation (on ne demande pas de construire la courbe représentative de g).
Montrer en particulier que g s'annule pour une seule valeur $\alpha > 0$.
Montrer que $2{,}5 \le \alpha \le 2{,}6$.
En déduire le signe de g, puis de f'.

3° Déterminer les limites de f en -1 et en +∞. En déduire la nature des branches infinies de **C**.

4° Dresser le tableau des variations de f.

5° Déterminer un développement limité d'ordre 2 de $f(x)$ au voisinage de 0.
En déduire la position de **C** par rapport à la tangente en O au voisinage de ce point.

6° Tracer la courbe C.

16. Géologie appliquée - 93

Calcul différentiel et intégral 2 (TP1 - TP2) ; équations différentielles 1 (TP1) ; fonction d'une variable réelle 1

On note I l'intervalle]0 ; 1[de $\mathbb{R}$. Soit (E) l'équation différentielle définie sur I par : $xy' + y = \dfrac{1}{1-x^2}$ dans laquelle y est une fonction numérique de la variable réelle x.

1° Résoudre (E).

2° Soit la fonction numérique f de la variable réelle x définie sur l'intervalle J =]-1 ; +1[par :

$$f(x) = \frac{1}{2x} ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \text{ si } x \neq 0 \text{ et } f(0) = 1.$$

et (C) sa courbe représentative dans le repère orthonormal R = (O ; $\vec{i}$, $\vec{j}$).
On prendra 4 cm comme unité.

a) Etudier la parité de f.

b) Donner le développement limité à l'ordre 5 au voisinage de 0 de la fonction g définie sur J par :

$$g(x) = ln(1+x) - ln(1-x).$$

En déduire le développement limité à l'ordre 4 de f en 0.

c) Montrer que f est dérivable en zéro et que la courbe représentative (C) de f est tangente à la parabole (P) d'équation : $y=1+\frac{1}{3}x^2$ au point A de coordonnées (0 ; 1) et préciser leurs positions relatives.

3° Soit h la fonction numérique de la variable réelle x définie sur I par : $h(x)=\frac{x}{1-x^2}-\frac{1}{2}ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$.
Etudier les variations de h et montrer que la fonction h ne prend que des valeurs strictement positives sur I (on ne demande pas la représentation graphique de la fonction h).

4° Calculer f' sur I et montrer que : $f'(x)=\frac{h(x)}{x^2}$.
En déduire le tableau de variation de f et construire les courbes (C) et (P).

17. Informatique de gestion - 94

Equations différentielles 1 (TP1) ; calcul différentiel et intégral 2 (TP1 - TP8) ; fonctions d'une variable réelle 1.

Les parties A, B, C sont indépendantes.

A - On considère l'équation différentielle : $xy'+y=-\frac{1}{x^2}$ (E)

où y est une fonction numérique de la variable réelle x, définie et dérivable sur]0 ; ∞[et y' sa fonction dérivée.

1° Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $xy'+y=0$.

2° a) Vérifier que la fonction g définie sur]0 ; ∞[par $g(x)=\frac{1}{x^2}$ est solution de (E).

b) Déterminer la solution générale de (E).

c) En déduire la solution particulière u de (E) telle que $u(1) = 0$.

B - Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie sur]1 ; ∞[par :

$$f(x)=\frac{1}{(ln\,x)^2}-\frac{1}{ln\,x}$$

1° Déterminer les limites de f en 1 et en $+\infty$.

2° Calculer la dérivée f' de f et montrer que $f'(x)=\frac{ln\,x-2}{x(ln\,x)^3}$.

3° Etudier les variations de f.

4° Représenter graphiquement f dans le plan rapporté à un repère orthogonal. (unités graphiques : 1 cm en abscisse et 10 cm en ordonnée).

C - 1° Soit la fonction numérique h de la variable réelle x définie sur]1 ; ∞[par :

$$h(x)=\frac{x}{ln\,x}$$

a) Calculer la dérivée h' de h.

b) Déterminer une primitive F de f sur]1 ; ∞[.

2° On désigne par v_n la valeur moyenne de f sur $\left[e^n ; e^{n+1}\right]$, c'est-à-dire le réel :

$v_n = \dfrac{1}{e^{n+1} - e^n} \displaystyle\int_{e^n}^{e^{n+1}} f(x)\,dx$, où n est un entier.

a) Calculer v_n en fonction de e et n.

b) En déduire la limite de v_n lorsque n tend vers $+\infty$.

18. Maintenance - 94

Equations différentielles 1 (TP1) ; calcul différentiel et intégral 2 (TP1 - TP3) ; calcul des probabilités 2 (TP2) .

Partie A

Soit l'équation différentielle (E) : $(1+x)y' - y = ln\left(\dfrac{1}{1+x}\right)$ où y est une fonction de la variable réelle x, définie et dérivable sur $[0, +\infty[$. (ln désigne la fonction logarithme népérien).

1° Donner la solution générale de l'équation différentielle (E') : $(1+x)y' - y = 0$.

2° Calculer la fonction f, solution particulière de l'équation (E), définie sur $[0, +\infty[$ par :

$$f(x) = ln(1+x) + C,$$

où C est une constante réelle à déterminer.

3° En déduire la solution générale de l'équation (E).

4° Calculer la fonction φ, solution de l'équation (E) vérifiant : $\varphi(0) = 0$.

Partie B

On considère une variable aléatoire X suivant une loi de Poisson de paramètre λ inconnu telle que :

$$p(X \leq 1) = 0{,}95.$$

1° Démontrer que λ est solution de l'équation : $ln(1+x) - x = ln(0{,}95)$.

2° Etudier les variations de la fonction φ définie sur $[0, +\infty[$ par : $\varphi(x) = ln(1 + x) - x$.
En déduire que l'équation du 1° admet une solution unique, λ, dans $[0, +\infty[$.
Déterminer un encadrement d'amplitude 10^{-1} de λ en indiquant la méthode utilisée (graphique à l'aide d'une calculatrice ou méthode de dichotomie).

4. Exercices à support concret : mécanique - automatique

1. Forge et estampage - 93

Analyse des phénomènes exponentiels (TP1 - TP5 - TP7)

Partie A : (Questions préliminaires)

1° Résoudre l'équation différentielle : $\frac{du}{dt}+2u=0$.

2° On considère l'équation différentielle (E): $\frac{dv}{dt}+2v=20$.

a) Déterminer une fonction constante solution de (E).

b) Résoudre (E).

Partie B :

Lors du refroidissement d'une pièce, sa température est une fonction θ du temps t, définie pour tout réel positif ou nul, et qui vérifie l'équation différentielle : $\frac{d\theta}{dt}+2\theta=20$.
La température est exprimée en degrés centigrades (°c) et le temps t en heures.

1° Déterminer $\theta(t)$ pour $t > 0$ sachant que pour $t = 0$, la température de la pièce est 410°c.

2° On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f(t) = 400e^{-2t}+10$.
On note (C) sa représentation graphique dans le plan muni d'un repère orthogonal ;
(unités graphiques : 6 cm pour une unité en abscisses et 5 cm pour cent unités en ordonnées).

a) Etudier la variation de la fonction f sur $\mathbb{R}^+$ et sa limite en $+\infty$.
Déterminer l'asymptote (D) à (C).

b) Construire (D) et (C).

3° Utiliser le graphique pour déterminer le moment où la température de la pièce est 50°c.
Retrouver ce résultat par le calcul.

Partie C :

On considère la suite de terme général $d_n = f(n)-f(n+1)$ qui représente, d'heure en heure, l'abaissement de température de la pièce.

1° a) Calculer d_0, d_1 et d_2.

b) Quelle est la limite de d_n quand n tend vers $+\infty$?

2° Déterminer l'heure à partir de laquelle on aura $d_n < 10$.

2. Productique des alliages moulés - 91

Equations différentielles 1 (TP1) ; fonctions d'une variable réelle 1.

On étudie le refroidissement d'un objet. On note $\theta(t)$ la différence, à l'instant t, entre la température de l'objet et celle du milieu ambiant.
t est exprimé en minutes et $\theta(t)$ en degrés Celsius.
L'étude du phénomène physique conduit à l'équation différentielle :

$$(E) \quad d\theta = -k\,\theta\,dt \quad (k \text{ réel positif donné}).$$

1° Résoudre l'équation différentielle (E).

2° Sachant que pour l'objet étudié $k = ln\,3$, vérifier que la solution de (E) telle que $\theta(0) = 90°C$ est la fonction définie par :

$$\theta(t) = 90\,e^{-t\,ln\,3}.$$

3° Etudier cette fonction sur $[0\,;\,+\infty[$ (sa représentation graphique n'est pas demandée).
Quelle est l'interprétation physique de $\lim\limits_{t\to+\infty} \theta(t)$?

4° La température du milieu ambiant est de 10°C.

a) Calculer $\theta(2)$. En déduire la température de l'objet après deux minutes de refroidissement.

b) On effectue un contrôle de la température de l'objet après chaque minute (le premier contrôle ayant lieu à l'instant $t = 1$). Après combien de contrôles obtiendra-t-on pour l'objet une température inférieure à 15°C ?

3. Mécanique et automatismes industriels - 88

Equations différentielles 1 (TP1) ; fonctions d'une variable réelle 1 ; calcul différentiel et intégral 2 (TP1 - TP4)

On se propose de trouver la courbe d'équilibre, qu'on appelle chaînette, d'un fil homogène pesant, de masse linéaire μ (masse par unité de longueur), de tension horizontale T_0 supposée constante en tout point du fil lorsque ce fil est fixé en deux points A et B. Cette chaînette est la courbe représentative d'une solution de l'équation différentielle (E) :

$$(E) \quad T_0 y''(x) = \mu g\sqrt{1+y'^2(x)}$$

où g est l'accélération de la pesanteur.

La première partie étudie la fonction réciproque d'une fonction hyperbolique. La deuxième partie utilise cette fonction pour déterminer les solutions de (E). La troisième partie achève la détermination de cette courbe d'équilibre.

Première partie

On définit les fonctions *sh* et *ch* par les relations :

$$sh\,x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad ch\,x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad (x \text{ étant la variable réelle})$$

1° a) Calculer les dérivées de ces fonctions *sh* et *ch*.

b) Montrer que la fonction *sh* est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Déterminer les limites de cette fonction lorsque la variable x tend vers $-\infty$ et lorsque x tend vers $+\infty$. Soit t un réel arbitraire, montrer qu'il existe un réel unique x tel que $sh\,x = t$.

2° Soit f, la fonction réelle qui associe au nombre réel t, le nombre : $f(t) = ln\left(t+\sqrt{1+t^2}\right)$.

a) Calculer la dérivée de f et en déduire la dérivée de $f(u(t))$ où u est une fonction dérivable quelconque à valeurs réelles.

b) Vérifier que, pour tout nombre réel t, $sh(f(t)) = t$.
Il en résulte, en tenant compte de la question 1° b, l'équivalence où x et t sont des réels :

$$sh\, x = t \quad \Leftrightarrow \quad x = f(t)$$

Deuxième partie : Intégration de (E)

1° Soit K un réel donné, déterminer les fonctions $x \mapsto u(x)$ qui vérifient l'équation différentielle :

$$\frac{u'(x)}{\sqrt{1+u^2(x)}} = K$$

On utilisera la question 2° a puis la question 2° b de la première partie.

2° L'équation (E) peut s'écrire, en posant $K = \frac{mg}{T_0}$: $\quad y''(x) = K\sqrt{1+y'^2(x)}$

En posant d'abord $y'(x) = u(x)$, résoudre cette équation (E), la solution générale faisant intervenir deux constantes d'intégration a et b.

Troisième partie

Soit (C) la courbe représentative de la fonction y qui associe à tout réel x le nombre

$$y(x) = \frac{1}{K} ch\,(Kx + a) + b$$

(où $K = \frac{\mu g}{T_0}$ avec $\mu = 0,5$ kg/m, $T_0 = 150$ N, $g = 9,81$ m/s^2)

On suppose que la courbe (C) passe par deux points A et B dont les coordonnées respectives sont : (50; 20) et (–50; 20).

1° Déterminer a en admettant que la relation $ch\, u = ch\, v$ n'est possible que si $u = v$ ou $u = -v$.

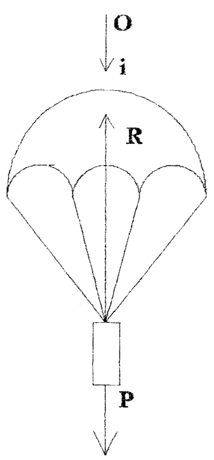
2° Déterminer une valeur décimale approchée de b à 10^{-2} près.

4. Mécanique et automatismes industriels - 91

Equations différentielles 1 (TP1) ; fonctions d'une variable réelle ; calcul différentiel et intégral 2 (TP1)

Un objet relié à un parachute se déplace sur un axe vertical $(O; \vec{i})$. Il a été largué au point O avec une vitesse initiale $\vec{V}$. On suppose que, dans les conditions de l'expérience, la résistance de l'air $\vec{R}$ est proportionnelle à la vitesse $\vec{V}$ et on note $\vec{R} = -k\vec{V}$, k étant un coefficient strictement positif.

On admettra que la norme de $\vec{V}$, que l'on notera v, est alors une fonction de la variable t ($t \in \mathbb{R}^+$) vérifiant l'équation différentielle : (1) $\quad mv' + kv = mg$



où m est la masse totale de l'objet et du parachute et g le coefficient de l'accélération de la pesanteur.

1° a) Trouver une fonction constante, solution particulière de (1).

b) Montrer que les solutions de (1) sont définies pour tout réel t positif par :

$$V(t) = Ce^{-\frac{k}{m}t} + \frac{mg}{k}$$

où C est une constante réelle dépendant des conditions de l'expérience.

2° Dans la suite du problème on prendra :
$m = 8$ kg ; $g = 10$ m/s^2 et $k = 25$ unités SI.

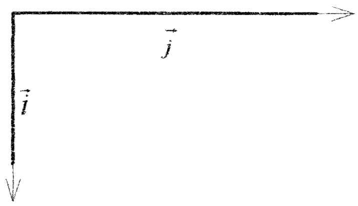
a) Donner la solution particulière de l'équation différentielle (1) correspondant à une vitesse initiale telle que $v_0 = 5$ m/s.
On appellera V_1 la fonction obtenue.

b) Donner la solution particulière de l'équation différentielle (1) correspondant à une vitesse initiale nulle.
On appellera V_2 la fonction obtenue.

c) Montrer que les fonctions V_1 et V_2 ont la même limite d lorsque t tend vers $+\infty$.

d) Donner la solution particulière de (1) correspondant à une vitesse initiale telle que $v_0 = 3{,}2$ m/s.
On appellera V_3 la fonction obtenue.

e) Tracer soigneusement les courbes C_1, C_2 et C_3 représentant les fonctions V_1, V_2 et V_3 dans un repère orthogonal $(O; \vec{i}, \vec{j})$. O et $\vec{i}$ sont un point et un vecteur tels qu'indiqués sur le schéma ci-dessous où :
$\|\vec{i}\| = 2$ cm et $\|\vec{j}\| = 4$ cm.



5. Mécanique et automatismes industriels - 94

Equations différentielles 1 (TP1) ; calcul différentiel et intégral 2 (TP1) ; fonctions d'une variable réelle 1.

On lance un container à partir d'un avion. On cherche à déterminer l'instant où la norme de la vitesse est minimale pour pouvoir déclencher l'ouverture du parachute. L'unité de temps est la seconde, l'unité de longueur est le mètre. Le centre de gravité G est repéré par rapport au repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$, l'axe $(O ; \vec{j})$ est dirigé vers le sol. A chaque instant t, le point G admet un vecteur vitesse $\vec{V}(t)$ de coordonnées $v_1(t)$ et $v_2(t)$; v_1 et v_2 sont deux fonctions du temps définies sur $[0 ; +\infty[$.
Sachant que le container est soumis à son poids et à la résistance de l'air, on établit que :

- la fonction v_1 vérifie l'équation différentielle : $v' + 0{,}2v = 0$
- la fonction v_2 vérifie l'équation différentielle : $v' + 0{,}2v = 9{,}8$.

Première question

a) Résoudre l'équation différentielle $v' + 0{,}2v = 0$.

b) Sachant de plus que pour $t = 0$, on a $v_1(0) = 100$, déterminer $v_1(t)$.

Seconde question

a) Résoudre l'équation différentielle $v' + 0{,}2v = 9{,}8$.

b) Sachant de plus que pour $t = 0$, on a $v_2\ (0) = 0$, déterminer $v_2(t)$.

Troisième question

a) Sachant que la norme du vecteur $\vec{V}(t)$, notée $\|\vec{V}(t)\|$, vérifie $\|\vec{V}(t)\|^2 = (v_1(t))^2 + (v_2(t))^2$, démontrer que l'on a :

$$\left\|\vec{V}(t)\right\|^2 = 12401\,e^{-0,4t} - 4802\,e^{-0,2t} + 2401.$$

b) Calculer $f(0)$, déterminer $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t)$.

c) Calculer $f'(t)$ et étudier les variations de la fonction f.

d) Calculer $h'(t)$ et en déduire les variations de la fonction qui à $t \in [0\,;+\infty[$ associe $h(t)=\sqrt{f(t)}$.

e) Tracer, dans un repère orthogonal, (1 cm en abscisse représente une seconde, 1 cm en ordonnée représente 10 mètres par seconde) la courbe représentative de h.

f) En déduire à 10^{-2} près par défaut l'instant t_0 pour lequel $h(t)$ est minimum.
Déterminer alors ce minimum à 10^{-2} près par défaut.

6. En assistance technique d'ingénieur - 92

Equations différentielles 2 (TP2) ; fonctions d'une variable réelle 2.

Etude de la vitesse d'un parachutiste.
Un parachutiste saute d'un avion. On suppose que son parachute s'ouvre immédiatement.
Sur l'ensemble homme et parachute, de masse totale m, s'exercent plusieurs forces:

- le poids de l'ensemble : mg (g = accélération de la pesanteur)
- la résistance de l'air : $-kv^2$ (k est un coefficient strictement positif qui dépend de la voilure du parachute, v^2 est le carré de la vitesse).
- la poussée d'Archimède de l'air qui sera considérée comme négligeable.

En écrivant la loi fondamentale de la dynamique pour le centre de gravité G de l'ensemble, on obtient l'équation différentielle :

$$mv' = mg - kv^2$$

où v est la norme du vecteur vitesse, fonction de t, et $v' = \dfrac{dv}{dt}$, $t \geq 0$.

En simplifiant, on obtient donc : $v' = g - \dfrac{k}{m}v^2$.

Dans la suite du problème, on prendra : $g = 10$; $m = 70$; $k = 28$ (en U.S.I.).

L'équation différentielle sera donc : (E) $\quad v' = 10 - 0,4v^2$.

A - 1° Démontrer que l'équation différentielle (E) peut s'écrire :

$$\frac{v'}{25 - v^2} = 0,4$$

pour tout v de l'intervalle $[0\,;5[$.

2° Déterminer deux réels a et b tels que pour tout v de l'intervalle $[0\,;5[$:

$$\frac{1}{25 - v^2} = \frac{a}{5+v} + \frac{b}{5-v}.$$

3° Intégrer l'équation différentielle. Déterminer la solution particulière $v(t)$ telle que $v(0) = 0$.

B - 1° Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ par :

$$f(t) = \frac{e^{4t} - 1}{e^{4t} + 1}$$

Etudier le sens de variation de f. Déterminer la limite de f en $+\infty$.
(On ne demande pas la représentation graphique de f).

2° Quelle serait la limite de la vitesse $v(t)$ si t tendait vers $+\infty$?

7. En assistance technique d'ingénieur - 93

Calcul différentiel et intégral 2 (TP1 - TP2 - TP3) ; fonction d'une variable réelle 2 ; équations différentielles (TP1)

Partie A

1° Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle :

$$\left(1+x^2\right)y'+3xy=0$$

2° Déterminer la solution qui vaut 1 en 0.

Partie B

L'objectif de cette partie est de mettre en évidence que le champ magnétique créé entre deux bobines de Helmotz varie peu lorsqu'elles sont "proches" l'une de l'autre.

Le champ magnétique créé en un point M de l'axe D d'une bobine plate parcourue par un courant est donné par la formule :

$$\frac{B_0R^3}{\left(R^2+d^2\right)^{3/2}}$$

B_0 est le champ créé en O, centre de la bobine.

R est le rayon de la bobine.

d est la distance OM

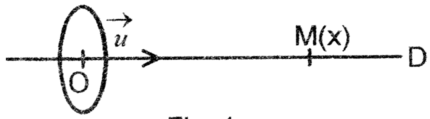


Fig. 1

Dans tout le problème on choisit B_0 pour unité de champ et R pour unité de longueur.

On choisit sur D le repère (O, $\vec{u}$) et on appelle x l'abscisse de M (voir figure 1). Le champ au point M est alors la fonction B de la variable x définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$B(x)=\frac{1}{\left(1+x^2\right)^{3/2}}$$

1° Etudier les variations de la fonction B. Représenter graphiquement la fonction B dans un repère orthonormal (unité graphique 5 cm).

2° On place maintenant deux bobines identiques, de centres respectifs O et O', de même axe D tel que OO' = $2a$. I est le milieu du segment [OO'].

On choisit sur D le repère (I, $\vec{u}$) et on appelle x l'abscisse de M (voir figure 2).

Le champ créé par l'ensemble des deux bobines au point M, considéré comme une fonction de la variable x sur l'intervalle [$-a$; $+a$] est alors donné par :

$$f(x) = B(x + a) + B(x - a).$$

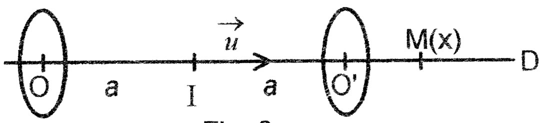


Fig. 2

a) Montrer que f est paire.

b) Calculer $f'(0)$ et $f''(0)$. Ecrire le développement limité de f à l'ordre 2 au voisinage de 0.

c) On en déduit que la fonction g définie par :

$$g(x)=\frac{6\left(4a^2-1\right)}{\left(1+a^2\right)^{7/2}}\times\frac{x^2}{2}$$

peut être considérée, au voisinage de 0, comme une approximation de $f(x) - f(0)$.
Donner une valeur approchée du maximum de g pour $a = 0,5$.

5. Exercices à support concret : matériaux - énergie

1. Industries papetières - 91

Equations différentielles 1 (TP2) ; fonctions d'une variable réelle 1 ; calcul différentiel et intégral 1 (TP1 - TP2)

On se propose d'étudier, dans ce problème, l'écoulement, par gravité, de l'eau contenue dans une cuve.
Les parties A et B sont indépendantes.

Partie A : Résolution d'une équation différentielle.

On considère l'équation différentielle $y' = -a\sqrt{y}$, où :

a est un réel strictement positif donné,
y une fonction de la variable réelle t,
y' la dérivée première de y par rapport à t.

1° Résoudre cette équation différentielle (on remarquera qu'elle est à variables séparables).

2° Déterminer la solution particulière prenant la valeur 1,8 pour $t = 0$.

3° On suppose que $a = \dfrac{\sqrt{5}}{8 \times 10^2}$; montrer que la solution trouvée au A - 2° peut s'écrire :

$$y = 5\left(0{,}6 - \frac{t}{16 \times 10^2}\right)^2.$$

4° On pose $x = \dfrac{t}{60}$; montrer que la solution trouvée au A - 3° peut s'écrire $y = 1{,}8\left(1 - \dfrac{x}{16}\right)^2$.

Partie B : Etude d'une fonction.

On considère la fonction f de la variable réelle x définie sur [0; 16] par : $f(x) = 1{,}8\left(1 - \dfrac{x}{16}\right)^2$

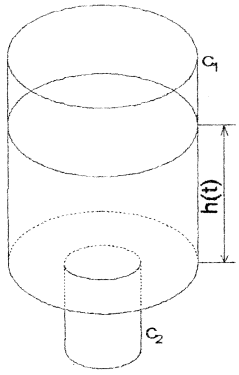
et sa courbe représentative C dans le plan muni d'un repère orthogonal $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (unités graphiques : 1 cm en abscisses et 10 cm en ordonnées).

1° Etudier les variations de f.

2° Trouver les équations des tangentes à C aux points d'abscisses $x = 0$ et $x = 16$.

3° Résoudre algébriquement dans [0; 16] l'équation $f(x) = 0{,}45$.

4° Tracer la courbe C et ses tangentes aux points d'abscisses $x = 0$ et $x = 16$.



Partie C : Application numérique.

On considère une cuve cylindrique C_1 pleine d'eau à l'instant $t = 0$.
L'eau peut s'écouler par une conduite cylindrique C_2 située à la base de la cuve; les sections C_1 et C_2 sont des disques concentriques.
On désigne par :

S, l'aire du disque de base de la cuve C_1, exprimé en m^2;
s, l'aire du disque de base de la conduite C_2, exprimé en m^2;
$h(t)$, la hauteur d'eau dans la cuve C_1, exprimée en m, à l'instant t;

$V = -\dfrac{dh}{dt}$, la vitesse d'écoulement de l'eau dans la cuve C_1, exprimée en $m.s^{-1}$.

v, la vitesse d'écoulement de l'eau dans la conduite C_2, exprimée en $m.s^{-1}$.

Le principe de la conservation de l'énergie permet d'obtenir la relation (admise) :

$$v = \sqrt{2gh} \text{ où } g = 10 \text{ m.s}^{-2}$$

1° Montrer que la fonction h vérifie l'équation différentielle :

$$\frac{dh}{dt} = -2\sqrt{5}\,\frac{s}{S}\sqrt{h}.$$

2° On suppose maintenant que le diamètre de la cuve C_1 est 0,8 m et que le diamètre de la conduite C_2 est 0,02 m; quelle est alors l'équation différentielle obtenue ?

3° On suppose qu'à l'instant $t = 0$ la hauteur d'eau, en mètres, est $h_0 = 1,8$; déterminer au bout de combien de temps, en minutes, la cuve sera vide.

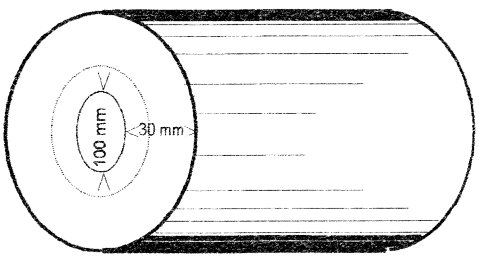
4° Au bout de combien de temps, en minutes, la cuve contiendra-t-elle un quart de la quantité d'eau initiale.

2. Industries ceréalieres - 89

Equations différentielles 1 (TP1) ; fonctions d'une variable réelle 1

L'usine fonctionne avec 50 m de conduite d'eau de 100 mm de diamètre.
La température de la vapeur circulant dans ces conduites est de 150°C et la température ambiante des bâtiments est en moyenne de 25°C.
Les conduites sont protégées par un calorifugeable de conductivité $k = 7,6 \,.\, 10^{-4}$ kcal /m^2 /h /°C et d'épaisseur 30 mm.

PARTIE A



1° La perte de chaleur Q en kcal par heure et par mètre de conduite est définie par :
$Q = -kA\dfrac{dT}{dx}$ (1) où T est la température à x (mètres) du centre de la conduite et A (m^2) l'aire de la surface de déperdition à x (mètres) du centre de la conduite.

<u>On se propose de calculer Q.</u>

a) Montrer que, pour tout x strictement positif, $A(x) = 100\pi\, x$.

b) Q étant supposée une constante connue, (1) devient une équation différentielle.
Déterminer sur $]0; +\infty[$ la fonction $T : x \mapsto T(x)$ comme solution de cette équation différentielle vérifiant la condition initiale $T(0,05) = 150°$.

c) En utilisant le nombre $T(0,08)$, déduire de ce qui précède la valeur de la constante Q.

2° Calculer P, le prix que coûtent, par an, ces pertes de chaleur, sachant que l'usine fonctionne 16 heures par jour, 265 jours par an, et que le prix d'un joule est 8×10^{-6} francs.
(1 calorie = 4,18 joules).

PARTIE B

Pour diminuer les pertes de chaleur, on augmente l'épaisseur du calorifugeage.
(épaisseur désignée par a).
1° En utilisant la même méthode que dans la partie A, 1°, déterminer Q en fonction de a.

2° a) Donner P_a, le prix de la perte d'énergie par an, due aux canalisations de cette usine, en fonction de a.

b) Calculer le prix C_a d'un nouveau calorifugeage d'épaisseur a, sachant que l'achat et la pose reviennent à 3078 francs le m^3 de matériau.

PARTIE C

Sur le marché, les épaisseurs de calorifugeage existent de 5 mm en 5 mm; d'autre part, l'épaisseur ne pourra pas dépasser 70 mm pour des raisons d'encombrement.
Dresser un tableau donnant pour chaque valeur possible de a, les valeurs de P_a, de l'économie réalisée chaque année et de C_a.

On pourra programmer les fonctions P_a et C_a sur la calculatrice.

3. Equipement technique-énergie - 91

Equations différentielles 1 (TP1) ; fonctions d'une variable réelle ; calcul différentiel et intégral 2 (TP1 - TP2)

On se propose d'étudier l'échauffement d'un conducteur par un courant électrique d'intensité constante. Par effet Joule, le conducteur s'échauffe et sa température, exprimée en degrés centigrades, est fonction du temps t, exprimé en secondes. On note $\theta(t)$ la température du conducteur à l'instant t. A l'instant de la mise sous tension, choisi comme instant origine ($t = 0$), la température du conducteur est celle du milieu ambiant : $\theta(0) = 0$°C.
Dans les conditions de l'expérience, le bilan énergétique se traduit par l'équation différentielle :

$$\theta'(t) + 20\,k\,\theta(t) = 2, \text{ avec } t \geq 0, \text{ et } \theta(0) = 0°\text{C}.$$

dans laquelle k est une constante qui dépend du conducteur et du milieu ambiant.

1° On suppose, dans cette question, que le conducteur est parfaitement isolé, c'est à dire que $k = 0$.

a) Donner l'expression de $\theta(t)$ en fonction de t.

b) Représenter graphiquement les variations de θ. (repère orthogonal; unités : 1 cm en abscisse représente 2 secondes et 1 cm en ordonnées représente 2 degrés C).
A quel instant la température du conducteur atteint-elle 20°C ?

Dans toute la suite du problème, le conducteur n'est pas thermiquement isolé et k = 5×10^{-3}.

2° Montrer que la température du conducteur s'exprime par : $\theta(t) = 20(1 - e^{-0,1t})$

3° a) Calculer la température stationnaire du conducteur, c'est à dire :
$\lim\limits_{t \to +\infty} \theta(t)$. Donner l'interprétation graphique de ce résultat.

b) Déterminer le développement limité de θ au voisinage de $t = 0$, à l'ordre 2.
En déduire la tangente à l'origine de la courbe représentative de θ et préciser la position de la courbe par rapport à cette tangente, au voisinage de $t = 0$.

4° a) Etudier les variations de θ en fonction de t.

b) Construire la courbe représentative de θ sur le même graphique que dans la première question.

c) Quelle est la température du conducteur à l'instant $t = 10$?

d) Quel est le temps nécessaire pour que cette température atteigne 19° C ?

4. Equipement technique-énergie - 89

Equations différentielles 1 (TP1) ; fonctions d'une variable réelle 1 ; calcul différentiel et intégral 2 (TP1)

L'objet du problème est l'étude de la répartition des températures dans un cylindre métallique dégageant de la chaleur.
On étudiera successivement le cas d'un cylindre plein (figure 1),
puis le cas d'un cylindre creux (figure 2).

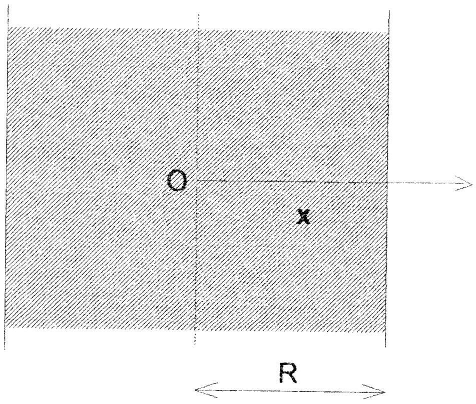


Figure 1

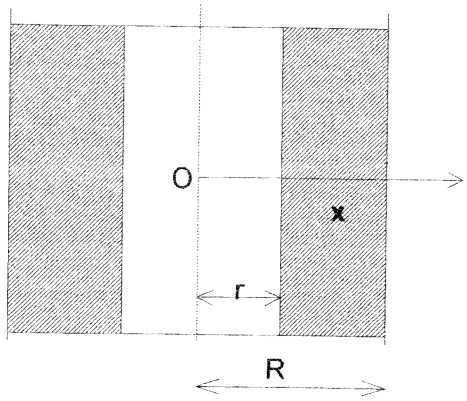


Figure 2

Notations:
x désigne la distance d'un point du cylindre à son axe central et T désigne la température en ce point. x est exprimé en centimètres et T en degrés Celsius.

On admet que T, fonction de la variable x ($x > 0$), vérifie l'équation différentielle :

$$(E) \quad \frac{d^2T}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{dT}{dx} + \frac{q}{\lambda} = 0$$

où q et λ sont deux constantes réelles ($\lambda \neq 0$).

1° Résolution de (E).

a) En posant $y = \frac{dT}{dx}$ montrer que la résolution de (E) se ramène à celle de :

$$(E_1) \quad \frac{dy}{dx} + \frac{1}{x}y + \frac{q}{\lambda} = 0.$$

b) Résoudre (E_1) dans l'intervalle $]0; +\infty[$.

c) En déduire que les solutions de (E), dans $]0; +\infty[$ s'écrivent : $T = A\ln x - \frac{q}{4\lambda}x^2 + B$.

2° Dans cette question, on suppose que le cylindre est plein.

a) En tout point du cylindre, la température est bien définie, en particulier en tout point de l'axe. Déterminer la constante A pour que la limite de T, quand x tend vers 0, soit finie.

b) Le cylindre a pour rayon $R = 2$ cm ; la température à la surface extérieure (c'est-à-dire aux points pour lesquels $x = 2$) est $T_e = 50°$.
Les constantes sont $q = 410$ et $\lambda = 2{,}03$.
Démontrer que $T = 252 - 50{,}5\,x^2$ pour $x \in]0; 2]$.

c) On admet que la température en tout point de l'axe du cylindre est égale à $\lim\limits_{x \to 0} T = 252$.
Soit f la fonction définie sur $[0; 2]$ par : $f(x) = 252 - 50{,}5\,x^2$.
Construire la courbe représentative de f. (unité graphique : 5 cm représentant 100° en ordonnée).
En quels points du cylindre la température est-elle maximale ?
Quelle est cette température maximale ?

3° Dans cette question, on suppose que le cylindre est creux.
Les rayons intérieurs et extérieurs sont $r = 0,5$ cm et $R = 2$ cm.
Les températures à la surface intérieure (points pour lesquels $x = r$) et à la surface extérieure (points pour lesquels $x = R$) sont respectivement $T_i = 140°$ et $T_e = 50°$.
Les constantes sont $q = 410$ et $\lambda = 2,03$.

a) Déterminer la fonction T.

b) Soit φ la fonction définie sur $[0,5; 2]$ par $\varphi(x) = 71,7 \ln x - 50,5 x^2 + 202,3$.
Etudier les variations de φ et tracer sa représentation graphique (même unité graphique que dans le 2° c).
En quels points du cylindre la température est-elle maximale ?
Quelle est cette température maximale ?

5. C.P.I. - 94

Equations différentielles 1 (TP1) ; calcul différentiel et intégral 2 (TP1 - TP3 - TP6) ; fonctions d'une variable réelle 1.

On se propose dans la première partie de résoudre une équation différentielle et d'étudier une fonction qui en est une solution particulière.
Dans la seconde partie, cette fonction est utilisée pour l'étude d'une application mécanique.

Première partie :

On considère l'équation différentielle (E) :

$$2y' - y = 4e^{\frac{x}{2}} - 4$$

où y représente une fonction de la variable réelle x dérivable sur $\mathbb{R}$.

1° Déterminer les nombres réels A et B pour que la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = A + Bxe^{\frac{x}{2}}$ soit une solution particulière de l'équation (E).

2° a) Résoudre l'équation différentielle (E).

b) Déterminer la solution particulière de l'équation (E) qui s'annule pour $x = 0$.

3° On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 2xe^{\frac{x}{2}} - 4e^{\frac{x}{2}} + 4$$

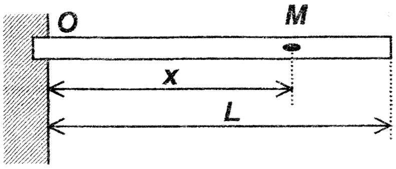
On note $\boldsymbol{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ (unités graphiques : 4 cm en abscisse, 1 cm en ordonnée).

a) Etudier les variations de la fonction f et préciser les limites de la fonction f en $-\infty$ et en $+\infty$.
On rappelle que $\lim\limits_{u \to +\infty} \frac{u}{e^u} = 0$.

b) Tracer l'arc de la courbe $\boldsymbol{C}$ obtenue lorsque x décrit l'intervalle $[-1 ; 3]$.

Seconde partie :

On considère une poutre de longueur donnée L (en mètre) encastrée dans un mur à une extrémité O et supportant une charge.



Soit M un point de la poutre tel que OM = x (en mètre). Le moment de flexion en M (en kN.m) est donné pour x de l'intervalle [0 ; 3] par l'intégrale :

$$m(x) = \int_0^x u g(u)\, du$$

où la fonction g représente la loi de répartition de la charge.

On se place ici dans le cas particulier où $g(u) = e^{\frac{u}{2}}$.

1° Montrer que, sur l'intervalle [0 ; 3], on a $m(x) = f(x)$ où f désigne la fonction donnée dans la première partie à la question 3°.

2° Le moment de flexion maximum avant rupture est égal à 8 kN.m.
On se propose de déterminer la longueur maximum α de la poutre que l'on veut charger avant que cette poutre ne se rompe.
Le nombre α est alors solution de l'équation $f(x) = 8$ sur l'intervalle [0 ; 3].

a) Sur le graphique, tracer la droite Δ d'équation $f(x) = 8$.
Déterminer graphiquement une valeur approchée du nombre α.

b) Montrer que, sur l'intervalle [0 ; 3], l'équation $f(x) = 8$ admet une solution unique. On note α cette solution.
Déterminer alors, à l'aide de la calculatrice, un nombre entier p tel que :

$$p \cdot 10^{-2} \leq \alpha < (p+1) \cdot 10^{-2}.$$

Les résultats obtenus dans cette question b) devront être justifiés.

6. Exercices à support concret : laboratoire

1. Biotechnologie - 88

Equations différentielles 1 (TP2) ; fonctions d'une variable réelle 1 ; calcul différentiel et intégral 1 (TP1)

Etude d'un modèle de croissance d'une colonie bactérienne.

On ensemence une boite de Pétri et l'on mesure en cm^2 l'étendue s de la colonie.
La fonction s est une fonction du temps t ($t \geq 0$, t exprimé en jours), elle est supposée deux fois dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et vérifie l'équation différentielle :

(E) : $\dfrac{s'}{s^2} = \dfrac{ab}{s} - a$ dans laquelle a et b sont deux constantes strictement positives.

Partie A - Résolution de l'équation différentielle (E).

1° On considère la fonction $Z(t) = \dfrac{1}{s(t)}$.

Calculer sa dérivée Z' en fonction de s et de s'.
Montrer que si s vérifie (E), alors Z vérifie une équation différentielle linéaire du premier ordre (E') que l'on précisera.

2° Résoudre l'équation (E').

3° Sachant que l'étendue initiale de la colonie est $s(0) = \lambda$ ($\lambda > 0$), en déduire que :

$$s(t) = \frac{b\lambda}{(b-\lambda)e^{-abt} + \lambda}.$$

Partie B - Etude de la fonctions sur $\mathbb{R}^+$, dans le cas $b > \lambda > 0$.

1° Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} s(t)$.

Qu'en résulte-t-il pour le graphique de la fonction s ? Ce graphique est noté (G).

2° Etudier les variations de s sur $\mathbb{R}^+$.

Partie C - Construction de la courbe (G) dans le cas particulier : a = 0,044; b = 49,25; λ = 0,25.

1° Calculer $s(t)$ pour t entier, $0 \leq t \leq 4$.

2° Tracer la courbe (G) dans un repère tOs tel que :
sur Ot : 1 jour est représenté par 2,5 cm.
sur Os : 10 cm^2 sont représentés par 5 cm.

2. Biotechnologie - 90

Equations différentielles 1 (TP1) ; fonctions d'une variable réelle 1 ; calcul différentiel et intégral 1 (TP1)

Le but de cet exercice est l'étude du transfert par dialyse d'une substance A, d'un milieu M_1 vers un milieu M_2. Les quantité de la substance A dans les milieux M_1 et M_2 à l'instant t positif sont respectivement notées x et y.
La première partie du problème consiste en une étude statistique qui ne nous intéresse pas ici.
Dans la seconde partie, on étudie le modèle mathématique traduisant le transfert défini ci-dessus.

Il est décrit par les relations suivantes, valables pour tout t de $[0; +\infty[$:

$$(1)\quad x(0)=6$$
$$(2)\quad \frac{dx}{dt}=-kx+ky$$
$$(3)\quad x+y=6$$

où k désigne la constante réelle strictement positive caractérisant le transfert.

1° a) Montrer que la fonction x vérifie, sur $[0; +\infty[$, l'équation différentielle : (E) $\frac{dx}{dt} + 2\,kx = 6\,k$.

b) Résoudre l'équation différentielle (E) sur $[0; +\infty[$.

c) En déduire que les fonctions x et y correspondant au modèle ci-dessus sont définies sur $[0; +\infty[$ par :

$$t \mapsto x(t) = 3 + e^{-2kt}$$
$$t \mapsto y(t) = 3 - e^{-2kt}$$

2° On suppose qu'à l'instant $t = 4$, on a $x - y = 1{,}21$.
En déduire la valeur numérique de k.

3° Dans cette question, on fixe $k = 0{,}20$.
On appelle respectivement (C) et (C') les courbes représentatives des fonctions x et y dans le plan rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
(On prend 2 cm pour unité graphique sur chacun des axes).

a) Montrer que (C) et (C') sont symétriques par rapport à une droite (Δ) parallèle à l'axe des abscisses. (On pourra utiliser la relation (3) ci-dessus).

b) Montrer que (C) et (C') admettent la droite (Δ) comme asymptote.

c) Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe (C') en son point d'abscisse 0.

d) Tracer (Δ), (T), (C') et (C) sur une feuille de papier millimétré.

3. Analyses biologiques - 90

Equations différentielles 1 (TP1) ; statistique descriptive (TP2)

A - Dans l'étude d'un phénomène, on considère les variations de deux grandeurs x et y en fonction du temps t. Ces grandeurs doivent vérifier les relations :

$$\frac{dx}{dt} = 0{,}2\alpha \qquad (1)$$
$$\frac{dy}{dt} = 0{,}08\alpha y - 0{,}28\alpha e^{-0{,}2\alpha t} \qquad (2)$$

α étant un nombre supposé connu.

a) Intégrer l'équation différentielle définie par la relation (1).

b) Montrer que l'équation différentielle définie par l'équation (2) admet comme solution particulière la fonction définie par :

$$\varphi(t) = e^{-0{,}2\alpha t}.$$

Intégrer cette équation différentielle.

c) Déterminer l'expression de y en fonction de x sachant que pour $t = 0$ on a $x = 0$ et $y = 4$.

d) Peut-on, sur l'intervalle [5; 10], approcher y par $h(x) = 3\ e^{0,4x}$ en commettant une erreur inférieure à 10^{-2} ?

B - L'étude expérimentale du même phénomène a fourni les résultats suivants :

x	5	5,5	6	6,5	7	7,5	8	8,5	9	9,5
y	22	25	30	38	48	56	72	85	95	140

a) Représenter graphiquement le nuage de points de coordonnées (x; $\ln y$).

b) Chercher, par la méthode des moindres carrés, la droite d'ajustement de la variable $\ln y$ par rapport à la variable x.

c) On refuse l'hypothèse : $\ln y = ax + b$ + erreur si le coefficient de corrélation est inférieur à 0,9. Que pouvez-vous conclure ici ?

4. Biochimiste - 89

Equations différentielles 1 (TP1) ; fonctions d'une variable réelle 1 ; calcul différentiel et intégral 1 (TP1) ; statistique descriptive (TP2)

Dans une réaction en catalyse enzymatique, on note y la concentration exprimée en mol. l^{-1}, d'un produit issu d'un substrat.

Cette concentration varie en fonction du temps t, exprimé en secondes, en vérifiant l'équation différentielle suivante :

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \alpha\frac{dy}{dt} = \beta \qquad (1)$$

où α et β sont deux constantes réelles avec $\alpha > 0$.

Première partie

1° On considère la fonction v définie par : $v(t) = \frac{dy}{dt}$.

Montrer, en utilisant l'équation différentielle précédente, que cette fonction v est solution d'une équation différentielle du premier ordre.

Déterminer la solution générale de cette équation différentielle du premier ordre.

2° Déterminer la solution générale de l'équation différentielle (1) en utilisant le résultat de la question précédente.

3° On suppose qu'à l'instant $t = 0$, la concentration initiale est nulle.

Démontrer que la concentration y est une fonction définie sur $[0; +\infty[$ par : $y(t) = \frac{b}{a}t + b - e^{-\alpha t}$ où b est un réel.

4° Montrer que la courbe représentative de la fonction y, définie ci-dessus, dans le plan rapporté à un repère, admet une asymptote lorsque t tend vers $+\infty$.

Deuxième partie

On se propose de déterminer expérimentalement le coefficient b. Pour $t > 0,25$, on confond expérimentalement la courbe et son asymptote. Au cours de la réaction, on a relevé les résultats suivants :

t_i	0,25	0,40	0,50	0,54	0,60
y_i	$1,01 \times 10^{-5}$	$1,91 \times 10^{-5}$	$2,41 \times 10^{-5}$	$2,85 \times 10^{-5}$	$3,11 \times 10^{-5}$

1° Calculer le coefficient de corrélation linéaire de la série (t_i; y_i). Que peut-on conclure ?

2° Déterminer une équation de la droite d'ajustement de y en t, par la méthode des moindres carrés. En déduire $\frac{b}{a}$ et b.

5. Biotechnologie - 91

Equations différentielles 1 (TP2) ; fonctions d'une variable réelle 1 ; calcul différentiel et intégral 1 (TP1) ; statistique descriptive (TP2)

Le but de cet exercice est l'étude d'une réaction de saponification d'un ester, l'acétate de méthyle, par la soude.

On considère la réaction de saponification de l'acétate de méthyle :

acétate de méthyle + soude $\Rightarrow$ **acétate de sodium + méthanol**

dans laquelle une mole d'acétate de méthyle et une mole de soude se transforment, de manière irréversible, en une mole d'acétate de sodium et une mole de méthanol.

A l'instant $t = 0$, on mélange une solution d'acétate de méthyle et une solution de soude de même concentration initiale : 0,01 mole par litre.

On appelle $x(t)$ la valeur commune, exprimée en moles par litre, des concentrations molaires d'acétate de sodium et de méthanol à l'instant t, exprimé en minutes.

Les parties I et II sont indépendantes

Partie I

On admet que la fonction x vérifie, pour $t \in [0; +\infty[$, l'équation différentielle suivante :

$$\text{(E)} \qquad \frac{dx}{dt} = k(0{,}01 - x)^2$$

où k est un nombre réel strictement positif,
et la condition initiale : $x(0) = 0$.

1° Résoudre l'équation différentielle (E) en tenant compte de la condition initiale.

2° Sachant qu'au bout de 40 minutes 50 % de l'acétate de méthyle s'est transformé, calculer le réel k.

3° On suppose que la concentration x s'exprime sur $[0; +\infty[$ par : $x(t) = \dfrac{0{,}025t}{2{,}5t + 100}$

a) Déterminer la limite de x quand x tend vers $+\infty$.

b) Etudier les variations de la fonction x sur $[0; +\infty[$.

Partie II

On mesure toutes les 30 minutes la concentration x.
On obtient le tableau suivant :

t_i (en minutes)	30	60	90	120	150	180
x_i (en moles/litre)	$4{,}1 \times 10^{-3}$	$6{,}1 \times 10^{-3}$	7×10^{-3}	$7{,}5 \times 10^{-3}$	8×10^{-3}	$8{,}2 \times 10^{-3}$

1° On pose : $u_i = \dfrac{1}{t_i}$ et $v_i = \dfrac{1}{x_i}$.

a) Calculer les valeurs de u_i arrondies au dix millième le plus proche et les valeurs de v_i arrondies à l'entier le plus proche.
Présenter les résultats sous forme de tableau.

b) Le plan est rapporté à un repère orthogonal avec les unités graphiques suivantes :
1 cm pour 2×10^{-3} unités sur l'axe des abscisses;
1 cm pour 10 unités sur l'axe des ordonnées.

Construire le nuage de points de coordonnées $(u_i; v_i)$ sur une feuille de papier millimétré.

2° a) Utiliser les valeurs calculées au II - 1° a) pour déterminer une équation de la droite d'ajustement linéaire de v en u par la méthode des moindres carrés.

b) Construire cette droite dans le repère précédent.

3° Déduire de II - 2° a) l'expression $x(t)$, et l'écrire sous la forme :

$$x(t) = \frac{at}{bt + 100}.$$

On donnera la valeur de α arrondie au millième le plus proche et celle de β arrondie au centième le plus proche.

6. Biotechnologie - 89

Equations différentielles 1 (TP2) ; fonctions d'une variable réelle 1 ; calcul différentiel et intégral 1 (TP1)

Etude mathématique de la cinétique chimique d'une réaction d'estérification.

On considère la réaction : acide + alcool $\rightleftharpoons$ ester + eau,
dans laquelle on mélange initialement une mole d'acide et une mole d'alcool. On admet qu'à l'équilibre, on obtient :

$$\frac{1}{3} \text{ de mole d'acide et } \frac{1}{3} \text{ de mole d'alcool}$$

$$\frac{2}{3} \text{ de mole d'ester et } \frac{2}{3} \text{ de mole d'eau}$$

Le nombre de moles d'ester à l'instant t (exprimé en jours) est caractérisé par un nombre réel s de l'intervalle $[0; \frac{2}{3}[$. On suppose que s est une fonction du temps t, deux fois continûment dérivable sur l'intervalle $[0; +\infty[$.

Elle vérifie l'équation différentielle suivante sur $[0; +\infty[$:

$$(E) \quad k\,dt = \frac{ds}{(2-s)(2-3s)}$$

et la condition initiale : $s(0) = 0$, (k est un réel strictement positif).

PARTIE A

1° Soit g la fonction numérique définie sur $[0; \frac{2}{3}[$ par : $g(s) = \dfrac{1}{(2-s)(2-3s)}$

a) Calculer les réels A et B tels que, pour tout s dans $[0; \frac{2}{3}[$ on ait : $g(s) = \dfrac{A}{2-s} + \dfrac{B}{2-3s}$

b) Donner toutes les primitives de la fonction g sur l'intervalle $[0; \frac{2}{3}[$.

2° Résoudre l'équation différentielle (E) en exprimant t en fonction de s et en tenant compte de la condition initiale.

3° Sachant que pour t = 190 le nombre s de moles est égal à 0,5 calculer le nombre réel k.

PARTIE B

On suppose que le temps ($t > 0$), exprimé en jours, et le nombre s de moles à l'instant t sont liés par la relation :

$$at = ln\left(\frac{2-s}{2-3s}\right),$$

dans la quelle $a = 5{,}78 \, . \, 10^{-3}$. (ln désigne le logarithme népérien)

1° Démonter que l'on a pour tout $t \in [0 \,;\, +\infty[$: $s = \dfrac{2\left(1-e^{at}\right)}{1-3e^{at}}$

2° On se propose de représenter graphiquement la fonction s dans un repère orthogonal avec les unités graphiques suivantes.
5 cm pour cent jours sur l'axe des abscisses,
15 cm pour une mole sur l'axe des ordonnées.

a) Etablir le tableau de variation de la fonction s sur $[0 \,;\, +\infty[$.

b) Démontrer que la courbe représentative (Γ) de la fonction s admet une asymptote que l'on précisera.

c) Représenter graphiquement la courbe (Γ).

3° Déterminer graphiquement le temps de demi-réaction, c'est-à-dire le temps au bout duquel $s = \frac{1}{3}$.

7. Biochimiste - 92

Equations différentielles 1 (TP1) ; fonctions d'une variable réelle 1 ; calcul différentiel et intégral 1 (TP1)

Partie A

La concentration x, en $g.l^{-1}$, de micro-organismes dans une culture en continu varie en fonction du temps t exprimé en heures ($t \geq 0$) et vérifie l'équation différentielle linéaire :

$$\frac{dx}{dt} + 0{,}70x = 2{,}35 \times e^{0{,}35t} \qquad (1)$$

1° Résoudre dans $\mathbb{R}^+$ l'équation différentielle sans second membre associé à l'équation (1).

2° On pose $x(t) = K(t) \times e^{-0{,}70t}$
où K est une fonction numérique dérivable de la variable t.
Déterminer K pour que la fonction x définie ci-dessus soit une solution de (1) dans $\mathbb{R}^+$.

3° En déduire la solution générale de l'équation (1) dans $\mathbb{R}^+$.

4° Donner la solution particulière de (1) correspondant à une concentration initiale de 4,70 $g.l^{-1}$ (autrement dit : $x(0) = 4{,}70$).
Commentaire : La fonction obtenue est telle que $\lim\limits_{t \to +\infty} x(t) = +\infty$
En fait, il s'agit d'une solution théorique ; dans la pratique, des perturbations dues en particulier aux déchets empêchent le phénomène de se prolonger indéfiniment.

Partie B

Soit x la fonction définie sur [0 ; 6] par : $x(t) = 2{,}46 \times e^{-0{,}70t} + 2{,}24 \times e^{0{,}35t}$.

1° Calculer les dérivées première et seconde x' et x'' de x.

2° Démontrer que, pour tout t positif ou nul, $x''(t) > 0$.

Dans les questions suivantes, les calculs approchés seront effectués au centième près.

3° Dresser la tableau de variations de la fonction x' sur [0 ; 6].

4° a) Calculer $x'(0,7)$ et $x'(0,8)$ et vérifier que $x'(0,7)$ et $x'(0,8)$ sont de signes contraires.
b) En admettant que $x'(t) = 0$ admet une racine unique α dans [0 ; 6] et que $0,7 < \alpha < 0,8$, déterminer alors le signe $x'(t)$ sur [0 ; 6] (on ne demande pas de calculer α).

5° En déduire le sens de variation de la fonction x sur [0 ; 6].

6° Le plan est rapporté à un repère orthogonal d'unités graphiques
2 cm sur l'axe des abscisses,
1 cm sur l'axe des ordonnées.
a) Tracer la courbe représentative de la fonction x.

b) Déterminer graphiquement le temps au bout duquel la concentration est le double de la concentration initiale.

8. Biotechnologie - 92

Equations différentielle 1 (TP1), fonctions d'une variable réelle 1 ; statistique descriptive (TP2)

Les parties I, II *et* III *sont indépendantes.*

Partie I : Etude expérimentale

Un appareil mesure, toutes les trente secondes, le rapport $x = \dfrac{C}{C_M}$, pourcentage de saturation en dioxygène. Les résultats sont rassemblés dans le tableau ci-dessous :

temps t_i (en secondes)	0	30	60	90	120	150	180	210
$x_i = \dfrac{C_i}{C_M}$	0,180	0,392	0,569	0,690	0,784	0,838	0,879	0,908

I.1 On pose $y = \ln(1 - x)$

I.1.1 Calculer les valeurs de y_i arrondies au dix millième le plus proche. Présenter les résultats sous forme de tableau.

I.1.2 Représenter le nuage de points de coordonnées $(t_i \,;\, y_i)$ dans le plan rapporté à un repère orthogonal, où :
1 cm en abscisse représente 10 secondes,
1 cm en ordonnée représente 0,2 unités.

I.2 Déterminer par la méthode des moindres carrés, une équation de la droite d'ajustement linéaire de y en t.

I.3 Exprimer x en fonction de t.

Partie II : Etude théorique

On admet que la concentration C en dioxygène vérifie :

$$\frac{dC}{dt} = KC_M\left(1 - \frac{C}{C_M}\right)$$

où K, coefficient de transfert volumétrique, dépend du milieu
(K est une constante qui s'exprime en s^{-1}).

Soit $x(t) = \dfrac{C(t)}{C_M}$

II.1 Ecrire l'équation différentielle (E) qui vérifie la fonction x.

II.2 Donner la solution générale de cette équation différentielle (E) lorsque $x(t)$ appartient à l'intervalle $[0 ; 1[$ et $t \geq 0$.

II.3

II.3.1 Déterminer, en fonction de K, la solution vérifiant $x(0) = 0{,}18$.

II.3.2 Calculer K sachant que $x(120) = 0{,}784$.

II.3.3 Exprimer alors x en fonction de t.

Partie III : Etude de la fonction x

Soit la fonction x définie, pour $t \in [0 ; +\infty[$, par : $x(t) = 1 - 0{,}82\, e^{-0{,}011t}$

III.1 Calculer $\lim\limits_{t \to +\infty} x(t)$ et interpréter graphiquement le résultat.

III.2 Etudier les variations de x.

III.3 Le plan est rapporté à un repère orthogonal avec les unités graphiques suivantes :
1 cm pour 10 secondes en abscisses,
10 cm pour une unité en ordonnée.
Construire la représentation graphique de la fonction x : préciser notamment son asymptote, et sa tangente au point d'abscisse zéro.

9. Chimiste - 92

Equations différentielles 2 (TP1), Statistique descriptive (TP2)

On réalise une réaction chimique auto catalytique superposée à une réaction non auto catalytique $A \to B$.
A un certain moment de la réaction pris comme instant initial ($t = 0$), on a :

$$[A] = a - x_0,\ [B] = x_0.$$

A l'instant t ($t > 0$), $[A] = a - x(t)$, $[B] = x(t)$.

Première partie : On admet que la vitesse de réaction est donnée par la relation :

(R) $\quad v = \dfrac{dx}{dt} = k\,[A][B]$, k étant une constante liée à la réaction.

1° Etablir l'équation différentielle liant $\dfrac{dx}{dt}$, x, a et k.

2° Déterminer en fonction de a et k les coefficients α et β vérifiant : $\dfrac{1}{kx(a-x)} = \dfrac{\alpha}{a-x} + \dfrac{\beta}{x}$.

3° Résoudre alors, pour x dans l'intervalle $]0 ; a[$, l'équation différentielle établie au 1°.

Deuxième partie : On réalise une expérience de ce type à 20° C, et on obtient les résultats suivants, t en minutes et $[A]$ en mol.l^{-1}.

t	100	270	480	600	705	800
$[A]$	0,370	0,357	0,313	0,261	0,209	0,136

1° On donne $a = 0{,}377$. En déduire les valeurs de x.

2° On prend $y = \ln\left(\dfrac{x}{a-x}\right)$ comme variable intermédiaire. Représenter dans un repère orthogonal les points de coordonnées $(t_i\,;\,y_i)$.

3° Etablir l'équation de la droite des moindres carrés $y = f(t)$ pour les valeurs de t comprises entre 100 et 800.

4° Calculer le coefficient de corrélation. L'interpolation linéaire est-elle légitime ?

5° En déduire une valeur approchée de k, et une expression approchée de $x(t)$.

10. Chimiste - 90

Equations différentielles 1 (TP1) ; fonctions d'une variable réelle 1 ; calcul différentiel et intégral 2 (TP1)

Première partie

Lors de la dissociation thermique de l'iodure d'hydrogène à une température fixée, on montre que le taux de dissociation y de l'iodure d'hydrogène évolue en fonction du temps t (exprimé en secondes) selon une loi qui obéit à l'équation différentielle :

(E) $\dfrac{dy}{dt} = A(1-5y)(1+3y)$, A étant une constante réelle strictement positive.

1° Vérifier que les fonctions constantes $y = -\dfrac{1}{3}$, $y = \dfrac{1}{5}$ sont les solutions de l'équation différentielle (E).

2° Dans la suite du problème, on cherche la solution non constante de l'équation (E), définie sur $\mathbb{R}$, et vérifiant $y(0) = 0$.
Peut-on interpréter la constante A ?
On admettra, dans les calculs, les inégalités : $-\dfrac{1}{3} \leq y \leq \dfrac{1}{5}$.

a) Montrer que l'équation (E) peut s'écrire sous la forme : $\left(\dfrac{5}{8(1-5y)} + \dfrac{3}{8(1+3y)}\right)dy = Adt$.

b) Déduire de la question précédente la relation :

$$\frac{1+3y}{1-5y} = Ce^{8At}$$

où C est une constante réelle non nulle, et calculer la valeur de C correspondant à $y(0) = 0$.

c) Montrer que la solution cherchée peut s'écrire : $y(t) = \dfrac{e^{8At} - 1}{3 + 5e^{8At}}$.

Deuxième partie

1° Etudier les variations de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{e^x - 1}{3 + 5e^x}$ sur $]-\infty; +\infty[$ et les limites aux bornes de son ensemble de définition.

2° a) Ecrire une équation de la tangente en O, origine du repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ à la courbe représentative C_f de la fonction f.

b) On admettra que le point de coordonnées $\left(ln\dfrac{3}{5}; -\dfrac{1}{15}\right)$ est le centre de symétrie de la courbe, et que cette courbe est située au dessous de sa tangente en O au voisinage de ce point O.
Tracer C_f, sa tangente en O et ses asymptotes dans le repère orthogonal $(O; \vec{i}, \vec{j})$;
on prendra $\|\vec{i}\| = 1$ cm et $\|\vec{j}\| = 10$ cm.

3° Résoudre l'équation : $f(x) = 0,1$.
En prenant 2.10^{-6} pour valeur de la constante A dans la première partie, peut-on en déduire au bout de combien d'heures le taux de dissociation de l'iodure d'hydrogène atteint la valeur 0,1 ?

7. Exercices à support concret : tertiaire

1. Comptabilité et gestion (Nouméa - septembre 91)

Analyse des phénomènes exponentiels (TP1 - TP3 - TP4)

Les questions 1 et 2 peuvent être traitées indépendamment l'une de l'autre.

On note y le prix d'une certaine marchandise, fonction du temps t ; y' désigne la fonction dérivée de y par rapport à t.
On sait que $y(0) = 100$ et que la demande et l'offre de cette marchandise s'expriment respectivement, en fonction de y et de y', par : $3000 - 7\,y - 65\,y'$ et $1600 + 3\,y + 60\,y'$.

Le but de cet exercice est d'abord, dans la question 1, de déterminer le prix d'équilibre de cette marchandise, c'est à dire le prix pour lequel l'offre est égale à la demande, puis d'étudier, dans la question 2, certains aspects de ce prix d'équilibre.

1° a) Exprimer y' en fonction de y, quand il y a équilibre.

b) On considère l'équation différentielle $125\,y' + 10\,y = 1400$, notée (E).
Résoudre l'équation différentielle $125\,y' + 10\,y = 0$.
Déterminer une solution particulière de l'équation (E), sous la forme d'une fonction constante.
Donner la solution y de l'équation (E), qui vérifie $y(0) = 100$.

2° Soit y la fonction (prix d'équilibre), définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par $y(t) = 140 - 40\,e^{-0,08t}$.

a) Déterminer la limite de $y(t)$ lorsque t tend vers $+\infty$.
Etudier le sens de variation de la fonction y, sur l'intervalle $[0; +\infty[$.

b) Calculer sur l'intervalle $[0; 5]$, la valeur moyenne $\overline{y}$ du prix d'équilibre.
En donner la valeur exacte, puis la valeur arrondie à l'entier le plus proche.
$\left(\textit{On rappelle que } \overline{y} = \frac{1}{5}\int_0^5 y(t)\,dt\right)$.

EQUATIONS LINEAIRES DU SECOND ORDRE

LES TEXTES PROPOSES

1. Fonderie en moules métalliques - 88

Equations différentielles 1 (TP1)

1° Résoudre l'équation différentielle $y'' + y = 0$.

2° Déterminer la solution particulière f de cette équation différentielle vérifiant :

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \text{ et } f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0.$$

2. Productique des alliages moulés - 91

Equations différentielles 1 (TP1) ; fonctions d'une variable réelle 1 ; calcul différentiel et intégral 2 (TP1)

1° L'étude du mouvement d'un point mobile sur un axe $y'y$ est défini en fonction du temps x par :

$$y'' + 2y' + y = 0$$

où y une fonction de la variable t définie sur $\mathbb{R}$, dérivable, y' étant sa dérivée première et y'' sa dérivée seconde.

a) Résoudre cette équation différentielle du second ordre à coefficients constants.

b) Déterminer la solution f de cette équation différentielle qui vérifie simultanément les deux conditions : $f(0) = 2$ et $f'(0) = -1$.

2° On considère la fonction numérique f de la variable réelle x définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (x + 2)\, e^{-x}.$$

On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$ d'axes $x'x$ et $y'y$. Unité graphique : 1 cm.

a) Préciser les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

b) Calculer la dérivée de f et étudier son signe suivant les valeurs de x. En déduire les variations de f.

c) Préciser les points de (C) situés sur les axes de coordonnées et préciser les équations des tangentes à (C) en chacun des points obtenus.

d) Construire la courbe (C) ainsi que les tangentes trouvées précédemment.

3. Conception des produits industriels - 91

Equations différentielles 1 (TP1)

1° Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes l'équation : $z^2 - 2z + 2 = 0$.

2° On considère l'équation différentielle (E) : $y'' - 2y' + 2y = 0$,
y étant une fonction de la variable réelle t.

a) Donner la solution générale de (E).

b) Trouver la solution particulière f de (E) telle que : $f(0) = 1$ et $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = e^{\frac{\pi}{2}}$.

4. Maintenance - 89

Equations différentielles 1 (TP1) ; fonctions d'une variable réelle 1 ; calcul différentiel et intégral 2 (TP1 - TP8 - TP10)

En physique, l'étude d'un mouvement amorti conduit à l'équation différentielle :

$$(E) \qquad x'' + 2x' + 2x = 0$$

dans laquelle x est la fonction inconnue de la variable t.

1° Résoudre cette équation sur $\mathbb{R}$.

2° Trouver la solution particulière de cette équation prenant la valeur 0 pour $t = 0$ et dont la dérivée prend la valeur 1 pour $t = 0$.

3° Soit f la fonction numérique, telle que, pour tout élément t de l'intervalle $[0; \pi]$:

$$x = f(t) = e^{-t} \sin t.$$

Etudier les variations de f. En déduire sa représentation graphique (C) dans le plan rapporté à un repère orthogonal où l'unité graphique vaut 2 cm sur l'axe $(O; \vec{i})$ des abscisses et 10 cm sur l'axe $(O; \vec{j})$ des ordonnées.

4° On se propose de calculer, en cm^2, une valeur approchée par défaut à 1 mm^2 près de l'aire du domaine plan délimité par la courbe (C) et l'axe $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

A cette fin, deux méthodes sont proposées :

a) Déterminer l'intégrale $\int_0^{\pi} f(t)dt$ au moyen de deux intégrations par parties successives.

b) En utilisant l'équation différentielle (E) écrite sous la forme : $x = -\frac{1}{2}(x' + 2x)'$.

Déterminer une primitive F de f sur $[0; \pi]$. En déduire l'expression de $\int_0^{\pi} f(t)dt$ à l'aide de F.

c) Déterminer une valeur approchée de l'aire considérée à 1 mm^2 près par défaut.

5. Maintenance et exploitation des matériels aéronautiques - 92

Equations différentielles 1 (TP1) ; fonctions d'une variable réelle 1 ; calcul différentiel et intégral 2 (TP1 - TP6 - TP8)

Le plan est rapporté à un repère orthogonal $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

A - Résoudre l'équation différentielle $y'' + 2y' + 2y = 0$.

Trouver la solution particulière dont la courbe représentative passe par 0 et le point A de coordonnées $\left(\frac{\pi}{2}; e^{-\frac{\pi}{2}}\right)$.

B - On considère l'application numérique f de $[0 ; \pi]$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = e^{x} \sin x$.

1° Etudier les variations de f sur $[0 ; \pi]$.

2° Dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$, on appelle (C) la courbe représentative de f et (C') la courbe d'équation $y = e^{-x}$ où x appartient à $[0 ; \pi]$.

Montrer que (C) et (C') admettent la même tangente au point A introduit ci-dessus.

3° En choisissant comme unités graphiques 5 cm sur l'axe des abscisses et 10 cm sur l'axe des ordonnées, construire les courbes (C) et (C') après avoir justifié leurs positions relatives.

4° a) On pose : $I = \int_0^{\pi} e^{-x} \sin x \, dx$

On montrera après deux intégrations par parties que : $I = e^{-\pi} + 1 - I$.
En déduire I.

b) En reprenant les unités utilisées au 3° calculer, en cm^2, l'aire **A** de la partie du plan délimitée par (C) et l'axe des abscisses.

6. Bâtiment (Nouméa - septembre 91)

Equations différentielles 1 (TP1) ; fonctions d'une variable réelle 1 ; calcul différentiel et intégral 2 (TP1)

Partie A

Soit (E) l'équation différentielle $y'' + 2y' + 2y = 0$ où l'inconnue y est une fonction de la variable réelle t définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

1° Résoudre l'équation (E).

2° Déterminer la solution particulière g de (E) vérifiant les conditions $g(0) = 0$ et $g'(0) = 12\sqrt{2}$.

Partie B

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $\mathrm{I} = [0; 2\pi]$ par : $f(x) = 12\sqrt{2}\, e^{-x} \sin x$
et (C) sa courbe représentative dans le plan muni du repère orthonormal $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, unité 2 cm.

1° Montrer que, pour tout nombre réel x de I, $f'(x) = 24e^{-x} \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$.

2° Résoudre dans $[0; 2\pi]$ l'équation $f'(x) = 0$.

3° Déterminer les coordonnées des trois points d'intersection de (C) et de l'axe des abscisses sur $[0; 2\pi]$ ainsi que le coefficient directeur de la tangente à (C) en chacun de ces points. (On ne demande pas de valeurs approchées).

4° Construire le tableau de variation de f sur $[0; 2\pi]$.
Pour déterminer le signe de $f'(x)$ sur $[0; 2\pi]$ on pourra, par exemple, utiliser les résultats du 3°.

5° Construire (C). On fera figurer sur le graphique les points et les tangentes obtenues au 3°.

7. Chimiste - 89

calcul différentiel et intégral 2, suites numériques 1

On considère l'équation différentielle du second ordre :

$$(E) \qquad y'' + 2y' + 5y = 0$$

dans laquelle y est une fonction de la variable réelle x.

1° Montrer que la fonction f définie par : $f(x) = e^{-x} \sin 2x$ est une solution particulière de l'équation (E) sur $\mathbb{R}$. Intégrer l'équation (E) sur $\mathbb{R}$.

2° On appelle (C) la courbe représentative de f dans un repère orthogonal $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. On prendra pour unité 5 cm sur l'axe des abscisses et 10 cm sur l'axe des ordonnées.

a) Déterminer les abscisses des points communs à (C) et à l'axe des abscisses.

b) Etudier les variations de la restriction de f à $[0; \pi]$ et dessiner soigneusement (C) sur cet intervalle.

3° On appelle A_k l'aire (en unités d'aire) du domaine limité par (C) et l'axe des abscisses et dont les points ont une abscisse dans l'intervalle $\left[k\frac{\pi}{2};(k+1)\frac{\pi}{2}\right]$, k entier positif.

a) Calculer A_0, A_1, A_k. Donner une valeur approchée de A_0 à 10^{-3} près.

b) Montrer que la suite $(A_k)_{k\in N}$ est une suite géométrique dont on donnera la raison.

8. Maintenance et exploitation des matériels aéronautiques - 93

Equations différentielles 1 (TP1) ; calcul différentiel et intégral 2 (TP1) ; suites numériques 1 (TP1)

L'étude d'un mouvement amorti conduit à l'équation différentielle suivante :

$$x'' + 0{,}4x' + 4{,}04x = 0$$

dans laquelle x est une fonction inconnue de la variable réelle t qui représente le temps ($t \geq 0$).

1° Résoudre sur $[0\,;+\infty[$ cette équation différentielle.

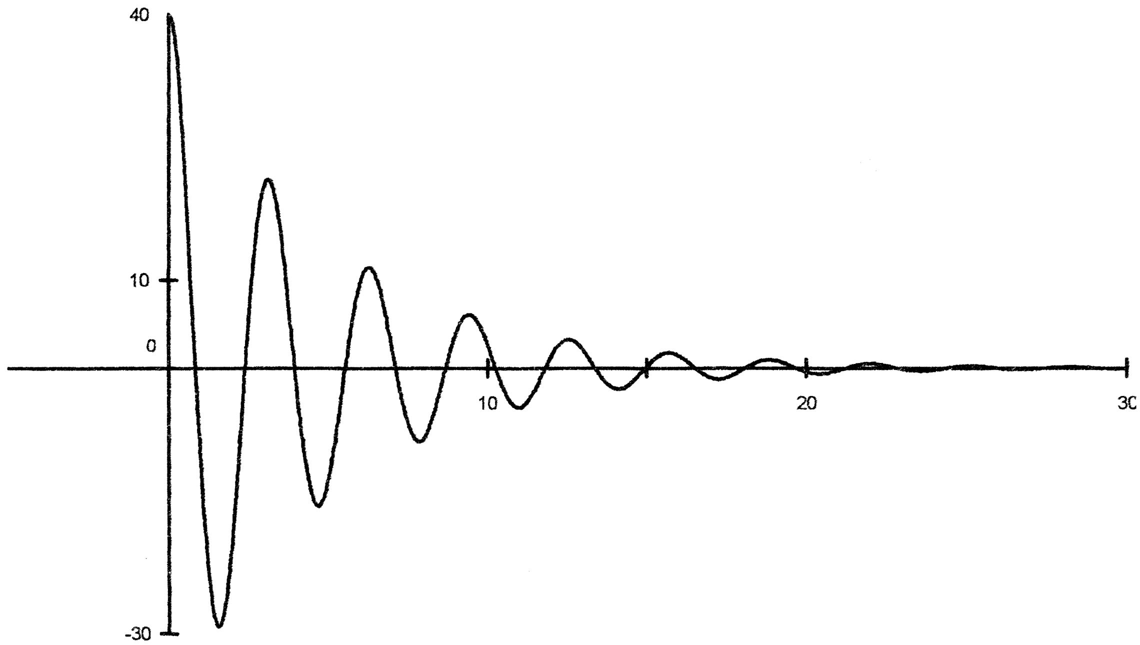
2° Trouver la solution particulière f de cette équation vérifiant $f(0) = 40$ et $f'(0) = 0$.

3° On donne, ci-dessous, la représentation graphique (C) dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ de la fonction f définie sur $[0\,;+\infty[$ par :

$$f(t) = e^{-0{,}2t}(40\cos 2t + 4\sin 2t).$$

a) Montrer que l'intervalle de temps séparant deux extrêma consécutifs est constant.

b) Montrer que les ordonnées des extrêma forment une suite géométrique dont on calculera la raison.



9. Services informatiques - 87

Equations différentielles 1 (TP1) ; fonctions d'une variable réelle 1; calcul différentiel et intégral 2 (TP1)

1° Soit l'équation différentielle : $y'' + 2y' + y = 1$ (E),
où y est une fonction de la variable réelle x.

a) Déterminer l'ensemble des solutions de (E).

b) Trouver la solution particulière g qui vérifie $g(0) = 0$ et $g'(0) = 0$.

c) Etudier les variations de la fonction g et représenter graphiquement g dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (unité = 2 cm).

d) Calculer, en cm², l'aire de la partie du plan, ensemble des points $M(x; y)$ tels que :

$$0 \leq x \leq 1 \text{ et } f(x) \leq y \leq 1$$

2° Soit f la fonction définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{e^{-x} - x - 1}{x}, si\ x \neq 0 \\ f(0) = -2 \end{cases}$$

a) Ecrire le développement limité d'ordre 2 au voisinage de 0 de la fonction h définie par :

$$h(x) = e^{-x};$$

en déduire l'étude de la continuité et de la dérivabilité de f en 0.

b) Etudier les variations de la fonction f.

c) Donner une équation de la tangente à la courbe C, représentative de f, au point d'abscisse zéro. Tracer cette tangente et indiquer, au voisinage de 0, la position de C par rapport à cette tangente.

d) Tracer la courbe C dans le même repère que précédemment.

10. Industries ceramiques - 90

Equations différentielles 1 (TP1)

On considère l'équation différentielle : $y'' + y = x$ (1)
où y'' représente la dérivée seconde de y par rapport à la variable x.

1° On pose $y = z + x$ où z est une fonction de la variable x.
Calculer y'' en fonction de z''.
Remplacer y et y'' dans l'équation (1),
et en déduire que y est solution de (1) si et seulement si z est solution de $z'' + z = 0$ (2).

2° Résoudre l'équation différentielle (2), et en déduire les solutions de l'équation différentielles (1).
Trouver la solution particulière qui vérifie : $y(0) = 0$ et $y'(0) = 0$.

11. Microtechnique - 91

Equations différentielles 1 (TP1) ; fonctions d'une variable réelle 1; calcul différentiel et intégral 2 (TP1)

L'exercice a pour objet l'étude d'une fonction introduite par une équation différentielle et l'observation d'une propriété graphique de sa courbe représentative. La question 1° est indépendante des autres questions.

1° On considère l'équation différentielle :

$$(E) \quad y'' + 2y' + y = x$$

où y est une fonction numérique de la variable réelle x.

a) Donner la solution générale de l'équation $y'' + 2y' + y = 0$.

b) Vérifier que $y = x - 2$ est une solution particulière de (E)

c) Déterminer la solution de (E) dont la courbe représentative passe par l'origine du repère et admet, en ce point, l'axe des abscisses pour tangente.

2° Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (x - 2) + (x + 2)e^{-x}$.
On note (Γ) la courbe représentative de f (repère orthonormal; unité de longueur : 2 cm).

a) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

b) On pose $\phi(x) = f(x) - (x - 2)$. Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} \phi(x)$ et étudier le signe de $\phi(x)$.
Donner l'interprétation graphique de ces résultats.

3° a) Calculer $f'(x)$ et vérifier que $f''(x) = xe^{-x}$.

b) Montrer que $f'(x)$ est de signe constant. En déduire le sens de variation de f.

c) Construire la courbe (Γ).

12. Industries papetières - 92

Equations différentielles 1 (TP1) ; fonctions d'une variable réelle 1 ; calcul différentiel et intégral 1 (TP1)

Partie A

Soit l'équation différentielle : (E) $y'' - y' - 6y = -6x - 1$.

1° Résoudre l'équation différentielle : $y'' - y' - 6y = 0$.

2° Trouver une fonction polynomiale solution de (E) et en déduire l'ensemble des solutions de (E).

3° Déterminer la solution particulière de (E) dont la courbe représentative passe par le point $A(1\ ;\ 0)$ et admet en ce point une tangente de coefficient directeur -2.

Partie B

On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x - e^{3x-3}$$

et sa courbe représentative C dans un repère orthogonal.
(unités graphiques : 5 cm en abscisse et 10 cm en ordonnées.)

1° Etudier les limites de la fonction f en $-\infty$ et en $+\infty$.

2° Montrer que la courbe C admet une asymptote oblique D dont on donnera une équation. Préciser la position de C par rapport à la droite D.

3° a) Déterminer la fonction dérivée f' de la fonction f.

b) Résoudre l'équation, d'inconnue réelle x, $f'(x) = 0$; on donnera la valeur exacte de la solution puis la valeur approchée arrondie au centième.

c) Etudier le sens de variation de la fonction f et établir son tableau de variation.

d) Déterminer une équation de la tangente t à la courbe C en son point d'abscisse 1.
Tracer les droite D et t et la courbe C dans le repère donné.

13. Industries du cuir - 90

Equations différentielles 1 (TP1) ; fonctions d'une variable réelle 1 ; calcul différentiel et intégral 1 (TP1)

Partie A

On note (E) l'équation différentielle $y'' + 2y' - 15y = -15x + 2$.

1° Déterminer les nombres réels a et b tels que la fonction numérique g, définie sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels par $g(x) = ax + b$, soit solution de (E).

2° a) Donner la forme générale des solutions de l'équation différentielle $y'' + 2y' - 15y = 0$.

b) Donner la forme générale des solutions de l'équation (E).

c) Déterminer la fonction, solution de (E), qui prend la valeur 2 au point d'abscisse 1 et dont la dérivée prend la valeur -4 au point d'abscisse 1.

Partie B

1° Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{-5x+5} + x$.

a) Déterminer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

b) Etudier le sens de variation de f et dresser son tableau de variation.

2° On note C la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$, D la droite asymptote à C et t la droite tangente à C au point d'abscisse 1.

a) Donner les équations de D et de T.

b) Tracer les droites D et T, puis la courbe C, sur l'intervalle [0,5 ; 4]; (unité graphique : 2 cm).

14. Moteurs à combustion interne - 93

Equations différentielles 1 (TP1) ; calcul différentiel et intégral 2 (TP1 - TP6 - TP8) ; fonction d'une variable réelle 1

Partie A :

On donne l'équation différentielle linéaire sur $\mathbb{R}$:

$$\text{(E)}\quad y'' + 6y' + 9y = 9x.$$

1° Déterminer deux réels a et b tels que la fonction h, définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = ax + b$ soit solution de l'équation (E).

2° Déterminer la solution de l'équation (E) dont la représentation graphique dans un repère orthonormal passe par l'origine et est tangente en ce point à l'axe des abscisses.

Partie B :

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \left(x + \frac{2}{3}\right)e^{-3x} + x - \frac{2}{3}.$$

On appelle (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$
(unité graphique : 3 cm).

1° a) Déterminer les limites de la fonction f en $-\infty$ et en $+\infty$.

b) Calculer $f'(x)$ et $f''(x)$.
En déduire le sens de variation de la fonction f' (on montrera que $f''(x)$ a le signe de x).
Montrer que $f'(x)$ garde un signe constant.

c) Donner le tableau de variation de la fonction f.

2° Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = f(x) - \left(x - \frac{2}{3}\right)$$

Etudier le signe de la fonction g et déterminer sa limite lorsque x tend vers $+\infty$. En déduire que la courbe (C) admet une asymptote (D) dont on donnera l'équation.
Préciser la position de (C) par rapport à (D).

3° Construire (C), (D) et la tangente à (C) à l'origine.

4° Déterminer une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction f.
Calculer l'aire D_a, exprimée en cm^2, du domaine plan limité par (C), (D), l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = a$, où a est un réel strictement positif.
Calculer la limite de cette aire lorsque a tend vers $+\infty$.

15. Moteurs à combustion interne - 88

Equations différentielles 1 (TP1)

On considère l'équation différentielle du second ordre :

$$y'' - 3y' = 1 - x^2,$$

où y est une fonction numérique de la variable réelle x.

a) Donner la solution générale de cette équation.

b) Déterminer la solution particulière dont la courbe représentative dans un repère orthonormal passe par l'origine avec une tangente en ce point de pente $-\frac{1}{3}$.

16. Maintenance - 93

Equations différentielles 1 (TP1) ; calcul différentiel et intégral 2 (TP1 - TP2)

On considère les équations différentielles :

$$\text{(E)} \qquad y'' - 2y' + 2y = 0,$$

$$\text{et (E')} \quad y'' - 2y' + 2y = \frac{2x^3}{3} - 2x^2$$

où y est une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ de la variable réelle x.

1° Résoudre l'équation différentielle (E).

2° Déterminer des réels a, b, c et d tels que la fonction φ, définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\varphi(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

soit une solution de (E').

3° Déduire des deux questions précédentes l'ensemble des solutions de l'équation (E').

4° On appelle Φ la solution de (E') dont la représentation graphique passe par l'origine du repère et admet comme tangente en ce point l'axe des abscisses.

Montrer que $\Phi(x) = e^x \cos x + \dfrac{x^3}{3} - x - 1$.

5° Ecrire le développement limité d'ordre 4 de $\Phi(x)$ au voisinage de 0.
En déduire la position de la courbe représentative de Φ par rapport à l'axe des abscisses au voisinage du point d'abscisse 0.

17. **Maintenance - 92**

Equations différentielles 1 (TP1)

Soit (E) l'équation différentielle : $x'' + 9x = 2\cos \omega t$, où l'inconnue x est une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et ω un paramètre réel positif ou nul.

1° Résoudre l'équation (E_0) : $x'' + 9x = 0$

2° Résoudre l'équation (E) dans le cas où $\omega \neq 3$.
On cherchera une solution particulière x_1 telle que : $x_1(t) = A\cos \omega t$ où A est une fonction de ω.

3° Résoudre l'équation (E) dans le cas particulier où $\omega = 3$.
Soit (E_1) : $x'' + 9x = 2\cos 3t$.
On cherchera une solution particulière x_2 telle que : $x_2(t) = t(C_1 \cos 3t + C_2 \sin 3t)$, C_1 et C_2 étant deux nombres à déterminer.

18. **Ennoblissement textile - 91**

Equations différentielles 1 (TP1)

On considère l'équation différentielle du second ordre :

$$(E) : \quad 2y'' - y' - y = 0$$

où y une fonction de la variable x, définie sur $\mathbb{R}$, dérivable, y' étant sa dérivée première et y'' sa dérivée seconde.

1° Donner la solution générale sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle (E).

2° Déterminer les nombres réels A et B pour que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = A\sin 2x + B\cos 2x,$$

soit une solution de l'équation différentielle :

$$(F) \quad 2y'' - y' - y = 5\sin 2x$$

En déduire la solution générale de l'équation différentielle (F).

3° Donner la solution particulière g de l'équation différentielle (F) telle que : $g(0) = 0$ et $g'(0) = -\dfrac{20}{17}$.

19. **Construction métallique - 92 (extrait)**

Equations différentielles 2 (TP1), calcul différentiel et intégral 1 (TP2)

On considère l'équation différentielle (E) :

$$x'' + 2x' + 5x = 40te^{-t}$$

où x est fonction de la variable réelle t.

1° Résoudre l'équation différentielle (e) : $x'' + 2x' + 5x = 0$.

2° Déterminer une solution particulière de (E), qu'on notera $f(t)$, de la forme $f(t) = \alpha te^{-t}$, où α désigne un nombre réel.

3° En déduire l'ensemble des solutions de (E).

4° Calculer l'intégrale $I = \int_0^1 10te^{-t}\,dt$. On donnera sa valeur exacte, puis sa valeur décimale approchée à 10^{-2} près par défaut.

20. Productique textile - 91

Equations différentielles 1 (TP1) ; fonctions d'une variable réelle 1 ; calcul différentiel et intégral 1 (TP1)

1° a) Résoudre l'équation différentielle : (E) : $y'' + 2y' + y = 2\,e^{-x}$

b) Déterminer la solution particulière f de l'équation (E) telle que $f(0) = 1$ et $f'(0) = 1$.

2° Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (x + 1)^2\,e^{-x}$

a) Etudier les variations de la fonction f. (on admettra que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$)

b) Dans le plan rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (unité : 2 cm), soit (C) la courbe représentative de la fonction f.
Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe (C) au points d'abscisse 0.
Etudier la position de la courbe (C) par rapport à la droite (T) pour x appartenant à l'intervalle $]-1; +1[$.

c) Tracer (T) et (C).

21. Maintenance et exploitation des materiels aeronautiques - 91

Equations différentielles 1 (TP1) ; fonctions d'une variable réelle 1 ; calcul différentiel et intégral 2 (TP1)

La résonance

On se propose de résoudre l'équation différentielle (E) :

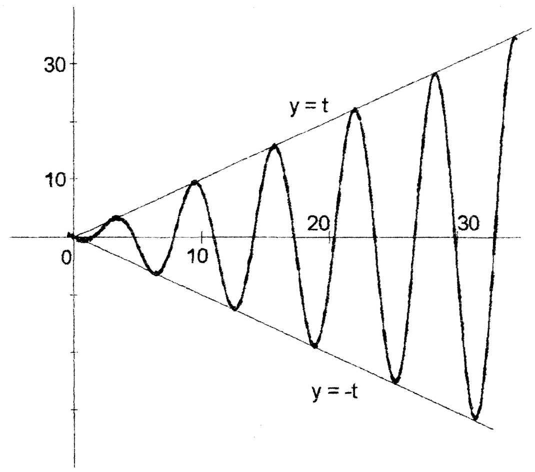
$$(E) \qquad y'' + \omega^2 y = a \sin(\omega t)$$

où ω et a sont deux réels fixés, t un réel positif représentant le temps, y une fonction de la variable t, définie sur $\mathbb{R}$, deux fois dérivable, et y'' sa dérivée seconde.

Cette équation différentielle est celle d'un système électrique ou mécanique dont les oscillations sont entretenues par une force de même fréquence que la fréquence propre du système. Il y a alors résonance.

1° a) Résoudre l'équation différentielle : $y'' + \omega^2 y = 0$, où y est une fonction .

b) Montrer que l'équation (E) admet une solution particulière $h : t \mapsto kt\cos(\omega t)$ où k est un réel à calculer.



c) En déduire les solutions de (E).

2° Déterminer la solution de (E) vérifiant les conditions initiales : $y(0) = 0$ et $y'(0) = \frac{-a}{2\omega}$.

3° Soit f la solution de (E) vérifiant les conditions précédentes avec $a = 2$ et $\omega = 1$, c'est-à-dire celle définie par :

$$f(t) = -t\cos t.$$

Montrer que, pour tout t : $-t \le f(t) \le t$.

4° La représentation graphique C de f dans le plan rapporté à un repère orthogonal $(O; \vec{i}, \vec{j})$

est donnée ci-dessus.

a) Trouver les abscisses des points d'intersection de (C) avec l'axe $(O; \vec{\imath})$.

b) Déterminer, pour $t > 0$, les coordonnées des points communs à la courbe (C) et aux droites d'équation $y = t$ et $y = -t$; vérifier que ces droites sont, en ces points, tangentes à (C).

22. En assistance technique d'ingénieur - 89

Equations différentielles 1 (TP1) ; fonctions d'une variable réelle 2 ; calcul différentiel et intégral 3 (TP1 - TP8 - TP10)

Le problème est consacré à l'étude d'une solution particulière de l'équation différentielle :

$$\text{(E)} \qquad y'' + 4y' + 13y = 5 \sin 2t$$

qui représente l'intensité du courant dans un circuit R.L.C. soumis à une tension sinusoïdale.

1° a) Déterminer la solution générale sur $[0; +\infty[$ de l'équation différentielle : $y'' + 4y' + 13y = 0$.

b) Déterminer une solution particulière de (E) de la forme : $t \mapsto A \cos 2t + B \sin 2t$.

c) Donner la solution générale sur $[0; +\infty[$ de l'équation (E).

d) Montrer que le régime permanent est donné par :

$$i_2(t) = \frac{\sqrt{145}}{29} \sin (2t - \varphi) \text{ où } \tan \varphi = \frac{8}{9},\ 0 < \varphi < \frac{\pi}{2}.$$

Dans la suite du problème, on prendra $\varphi = 0{,}73$ radian et l'on s'intéressera à la solution particulière de (E) sur $[0; \infty[$, définie par $i(t) = i_1(t) + i_2(t)$ où $i_1(t) = e^{-2t} \sin 3t$ représente le régime transitoire.

2° On désigne par C_1 et C_2 les courbes représentatives de i_1 et i_2 sur l'intervalle $[0; \pi]$ dans un repère orthogonal $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ en prenant pour unité graphique : 5 cm sur l'axe $(O; \vec{\imath})$ et 10 cm sur l'axe $(O; \vec{\jmath})$.

a) Montrer que i_1' peut s'écrire sous la forme :

$$i_1' = e^{-2t}\sqrt{13}\cos(3t - \psi) \text{ où } \tan \psi = -\frac{2}{3},\ -\frac{\pi}{2} < \psi < 0.$$

Etudier le sens de variation de i_1 sur $[0; \pi]$. (on prendra $\psi = -0{,}59$ radian)

Donner les valeurs approchées à 10^{-2} près des coordonnées des extrêma et des points d'intersection de C_1 avec l'axe des abscisses $(O; \vec{\imath})$. Tracer C_1.

b) Etudier le sens de variation de i_2 sur $[0; \pi]$.

Donner les valeurs approchées à 10^{-2} près des coordonnées des extrema et des points d'intersection de C_2 avec l'axe des abscisses $(O; \vec{\imath})$. Tracer C_2.

c) Déduire graphiquement des courbes C_1 et C_2 la courbe représentative C de la fonction i sur $[0; \pi]$.

3° Démontrer que, pour tout réel positif, $|i_1(t)| \le e^{-2t}$.

En déduire que, pour tout t supérieur ou égal à 2,5, $i_2(t)$ est une valeur approchée de $i(t)$ à 10^{-2} près.

Comment faut-il choisir t positif pour que $i_2(t)$ soit une valeur approchée de $i(t)$ à 10^{-6} près ?

4° a) Calculer l'intégrale : $\int_{\frac{2\pi}{3}}^{\pi} e^{-2t} \sin 3t \, dt$.

b) Calculer les valeurs moyennes de i_1, i_2 et i sur l'intervalle $\left[\frac{2\pi}{3}; \pi\right]$.

Donner pour chacune d'elles une valeur approchée à 10^{-3} près.
(On rappelle que la valeur moyenne d'une fonction continue f sur un intervalle $[a; b]$ est :

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt.$$

23. Microtechnique - 88

Equations différentielles 1 (TP1) ; fonctions d'une variable réelle 1; calcul différentiel et intégral 2 (TP1 - TP4 - TP8)

Soit l'équation différentielle (E) $y'' - \alpha y = e^{-x}$.
où y est la fonction numérique inconnue de la variable réelle x et où α est un réel donné strictement positif.

1° a) Résoudre l'équation $y'' - \alpha y = 0$.

b) On suppose $\alpha \neq 1$. Déterminer une solution particulière de (E). En déduire, à l'aide de a) la solution générale de (E) lorsque $\alpha \neq 1$.

c) On suppose $\alpha = 1$. Trouver le réel λ tel que $\lambda\, x\, e^{-x}$ soit solution particulière de (E).
En déduire à l'aide de a) la solution générale de (E) lorsque $\alpha = 1$.

2° On se propose de déterminer puis d'étudier une fonction f solution sur $\mathbb{R}$ de $f''(x) - f(x) = e^{-x}$ et vérifiant : $f(0) = 1$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

a) En utilisant la question 1° c), déterminer toutes les solutions de (E), pour $\alpha = 1$, qui tendent vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$. Montrer ensuite que f est déterminé de façon unique par :

$$f(x) = \left(1 - \frac{x}{2}\right)e^{-x}.$$

b) Etudier les variations de f, déterminer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.

c) Construire la courbe représentative (C) de f dans le plan rapporté à un repère orthonormal (unité graphique : 2 cm).

d) En utilisant l'équation différentielle (E), montrer qu'une primitive F de f dans $\mathbb{R}$ est définie par :

$$F(x) = f'(x) + e^{-x}.$$

En déduire l'aire, en cm^2, du domaine limité par (C), l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 0$ et $x = 2$. Donner une valeur approchée de cette aire à 10^{-4} près.

24. Industries papetières - 89

Equations différentielles 1 (TP1) ; fonctions d'une variable réelle 1, calcul différentiel et intégral 1 (TP1 - TP2 - TP3)

Les deux questions peuvent être traitées de façon indépendante.

1° Soit l'équation différentielle (E) : $y'' + y' - 2y = (12x - 5)e^x$, où y représente une fonction numérique de la variable réelle x.

a) Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle (E_0) : $y'' + y' - 2y = 0$.

b) Recherche sur $\mathbb{R}$ une solution particulière de (E) de la forme $y = ze^x$ où z est une fonction polynôme du second degré de la variable réelle x : $x \mapsto \alpha x^2 + \beta x$ que l'on déterminera.
En déduire l'ensemble des solutions de (E).

c) Trouver la solution particulière f de (E) pour laquelle on a : $f(0) = 2$ et $f'(0) = -1$.

2° On considère la fonction f de la variable réelle x définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (2x^2 - 3x + 2)e^x$$

et on désigne par (C) sa représentation graphique dans le plan rapporté au repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$; l'unité de longueur est 2 cm.

a) Etudier la limite de f en $+\infty$.

b) Etudier la limite de f en $-\infty$; en déduire que (C) admet une asymptote que l'on précisera.

c) Etudier les variations de f.

d) Tracer (C) ainsi que la tangente au point d'abscisse 0. On admettra, qu'en ce point, la courbe (C) traverse sa tangente.

e) Déterminer les réels a, b et c pour que la fonction F de la variable réelle x définie par :

$$F(x) = (ax^2 + bx + c)\,e^x$$

soit une primitive de f.

f) Calculer en cm^2 l'aire de la portion de plan constitué par l'ensemble des points M(x; y) tels que :

$$0 \leq x \leq 1 \text{ et } 0 \leq y \leq f(x).$$

25. Instruments d'optique de précision - 87

Equations différentielles 2 (TP1) ; fonctions d'une variable réelle 2 ; calcul différentiel et intégral 3 (TP1 - TP7 - TP10)

On considère une fonction numérique f de la variable réelle x, deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, définie par :

$$f(x) = (ax^2 + bx + c)\,e^x$$

où a, b et c sont des réels à déterminer.

1° Déterminer f pour qu'elle vérifie, sur $\mathbb{R}$, l'équation différentielle $y'' - 2y' + y = 2\,e^x$.
dans laquelle y' désigne la dérivée première et y'' la dérivée seconde de y.

2° Parmi les fonctions f ainsi précisées, donner celles qui vérifient $f(0) = 1$ et $f'(2) = 0$.

3° On considère l'application de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = (x^2 - 3x + 1)e^x$, et C sa courbe représentative dans le plan rapporté au repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$;
l'unité est représentée par 2 cm.
Tracer C.
Indiquer, par leurs coordonnées, les points d'intersection de C avec les axes $(O; \vec{i})$ et $(O; \vec{j})$.

4° Calculer, en cm^2, l'aire du domaine du plan, ensemble des points M(x; y) tels que :

$$\begin{cases} -1 \leq x \leq 0 \\ 0 \leq y \leq f(x) \end{cases}$$

26. Traitement des matériaux - 93

Equations différentielles 1 (TP1) ; calcul différentiel et intégral 2 (TP1 - TP6 - TP8) ; fonction d'une variable réelle 1

Les parties A et B sont indépendantes

Partie A :

On considère l'équation différentielle :

$$\text{(E)} \quad y'' - y' - 6y = 6\left(3e^x - 1\right)$$

dans laquelle y désigne une fonction inconnue de la variable réelle x appartenant à $\mathbb{R}$, y' sa fonction dérivée, et y'' sa fonction dérivée seconde (c'est à dire la fonction dérivée de y').

1° Chercher une solution particulière y_p de (E) sous la forme :

$$y_p = ae^x + b,$$

a et b réels à déterminer.

2° On pose $y = y_p + z$, où z désigne une fonction inconnue de la variable réelle x appartenant à $\mathbb{R}$, deux fois dérivable.
Montrer que y est solution de (E) si et seulement si z est solution de l'équation différentielle :

$$(E') \quad : \quad z'' - z' - 6z = 0$$

3° Résoudre l'équation (E').

4° En déduire la solution générale de (E).

5° Déterminer la solution particulière de (E) $y = f(x)$ vérifiant :

$$f(0) = 2 \text{ et } f\left(ln\frac{1}{2}\right) = 0 \text{ (}ln \text{ est le logarithme népérien).}$$

Partie B :

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[-ln\,2\,;\,0]$ par :

$$f(x) = 4e^{3x} - 3e^x + 1$$

1° a) Calculer $f'(x)$ et étudier son signe.

b) Dresser le tableau de variation de f.

2° Soit (C) la courbe d'équation $y = f(x)$ dans un repère orthogonal $(O\,;\,\vec{i},\,\vec{j})$ (unités graphiques : 20 cm en abscisses, 10 cm en ordonnée).
Tracer la courbe (C).

Partie C :

On désigne par Δ la plaque plane délimitée par l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la courbe (C).

On fait tourner cette plaque autour de l'axe $(O,\,\vec{i})$ engendrant ainsi un solide dont on se propose de calculer le volume V. Ce calcul étant long et fastidieux, on décide d'approcher (C) par une courbe (C′) d'équation $y = g(x)$, g étant la fonction polynôme définie sur l'intervalle $[-ln\,2\,;\,0]$ par :

$$g(x) = \frac{2}{(ln\,2)^3}(x + ln\,2)^3$$

1° Faire un tableau donnant les valeurs décimales approchées à 10^{-3} près de $[f(x) - g(x)]$ pour les valeurs suivantes de x :

$-ln\,2$; -0,6 ; -0,5 ; -0,4 ; -0,3 ; -0,2 ; -0,1 ; 0.

2° Calculer le volume V' du solide obtenu en faisant tourner, autour de l'axe $(O,\,\vec{i})$, la plaque plane Δ' délimitée par l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la courbe (C′).
On donnera d'abord la valeur exacte de V' en unités de volume, puis une valeur décimale approchée, au cm^3 près.

3° En admettant qu'on a $V = \pi\left(ln\,2 - \dfrac{7}{24}\right)$ unités de volume, quelle erreur relative commet-on sur le volume exprimé en cm^3 en utilisant V' comme valeur approchée de V ?

27. Equipement technique-énergie - 93

Calcul différentiel et intégral 2 (TP1 - TP2) ; équation différentielle 1 (TP1) ; fonction d'une variable réelle 1

Le plan est rapporté à un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ d'unités graphiques :

2 cm sur l'axe des abscisses
1 cm sur l'axe des ordonnées.

1° Soit l'équation différentielle du second ordre :
E : $y'' - y' - 6y = -5e^{-2x}$
dans laquelle y est fonction de la variable x, deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.
a) Résoudre l'équation E.

b) Déterminer la solution particulière de l'équation E prenant la valeur 1 pour $x = 0$ et la valeur 0 pour $x = -1$.

2° Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie par : $f(x) = (x+1)e^{-2x}$.
On désigne par (C) sa courbe représentative dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

a) Etudier les variations de la fonction f et préciser les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$, en les justifiant.
Rassembler les résultats de l'étude dans un tableau de variations.

b) Déterminer le développement limité de f au voisinage de $x = 0$, à l'ordre 3. En déduire la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 0, et préciser la position de la courbe par rapport à cette tangente, au voisinage de 0.

c) Construire la courbe (C) et la tangente à (C) en son point d'abscisse 0.

28. Fabrications textiles - 88

Equations différentielles 1 (TP1) ; calcul différentiel et intégral 2 (TP1 - TP2))

1° On se propose, dans un premier temps, de résoudre l'équation différentielle linéaire du second ordre :

$$\text{(E)} \quad y'' - 2y' + 2y = 2\cos x - \sin x$$

a) Résoudre l'équation $y'' - 2y' + 2y = 0$.

b) Calculer les réels α et β tels que la fonction $x \mapsto \alpha \cos x + \beta \sin x$ soit une solution particulière de l'équation (E).

c) En déduire la solution générale de (E).

2° Donner la solution $y = f(x)$ de (E) dont le développement limité à l'ordre 1 au voisinage de 0 est :

$$f(x) = 1 + x + x\,\varepsilon(x) \text{ avec } \lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0.$$

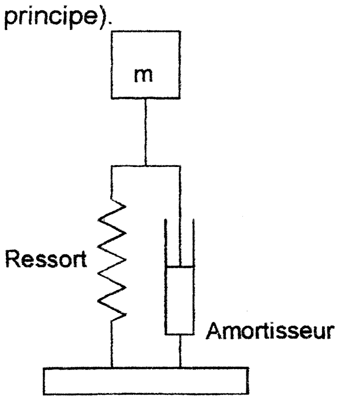
Soit (Γ) la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$ et A le point de coordonnées (0; 1).
Préciser la position de (Γ) par rapport à sa tangente en A au voisinage de ce point.

2. Exercices à support concret : mécanique - automatique

1. Mécanique et automatismes industriels - 87

Equations différentielles 1 (TP1)

On considère une masse m posée sur le sol à l'aide d'une suspension amortie (voir schéma de principe).



On repère la position de la masse m par la longueur x du ressort (on note l la longueur à vide du ressort); la longueur x étant fonction du temps.
En écrivant la condition d'équilibre du système, on obtient l'équation différentielle suivante :

$$-mg + k(l - x) - fx' = mx''$$

C'est à dire :

$$mx'' + fx' + kx = kl - mg \quad (1)$$

x' : vitesse de la masse m (dérivée de x)
x'' : accélération de la masse m (dérivée seconde de x)
k : constante du ressort

g : accélération de la pesanteur
f : constante de l'amortisseur.

Le but du problème est d'étudier le mouvement de la masse m, c'est à dire d'exprimer x en fonction du temps.

1° Indiquer, en fonction de f, les différentes formes de la solution générale de l'équation sans second membre :

$$mx'' + fx' + kx = 0 \quad (2)$$

2° Déterminer une solution particulière de l'équation avec second membre (1).

3° On veut éviter toute solution conduisant à des oscillations du système, c'est-à-dire toute solution faisant intervenir des solutions trigonométriques. Comment choisir f ?

4° *(Cette question peut éventuellement être traitée indépendamment des trois premières).*
Ici on donne :

$k = 25\,000$ N/m $\qquad m = 200$ kg
$g = 10$ m/s^2 $\qquad l = 0{,}4$ m
$f = 6\,000$ N/m/s

4.1 Donner la solution générale de l'équation différentielle.

4.2 A l'instant $t = 0$, on a : $x = 0{,}4$ m et $x' = 0$. Donner la solution de l'équation vérifiant ces conditions initiales.

2. Productique - 88

Equations différentielles 1 (TP1) ; fonctions d'une variable réelle 1

On considère un appareil de levage sur lequel un système suspension-amortisseur est soumis aux vibrations du moteur.
La mise en équation de ce système conduit à l'équation différentielle suivante :

$$m\frac{d^2y}{dt^2}+f\frac{dy}{dt}+ky=A\sin\omega t$$

où m est la masse du système en vibration,
f, le coefficient de frottement,
k, la constante de raideur du ressort,
$A \sin \omega t$, la force vibrante transmise au système par le moteur.

Cette mise en équation, pour l'appareil étudié, a conduit à l'équation différentielle (E) :

$$y'' + 4y' + 5y = 13 \sin 2t.$$

1° Vérifier que la fonction $f : t \mapsto f(t) = -1{,}6 \cos 2t + 0{,}2 \sin 2t$ est une solution de (E) sur $\mathbb{R}$.

2° Résoudre l'équation différentielle $y'' + 4y' + 5y = 0$.

3° a) Donner la solution générale de l'équation différentielle (E).

b) Déterminer la solution g, de l'équation différentielle (E) satisfaisant aux deux conditions :

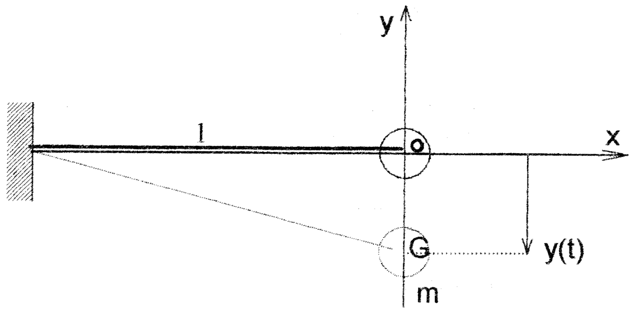
$$g(0) = -1{,}6 \text{ et } g'(0) = 0.$$

c) Montrer que la valeur absolue de $(g(t) - f(t))$ peut être majorée par $0{,}4\, e^{-2t}$. A partir de quelle valeur entière t_1 de t cette majoration permet-elle d'affirmer que l'on a $g(t) = f(t)$ à 10^{-3} près ?

3. Construction métallique - 89

Equations différentielles 1 (TP1)

La résolution de cet exercice ne demande aucune connaissance de mécanique.



L'étude des vibrations d'une poutre encastrée à une extrémité et affectée d'une charge de masse m à l'autre, dans un milieu amortissant, conduit à la résolution d'une équation différentielle du type :

$$my'' + \lambda y' + \frac{3EI}{l^3}y = F(t)$$

<u>y est fonction du temps</u> t représentant l'ordonnée de g (voir figure);
m : masse de la charge;
λ : coefficient d'amortissement du milieu extérieur;
E : module d'Young du matériau constituant la poutre;
I : moment quadratique de la section de la poutre;
l : longueur de la poutre;
$F(t)$: force imposée en G, qui est fonction du temps

Dans toute la suite, on considère le cas d'une application numérique conduisant à l'équation suivante :

$$10\, y'' + 2y' + 5y = F(t) \qquad (E) \qquad t \in \mathbb{R}^+$$

1° Résoudre (E) dans le cas où $F(t) = 0$ (cas des vibrations propres de la poutre).

2° Résoudre (E) dans le cas où $F(t) = -91\ e^{-t}$.
Calculer dans ce cas la solution particulière f de (E) qui vérifie : $f(0) = 0$ et $f'(0) = 0$.

3° Résoudre (E) dans le cas où $F(t) = -58\ cos^2\left(\frac{t}{2}\right)$.

On pourra remarquer que $cos^2\left(\frac{t}{2}\right) = \frac{1+cos t}{2}$, et chercher une solution particulière de (E) sous la forme :

$$y = A + B\cos t + C\sin t.$$

4. Productique - 90

Equations différentielles 1 (TP1) ; fonctions d'une variable réelle 1

Un corps oscillant autour d'un axe $x'x$ est ramené vers sa position d'équilibre par un couple de rappel de moment $M = k\ \theta$ où k est une constante réelle et θ, l'élongation angulaire, une fonction numérique de la variable réelle positive t représentant le temps exprimé en secondes.

Ce corps oscillant ayant un moment d'inertie par rapport à $x'x$ égal à I, subit à chaque instant une résistance dont le moment est $f.\theta'$ où la vitesse angulaire θ' est la fonction dérivée de θ et f une constante réelle.

Par application du théorème des moments cinétiques, l'élongation angulaire θ est solution de l'équation différentielle :

$$\text{(E)} \quad I\,y'' + f\,y' + k\,y = 0$$

1° Pour $\left(4kI - f^2\right)$ strictement positif, on note $\omega = \frac{1}{2I}\sqrt{4kI - f^2}$ et $\lambda = \frac{f}{2I}$.

Déterminer les fonctions numériques g de la variable t définies sur $[0\ ;\ \infty[$ qui sont solutions de l'équation (E).

2° Préciser la solution particulière θ de l'équation (E) vérifiant les conditions initiales :

$$\theta(0) = 1 \text{ et } \theta'(0) = \omega - \lambda.$$

3° Déterminer les réels α et φ tels que $\theta(t)$ se mette sous la forme :

$$\theta(t) = \alpha\, e^{-\lambda t} \cos(\omega t - \varphi) \text{ avec } \varphi \in [0\ ;\ \pi[.$$

4° On donne $\lambda = 0{,}1$. Démontrer que, pour tout réel t positif on a :

$$|\theta(t)| \le \sqrt{2}\, e^{-0{,}1t}.$$

A partir de quel instant t_0, exprimé en secondes par un nombre entier, cette majoration permet-elle d'affirmer que la valeur absolue de l'élongation du corps est inférieure au cinquième de l'élongation initiale.

5. Productique - 91

Equations différentielles 1 (TP1) ; calcul différentiel et intégral 2 (TP1)

On se propose d'étudier la déformation élastique par flambement d'une poutre arquée.
On soumet cette poutre à une force longitudinale d'intensité F.
On montre que la déformation élastique d qu'elle subit alors est la solution particulière de l'équation différentielle (E) définie sur $[0\ ;\ 1]$ par :

$$\text{(E)} \quad y'' + \omega^2 y = -\omega^2 \sin(\pi x)$$

où y une fonction de la variable t, définie sur $\mathbb{R}$, deux fois dérivable, et y'' sa dérivée seconde.
Cette solution s'annule pour $x = 0$ et pour $x = 1$. ω est une constante située dans l'intervalle $]0\ ;\ \pi[$ et dépendant de F.

1° a) Indiquer la solution générale de l'équation sans second membre : (E_0) $\quad y'' + \omega^2 y = 0$.

b) Déterminer le réel k tel que la fonction qui à x fait correspondre $k\ sin(\pi x)$ soit solution de l'équation (E).

c) En déduire la solution générale de l'équation (E).

2° Exprimer la déformation élastique d en fonction de ω et de x.

3° Montrer que la déformation élastique d est maximale pour $x = ½$.
Exprimer ce maximum en fonction de ω.

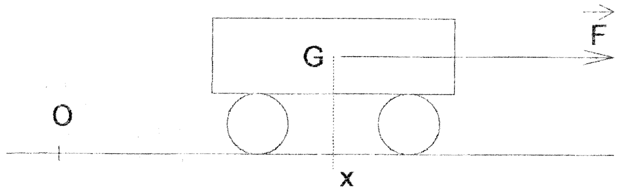
6. Exploitation des véhicules à moteurs - 89

Equations différentielles 1 (TP1) ; fonctions d'une variable réelle 1 ; calcul différentiel et intégral 2 (TP1)

Un véhicule de masse M se déplace sur une voie ferrée rectiligne. Il est soumis à une force d'entraînement constant $\vec{F}$. La résistance à l'avancement due aux frottements est proportionnelle à la vitesse. La position du véhicule est repérée par l'abscisse x du centre de gravité G, O étant l'origine des abscisses. Le principe fondamental de la dynamique donne l'équation différentielle du mouvement (E).

$$(E)\quad : F = k\,x' + M\,x''$$

F est l'intensité de la force d'entraînement
x' la dérivée de x par rapport au temps : la vitesse du véhicule
x'' la dérivée seconde de x : l'accélération du véhicule
k est la constante de frottements.



1° Donner la solution générale de l'équation différentielle (E).

2° Dans le cas où F = 1000 N, M = 500 kg et k = 30 $\mathrm{N}/_{\mathrm{m/s}}$ montrer que la solution trouvée au 1° s'écrit :

$$x(t) = \frac{100}{3}t + C_1 + C_2 e^{\frac{-3}{50}t}$$

3° A l'instant $t = 0$ le véhicule démarre, les conditions initiales sont donc $t = 0$, $x = 0$, $x' = 0$.

a) Donner la solution particulière correspondant à ces conditions.

b) Donner l'expression de la vitesse du véhicule en fonction du temps et calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} x'(t)$.
V_1 désigne cette valeur.

c) Déterminer alors le temps nécessaire pour que la vitesse du véhicule atteigne 99% de sa valeur limite V_1.
On sera amené à résoudre l'inéquation : $\dfrac{V_1 - x'(t)}{V_1} \leq 0{,}01$.

7. Exploitation des véhicules à moteurs - 92

Equations différentielles 1 (TP1) ; fonctions d'une variable réelle 1 ; calcul différentiel et intégral 2 (TP1)

Partie 1

On se propose de résoudre sur [0 ; +∞[l'équation différentielle (E) :

$$z'' + 2z' + z = 11 - e^{-t}$$

où z est une fonction inconnue de la variable t.

1° Résoudre sur [0 ; +∞[l'équation différentielle $z'' + 2z' + z = 0$.

2° Déterminer les nombres réels a et b de sorte que la fonction f définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par :

$$f(t) = a + bt^2e^{-t}$$

soit une solution particulière sur $[0\ ;\ +\infty[$ de l'équation différentielle (E).

3° En déduire la solution générale de l'équation différentielle (E).

4° Etablir que la fonction g donnée par :

$$g(t) = 11 - \left(0{,}5t^2 + 11t + 11\right)e^{-t}$$

est la solution particulière de l'équation (E) qui satisfait aux conditions initiales $g(0) = 0$et $g'(0) = 0$.
On note (C) la courbe représentative de g dans un repère orthonormal d'unités graphiques 2 cm sur chaque axe.

5° a) Calculer la dérivée de g et étudier son signe sur $[0\ ;\ +\infty[$.
Construire le tableau des variations de g.
Calculer la limite L de $g(t)$ quand tend vers $+\infty$.

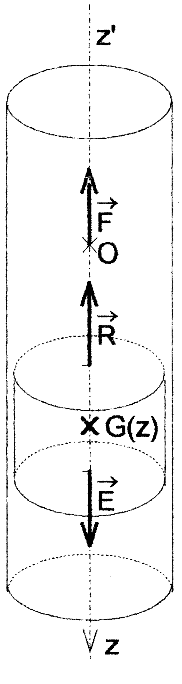
b) Ecrire une équation de la tangente (D) au point d'abscisse $t = 1$ à la courbe (C).

c) Donner des valeurs approchées à 10^{-2} près de $g(2)$, $g(4)$, $g(6)$, $g(8)$.

d) Tracer la courbe (C) dans le repère défini plus haut.

Partie 2

Un cylindre métallique pesant est mobile dans un tube cylindrique. Il est suspendu à un ressort qui exerce une force de rappel notée $\vec{R}$. Il est aussi soumis à une force électromagnétique notée $\vec{E}$. Le mouvement de ce cylindre à l'intérieur de la gaine est soumis à des forces de frottement dont la résultante est notée $\vec{F}$.
L'étude du mouvement de ce cylindre est ramené à l'étude du mouvement de son centre de gravité G.
La position de g est repérée, sur l'axe orienté $(z'Oz)$, par l'abscisse z qui est une fonction du temps.
La vitesse de g est égale à la dérivée de z par rapport au temps notée z'. L'accélération de g est la dérivée de z' par rapport au temps ; elle est notée z''.



z est exprimé en mètres.

$$E = M\left(1 - e^{-t}\right) \text{ avec : } \begin{cases} m = 2\ kg \\ \quad et \\ \left(1 - e^{-t}\right) \text{ exprimé en } m/s^2 \end{cases}$$

$R = kz$	$k = N/m$
$F = \alpha z'$	$\alpha = 4\ N/m/s$
$P = Mg$	$g = 10\ m/s^2$

La projection sur l'axe $(z'\ O\ z)$ de la résultante des forces appliquées au point g est égale à :

$$Mg + M\left(1 - e^{-t}\right) - kz - \alpha z'.$$

A l'instant initial ($t = 0$) le point g est en l'origine O du repère $(z'Oz)$ et sa vitesse initiale est nulle.
Le principe fondamental de la dynamique permet donc d'écrire l'équation différentielle :

$$Mz'' = Mg + M\left(1 - e^{-t}\right) - kz - \alpha z'.$$

que l'on note (E').

1° Montrer que l'équation différentielle (E') est l'équation différentielle (E) étudiée dans la première partie du problème.

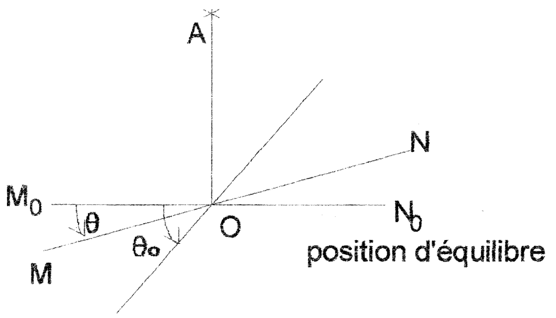
2° a) Déduire de la question 1° l'expression de l'abscisse z en fonction de t.

b) Estimer graphiquement le temps mis pour que le point g ait une abscisse égale à $\frac{99}{100}L$ où L est la limite calculée dans la question 5° a) de la première partie.

8. Mécanique et automatismes industriels - 90

Equations différentielles 1 (TP1) ; calcul différentiel et intégral 2 (TP1)

Une barre MN, horizontale, est suspendue par son centre d'inertie O à un fil de torsion vertical OA, de constante de torsion C (exprimé en *N.m/rad*). On note J le moment d'inertie de la barre par rapport à l'axe OA (J est exprimé en $kg.m^2$).



On écarte la barre de sa position d'équilibre M_0N_0 d'un angle θ_0 et on la lâche sans vitesse à l'instant $t_0 = 0$.

On note θ l'élongation angulaire (exprimée en radians) à l'instant t (exprimé en secondes).

On rappelle que :

- l'énergie cinétique de la barre est : $E_c = \frac{1}{2}J\theta'^2$

où θ' est la dérivée de θ (θ' est la vitesse angulaire).

- l'énergie potentielle (torsion du fil) est $E_p = \frac{1}{2}C\theta^2$.
- l'énergie totale du système est $E = E_c + E_p = \frac{1}{2}J\theta'^2 + \frac{1}{2}C\theta^2$. (1)

On suppose qu'il n'y a pas de frottement; l'énergie totale E est alors constante.

1° a) Montrer, après avoir dérivé l'égalité (1), que le mouvement de la barre se caractérise par l'équation différentielle :
$J\,\theta'' + C\theta = 0$ où θ'' est la dérivée seconde de θ.
(On ne tiendra pas compte de la solution $\theta' = 0$, physiquement sans intérêt).

b) On donne J = 0,018 et C = 0,2. Exprimer la solution générale de l'équation différentielle ainsi obtenue.

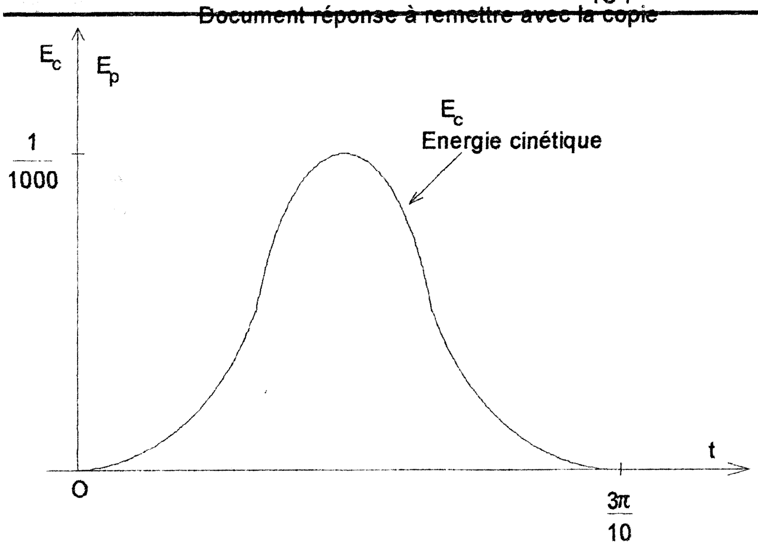
c) Exprimer la solution particulière qui satisfait aux conditions initiales :
pour $t_0 = 0$, $\theta_0 = 0{,}1$ et $\theta'_0 = 0$.
Quelle est la période t de cette solution ? (T est la période des oscillations)

2° On prend maintenant :

$$\theta(t) = 0{,}1\ cos\left(\frac{10}{3}t\right).$$

a) Exprimer en fonction de t l'énergie cinétique et l'énergie potentielle.
Montrer que si l'énergie cinétique est maximale alors l'énergie potentielle est nulle.
Calculer l'énergie totale.

~~Document réponse à remettre avec la copie~~



b) On donne ci-contre la représentation graphique de l'énergie cinétique sur l'intervalle $\left[0; \frac{3\pi}{10}\right]$.

En déduire (sur la même feuille) la représentation graphique de l'énergie potentielle sur l'intervalle $\left[0; \frac{3\pi}{10}\right]$.

9. Productique - 93

Equations différentielles 1 (TP1) ; fonction d'une variable réelle 1

Soit un circuit électrique comportant en série une bobine de résistance chimique R, d'inductance propre L et un condensateur de capacité C. Soit E la force électromotrice de la source.

On appelle :

q la fonction qui, à tout instant t, fait correspondre la charge $q(t)$ du condensateur.
i la fonction qui, à tout instant t, fait correspondre l'intensité $i(t)$ du courant dans le circuit.

On démontre que q est une solution particulière de l'équation différentielle :

$$Ly'' + Ry' + \frac{1}{C}y = E$$

et que i est la fonction dérivée de q.

1° Montrer que, en prenant :
$L = 0{,}05$ Henry, $R = 20$ Ohms, $C = 100 \times 10^{-6}$ Farad et $E = 100$ Volts
on obtient l'équation suivante :

$$(1) \quad y'' + 400y' + 200\,000y = 2000$$

dans laquelle y est une fonction de t ($t > 0$).

2° a) Déterminer la solution générale de l'équation sans second membre :

$$y'' + 400y' + 200\,000y = 0$$

b) Déterminer une solution particulière de l'équation (1) qui soit une fonction constante.

c) En déduire la solution générale de l'équation (1).

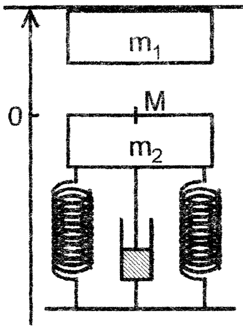
3° Sachant que, à l'instant $t = 0$, on a $q(t) = 0$ et $i(t) = 0$, déterminer les fonctions q et i.

4° Déterminer la limite de $i(t)$ et celle de $q(t)$ lorsque t tend vers l'infini.

10. Mécanique et automatismes industriels - 93

Equations différentielles 1 (TP1) ; calcul différentiel et intégral 2 (TP1) ; fonction d'une variable réelle 1

Pour éviter les perturbations créées par les vibrations lors du choc d'un marteau sur une enclume, on munit l'enclume de deux ressorts et d'un amortisseur selon le schéma ci-contre :



masse du marteau : $m_1 = 1 \times 10^3\,kg$

masse de l'enclume : $m_2 = 14 \times 10^3\,kg$

constante de raideur d'un ressort : $k = 183 \times 10^4\,Nm^{-1}$

constante de l'amortisseur : $\mu = 2{,}4 \times 10^4\,u\,SI$

On suppose qu'après le choc, les deux parties (marteau-enclume) restent solidaires. La cote du point M à l'instant t est repérée par $z(t)$ mesurée sur l'axe indiqué sur le schéma.
On choisit l'origine des temps $t = 0$ à l'instant où l'ensemble marteau-enclume arrive au point le plus bas de la première oscillation.

Première question :

La cote $z(t)$ (mesurée en mètres) est solution de l'équation différentielle (E) :

$$(m_1 + m_2)\frac{d^2z}{dt^2} + \mu\frac{dz}{dt} + 2kz = 0$$

Soit : $15z'' + 24z' + 3660z = 0$

a) Donner la solution générale de (E) sous la forme : $z(t) = e^{-\alpha t}\left(A\cos(\beta t) + B\sin(\beta t)\right)$, en déterminant les valeurs de α et β.

b) Les mesures initiales sont à $t = 0$: $z(0) = -50{,}7 \times 10^{-3}$ et $z'(0) = 0$.
Exprimer alors la solution de (E) qui vérifie ces deux conditions en déterminant A et B.

Deuxième question :

La position à l'instant t est maintenant donnée par :

$$z(t) = -\left(50{,}7\cos(15{,}6t) + 2{,}6\sin(15{,}6t)\right) \times 10^{-3} \times e^{-0{,}8t}.$$

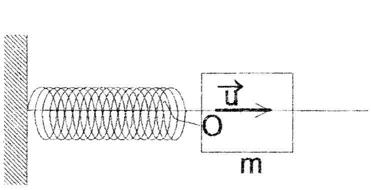
a) Déterminer, dans l'intervalle [0 ; 1], à 10^{-2} près chacun, les instants t pour lesquels $z(t) = 0$.
(on rappelle que les solutions de l'équation $\tan(x) = \tan(a)$ sont de la forme $x = a + n\pi$, n étant un entier)

b) Calculer $\tan(15{,}6t)$ lorsque $z(t)$ est extrémal, c'est à dire quand $z'(t) = 0$.
En déduire, dans l'intervalle [0 ; 1], les valeurs approchées correspondantes de t à 10^{-2} près.

c) Tracer, sur une feuille de papier millimétrée, la courbe représentative de z en fonction de t lorsque t varie dans l'intervalle [0 ; 1].
(Sur l'axe des abscisses, gradué de 0 à 1, 20 cm représenteront une seconde).

11. Conception des produits industriels - 90

Equations différentielles 1 (TP1) ; fonctions d'une variable réelle 2 ; calcul différentiel et intégral 3 (TP1 - TP5)



Un ressort R de raideur k, à spires non jointives, a une extrémité fixe. On attache à l'autre extrémité une masse m, mobile sur un axe de repère $(O; \vec{u})$. Lorsque le ressort est au repos, son extrémité libre est en O.
Un dispositif permet d'exercer sur la masse une force variable avec le temps : $\vec{F} = (a\cos\omega t)\,\vec{u}$, $a > 0$, $\omega > 0$.

On branche le dispositif à l'instant $t = 0$, le ressort étant au repos et la masse ayant une vitesse nulle. On admet que l'abscisse z de l'extrémité mobile du ressort est une fonction du temps t, solution de l'équation différentielle :

$$m z'' + k z = a \cos \omega t \qquad (E)$$

Dans la suite du problème, on prend $k = 18$; $m = 2$; $a = 4$.
(Toutes les grandeurs sont exprimées en U.S.I.)

A - Dans le cas où $\omega \neq 3$, déterminer la solution générale de l'équation (E).
Préciser la solution particulière satisfaisant aux conditions : $z(0) = 0$ et $z'(0) = 0$.

B - On suppose maintenant $\omega = 3$.

1° Déterminer le réel C pour que la fonction $f(t) = Ct \sin 3t$ soit solution de l'équation (E).

2° Trouver alors la solution g de (E) satisfaisant aux conditions : $g(0) = 0$ et $g'(0) = 0$.

3° Soit $(A ; \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthonormal (unité : 4 cm).
On désigne par (Γ) la courbe d'équation $z = g(t)$ avec $g(t) = \frac{1}{3} t \sin 3t$ pour t décrivant l'intervalle $\left[0; \frac{5\pi}{3}\right]$.
Etudier la position de (Γ) par rapport aux droites d'équation $z = \frac{1}{3}t$ et $z = -\frac{1}{3}t$. En particulier, préciser les points communs à (Γ) et à ces deux droites. Déterminer aussi les points communs à (Γ) et à l'axe $(A ; \vec{i})$. Sans étudier le sens de variation de la fonction g, tracer la courbe (Γ).

4° (Dans cette partie, les valeurs approchées seront données à 10^{-5} près)
On a pu constater que, en fait, le ressort se rompt lorsqu'il est trop étiré et que la rupture a lieu dès que l'extrémité libre atteint une abscisse égale à $\frac{3}{2}$. On cherche à savoir à quel instant t aura lieu cette rupture.
Tracer sur le graphique la droite d'équation $z = \frac{3}{2}$.

a) On pose $t_0 = 4{,}5$. Calculer $g(t_0)$.

b) Soit D_0 la tangente à la courbe (G) au point d'abscisse t_0.
Trouver une équation de D_0.
Calculer l'abscisse t_1 du point d'intersection de D_0 avec la droite d'équation $z = \frac{3}{2}$.
Constater que $|g(t_0) - \frac{3}{2}| > |g(t_1) - \frac{3}{2}|$.

c) On itère le procédé précédent pour obtenir successivement t_2, t_3, t_4, t_5.
Calculer t_2, t_3, t_4, t_5 et constater que $|g(t_5) - \frac{3}{2}| < 2.10^{-5}$
(On pourra établir la relation $t_{i+1} = \dfrac{4{,}5 + 3t_i^2 \cos 3t_i}{\sin 3t_i + 3t_i \cos 3t_i}$ pour toute valeur entière de i).

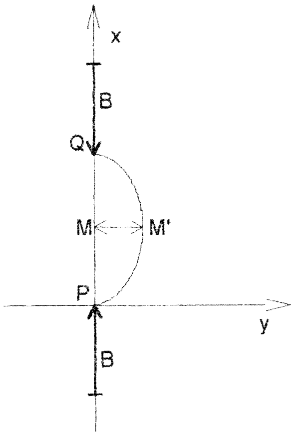
12. Conception des produits industriels - 88

Equations différentielles 1 (TP1) ; fonctions d'une variable réelle 2 ; calcul différentiel et intégral 3 (TP1)

On se propose d'étudier le fléchissement d'une barre rectiligne homogène PQ, de longueur **l** (de section constante et de grande longueur par rapport aux dimensions transversales), lorsqu'elle est compressée de diverses façons.

Première partie

Dans cette partie, on suppose que la barre PQ est sollicitée par deux forces opposées d'intensité B, co-axiales avec l'axe de la barre avant déformation.



La flèche $y = \overline{MM'}$ en un point M est une fonction de l'abscisse $x = \overline{PM}$ de ce point.

On admet que cette fonction est une solution de l'équation différentielle :

$$(1) : \quad E\,I y'' = -By$$

où I, E, B sont des constantes strictement positives, et qu'elle satisfait aux conditions :

$$y(0) = 0 \text{ et } y(\mathbf{l}) = 0.$$

1° Montrer que la solution générale de (1) est de la forme :

$$y = C_1 \sin kx + C_2 \cos kx,$$

où k est un réel à déterminer en fonction de I, E et B.

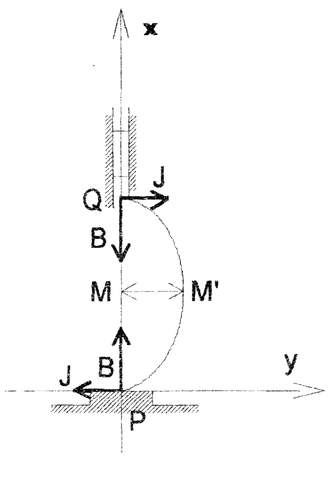
2° a) Déterminer les solutions de (1) vérifiant la condition : $y(0) = 0$.

b) Démontrer que les solutions non nulles de (1) telles que $y(0) = 0$ satisfont à la condition $y(\mathbf{l}) = 0$ si, et seulement si : $\sqrt{\dfrac{B}{EI}}\,\mathbf{l} = n\pi,\ n \in \mathbb{N}^*$

3° a) Calculer B en fonction de E, I et $\mathbf{l}$ pour que $y = c \sin \dfrac{\pi x}{\mathbf{l}}$, où $0 \leq x \leq \mathbf{l}$, soit solution de (1).

b) Représenter la courbe D d'équation $y = c \sin \dfrac{\pi x}{\mathbf{l}}$, $(c > 0)$. Quelle est la flèche maximum obtenue?

Deuxième partie



Dans cette partie, on suppose que la barre PQ est encastrée à l'extrémité P.
L'extrémité Q est articulée sur un coulisseau qui exerce sur la barre les efforts B et J.
La flèche $y = \overline{MM'}$ en un point M est une fonction de l'abscisse $x = \overline{PM}$ de ce point.

On admet que cette fonction est une solution de l'équation différentielle :

$$(2) : \quad EIy'' = -By + J(\mathbf{l} - x)$$

où I, E, B et J sont des constantes strictement positives, et qu'elle satisfait aux conditions :

$$y(0) = 0,\ y'(0) = 0 \text{ et } y(\mathbf{l}) = 0.$$

1° a) Résoudre l'équation différentielle (2).

b) Déterminer la solution de (2) telle que $y(0) = 0$ et $y'(0) = 0$.

2° a) Démontrer que la solution de (2), telle que $y(0) = 0$ et $y'(0) = 0$, satisfait à la condition : $y(\mathbf{l}) = 0$ si, et seulement si : $\tan \sqrt{\dfrac{B}{EI}}\,\mathbf{l} = \sqrt{\dfrac{B}{EI}}\,\mathbf{l}$.

b) Montrer que l'équation $\tan t = t$ admet une solution α et une seule dans l'intervalle $\left]\dfrac{\pi}{2} ; \dfrac{3\pi}{2}\right[$.

Déterminer une valeur approchée décimale de α à 10^{-2} près par défaut. (On explicitera la méthode utilisée).

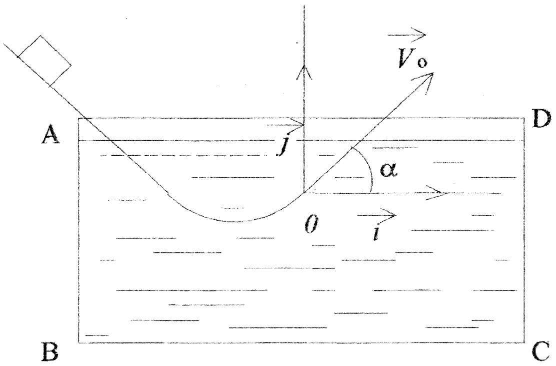
c) Expliciter, en fonction de J, B, I et de la valeur approchée de α, la solution de (2) telle que :
$y(0) = 0$ et $y'(0) = 0$, lorsque les constantes E, I, B vérifient la relation : $\sqrt{\dfrac{B}{E\mathrm{I}}}\,\mathrm{I} = \alpha$.

13. Conception des produits industriels - 92

Equations différentielles 1 (TP1) - Courbes planes 2.

Au sortir d'un four pour traitement thermique, des pièces sont trempées dans un bain d'huile. Elles glissent sur une rampe d'accès.
On se propose de modéliser le mouvement de la pièce dans le bain d'huile au sortir de la rampe. La figure ci-dessous représente la section de la cuve par un plan vertical.
Dans cette modélisation, on étudie le mouvement d'un point matériel M de masse m dans le plan vertical muni du repère orthonormal direct $(O; \vec{i}, \vec{j})$. On choisit $\vec{j}$ «vertical». On néglige la poussée d'Archimède.

Ce point est soumis à son poids et à la force de frottement représentée par le vecteur $\left(-k\vec{V}\right)$.



La constante positive k est le coefficient de viscosité et $\vec{V}$ le vecteur vitesse de M à l'instant de date t.
A l'instant de date $t = 0$:
- le point M est en O.
- le vecteur vitesse $\vec{V_0}$ est tel que $\|\vec{V_0}\| = 10$ et $(\vec{i}, \vec{V_0}) = \dfrac{\pi}{6}$.

Les coordonnées x et y de M sont des fonctions du temps t ; si l'on note x', x'', y', y'' leurs dérivées par rapport à t, la relation fondamentale de la dynamique appliquée au point M conduit aux équations différentielles :

$$\begin{cases} mx'' = -kx' \\ my'' = -ky' - mg \end{cases} \quad (g \text{ accélération de la pesanteur}).$$

Questions

A - On donne : $k = 2$, $m = 1$, $g = 10$.

1° Montrer que, dans ce cas, on obtient les équations différentielles E_1 et E_2 ; la variable t appartient à l'intervalle $[0 ; +\infty[$:

$$\begin{cases} x'' = -2x' & (E_1) \\ y'' = -2y' - 10 & (E_2) \end{cases}$$

2° Résoudre l'équation différentielle E_1.

3° a) Déterminer la fonction polynôme de degré 1 solution particulière de E_2.

b) Résoudre l'équation différentielle E_2.

4° a) Déterminer la fonction f solution de E_1 telle que : $f(0) = 0$ et $f'(0) = 5\sqrt{3}$.

b) Déterminer la fonction g solution de E_2 telle que : $g(0) = 0$ et $g'(0) = 5$.

B - On considère dans le repère orthonormal $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ d'unité graphique 1 cm la courbe C ensemble des points M(x ; y) tels que :

$$\begin{cases} x = f(t) = \dfrac{5}{2}\sqrt{3}\left(1 - e^{-2t}\right) \\ y = g(t) = 5\left(1 - e^{-2t}\right) - 5t \end{cases} \quad \text{pour } t \geq 0.$$

1° Etudier les variations des fonctions f et g ;
préciser les limites de f et de g quand t tend vers $+\infty$; rassembler les résultats dans un même tableau.

2° Déterminer le coefficient directeur de la tangente au point O.
Interpréter le résultat à l'aide du vecteur $\vec{V_0}$.

3° Reproduire et compléter le tableau de valeurs suivant :

t	0,1	0,2	0,4	0,6	1	1,5	2	2,5	3
x									
y									

On donnera des valeurs décimales arrondies à 10^{-2}.

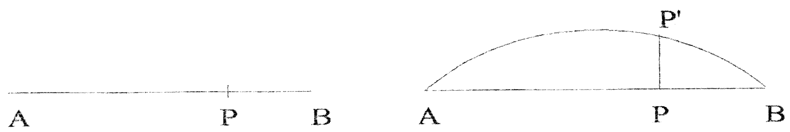
4° Tracer l'arc de la courbe C pour $0 \leq t \leq 3$.

5° On suppose que la distance du point O à la paroi CD est 4,5 cm.
Le point M peut-il rencontrer la paroi CD ?

14. Maintenance - 92

Equations différentielles 1 (TP1) ; calcul différentiel et intégral 2 (TP1) ; Calcul des probabilités 2 (TP2)

1° Aux deux extrémités d'une tige métallique homogène AB de longueur $l_1 = \frac{\pi}{3}$ on exerce des forces opposées de même intensité; il y a alors fléchissement de la tige.



Avant   Après

La tige métallique AB est munie du repère $(A, \vec{\imath})$ avec $\|\vec{\imath}\| = 1$ mètre.

Au point P de la tige d'abscisse x ($0 \leq x \leq \frac{\pi}{3}$) la flèche associée est $\overline{PP'} = y$.

y est une fonction de la variable x, on admettra qu'elle est solution de l'équation différentielle (E_1) :

$$y'' + 9\,y = 0 \text{ avec } y(0) = 0 \text{ et } y'(0) = 0{,}003.$$

a) Déterminer $y(x)$;

b) Vérifier que $y(l_1) = 0$;

c) En quel point de la barre la flèche est-elle maximale ?

2° De telles tiges sont livrées par une usine à grande fabrication. Leur longueur L est une variable aléatoire gaussienne de moyenne 1 mètre et d'écart type 3 cm. L'intervalle de tolérance étant [94 cm; 106 cm] à combien peut-on présumer le nombre de tiges qui seront retenues dans un lot de 200 ?

3° La probabilité de rupture lorsqu'on les soumet aux forces du 1° est p = 0,02. Dans un lot de 200 tiges on désigne par K le nombre de celles qui se casseront. En appliquant :

a) la loi binomiale,

b) la loi de Poisson,
déterminer la probabilité que K prenne la valeur 1.

15. R.O.C. - 94

Equations différentielles 1 (TP1) ; calcul différentiel et intégral 2 (TP1) ; fonctions d'une variable réelle 1.

Partie A

La suspension d'une voiture est schématisée par un ressort vertical de force de rappel $k = 1{,}36 \times 10^4$ N/m. La masse m de la voiture est de 800 kg.
On démontre en mécanique que l'équation du mouvement vertical de cette voiture est de la forme :

$$y'' + \frac{b}{m} y' + \frac{k}{m} y = 0$$

où y désigne l'amplitude de l'oscillation en fonction du temps t, b étant une constante qui peut être choisie égale à 1600.

1° Résoudre cette équation différentielle.

2° Déterminer la solution particulière telle qu'à l'instant t = 0 les conditions suivantes soient vérifiées :

$$\begin{cases} y(0) = 1 \\ y'(0) = -1 \end{cases}$$

Partie B

On considère la fonction numérique f de la variable réelle t définie sur $[0 ; \pi]$ par : $f(t) = e^{-t} \cos 4t$.
La courbe représentative (Γ) de f est donnée sur une feuille annexée à la suite de cet énoncé.
On appelle (C_1) et (C_2) les courbes représentatives des fonctions f_1 et f_2 définies sur $[0 ; \pi]$ par :

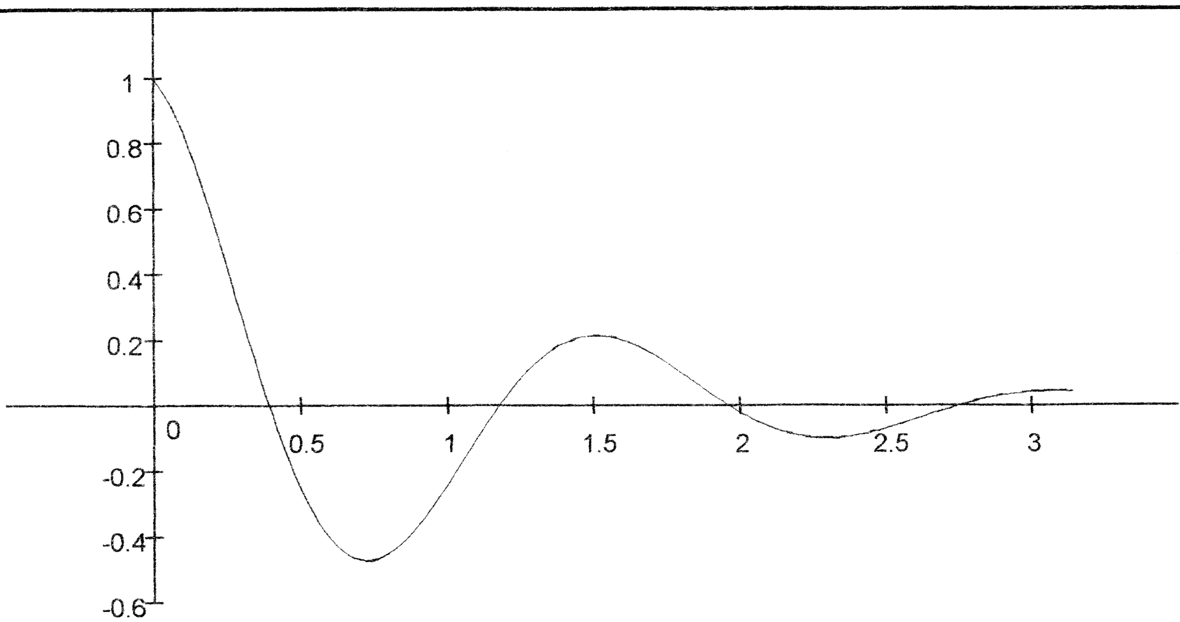
$$f_1(t) = -e^{-t} \text{ et } f_2(t) = e^{-t}.$$

1° a) Démontrer que pour tout réel t de $[0 ; \pi]$ on a : $-e^{-t} \leq f(t) \leq e^{-t}$.
b) En déduire les positions relatives de (Γ), (C_1) et (C_2).

2° a) Calculer les abscisses des points A et B communs à (Γ) et (C_1).
b) Calculer les abscisses des points C, D et E communs à (Γ) et (C_2).

3° Calculer le coefficient directeur de la tangente (Γ) en son point d'abscisse 0 ainsi que celui de la tangente à (C_2) en son point d'abscisse 0. Que peut-on en conclure ?

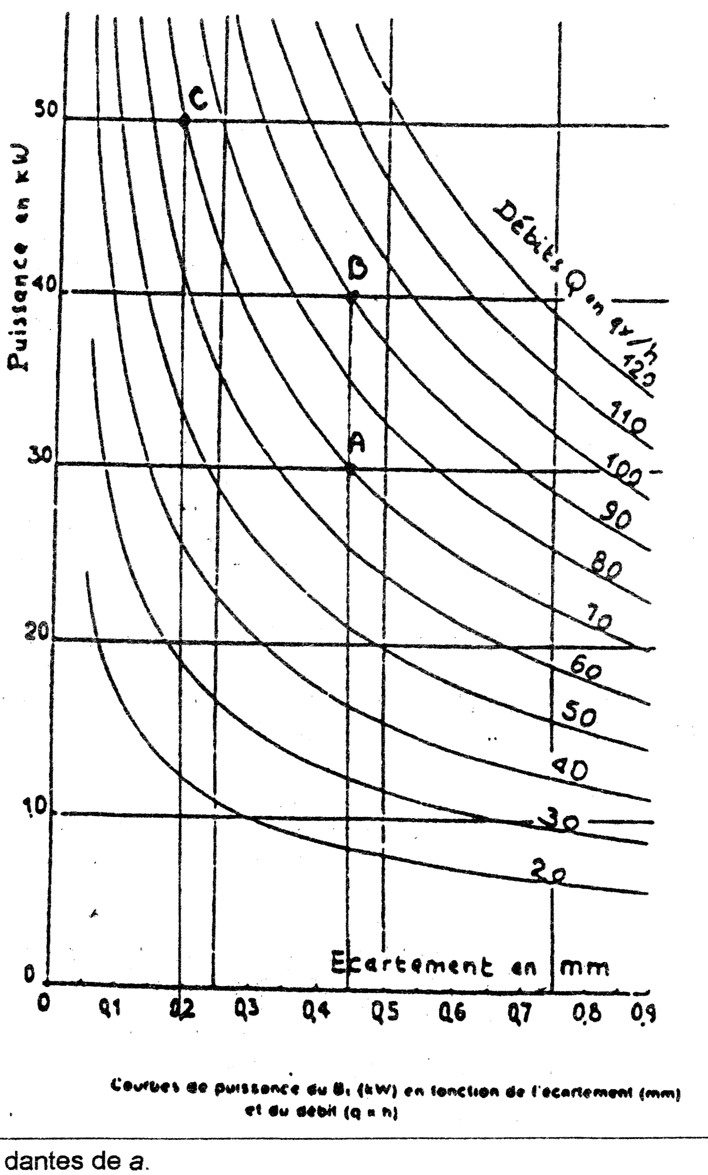
4° a) Etudier sur $[0 ; \pi]$ les variations des fonctions f_1 et f_2.
b) Sur la feuille annexée comportant déjà (Γ) placer les points A, B, C, D et E ainsi que la tangente à (Γ) en son point d'abscisse 0. Tracer enfin les courbes (C_1) et (C_2).


1
0.8
0.6
0.4
0.2
-0.2
-0.4
-0.6
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3

3. Exercices à support concret : matériaux - énergie

1. Industries ceréalieres - 91

Equations différentielles 1 (TP1)



Courbes de puissance du B_1 (kW) en fonction de l'écartement (mm) et du débit (q × h)

Les résultats d'expériences menées sur un broyeur (B_1) sont résumés graphiquement sur le document.

Les courbes représentées donnent la puissance P absorbée par les cylindres (en kilowatts), en fonction de l'écartement a des cylindres (en mm), et du débit Q du produit passant dans le broyeur (en quintaux par heure).

Pour un écartement fixé $a < 1$, la puissance P est une fonction de Q, solution de l'équation différentielle :

$$P'' + 2\,k \ln a\, P' + (k \ln a)^2 P = 0$$

où P' et P'' sont les dérivées première et seconde de P par rapport à Q, et où k est une constante indépendante de a.

1° Résoudre cette équation différentielle dans l'intervalle $]0; +\infty[$

Soit C_1 et C_2 les deux constantes intervenant dans l'expression obtenue pour P.

On admet que :

$$C_1 = \frac{k_1}{a^b} \text{ et } C_2 = \frac{k_2}{a^b}$$

où $b = 0{,}447$, k_1 et k_2 étant deux constantes indépendantes de a.

Démontrer que :

$$P = (k_1 + k_2 Q)a^{-(b+kQ)}$$

2° Calculer les constantes k, k_1, k_2 à l'aide des points A, B, C indiqués sur les documents.

2. Equipement technique-énergie - 90

Equations différentielles 1 (TP1) ; fonctions d'une variable réelle 1 ; calcul différentiel et intégral 2 (TP1)

La charge d'un condensateur dans un circuit électrique est une fonction q du temps t, définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$.
Dans certaines conditions, le système d'unités étant bien choisi, cette fonction vérifie l'équation différentielle : (E) $q''(t) + 2\,q'(t) + 2\,q(t) = 0$, pour $t \geq 0$, dans laquelle q' et q'' sont les fonctions dérivées première et seconde de la fonction q.

1° a) Déterminer toutes les solutions de l'équation (E).

b) A l'instant $t = 0$, instant où l'on ferme l'interrupteur, la charge du condensateur vérifie les conditions :

$$q(0) = 1 \text{ et } q'(0) = 0.$$

En déduire que l'expression de la charge q du condensateur en fonction du temps est :

$$q(t) = \sqrt{2}\, e^{-t} \cos\left(t - \frac{\pi}{4}\right).$$

2° a) Quelle est la limite de $q(t)$ lorsque t tend vers $+\infty$?

b) Etudier les variations de la charge q sur l'intervalle $[0; 2\pi]$.
Déterminer les instants pour lesquels la charge est nulle.

c) Soit (Γ) la courbe représentative de la fonction q. Construire l'arc de (Γ), correspondant à l'intervalle $[0; 2\pi]$, dans le plan rapporté à un repère orthogonal $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.
(Unités graphiques : 8 cm représentent π unités en abscisse, 20 cm représentent une unité en ordonnée.)

3° a) Déterminer, en utilisant l'équation différentielle (E), les primitives de la fonction q.

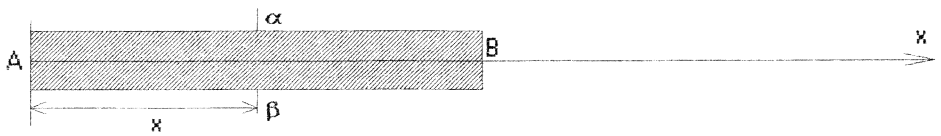
b) En déduire que la primitive Q de q, qui s'annule pour $t = 0$ est définie par :

$$Q(t) = 1 - e^{-t} \cos t \quad \text{pour } t \geq 0.$$

c) Calculer une valeur approchée à 0,01 près de la charge moyenne sur l'intervalle $\left[0; \frac{3\pi}{4}\right]$.

3. Domotique - 89

Equations différentielles 1 (TP1) ; fonctions d'une variable réelle 1



Une tige de cuivre cylindrique de longueur L, (L = AB, cf. figure) est utilisée comme ailette de refroidissement d'un échangeur. Elle est refroidie le long de sa surface par une circulation de fluide à la température constante T_e. La température $T(x)$ de toute une section $\alpha\beta$ de la tige située à la distance x de l'extrémité A de la tige est une fonction de x, notée encore T.

On montre que t est deux fois continûment dérivable sur $[0 ; L]$ et vérifie sur cet intervalle l'équation différentielle :

$$\text{(E)} \quad : \quad \frac{d^2T}{dx^2} - m^2\left(T - T_e\right) = 0$$

m étant un réel donné strictement positif.

1° a) On pose $U = t - T_e$; montrer que U vérifie sur $[0 ; L]$ l'équation (E_1) :

$$(E_1) \quad : \quad \frac{d^2U}{dx^2} - m^2U = 0.$$

Donner, à l'aide de m et de deux constantes arbitraires C_1 et C_2, la solution générale de cette équation (E_1).

b) Le produit $\lambda = mL$ est supposé donné. On donne également T_e, T_1, T_2 par leurs valeurs numériques, T_1 étant la température au point A et T_2 la température au point B :
$T_1 = 650°$ K, $T_e = 300°$ K, $T_2 = 400°$ K.
Déterminer à l'aide de λ les valeurs des constantes C_1 et C_2.
En déduire l'expression de $U(x)$, puis celle de $T(x)$ en fonction de m, x et λ.

c) On suppose que m reste fixé et que L tend vers $+\infty$. Déterminer, pour chaque valeur fixée de x, la limite de $T(x)$.

2° On se place maintenant dans le cas théorique d'une tige de longueur "infinie". (E) est alors vérifiée sur $[0; \infty[$. On suppose toujours m fixé strictement positif, $T_e = 300°$ K et $T_1 = 650°$ K.

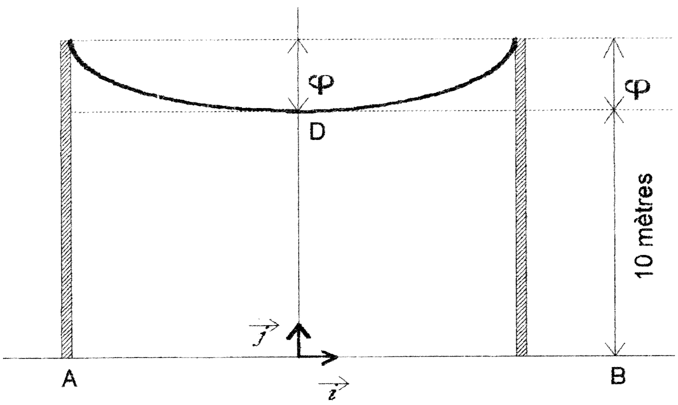
a) Déterminer la valeur de la constante C_1 telle que $\lim\limits_{x \to +\infty} (C_1\, e^{mx} + C_2\, e^{-mx} + T_e) = T_e$

b) Déterminer la solution t de (E) sur $[0; \infty[$ telle que $T(0) = T_1$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} T(x) = T_e$.
Comparer la solution obtenue avec la limite trouvée au 1° c).

4. Travaux publics - 91

Equations différentielles 1 (TP1) ; fonctions d'une variable réelle 1 ; calcul différentiel et intégral 2 (TP1)

Cet exercice étudie la courbe (C) décrite par un câble souple non élastique suspendu par ses extrémités à deux piliers de même hauteur et reposant à la même altitude (voir figure).



Compte tenu de la symétrie du problème, on choisit le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ représenté sur la figure.

Unité de longueur : $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 0{,}5$ cm.
(Echelle : $\frac{1}{200}$ c'est à dire que sur la figure, 0,5 cm représente 1 m.)
On démontre, (et nous l'admettrons), que (C) est la représentation graphique dans $(O; \vec{i}, \vec{j})$ d'une fonction de la variable réelle x solution de l'équation différentielle (E) suivante :

$$(E) \quad y'' - \frac{1}{100}\, y = 0$$

($\frac{1}{100}$ est une constante liée au câble), avec pour conditions initiales : $y(0) = 10$ et $y'(0) = 0$

Les parties A, B et C peuvent être traitées séparément.

A - Résolution d'une équation différentielle :

1° Donner toutes les solutions de l'équation (E).

2° Déterminer la solution de (E) répondant aux conditions initiales de l'introduction.

B - Etude et représentation graphique d'une fonction :

Soit f la fonction numérique définie sur l'intervalle J = [−10; 10] par :

$$f(x) = 5 \times \left(e^{\frac{x}{10}} + e^{-\frac{x}{10}} \right)$$

1° Montrer que f est une fonction paire.

2° Etudier les variations de f et rassembler les résultats de votre étude dans un tableau de variation.

3° Représenter graphiquement f. On prendra pour unité graphique le centimètre.

C - Calcul de la longueur du câble et de la flèche (φ) de la courbe (C).

On se reportera à la figure donnée.
On appelle L la longueur en mètres du câble et d la distance OA = OB = 10 mètres.
On admet que $L = 20\, f'(d)$.
Déterminer la longueur du câble et calculer la valeur de la flèche (φ).

4. Exercices à support concret : laboratoire

1. Chimiste - 91

Equations différentielles 1 (TP1) ; fonctions d'une variable réelle 2 ; calcul différentiel et intégral 2 (TP1)

On étudie en chimie cinétique des réactions successives dont le schéma de réaction est le suivant :

$$A \underset{k_2}{\overset{k_1}{\rightleftarrows}} B \xrightarrow{k_3} C$$

Les lois cinétiques sont les suivantes :

$$\frac{d\,A}{dt} = -\,k_1\,[A] + k_2\,[B]$$
$$\frac{d\,B}{dt} = k_1\,[A] - (k_2 + k_3)\,[B]$$
$$\frac{d\,C}{dt} = k_3\,[B]$$

$[A]$, $[B]$ et $[C]$ sont les concentrations à l'instant t des produits A, B et C (t exprimé en minutes); k_1, k_2 et k_3 sont les constantes de vitesse exprimées en mn^{-1}.

Les conditions à l'instant $t = 0$ sont : $[A]_0 = a$, $[B]_0 = 0$, $[C]_0 = 0$.

On note x, y et z les fonctions de la variable réelle t définies pour $t \geq 0$ par :

$$x = \frac{[A]}{a},\ y = \frac{[B]}{b} \text{ et } z = \frac{[C]}{c}.$$

On suppose que $k_1 = 1{,}60\ \text{mn}^{-1}$, $k_2 = 0{,}15\ \text{mn}^{-1}$, $k_3 = 1{,}25\ \text{mn}^{-1}$.
On a donc :

$$\frac{dx}{dt} = -\,1{,}60\,x + 0{,}15\,y \qquad (1)$$
$$\frac{dy}{dt} = 1{,}60\,x - 1{,}40\,y \qquad (2)$$
$$\frac{dz}{dt} = 1{,}25\,y \qquad (3)$$

et $x(0) = 1$, $y(0) = z(0) = 0$.

Partie I

1° En utilisant l'équation différentielle (1), déterminer y en fonction de x et de $\frac{dx}{dt}$.

En déduire $\frac{dy}{dt}$ en fonction de $\frac{dx}{dt}$ et de $\frac{d^2x}{dt^2}$.

En reportant y et $\frac{dy}{dt}$ dans l'équation (2) établir une équation différentielle du second ordre linéaire à coefficients constants vérifiée par x.

2° Résoudre l'équation différentielle : (E) $\frac{d^2x}{dt^2} + 3\frac{dx}{dt} + 2x = 0$ où $t \geq 0$.

3° En utilisant la question précédente et la relation $y = \frac{1}{0{,}15}\frac{dx}{dt} + \frac{1{,}60}{0{,}15}x$, montrer que x et y peuvent s'écrire sous la forme :

$$x(t) = \lambda\, e^{-t} + \mu e^{-2t}$$
$$y(t) = 4\lambda\, e^{-t} - \frac{8}{3}\mu e^{-2t}.$$

4° Sachant qu'en outre $x(0) = 1$ et $y(0) = 0$, calculer les réels λ et μ.

5° En utilisant les relations (1), (2) et (3), calculer $\frac{d}{dt}\left(x(t) + y(t) + z(t)\right)$
et en déduire que $z(t) = 1 - x(t) - y(t)$.

Partie II

1° Etudier le sens de variation des fonctions x, y et z définies sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$x(t) = 0{,}4\ e^{-t} + 0{,}6\, e^{-2t}$$
$$y(t) = 1{,}6\,(e^{-t} - e^{-2t})$$
$$z(t) = -2e^{-t} + e^{-2t} + 1.$$

2° Représenter graphiquement les fonctions x, y et z dans un même plan rapporté au même repère orthogonal avec les unités suivantes :
4 cm pour 1 mn sur l'axe des abscisses,
10 cm pour une unité sur l'axe des ordonnées,
et $t \in [0; 4]$.

3° A quel instant le taux de formation de C atteint-il 90,0 % ?
Quel est à ce même instant le taux de disparition du produit A ?
Interpréter graphiquement ces résultats.

SUITES ET SERIES NUMERIQUES

Liste des modules et travaux pratiques

Suites numériques 1

TP1 : Etude du comportement de suites définies par une relation $u_n = f(u_n)$.

TP2 : Exemples d'étude de suites définies par une relation de la forme : $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$ et une condition initiale.

Suites et séries numériques 2

TP1 : Etude du comportement de suites définies par une relation $u_n = f(u_n)$.

TP2 : Etude du comportement de suites définies par une relation $u_{n+1} = f(u_n)$ et leur premier terme, approximation d'un point fixe de f à l'aide d'une telle suite.

TP3 : Exemples d'emploi de suites pour l'approximation d'un nombre.

TP4 : Exemples simples d'études de séries numériques.

Analyse des phénomènes exponentiels

TP6 : Exemples d'étude du comportement de suites définies par une relation $u_{n+1} = au_n + b$ ou $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$ et une condition initiale.

TP7: Exemples d'étude du comportement de suites définies par une relation $u_n = f(u_n)$ et leur premier terme, approximation d'un point fixe de f à l'aide d'une telle suite.

TP8 : Exemples d'étude du comportement de suites définies par une relation $u_{n+1} = f(u_n)$ et leur premier terme, approximation d'un point fixe de f à l'aide d'une telle suite.

LES TEXTES PROPOSES :

1. Industries du cuir - 90 -

Suites numériques 1 (TP1)

Pour régler un achat, d'un montant de 80 000 F, une personne a utilisé deux sources de financement :

- Comme source principale, la totalité d'un capital personnel, constitué en trois ans par le placement, au taux annuel de 5,5 %, à la fin du mois de décembre 1986 d'une somme de 15 000 F puis, à la fin de chacun des 36 mois suivants, d'une somme de 1 000 F.
- Comme source complémentaire un emprunt, effectué au taux annuel de 11,5 % et remboursable sur deux ans, par mensualités constantes.

1° Source principale :

a) Donner le taux mensuel équivalent du taux annuel de 5,5 % (on donnera et utilisera dans la suite la valeur décimale arrondie à 10^{-5} près de ce taux mensuel).

b) Calculer le capital personnel dont disposait la personne au 31 décembre 1989 (arrondir à la centaine de francs supérieure).

2° Source complémentaire :

a) Donner la somme empruntée.

b) Calculer la mensualité du remboursement (arrondir au centime supérieur).

2. Industries du cuir - 92

Suites arithmétiques et géométriques

Un industriel a acheté chez un fabricant, en 1986, une machine neuve, pour un prix de 300 kF.
(1 kF = 1 000F).

1° Par rapport à son prix d'achat, la valeur de reprise de cette machine perd 20 % chaque année. (La valeur de reprise est le prix de rachat de la machine usagée par le fabricant, pour l'achat d'une nouvelle machine neuve par l'industriel.)
On note V_n cette valeur de reprise, exprimée en kF, n années après l'achat de la machine neuve.

a) Vérifier que $V_1 = 240$.

b) Montrer que la suite (V_n) est une suite géométrique ; donner la raison de cette suite. Exprimer V_n en fonction de n.

2° Chez le fabricant, le prix de vente de la machine neuve, exprimé en kF, augmente de 4 % chaque année. On note P_n ce prix, au bout de n années.
P_0 étant égal à 300, exprimer P_n en fonction de n.

3° Cinq ans s'étant écoulés, l'industriel achète à nouveau une machine neuve, identique à celle achetée en 1986, tout en revendant cette dernière au fabricant.
Ces transactions se faisant dans les conditions des questions 1° et 2°, quelle somme, arrondie au kF le plus proche, l'industriel devra-t-il débourser ?

3. Informatique de gestion - 90

Suites numériques 1 (TP2)

On se propose d'étudier la convergence de la suite u, à termes strictement positifs, définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_1 = 2 \\ (u_{n+2})^2 = u_{n+1} \times u_n \text{, pour tout entier naturel n.} \end{cases}$$

Soit **v** la suite définie par : $v_n = \mathit{ln}(u_n)$ pour tout entier naturel n.

(ln désigne la fonction logarithme népérien).

1° Montrer que la suite **v** vérifie : quel que soit l'entier naturel n, $2\, v_{n+2} = v_{n+1} + v_n$ (1)

2° Déterminer les deux suites géométriques de premier terme 1, de raison non nulle, qui vérifient la relation (1).

3° Montrer que, quels que soient les nombres réels a et b, la suite **w**, de terme général : $w_n = a + b\left(\frac{-1}{2}\right)^n$, vérifie la relation (1).

4° On admet que la suite **v** a pour terme général :

$$v_n = x + y\left(\frac{-1}{2}\right)^n$$

où x et y sont deux nombres réels que l'on déterminera à partir du calcul de v_0 et v_1.
Donner l'expression de v_n en fonction de n.

5° Montrer que la suite **v** est convergente et calculer sa limite. En déduire la limite de la suite u.

4. Informatique de gestion - 91

Suites et séries numériques 2 (TP2)

Soit la suite numérique u définie sur $\mathbb{N}^*$ par :

$$\begin{cases} u_1 = 0 \\ u_{n+1} = \alpha u_n + \beta n + \gamma, \text{ pour tout entier naturel n non nul.} \end{cases}$$

où α, β et γ désignent trois coefficients réels.

1° Calculer α, β et γ, sachant que $u_2 = 3$, $u_3 = 4$, $u_4 = 3$.

2° Dans cette question on prend : $\alpha = 2$, $\beta = -3$ et $\gamma = 4$.
Soit la suite v définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $v_n = u_n - 3n + 1$, pour tout entier naturel n non nul.
  a) Montrer que la suite v est une suite géométrique dont on déterminera le premier terme et la raison.
  b) Calculer v_n en fonction de n. En déduire u_n en fonction de n.
  c) Pour tout entier n supérieur ou égal à 2, calculer

$$S_n = v_1 + v_2 + \ldots + v_n \text{ en fonction de n.}$$

  En déduire $\Sigma_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n$ en fonction de n.
  On rappelle que $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

5. Informatique de gestion - 92

Suites et séries numériques 2 (TP1) ; Calcul différentiel et intégral 2 (TP1 - TP6)

L'objet de cet exercice est l'étude d'une suite définie par une intégrale.
Les quatre questions sont indépendantes.

Soit la suite u définie pour tout entier naturel n non nul par : $u_n = \int_0^1 \frac{t^n}{t+1}\,dt$

1° Calculer u_1 (on remarquera que $\frac{t}{t+1} = 1 - \frac{1}{t+1}$).

2° Montrer que pour tout entier n non nul : $u_{n+1} + u_n = \frac{1}{n+1}$.

3° Démontrer que la suite u est décroissante.

4° a) Montrer que pour tout réel t de l'intervalle [0 ; 1] : $0 \leq \frac{t^n}{t+1} \leq t^n$.

b) En déduire que pour tout entier n non nul : $0 \leq u_n \leq \frac{1}{n+1}$.

c) Montrer que la suite u est convergente et donner sa limite.

6. Géomètre topographe - 92

Suites et séries numériques 2 - TP4 ; Calcul différentiel et intégral 2 (TP5)

Soit f la fonction définie sur [3 ; +∞[par $f(t) = \frac{1}{t^2 - 3t + 2}$.

a) Décomposer la fraction rationnelle $\frac{1}{x^2 - 3x + 2}$ en éléments simples.

b) En utilisant cette décomposition, déterminer la fonction F, primitive de f sur [3 ; +∞[qui s'annule pour t = 3.

c) On considère la série de terme général $u_n = f(n)$, $n \geq 3$.

- Trouver la nature de cette série.
- Calculer, en fonction de n, $S_n = \sum_{k=3}^{n} f(k)$ (on utilisera le a).
- En déduire la somme de la série.

7. Informatique de gestion - 90, (Nouvelle Calédonie)

Suites et séries numériques 2 (TP2) ; Statistique descriptive (TP2) ; Calcul différentiel et intégral 2 (TP1 - TP3)

Les parties I et II peuvent être traitées de façon indépendante.

PREMIERE PARTIE

Pour l'achat d'un nouveau matériel, un chef d'entreprise a réalisé un emprunt de 250 000 F sur quinze ans à remboursements mensuels.

A la fin de chaque mois, on note :

- y le solde restant dû après échéance, en milliers de francs.
- x le montant des bénéfices cumulés réalisés depuis l'achat du nouveau matériel en milliers de francs (pour le premier mois ce montant tient compte de la revente de l'ancien matériel).
- $z = \ln(y - 275)$

On donne le tableau suivant, correspondant à un relevé pendant les neuf premiers mois du remboursement d'un emprunt consenti par une banque à une entreprise.

N° du mois	x_i	y_i	$z_i = \ln(y_i - 275)$
1	35	284,415	2,242
2	40	283,712	2,165
3	46	283,125	2,095
4	54	282,395	2,001
5	65	281,809	1,918
6	81	281,124	1,812
7	96	280,487	1,702
8	112	279,805	1,570
9	133	279,111	1,414

Dans cette partie, les calculs seront effectués avec le maximum de précision, les résultats seront donnés sous forme de valeurs décimales approchées à 10^{-3} près.

1° Pour i entier variant de 1 à 9, représenter le nuage de points $M_i(x_i, y_i)$.
On prendra :
pour origine : A(30 ; 276)

pour unités : 1 cm pour dix mille francs en abscisse,
: 2 cm pour mille francs en ordonnée.

2° Sans écrire les calculs intermédiaires sur la copie, donner :
a) le coefficient de corrélation linéaire entre z et x.
b) une équation de la droite de régression de z en x.

3° En déduire que le nuage de points $M_i(x_i\ ;\ y_i)$ peut être ajusté par une courbe d'équation :

$$y = k\,e^{ax} + b$$

DEUXIEME PARTIE

Dans un but prévisionnel, le directeur désire savoir à partir de quand, si la tendance constatée se poursuit, les bénéfices réalisés lui permettront de rembourser le solde de l'emprunt.

1° Soit la fonction numérique définie pour tout nombre réel positif ou nul x par :

$$f(x) = 11{,}905\,e^{-0{,}008x} + 275 - x.$$

a) Etudier les variations de f ainsi que la limite de f en $+\infty$.
Justifier tous les résultats.
b) En déduire que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α.
Montrer que $270 < \alpha < 279$.

2° Soit la fonction numérique g définie pour tout nombre réel positif ou nul x par :

$$g(x) = 11{,}905\,e^{-0{,}008x} + 275.$$

a) Etudier les variations de g, et tracer la courbe représentative de la restriction de g à l'intervalle [35; 135] sur le graphique utilisé à la première question de la première partie.
b) En déduire que, pour tout réel x élément de [270 ; 279], g(x) est aussi élément de [270 ; 279].
c) Montrer que, pour tout réel x de [270 ; 279], on a $|g'(x)| \leq \frac{1}{80}$ (g' est la fonction dérivée de g).

3° On définit la suite u d'éléments de l'intervalle [270 ; 279] par :

$$\begin{cases} u_0 = 270 \\ u_{n+1} = g(u_n) \text{ pour tout entier naturel } n \end{cases}$$

En appliquant l'inégalité des accroissements finis à la fonction g sur l'intervalle fermé de bornes u_n et α démontrer que pour tout entier naturel n, $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{80}|u_n - \alpha|$.

4° En déduire que, pour tout entier naturel n, $|u_n - \alpha| \leq \frac{9}{80^n}$.
Donner une valeur décimale approchée de α à 10^{-2} près.

5° Le tableau d'amortissement du prêt fourni par la banque donne pour les mois suivants :

N° du mois	y_i
10	278,514
11	277,891
12	277,255
13	276,702
14	276,116
15	275,498

A la fin de quel mois le directeur peut-il penser être en mesure de rembourser le solde de l'emprunt ?

8. Etude et économie de la construction - 89

Suites arithmétiques ou géométriques ; équations différentielles 1 (TP1); calcul différentiel et intégral 2 (TP1)

I - Soit l'équation différentielle :

$$10y' - y = -110 + 3\alpha \quad (1)$$

où y désigne une fonction de la variable réelle α.

1° Résoudre l'équation : $10y' - y = 0$ (2)

2° Trouver une solution particulière y_0 de l'équation (1).

3° En déduire la solution générale de l'équation (1).

II - Déterminer la solution de (1) vérifiant $y(0) = 100$.

III - Le prix d'un produit, sur une période de cinq années se compose :

a) d'une partie fixe $P_1(\alpha) = 50$.
b) d'une partie « linéaire » $P_2(\alpha) = 30 - 3a$
c) d'une partie « exponentielle » $P_3(\alpha) = 20e^{\frac{\alpha}{10}}$.

Le prix du produit est ainsi défini par une fonction numérique : $P(\alpha) = P_1(\alpha) + P_2(\alpha) + P_3(\alpha)$ où α est un nombre réel compris entre 0 et 5 ($\alpha \in [0; 5]$).

Etudier les variations de P pour $\alpha \in [0; 5]$.
Pour quelle valeur de α, le prix P sera-t-il minimal ?
Tracer la courbe de $z(\alpha) = P(\alpha) - 100$ en repère orthonormal (on prendra 2 cm pour unité).

IV - Calculer (à 10^{-2} près) la valeur moyenne $\overline{P}$ du produit :

$$\text{on donne } \overline{P} = \frac{1}{5}\int_0^5 P(\alpha)\,d\alpha$$

V - L'inflation annuelle prévue pendant la période de cinq ans à venir est de 2,5 %.
Soit la suite géométrique de premier terme $U_0 = 100$ et de raison $a = 1{,}025$.
Calculer (à 10^{-2} près) les termes U_1, U_2, U_3, U_4, U_5.
Le terme général de la suite est donné par la relation $U_n = U_0 \times a^n$ pour tout entier n.
En déduire les variations annuelles (à 10^{-2} près) du prix P hors inflation, c'est à dire la valeur de $q_n = P(n) - U_n$ avec $0 \leq n \leq 5$, n entier.

9. Comptabilité et gestion - 91

Analyse des phénomènes exponentiels (TP2 - TP6)

Une observation faite par un journal, sur ses abonnés, a permis de constater, pour chaque année, un taux de réabonnement voisin de 80 %, ainsi que l'apparition d'environ 5 000 nouveaux abonnés.

L'objet de cet exercice est l'étude du devenir du nombre annuel de ces abonnés, en supposant que la situation décrite par l'observation reste la même au fil des ans; on prendra les données numériques précédentes comme base de calcul.

Les questions 2 et 3 peuvent être traitées indépendamment l'une de l'autre.

On note a_n le nombre des abonnés après n années et on précise que $a_0 = 10\,000$.

1° Expliquer pourquoi, pour tout nombre entier naturel n, $a_{n+1} = 0{,}8a_n + 5\,000$.

2° L'objet de cette question est l'étude graphique de la suite (a_n).

a) Tracer, dans un même repère orthonormal, et pour les abscisses comprises entre 0 et 30 000, la droite D_1 d'équation $y = 0{,}8x + 5\,000$, et la droite Δ, d'équation $y = x$.
(*Utiliser une feuille de papier millimétré ; unité graphique :* 0,5 cm *représente* 1 000.)

b) Placer a_0 sur l'axe des abscisses, puis le point A_0 de la droite D, d'abscisse a_0.
Quel terme de la suite (a_n) le point A_0 a-t-il pour ordonnée ?
Construire le point B_1 de la droite Δ, ayant la même ordonnée que A_0.
Quel terme de la suite (a_n) le point B_1 a-t-il pour abscisse ?
A partir de ce terme construire, par le même procédé, des points A_1, A_2 et A_3 sur D, B_2, B_3 et B_4 sur Δ et placer successivement a_2, a_3 et a_4 sur l'axe des abscisses.

c) En poursuivant le processus graphique précédent, quelle limite peut-on présumer pour la suite (a_n) ? La faire apparaître sur le dessin.

3° L'objet de cette question est l'étude numérique de la suite (a_n).
Soit (u_n) la suite définie, pour tout entier naturel n, par $u_n = 25\,000 - a_n$.

a) En exprimant u_{n+1} en fonction de u_n, montrer que la suite (u_n) est une suite géométrique, dont on précisera la raison et le premier terme.

b) Soit n un nombre entier naturel ; exprimer u_n en fonction de n.
En déduire que $a_n = 25\,000 - 15\,000 \times 0{,}8^n$.

c) En utilisant le résultat précédent, déterminer la limite de la suite (a_n).

4° a) Résoudre, pour $x \in \mathbb{R}$, l'inéquation $25\,000 - 15\,000 \times 0{,}8^x > 22\,000$.
(On rappelle que $0{,}8^x = e^{x\ln(0{,}8)}$)

b) En déduire après combien d'années le nombre d'abonnés dépasse 22 000.

10. Informatique de gestion - 89

Suites et séries numériques 2 (TP2) ; Calcul différentiel et intégral 2 (TP1 - TP3)

A) Soit la fonction g définie sur $[0, +\infty[$ par : $g(x) = (x + 1)\,e^{-x} - x$.

1° Etudier les variations de g.

2° Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution α et une seule qui appartient à l'intervalle $[0, 1]$.

B) On considère la fonction f définie sur $[0, 1]$ par :

$$f(x) = \frac{1}{3}\left(2(x+1)e^{-x} + x\right)$$

1° Démontrer que l'équation $f(x) - x = 0$ admet α comme unique solution.

2° Calculer f', dérivée de f, puis f'', dérivée de f'.

3° Etudier les variations de f.

4° Tracer, avec précision, la courbe représentative $\mathcal{C}$ de f dans le plan rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$, (unité graphique 10 cm).
Sur la même figure, tracer la droite d'équation $y = x$.

5° En s'aidant du graphique puis de la calculatrice, donner les valeurs décimales approchées de α à 0,1 près.

C) On se propose d'étudier un procédé d'approximation de α.

1° Montrer que, pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[0{,}8 ; 0{,}9]$, $f(x)$ appartient à ce même intervalle et $f'(x)$ à l'intervalle $[0 ; 0{,}1]$.

2° On désigne par (u_n), $n \in \mathbb{N}$, la suite définie par : $\begin{cases} u_0 = 0{,}8 \\ \text{et pour tout entier naturel } n : u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$

a) A l'aide de l'inégalité des accroissements finis, montrer que, pour tout entier naturel n :

$$\left|u_{n+1} - \alpha\right| \leq \frac{1}{10}\left|u_n - \alpha\right|.$$

b) En déduire que, pour tout entier naturel n, $\left|u_n - \alpha\right| \leq \dfrac{1}{10^{n+1}}$

Quelle est la limite de la suite (u_n), $n \in \mathbb{N}$?

3° Donner une valeur décimale approchée de α à 10^{-5} près.

11. Informatique industrielle (extrait) - 91

Fonction d'une variable réelle 2 ; calcul différentiel et intégral 3 (TP1 - TP2 - TP5)

1° Etudier les variations de la fonction h définie sur]0 ; 4] par :

$$h(t) = \frac{t^2}{4} - \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\ln t$$

Tracer la courbe représentative (C) de h, dans le plan rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$, l'unité graphique étant 2 cm.

2° Déterminer le développement limité de h à l'ordre 3 au voisinage de 1 (on pourra poser t – 1 = u).

En déduire la position de (C) par rapport à la parabole (P) d'équation $y = \dfrac{(t-1)^2}{2}$, au voisinage du point A (1 ; 0).

Construire l'arc de la parabole (P) correspondant à t élément de [0 ; 4]

3° Montrer que l'équation $h(t) = 1$ a une solution unique c dans [1 ; 4]. Donner un encadrement de c par deux entiers a_o et b_o tels que l'amplitude de l'intervalle soit $b_o - a_o = 1$.

4° On se propose d'encadrer c en utilisant la méthode de dichotomie.

Soit k la fonction définie sur $[a_o ; b_o]$ par $k(t) = h(t) - 1$, c est l'unique réel de $[a_o ; b_o]$ vérifiant $k(c) = 0$.

Le principe de la première itération de la méthode de dichotomie est le suivant :

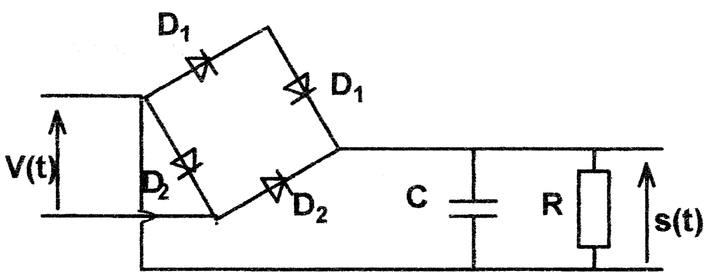
On pose $t_o = \dfrac{a_o + b_o}{2}$; le signe de $k(t_o)$ permet de définir un nouvel encadrement $[a_1 ; b_1]$ de c, d'amplitude 0,5 tel que $[a_1 ; b_1] \subset [a_o ; b_o]$

Dans un tableau, présenter les premiers encadrements et leurs amplitudes.

Ecrire un algorithme permettant le calcul du nombre n d'itérations, ainsi que le calcul de a_n et b_n encadrant c avec une amplitude donnée ε.

12. C.I.R.A. - 92

Fonction d'une variable réelle 2 ; calcul différentiel et intégral 3 (TP1 - TP2 - TP5)



Un redresseur double alternance est constitué de quatre diodes idéales. Il débite dans un dipôle constitué par un condensateur de filtrage et une résistance de charge montés en parallèle (voir schéma du montage).

On donne : $v(t) = 15\,\sin(100\pi t)$.

On se propose de déterminer, pour un choix particulier des diodes, du condensateur et de la résistance, l'instant t_c de remise en conduction des diodes D_1 et D_2.

Pour connaître cet instant, on est conduit à étudier les fonctions f_1 et f_2 définies sur $\left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$ par :

$$f_1(\theta) = 15e^{\frac{1,9-\theta}{\pi}}$$

$$f_2(\theta) = -15\, sin\, \theta$$

On notera (C_1) et (C_2) les courbes représentatives des fonctions f_1 et f_2 définies dans un repère orthogonal. Si les courbes (C_1) et (C_2) se coupent en un point unique d'abscisse θ_c, alors θ_c est lié à t_c par la relation : $t_c = \frac{\theta_c}{100\pi}$.

Partie A : Méthode graphique

1° Etudier, sur l'intervalle $\left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$, les variations des fonctions f_1 et f_2.

2° Reproduire, en le complétant, le tableau :

θ	π	$\frac{13\pi}{12}$	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{17\pi}{12}$	$\frac{3\pi}{2}$
$f_1(\theta)$							
$f_2(\theta)$							

(On donnera des approximations décimales à 10^{-2} près).

3° a) Tracer les courbes (C_1) et (C_2), sur une feuille de papier millimétrée.

On prendra comme unité :

$\frac{\pi}{12}$ est représenté par 1,5 cm sur l'axe des abscisses.

L'unité de longueur est représentée par 0,5 cm sur l'axe des ordonnées.

b) En utilisant le graphique précédent, déterminer une valeur approchée de θ_c, abscisse de l'unique point d'intersection des courbes (C_1) et (C_2). En déduire une valeur approchée de l'instant t_c de remise en conduction des diodes D_2 et D_4.

Partie B : Méthode numérique.

1° L'abscisse θ_c du point d'intersection des courbes (C_1) et (C_2) est la solution unique (voir partie A) de l'équation :

$$f_1(\theta) = f_2(\theta) \text{ avec } \pi \le \theta \le \frac{3\pi}{2}.$$

Montrer que θ_c est solution de l'équation :

$$\theta = \pi + Arc\, sin\left(e^{\frac{1,9-\theta}{\pi}}\right) \quad \text{(E)}.$$

2° On se propose d'utiliser la méthode dite du "point fixe" pour obtenir une valeur approchée de la solution θ_c de l'équation (E).

Pour cela, on considère la fonction g définie sur $\left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$ par :

$$g(\theta) = \pi + Arc\sin\left(e^{\frac{1,9-\theta}{\pi}}\right).$$

a) Montrer que la fonction g est décroissante sur $\left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$.

On pourra éventuellement utiliser la formule : $\left[Arc\sin(u(\theta))\right]' = \frac{u'(\theta)}{\sqrt{1-(u(\theta))^2}}$.

b) Calculer une approximation décimale à 10^{-2} près de $g(\pi)$ et puis de $g\left(\frac{3\pi}{2}\right)$.

Donner le tableau de variation de la fonction g.

c) En déduire que pour tout θ appartenant à $\left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$, $g(\theta)$ appartient à $\left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$.

d) On peut donc définir la suite réelle (U_n), dont les termes appartiennent à l'intervalle $\left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$, par :

$$\begin{cases} U_0 = \pi \\ U_{n+1} = g(U_n) \text{ pour tout entier naturel n.} \end{cases}$$

On admettra que, pour tout θ appartenant à l'intervalle $\left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$, on a : $|g'(\theta)| \leq 0,3$.

En appliquant l'inégalité des accroissements finis à la fonction g sur un intervalle convenable, montrer que, pour tout entier naturel non nul ρ :

$$|U_p - \theta_c| \leq 0,3|U_{p-1} - \theta_c|.$$

On rappelle que $\theta_c = g(\theta_c)$.

e) En écrivant l'inégalité précédente pour p = 1, p = 2, ..., p = n successivement, montrer que la suite (U_n) converge vers θ_c.

f) Utiliser votre instrument de calcul pour donner une approximation décimale à 10^{-3} près des nombres $U_1, U_2, U_3, U_4, U_5, U_6$ puis une approximation à 10^{-3} près de θ_c. Quelle valeur approchée de t_c peut-on en déduire ?

13. Photonique - 93

Fonction d'une variable réelle 2 ; calcul différentiel et intégral 3 (TP1 - TP2 - TP5)

Etude d'une suite récurrente

1° On considère les fonctions définies sur l'intervalle [0 ; +∞[:

$$f(x) = 8e^{-x} \quad ; \qquad g(x) = e^x + 2 \; ; \qquad h(x) = \ln 8 - \ln(e^x + 2).$$

1.1 Etudier rapidement les variations de f et g. Résoudre dans [0 ; +∞[l'équation d'inconnue x :

$$f(x) = g(x)$$

1.2 Tracer les représentations graphiques C_f et C_g de f et g dans un repère orthogonal $(O; \vec{i}, \vec{j})$ d'axes Ox et Oy avec comme unités graphiques 10 cm sur Ox et 2 cm sur Oy.

1.3 Etudier les variations de h' et justifier que :

$$\forall x \in [0,1], |h'(x)| \leq 0{,}6$$

2° n désignant un entier naturel, on place sur C_g un point A_n.
La parallèle à Ox passant par A_n coupe C_f au point B_{n+1}.
La parallèle à Oy passant par B_{n+1} coupe C_g au point A_{n+1}.

2.1 Placer sur le dessin du 1.1.2 le point A_0 de C_g d'abscisse 1 ;
puis construire les points B_1, A_1, B_2, A_2, B_3 ; calculer les abscisses de B_1 et de B_2.

2.2 On appelle x_n ($n \in \mathbb{N}^*$), l'abscisse de B_n (on pose $x_0 = 1$).
Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $f(x_{n+1}) = g(x_n)$;
en déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = h(x_n)$.

2.3 On définit la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par la relation de récurrence :

$$\begin{cases} x_{n+1} = h(x_n) \\ x_0 = 1 \end{cases}$$

On admet que tous les termes de la suite appartiennent à l'intervalle [0 , 1].

a) Calculer $h(\ln 2)$.
b) En appliquant l'inégalité des accroissements finis à h, vérifier que :
$\forall n \in \mathbb{N}$, $|x_{n+1} - \ln 2| \leq 0{,}6|x_n - \ln 2|$.
En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|x_n - \ln 2| \leq (0{,}6)^n$.
Montrer que la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers une limite à préciser.

ALGEBRE LINEAIRE

LES TEXTES PROPOSES

LISTE DES MODULES ET TRAVAUX PRATIQUES

ALGEBRE LINEAIRE (1)

TP1 : Détermination de la matrice associée à une application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$ relativement aux bases canoniques et détermination de l'image d'un vecteur par une application linéaire de matrice donnée.
TP2 : Calcul de sommes et de produits de matrices.
TP3 : Pratique de la méthode du pivot de Gauss pour la résolution de systèmes linéaires.

ALGEBRE LINEAIRE (2)

TP1: Détermination de la matrice associée à une application linéaire de $\mathbb{K}^n$ dans $\mathbb{K}^n$ relativement aux bases canoniques et détermination de l'image d'un vecteur par une application linéaire de matrice donnée.
TP2: Calcul de sommes et de produits de matrices.
TP3: Pratique de la méthode du pivot de Gauss pour la résolution de systèmes linéaires.
TP4: Pratique de la diagonalisation d'une matrice.

I. Algèbre linéaire : calcul sur les matrices

1. Créateur en art céramique - 89

Algèbre linéaire 1 (TP1)

On considère la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

1° Calculer M^2 puis M^3.

2° Déterminer la matrice A pour que $M^2 + A = M^3$.

3° Déterminer $\vec{V}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ pour que $M \times \vec{V} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -7 \end{pmatrix}$.

2. Créateur en art céramique - 90

Algèbre linéaire 1 (TP1)

On considère la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

1° Calculer M^2 .

2° Soit $\vec{V}\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Calculer $\vec{W}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ tel que $M^2 \times \vec{W} = \vec{V}$.

3. Comptabilité et gestion - 87

Algèbre linéaire 1 (TP1)

Soit E un espace vectoriel de dimension 3, de base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ et f l'application linéaire de E dans E définie par:

$\vec{e_1} = f(\vec{i}) = \vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$

$\vec{e_2} = f(\vec{j}) = 2\vec{i} + 7\vec{j} + 3\vec{k}$

$\vec{e_3} = f(\vec{k}) = 3\vec{j} + 5\vec{k}$

1° a) Démontrer que la famille $(\vec{e_1}, \vec{e_2})$ est libre.

b) Déterminer les deux réels a et b tels que: $\vec{e_3} = a\vec{e_1} + b\vec{e_2}$.

2° a) Soit $\vec{V} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ un vecteur de E ; en utilisant la question précédente, montrer que :

$f(\vec{V}) = (x - 2z)\vec{e_1} + (y + z)\vec{e_2}$

b) Démontrer que $f(\vec{V}) = \vec{0}$ si et seulement si $\vec{V}$ est colinéaire au vecteur $\vec{n} = 2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$.

3° a) Démontrer que la famille $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{n})$ est une base de E.
b) Ecrire la matrice de f dans cette base.

4. Esthétique industrielle - 89

Algèbre linéaire 1 (TP1 - TP2)

Soit $M = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ la matrice associée à une rotation de centre O et d'angle θ.

1° Calculer M_1 pour $\theta = 30°$, M_2 pour $\theta = 60°$, M_3 pour $\theta = 180°$.

2° Calculer $M' = M_1 \times M_2$. A quelle rotation correspond la matrice obtenue ? Pourquoi ?

3° Calculer $M'' = (M_3)^2$. A quelle transformation correspond la matrice obtenue ? Pourquoi ?

4° Dans un repère orthonormal dont le point O est l'origine, placer le point A(1; 3).
Calculer les coordonnées du point A', image du point A par la rotation de centre O et d'angle 60°.
Placer A'.

5° Trouver une valeur de θ pour que le point A ait pour image le point $A''(0\ ;\ \sqrt{10})$ dans la rotation de centre O et d'angle θ. On donnera θ au dixième de degré près.

5. Comptabilité et gestion - 88

Algèbre linéaire 1 (TP1)

Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$, on note $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ les vecteurs (1,0,0), (0,1,0) et (0,0,1) et $\vec{e_1}$ le vecteur $\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$.

Soit f l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$, définie par : $\begin{cases} f(\vec{i}) = \vec{j} + \vec{k} \\ f(\vec{j}) = \vec{i} + \vec{k} \\ f(\vec{k}) = \vec{j} + \vec{i} \end{cases}$

1° Ecrire la matrice de f dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

2° a) Montrer que pour tout vecteur $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ de $\mathbb{R}^3$, $f(\vec{u}) = (x + y + z)\vec{e_1} - \vec{u}$.
b) Vérifier que l'ensemble des vecteurs $\vec{u}$ de $\mathbb{R}^3$ tels que $f(\vec{u}) = -\vec{u}$ est un plan, dont une base est constituée par les vecteurs : $\vec{e_2} = -\vec{i} + \vec{j}$ et $\vec{e_3} = -\vec{i} + \vec{k}$.

3° a) Montrer que $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
b) Déterminer les composantes de $f(\vec{e_1})$ dans la base $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$.
c) Ecrire la matrice de f dans la base $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$.

6. Comptabilité et gestion Nouméa - 89

Algèbre linéaire 1 (TP1)

Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$, on note $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ les vecteurs (1,0,0), (0,1,0) et (0,0,1).

Soit f l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$, définie par : $\begin{cases} f(\vec{i}) = 5\,\vec{i} + \vec{k} \\ f(\vec{j}) = 5\,\vec{i} - 5\,\vec{j} - 2\,\vec{k} \\ f(\vec{k}) = 3\,\vec{i} - 3\,\vec{j} \end{cases}$

On pose $\vec{u} = 2\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ et $\vec{v} = \vec{i} - 2\vec{j} - \vec{k}$.

1° Montrer que $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{k})$ est une base de $\mathbf{R}^3$. En déduire que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont linéairement indépendants.

2° a) Vérifier que $f(\vec{u}) = 6(\vec{u} + \vec{v})$ et $f(\vec{v}) = -\vec{u} - 6\vec{v}$.
b) Montrer que $f(\vec{k})$ peut s'écrire sous la forme $f(\vec{k}) = a\vec{u} + b\vec{v}$, où a et b sont des nombres réels que l'on déterminera.
c) Prouver que, pour tout vecteur $\vec{w} = x\vec{u} + y\vec{v} + z\vec{k}$ de $\mathbf{R}^3$, $f(\vec{w})$ appartient à l'espace vectoriel dont une base est $(\vec{u}, \vec{v})$, et déterminer les composantes de $f(\vec{w})$ dans cette base.

7. Comptabilité et gestion - 89

Algèbre linéaire 1 (TP1 - TP2)

Pour une fabrication, une entreprise utilisera x pièces de type X, y pièces de type Y et z pièces de type Z.
La masse et le coût de chacune de ces pièces sont donnés dans le tableau suivant:

	X	Y	Z
masse en g	2,5	2	1
coût en F	1	1,5	0,5

L'entreprise effectue une étude en vue d'optimiser cette fabrication. Pour cela elle doit considérer le nombre total N des pièces employées, leur masse totale M en grammes et leur coût total C en francs.

1° Exprimer N, M et C en fonction de x, y et z.

2° On définit ainsi une application linéaire f de $\mathbf{R}^3$ dans $\mathbf{R}^3$, qui à (x, y, z) associe (N, M, C).
a) Quelle est la matrice F de f dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, où $\vec{i} = (1,0,0)$, $\vec{j} = (0,1,0)$, $\vec{k} = (0,0,1)$.
b) Montrer que cette matrice est inversible et calculer sa matrice inverse.

3° L'étude a montré que la fabrication est optimale lorsque sont employés au total 140 pièces, d'une masse totale de 275 g et d'un coût total de 135 F.
Dans ces conditions, calculer les nombres de pièces de chacun des types X, Y et Z, qui seront utilisées pour cette fabrication.

8. Services informatiques - 88

Algèbre linéaire 1 (TP1 - TP2)

On considère les matrices M et I suivantes : $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -3 & 4 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

1° Calculer la matrice M^2.

2° a) Déterminer les nombres réels a et b tels que $M^2 = aM + bI$.
b) En utilisant la relation de la question précédente montrer qu'il existe une matrice M' telle que : $M \times M' = M' \times M = I$. Ecrire M'.

9. Informatique de gestion Nouméa - 90

Algèbre linéaire 1 (TP1 - TP2)

On considère les matrices M et I suivantes : $M = \begin{pmatrix} a & 1-a & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 1-a & a \end{pmatrix}$ et $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

où a et b désignent deux nombres réels.
Le but de cet exercice est de trouver, lorsque cela est possible, une matrice P telle que $P \times M = I$.

1° Calculer $M^2 = M \times M$.

2° Exprimer $(a + b)M - M^2$ en fonction de a, b et I.

3° On suppose que le produit ab est non nul.
Montrer que le résultat de la seconde question permet de déterminer une matrice P telle que:
$$P \times M = I.$$
Ecrire cette matrice P en fonction de a et de b seulement.

10. Informatique de gestion - 89 (Nouméa)

Algèbre linéaire 1 (TP1 - TP2)

On considère les matrices $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

A tout réel x, on associe la matrice $M(x) = I + x A + \frac{x^2}{2} A^2$.

1° Calculer A^2 et expliciter la matrice M(x) sous forme d'un tableau.

2° a) Montrer que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 3, la matrice A^n est la matrice nulle.
b) En déduire que pour tout réel x et y, on a :
$$M(x) \times M(y) = M(x + y).$$
c) Donner l'expression de $[M(x)]^n$ en fonction des matrices I, A et A^2 pour tout entier naturel n non nul.
Expliciter la matrice $[M(x)]^n$ sous forme d'un tableau.

3° Application : soit la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 12 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
Calculer P^n, n étant un entier naturel non nul, et l'expliciter sous forme d'un tableau.

11. Maintenance et exploitation des matériels aéronautiques - 89

Algèbre linéaire 1 (TP1 - TP2)

Résolution d'un système d'équation.

1° Effectuer le produit A × B des matrices :
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & -10 & -1 \\ -2 & 8 & 2 \\ 2 & -4 & -2 \end{pmatrix}$$
En déduire la matrice B^{-1}, inverse de la matrice B.

2° Ecrire sous forme matricielle le système suivant, d'inconnues x, y et z, puis le résoudre.
$$\begin{cases} 3x - 10y - z = 4 \\ -2x + 8y + 2z = 8 \\ 2x - 4y - 2z = 4 \end{cases}$$

3° Déduire de ce qui précède la solution du système d'inconnues a, b et c :

$$\begin{cases} -10a - b + 3c = 4 \\ 4a + b - c = 4 \\ -2a - b + c = 2 \end{cases}$$

12. Photonique - 92

Algèbre linéaire 2 (TP1 - TP2 - TP4)

On considère dans un espace vectoriel de dimension 2, muni d'une base $(\vec{e_1}\ ;\ \vec{e_2})$, trois applications linéaires d_1, t, d_2 définies respectivement par les données suivantes :

- d_1 : $\vec{e_2}$ est un vecteur propre pour la valeur propre $\frac{2}{3}$ et $d_1(6\vec{e_1} + \vec{e_2}) = 6\vec{e_1}$.
- t : t laisse $\vec{e_1}$ invariant et $t(-27\vec{e_1} + 2\vec{e_2}) = 2\vec{e_2}$.
- d_2 : $\vec{e_2}$ est un vecteur propre pour la valeur propre $\frac{3}{2}$ et $d_2(9\vec{e_1} + 4\vec{e_2}) = 9\vec{e_1} + 5\vec{e_2}$.

1° Déterminer D_1 matrice de d_1 dans la base $(\vec{e_1}\ ;\ \vec{e_2})$ puis T, matrice de t et enfin D_2 matrice de d_2.

2° Soit S la matrice de $s = d_2 \circ t \circ d_1$.
a) Calculer S.
b) Vérifier que $S^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -9 \\ \frac{1}{9} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

3° Cette dernière matrice possède-t-elle des valeurs propres réelles ?

13. En assistance technique d'ingénieur - 88

Algèbre linéaire 2 (TP1 - TP2 - TP4)

Soit E un espace vectoriel réel de dimension 2 rapporté à une base $(\vec{i}, \vec{j})$. On considère l'application linéaire f dont la matrice relativement à la base $(\vec{i}, \vec{j})$ est:

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$$

1° Calculer les valeurs propres λ_1 et λ_2 ($\lambda_1 < \lambda_2$) de f.

2° Montrer que les vecteurs $\vec{V_1} = 7\vec{i} - 6\vec{j}$ et $\vec{V_2} = \vec{i} + \vec{j}$ sont des vecteurs propres de f et qu'ils forment une base de E.

3° Déterminer la matrice D de f relativement à la base $(\vec{V_1}, \vec{V_2})$.

4° Déterminer une matrice inversible P telle que: $M = P\,D\,P^{-1}$
et en déduire l'expression de M^n, n étant un entier naturel non nul.

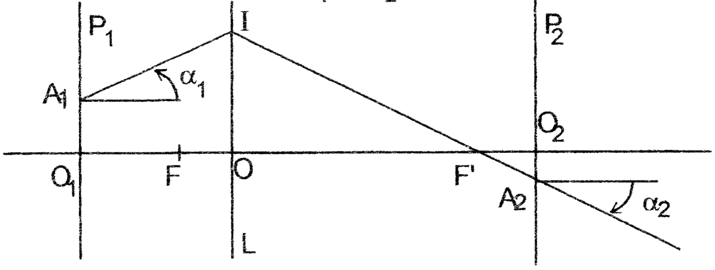
II. Algèbre linéaire : problèmes de synthèse avec des suites.

1. Photonique - 90

Algèbre linéaire 2 (TP1 - TP2 - TP4)

On se propose d'étudier les conditions d'émergence d'un rayon lumineux paraxial traversant n lentilles identiques.
Remarque : On ne calculera ni les valeurs propres, ni aucune matrice.

Soit une lentille mince L, de distance focale f, de foyers F et F'.
On considère deux plans P_1 et P_2 situés de part et d'autres de L tels que:



avec $\overline{FO}_1 = p_1$ et $\overline{F'O}_2 = p_2$

On considère un rayon paraxial caractérisé par :

$$\overline{O_1A_1} = y_1 \ ; (\overrightarrow{O_1O_2}, \overrightarrow{A_1I}) = \alpha_1$$

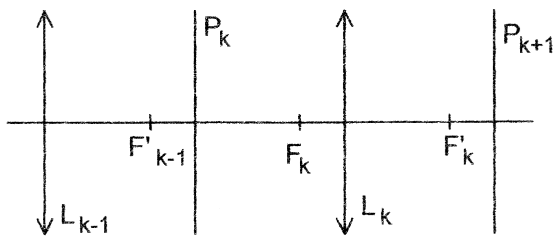
$$\overline{O_2A_2} = y_2 \ ; (\overrightarrow{O_1O_2}, \overrightarrow{IA_2}) = \alpha_2$$

3° a) Ecrire la matrice M de l'application linéaire définie par :

$$\begin{cases} y_2 = -\dfrac{p_2}{f} y_1 + \left(f + \dfrac{p_1p_2}{f}\right)\alpha_1 \\ \alpha_2 = -\dfrac{1}{f} y_1 + \dfrac{p_1}{f}\alpha_1 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{pmatrix} y_2 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = M\begin{pmatrix} y_1 \\ \alpha_1 \end{pmatrix}$$

b) Ecrire l'équation caractéristique de M. Montrer que, si les valeurs propres λ_1 et λ_2 sont réelles distinctes, on a : $|\lambda_1| < 1 < |\lambda_2|$,
et que si elles sont complexes, on a : $|\mathrm{Re}(\lambda_1)| < 1$ et $|\mathrm{Re}(\lambda_2)| < 1$.

On dispose de n lentilles identiques à L, coaxiales et équidistantes.



On pose : $F'_{k-1}F_k = d = |p_2 - p_1|$

c) Soit la matrice $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$
Calculer D^n; $n \in \mathbb{N}^*$.

d) Soient T et T^{-1} les matrices définies par $M = T\,D\,T^{-1}$.
Montrer, par récurrence, que $M^n = T\,D^n\,T^{-1}$; $n \in \mathbb{N}^*$.

e) Montrer que y_n et α_n sont combinaisons linéaires de λ_1 et λ_2.
Lorsque n est grand, le rayon émerge si y_n et α_n sont petits.
Montrer que, dans ce cas, si $d > 2f$, il n'y a pas émergence.

2. Informatique de gestion - 93

Suites et séries numériques 2 (TP2) ; algèbre linéaire 1 (TP 2);

Les questions 1° et 2° sont indépendantes.
Dans tout l'exercice, n désigne un entier naturel non nul.

1° Une suite (u_n) est définie par sont premier terme $u_1 = 2$ et par la relation : $u_{n+1} = 3u_n + 2$.
Soit (v_n) la suite définie par : $v_n = u_n + 1$.
a) Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on donnera la raison.
b) Calculer (v_n), puis (u_n) en fonction de n.

2° On considère les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -10 & 0 & -1 \\ -10 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Calculer les matrices A^2 et $B = 2A + I$.
b) On admet que, pour tout entier n, il existe un réel a_n tel que : $B^n = a_n A + I$.
En utilisant le fait que $B^{n+1} = B^n \times B$ avec $B^{n+1} = a_{n+1}A + I$, calculer a_{n+1} en fonction de a_n.

3° En utilisant les résultats de 1° et 2°, exprimer B^n en fonction de A, I et n.

3. Informatique de gestion - 94

Algèbre linéaire 1 (TP2) ; suites et séries numériques 2 (TP2)

On considère la matrice : $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & -5 & 6 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix}$.

1° Calculer A^2.

2° On admet que, pour tout entier naturel n non nul, il existe un nombre réel a_n tel que A^n est de la forme :

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2a_n & 1-2a_n & 2a_n \\ a_n & -a_n & 1+a_n \end{pmatrix}$$

a) Calculer $A^{n+1} = A^n \times A$.
b) En déduire la relation : $a_{n+1} = 3 - 2a_n$.

3° Soit la suite (b_n) définie pour tout entier naturel n non nul par : $b_n = a_n - 1$.

a) Montrer que (b_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.
b) Calculer b_n puis a_n en fonction de n.

4° En déduire A^n en fonction de n.

4. Photonique - 91

Problème de synthèse : algèbre linéaire 2 (TP1 - TP2 - TP4) ; suites et séries numériques 2 (TP2)

SUITES ET CALCUL MATRICIEL

A toute suite réelle u de terme général u_n, on fait correspondre la suite $\Delta(u)$ de terme général Δu_n défini par:

$$\Delta u_n = u_{n+1} - u_n$$

On définit ainsi un opérateur linéaire sur les suites réelles.
On note: $\Delta^2(u) = \Delta(\Delta(u))$

1° Exprimer le terme général $\Delta^2 u_n$ de la suite $\Delta^2(u)$.

2° On se propose de résoudre l'équation (E):

$$(E) \qquad \Delta^2(u) - 4\,u = 0$$

c'est à dire de chercher toutes les suites u qui vérifient (E).

a) Montrer que les solutions de (E) sont les suites u vérifiant (E'):

$$(E') \qquad \begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix} \text{ avec } M = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

On note f l'endomorphisme dont M est la matrice dans la base canonique.

b) Montrer que les nombres –1 et 3 sont les valeurs propres de f.
Déterminer les vecteurs propres I relatif à –1 et J relatif à 3.

c) Soit P la matrice dont les colonnes sont les coordonnées des vecteurs I et J dans la base canonique. On admettra que si D est la matrice de f dans la base (I; J), on a:

$$M = P.D.P^{-1} \qquad \text{et} \qquad M^n = P.D^n.P^{-1}$$

On demande:
- d'expliciter D et P;
- de calculer P^{-1}, D^n puis M^n.

d) Soit u, une solution de (E). On pose: $V_n = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$

(E') s'écrit alors: $V_n = M.\,V_{n-1}$
On a donc $V_n = M^n.\,V_0$

En déduire le terme général u_n de toute suite u solution de (E), en fonction de n, u_0 et u_1.

5. En assistance technique d'ingénieur - 87

Problème de synthèse : algèbre linéaire 2 (TP1 - TP2 - TP4) ; suites et séries numériques 2 (TP1)

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ rapporté à une base $(\vec{i}, \vec{j})$. Si t est réel, on considère l'application linéaire f_t de E dans E dont la matrice dans cette base est:

$$M_t = \begin{pmatrix} t+1 & t^2-10 \\ 1 & t+3 \end{pmatrix}$$

1° La matrice M_t est-elle inversible ?

2° Déterminer, en fonction de t, les valeurs propres de M_t.

3° Si t = 3, montrer que 5 est valeur propre de M_3; en déduire les vecteurs propres correspondants.

4° Montrer que les vecteurs $\vec{u} = \vec{i} - \vec{j}$ et $\vec{v} = \vec{i} + \vec{j}$ forment une base de E.
Calculer $f_3(\vec{u})$ et $f_3(\vec{v})$ en fonction de $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
Quelle est la matrice A de f_3 dans la base $(\vec{u}, \vec{v})$.

5° Montrer que A s'écrit A = D + N où D est une matrice diagonale, N une matrice dont le carré est nul et telles que DN = ND.
Calculer A^n.

6° On pose $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Montrer que $M_3 = P\,A\,P^{-1}$. Calculer alors $(M_3)^n$.

7° Application:
On considère les deux suites (u_n) et (v_n), définies par $u_0 = 2$, $v_0 = 1$ et pour tout n entier positif :

$$u_{n+1} = 4\,u_n - v_n$$
$$v_{n+1} = u_n + 6\,v_n.$$

En posant $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$, montrer que $X_n = (M_3)^n X_0$.

En déduire u_n et v_n en fonction de n.

6. En assistance technique d'ingénieur - 90

Problème de synthèse : algèbre linéaire 2 (TP1 - TP2 - TP4) ; suites et séries numériques 2 (TP1 - TP2)

A - E étant un espace vectoriel réel muni d'une base $\mathcal{B}(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère l'application linéaire f de E dans E dont la matrice relativement à la base $\mathcal{B}$ est:

$$A = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,3 & 0,2 \\ 0,1 & 0,4 & 0,2 \\ 0,1 & 0,3 & 0,6 \end{pmatrix}$$

Déterminer l'ensemble des vecteurs $\vec{V}$ de coordonnées (X, Y, Z) tels que $f(\vec{V}) = \vec{V}$.

Déterminer, en particulier, le vecteur $\vec{V}$ tel que X + Y + Z = 1.

B - Le service commercial d'un grand magasin fait, chaque année, une enquête auprès de sa clientèle.
Pour l'année n, on désigne par :
a_n la proportion de clients satisfaits,
b_n la proportion de clients sans opinion,
c_n la proportion de clients mécontents.

On admet que tout client est classé dans une de ces catégories, c'est à dire que $a_n + b_n + c_n = 1$.

Une étude comparative des résultats sur deux années consécutives montre que l'on peut admettre que:

$$\begin{cases} a_{n+1} = 0,8a_n + 0,3b_n + 0,2c_n \\ b_{n+1} = 0,1a_n + 0,4b_n + 0,2c_n \\ c_{n+1} = 0,1a_n + 0,3b_n + 0,6c_n \end{cases}$$

On suppose connues a_0, b_0, c_0 pour une année "zéro".

1° On désigne par t_n la matrice unicolonne $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$.
Ecrire une relation entre les matrices T_{n+1}, T_n et A.

2° Dans le cas où $a_0 = \frac{6}{11}$, $b_0 = \frac{2}{11}$, $c_0 = \frac{3}{11}$, que peut-on dire des proportions a_n, b_n, c_n ?

3° On suppose maintenant $(a_0, b_0, c_0) \neq \left(\frac{6}{11}, \frac{2}{11}, \frac{3}{11}\right)$.

On se propose d'étudier les comportements des proportions a_n, b_n, c_n en fonction de n.

On considère les suites (x_n), (y_n), (z_n) définies par : $\begin{cases} x_n = a_n - \dfrac{6}{11} \\ y_n = b_n - \dfrac{2}{11} \\ z_n = c_n - \dfrac{3}{11} \end{cases}$

et on désigne par V_n la matrice unicolonne $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$.

Calculer $x_n + y_n + z_n$. Démontrer que $V_{n+1} = A.V_n$.

Exprimer x_{n+1} et y_{n+1} en fonction de x_n et y_n. On trouvera : $\begin{cases} x_{n+1} = \dfrac{1}{10}(6x_n + y_n) \\ y_{n+1} = \dfrac{1}{10}(-x_n + 2y_n) \end{cases}$.

4° On désigne par M_n le plus grand des deux nombres $|x_n|$ et $|y_n|$.
On a donc $|x_n| \leq M_n$ et $|y_n| \leq M_n$.
Démontrer que $|x_{n+1}|$ et $|y_{n+1}|$ sont inférieurs à $\frac{7}{10}M_n$, c'est à dire que $M_{n+1} \leq \frac{7}{10}M_n$.

En déduire que pour tout entier naturel n, on a : $M_n \leq \left(\dfrac{7}{10}\right)^n.M_0$.

Quelle est la limite de la suite (M_n) ?
En déduire les limites des suites (x_n) et (y_n), puis celle de la suite (z_n).

5° Quelles sont les limites des suites (a_n), (b_n), (c_n) ? Commenter ce résultat.

7. En assistance technique d'ingénieur - 92

Problème de synthèse : algèbre linéaire 2 (TP1 - TP4) ; suites et séries numériques 2 (TP1 - TP2)

Partie A

Soit un espace vectoriel sur **R**, de dimension 2, rapporté à une base $(\vec{i}, \vec{j})$.
On désigne par f l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$ est :

$$A = \begin{pmatrix} \dfrac{8}{9} & -\dfrac{1}{9} \\ -\dfrac{2}{9} & \dfrac{7}{9} \end{pmatrix}$$

1° Déterminer les valeurs propres de A et les vecteurs propres correspondants dont la première coordonnée est 1.

2° On considère les vecteurs $\vec{e_1}(1\ ;\ -1)$ et $\vec{e_2}(1\ ;\ 2)$.
Reconnaître qu'ils sont des vecteurs propres de A et qu'ils constituent une base de E.

On pose : $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \dfrac{2}{3} \end{pmatrix}$.

Calculer la matrice inverse de P et montrer que $A = P.D.P^{-1}$.
Pour n entier naturel supérieur ou égal à 2, calculer D^n. En déduire A^n.

Partie B

On considère les suites réelles (u_n) et (v_n) définies sur **N** par : $u_0 = 1$, $v_0 = 1$ et les relations de récurrence :

$$\begin{cases} u_{n+1} = \frac{8}{9}u_n - \frac{1}{9}v_n \\ v_{n+1} = -\frac{2}{9}u_n + \frac{7}{9}v_n \end{cases}$$

Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on définit la matrice $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$.

Quelle relation existe-t-il entre X_n, X_{n+1} et A ?

Déterminer X_n en fonction de X_0, A et n.

En déduire l'expression des termes u_n et v_n en fonction de n.

Quelles sont les limites des suites (u_n) et (v_n).

8. Informatique industrielle - 91

Problème de synthèse : algèbre linéaire 2 (TP1 - TP2 - TP4) ; suites et séries numériques 2 (TP2)

Soient (U_n) et (V_n) deux suites numériques définies pour tout nombre entier n supérieur ou égal à 1, par:

$$(1) \begin{cases} U_n = 3U_{n-1} - \frac{2}{3}V_{n-1} \\ V_n = 8U_{n-1} - \frac{5}{3}V_{n-1} \end{cases} \quad \text{et} \quad (2)\ \begin{cases} U_0 = 1 \\ V_0 = -1 \end{cases}$$

A -1° Calculer les termes U_1 et V_1 .

2° Calculer les termes U_2 et V_2 .

B -Le but de cette partie est de déterminer les expressions de U_n et de V_n en fonction de n et d'étudier la convergence des suites (U_n) et (V_n).

On considère l'espace vectoriel $\mathbf{R}^2$ et sa base canonique B.
Soit f l'application linéaire de $\mathbf{R}^2$ dans $\mathbf{R}^2$ admettant pour matrice dans la base B :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -\frac{2}{3} \\ 8 & -\frac{5}{3} \end{pmatrix}$$

1° Pour tout entier n, on note X_n la matrice unicolonne $\begin{pmatrix} U_n \\ V_n \end{pmatrix}$.
Montrer que l'on a la relation $X_n = A\,X_{n-1}$ pour $n \geq 1$.
On admettra que, pour tout entier n, $X_n = A^n X_0$.

2° Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de f.

On désignera par λ_1 et λ_2 les valeurs propres (avec $\lambda_1 < \lambda\ e_2$) et par $\vec{W_1}$ et $\vec{W_2}$ les vecteurs propres respectivement associés à λ_1 et λ_2 , vecteurs choisis de façon à ce que leur première coordonnée soit égale à 1.

Montrer que $\vec{W_1}$ et $\vec{W_2}$ forment une base B' de $\mathbf{R}^2$.

3) On appelle P la matrice carrée dont les colonnes sont les coordonnées respectives de $\vec{W_1}$ et $\vec{W_2}$ dans la base canonique.

a) Montrer que $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$.

b) Calculer la matrice inverse P^{-1}.

c) Si l'on pose $D = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, vérifier que $A = PDP^{-1}$.

Pour tout entier n supérieur ou égal à 1, on admettra que:

$$A^n = P\,D^n\,P^{-1}, \text{ avec } D^n = \begin{pmatrix} \left(\frac{1}{3}\right)^n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

4° A partir des résultats précédents, démontrer que pour tout entier naturel n:

$$U_n = -\frac{4}{3^n} + 5 \text{ et } V_n = -\frac{16}{3^n} + 15.$$

5° En déduire la limite de chacune de ces deux suites quand n tend vers + ∞.

III. Algèbre linéaire : problèmes de synthèse avec équations différentielles.

1. Informatique industrielle - 89

Problème de synthèse : algèbre linéaire 2 (TP1 - TP2 - TP4) , équations différentielles 1 (TP1)

A -MATRICES

$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ est la matrice associée à un endomorphisme f dans une base $B_0 = (\vec{i}, \vec{j})$ fixée de $\mathbb{R}^2$.

1° Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de f.

2° Soient $\vec{U} = \vec{i} + \vec{j}$ et $\vec{V} = \vec{i} - \vec{j}$. Démontrer que $(\vec{U}, \vec{V})$ est une base de $\mathbb{R}^2$, notée B_1.

Montrer que, dans cette base B_1, la matrice $D = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ est associée à f.

3° a) Soit $\vec{W}$ le vecteur ayant pour coordonnées (x, y) dans la base B_0 et (X, Y) dans la base B_1. Trouver la matrice P , carrée d'ordre 2, telle que:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \qquad (1)$$

b) Trouver la matrice P^{-1}, carrée d'ordre 2, telle que :

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

c) Vérifier que $P D P^{-1} = M$.

B -APPLICATION

(S_0) est le système différentiel suivant: $\begin{cases} x' = 2x + y \\ y' = x + 2y \end{cases}$

dans lequel x et y désignent deux fonctions dérivables, de la variable réelle t, de dérivées respectives x′ et y′.

M, P et D sont les matrices définies dans la partie A. Le système s'écrit: $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

1° a) Montrer que si x, y, X et Y sont des fonctions dérivables de la variable réelle t vérifiant la relation (1), alors : $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} X' \\ Y' \end{pmatrix}$

b) En déduire que le système (S_0) s'écrit: (S_1) $\begin{pmatrix} X' \\ Y' \end{pmatrix} = D \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$

2° a) Résoudre les deux équations différentielles:

$$\begin{cases} X' = 3X \\ Y' = Y \end{cases}$$

b) En déduire toutes les solutions x et y du système (S_0).

CALCUL VECTORIEL

CONFIGURATIONS GEOMETRIQUES

COURBES PLANES

CONFIGURATIONS GEOMETRIQUES

TP1 : Exemples d'études de problèmes portant sur les objets usuels du plan et de l'espace.

COURBES PLANES :

TP1 : Exemple de tracé de courbes planes définies par une représentation paramétrique ; cas des représentations polaires.

COURBES PLANES 2:

TP1 : Exemple de tracé de courbes planes définies par une représentation paramétrique ; cas des représentations polaires.

TP2 : Etude de quelques exemples de courbes dans l'espace définies par une représentation paramétriques ou par une représentation en coordonnées cylindriques ou sphériques.

TP3 : Exemples simples de calcul de rayons de courbure. Equation intrinsèque d'une courbe (sous la forme $R = f(s)$). Cas de la clothoïde.

LES TEXTES PROPOSES

1. Exercice 1

Calcul vectoriel

Dans un repère orthonormal (O; $\vec{i}$, $\vec{j}$), on considère les points A et B de coordonnées respectives (6;0) et (1;5).

1° Déterminer les équations cartésiennes des hauteurs du triangle OAB, passant respectivement par A et B .

2° Déterminer, de même, les équations cartésiennes des médiatrices des cotés [O, A] et [O, B].

2. Exercice 2

Calcul vectoriel

Dans un repère orthonormal (O; $\vec{i}$, $\vec{j}$), on considère les points A et B dont les coordonnées sont respectivement: (6; 0) et (1; 5).

Calculer les coordonnées :

a) du point O' , intersection des médiatrices

b) du point H , intersection des hauteurs

c) du point H' symétrique du point H par rapport à la droite (OA)

3. Exercice 3

Calcul vectoriel

Dans un repère orthonormal (O; $\vec{i}$, $\vec{j}$), on considère les points A et B dont les coordonnées sont respectivement: (6; 0) et (1; 5) .

Déterminer une équation cartésienne du cercle C, circonscrit au triangle OAB et vérifier que H' appartient à C (H' est le point déterminé à l'exercice précédent) .

4. Exercice 4

Calcul vectoriel

On rappelle que l'aire d'un triangle ABC peut s' exprimer $\mathcal{A} = \dfrac{\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\|}{2}$

Dans l'espace affine euclidien rapporté à un repère orthonormal direct (O; $\vec{i}$, $\vec{j}$) on considère les points :

A(2; -2; 3), B(4; -6; -1) et C(0; -1; 5).

L'unité graphique est le cm.

1° Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BC}$.

2° Calculer en cm les mesures des longueurs de chacun des côtés du triangle ABC.

3° Calculer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$

4° Déterminer en cm^2 la mesure de l'aire du triangle ABC .

5° Calculer la distance du point A à la droite (BC) .

6° Calculer les produits scalaires $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{AC}$. En déduire la position de la droite (OA) par rapport au plan (ABC) .

5. Chaudronnerie et tuyauterie industrielle - 87

Calcul vectoriel ; configurations géométriques (TP1)

Dans l'espace rapporté au repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ direct, on considère les points :
A(5; 4; -4) B(1; -1; 4) et C(2; 1; 5).

1° Déterminer une équation cartésienne du plan P passant par A ,B et C

2° Calculer l'aire du triangle ABC .

3° Calculer les coordonnées du point G , barycentre du système { (A;1) , (B;3) , (C;2) } .

4° Donner une représentation paramétrique de la droite D passant par G et orthogonale au plan P .

5° Soit M le point d'intersection de D avec le plan d'équation z = 0.
Calculer la mesure de l'angle $\widehat{GMO}$.

6. Chaudronnerie et tuyauterie industrielle - 90

Calcul vectoriel ; configurations géométriques (TP1)

On considère l'espace rapporté au repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
Soient les points : A(2; 1; 0) , B(-3; 2; 3) et C(1; -2; -1).

1° Donner une équation cartésienne du plan passant par ces trois points .

2° Calculer l'aire du triangle ABC .

3° Calculer en degrés les mesures des angles de ce triangle. Vérifier vos résultats.

4° Calculer les coordonnées du centre de gravité du tétraèdre OABC

5° Calculer le volume du tétraèdre OABC .

7. Chaudronnerie et tuyauterie industrielle - 92

Calcul vectoriel ; configurations géométriques (TP1)

Dans un repère orthonormal direct $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de l'espace, on donne les points :

A(1; 2; 3), B(−1; 3; 2) et C(0; 0; 4).

1° Soit (P) le plan d'équation x + y + z = 4.

a) Vérifier que le plan(P) contient les points B et C mais pas le point A.
b) Montrer que les coordonnées du point I, projeté orthogonal de A sur le plan (P) sont : $\left(\frac{1}{3}; \frac{4}{3}; \frac{7}{3}\right)$

2° Calculer l'aire $\mathcal{A}$ du triangle ABC puis l'aire $\mathcal{A}'$ du triangle IBC.

3° Calculer l'angle θ du plan (P) et du plan contenant les points A, B et C.

4° Vérifier que $\mathcal{A}' = \mathcal{A}.|\cos\theta|$

8. Bureau d'étude - 81

Calcul vectoriel

L'unité de longueur est le cm. Dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les trois points :
A(1; 2; 2) B(2; 3; 2) C(2; –1; 0)
Dans le plan défini par ces trois points, on considère le triangle ABC .

1° Calculer le produit vectoriel $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$.

2° En déduire l'aire, en cm^2 , du triangle ABC

3° Calculer la distance, en cm, du point A au côté [B,C] du triangle .

9. Bureau d'étude - 83

Calcul vectoriel

L'espace est rapporté au repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ (unité 1cm).
On considère les trois points : A(1; 2; 3) , B(2; 3; 1) et C(3; 1; 2)

1° Calculer les composantes du vecteur $\vec{u} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$? En déduire la mesure, en cm^2, de l'aire du triangle ABC .

2° M(x;y;z) est un point quelconque de l'espace; calculer les composantes du vecteur $\vec{v} = \overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{MB}$ puis calculer le produit scalaire $\vec{v} \cdot \overrightarrow{MC}$.
En déduire une équation cartésienne du plan (ABC)

10. Bureau d'étude - 86

Calcul vectoriel

On considère un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de l'espace.

1° Déterminer une équation cartésienne de la sphère S de centre I(1; 1; -1) et de rayon 3.

2° Soit P le plan dont une équation cartésienne est $2x + y + z = 0$.
Vérifier que le plan P contient les points O , A(-1; 0; 2) et B(-1; 2; 0) .

3° Soit Δ la droite passant par I et orthogonale au plan P. Déterminer les coordonnées du point d'intersection E de la droite Δ avec le plan P .

4° En déduire que l'intersection de la sphère S et du plan P est un cercle (C) dont on donnera le centre et le rayon .

5° Calculer les coordonnées des points d'intersection M et N de la droite Δ et de la sphère S. Déterminer les équations cartésiennes des plans tangents en M et N à la sphère S.

11. Fabrication mécanique - 76

Calcul vectoriel

Dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ (unité 1cm), on donne les quatre points :
A(2; 1; -3), B(1; -1; -1), C(0; -3; 1) et D(-4; 1; 3).

1° Calculer le produit scalaire $\vec{CB} \cdot \vec{CD}$; en déduire la mesure de l'angle $\widehat{BCD}$.

2° Calculer les composantes du vecteur $\vec{W} = \vec{AB} \wedge \vec{AD}$ puis le produit scalaire $\vec{AB} \cdot \vec{AD}$; en déduire :
a) cos $\widehat{BAD}$, sin $\widehat{BAD}$, puis la mesure de l'angle $\widehat{BAD}$
b) L'aire, en cm^2, du triangle ABD.

3° Calculer le produit scalaire $\vec{W} \cdot \vec{CD}$. Que peut-on en déduire pour quatre points A,B,C,D ?

12. Fonderie sur modèle - 87

Calcul vectoriel

L'espace est muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, unité 1cm. On considère les points :
A(4; 1; 2) B(3; 1; 3) C(2; 2; 3) D(2; 3; 2) E(3;3;1) F(4; 2; 1) et S(6;5;5).

1° Montrer que les segments [A, D], [B, E] et [C, F] ont même milieu W .

2° Calculer le produit vectoriel $\vec{WA} \wedge \vec{WB}$ et montrer que ce vecteur est colinéaire au vecteur $\vec{WS}$.

3° Calculer le produit scalaire $\vec{WS} \cdot \vec{CF}$.
En déduire que les points A,B,C,D,E sont coplanaires.

4° Montrer que les points A,B,C,D,E,F sont les sommets d'un hexagone régulier .

5° Calculer l'aire de cet hexagone régulier.

13. Fonderie sur modèle - 89

Calcul vectoriel

Le plan P est rapporté au repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$, unité graphique 1 cm;
on considère les points :
A(2; 0) B(0; 1) et M(m; m) où m est un réel quelconque de $\mathbb{R}$.

1° Montrer que l'ensemble des points M quand m varie est une droite dont on déterminera un point et un vecteur directeur .

2° Déterminer les valeurs de m pour lesquelles le triangle ABM est rectangle en M.
Vérifier que l'un de ces triangles est isocèle.

3° L'espace est rapporté à un repère orthonormal direct $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$; le plan $(O; \vec{i}, \vec{j})$ étant le plan (P) précédemment défini.

Les points A, B, M ont donc comme coordonnées dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$:
A(2; 0; 0) B(0; 1; 0) et M(m; m; 0)

Soit f la fonction numérique qui à tout réel m associe l'aire en cm^2 du triangle ABM .

On rappelle que $f(m) = \dfrac{\left\| \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AM} \right\|}{2}$.

a) Calculer f(m) en fonction de m .

b) Déterminer les valeurs de m pour lesquelles l'aire du triangle ABM est égale à 4 cm^2 .

14. Forge et estampage - 85

Calcul vectoriel

L'espace est rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$,(unité 1 cm) .
On donne les points : A(2; 2; 6) B(1; 2; 2) C(3; 5; -1) et D(-2; 3; 1).

1° Calculer l'angle des arêtes [A,B] et [A,C] du tétraèdre ABCD. On donnera une mesure de cet angle en degrés à 10^{-2} près. (On pourra utiliser le produit scalaire dans l'espace)

2° Calculer la distance de A à la droite (BC). Elle sera donnée en cm à 10^{-2} près .

15. Forge et estampage - 87

Calcul vectoriel

Soit $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère orthonormal direct de l'espace (unité 1 cm).
On considère les points :
A(4; 4; 0) B(4; -4; 0) C(-4; -4; 0) et D(-4; 4; 0).

1° Démontrer que ABCD est un carré dont le centre de gravité est O.

2° Soient I et J les milieux respectifs de [A,D] et de [B,C]. Déterminer les coordonnées du point S, de cote positive , pour que SABCS soit une pyramide régulière et que l'angle $\widehat{ISJ} = 60°$.

3° Tracer la pyramide SABCD en perspective cavalière .

4° Calculer une valeur approchée, à 10^{-3} près du volume V de SABCS en cm^3 (on rappelle que le volume d'une pyramide régulière est égal au tiers du produit de l'aire de base par la hauteur correspondante)

16. Forge et estampage - 90

Calcul vectoriel

$(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est un repère orthonormal de l'espace (unité : 1cm).
Soient les points A(10,5 ; 0; 0); B(5,5; 2,5; 0) et C(5; 0; 1) .

1° Représenter le triangle ABC en perspective cavalière (135° , coefficient de projection : 0,7) .

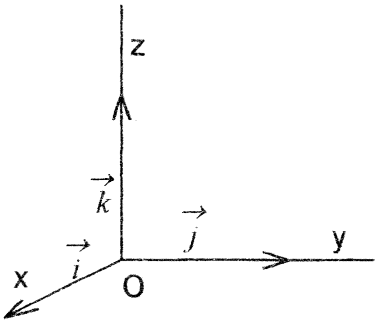
2° Déterminer les coordonnées du point D tel que ABDC soit un parallélogramme et placer D sur le dessin .

3° Comparer les distances AB et AC. Que peut-on en déduire pour le quadrilatère ABDC, ainsi que pour la position relative des droites (AD) et (BC) ?
Expliquer brièvement les développements des calculs et donner les résultats en millimètres, au dixième de millimètre près .

17. Forge et estampage - 92

Calcul vectoriel ; Configurations géométriques 2 (TP1)

L'espace est rapporté au repère orthonormal direct $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ que l'on représentera en perspective cavalière à 135 degrés, rapport de projection 0,75 et unité graphique 1 cm.
On considère les points A(0 ; 3 ; 6), B(2,5 ; 0 ; 3) et C(0 ; 7 ; 0)).



1° a) Calculer le produit vectoriel $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$.

b) Evaluer, en degrés décimaux à 10^{-2} près, l'angle $\widehat{BAC}$.

2° a) Démontrer qu'une équation du plan (P) passant par les points A, B et C est :

$$6x + 3y + 2z - 21 = 0.$$

b) Quelle est la distance d de l'origine O au plan (P) ?

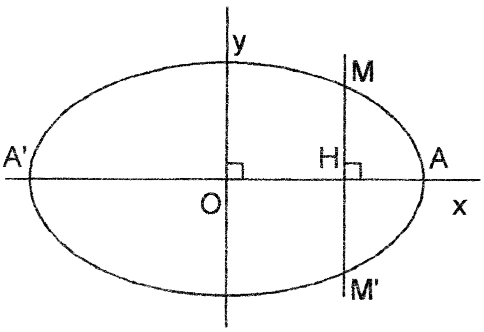
c) Donner les coordonnées des points D et E, intersections respectives de (P) et des droites $(O; \vec{k})$ et $(O; \vec{i})$? Tracer le triangle CDE.

3° Soit (Q) le plan passant par les points A et B, et perpendiculaire au plan horizontal $(O; \vec{i}, \vec{j})$. Tracer le polygône intersection de (Q) et de la pyramide OCDE.

18. Industries céréalières - 92

Configurations géométriques 2 (TP1 - TP2) ; calcul différentiel et intégral 1 (TP3)

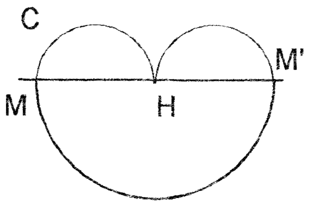
Le but de ce problème est de justifier que le taux d'extraction meunier optimal d'un grain de blé est maximum lorsque ce grain est quasi-sphérique.
La modélisation géométrique d'un grain de blé peut être obtenue de la façon suivante :



La courbe E est une ellipse, de grand axe 2a, de petit axe 2b ; son équation, dans le plan rapporté au repère orthonormal d'axes Ox et Oy, est :

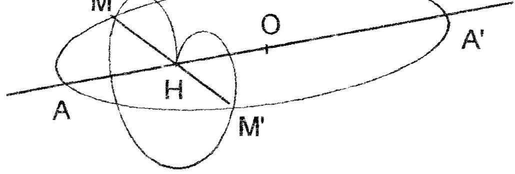
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$$

La droite d'équation $x = \lambda$, $(-a \le \lambda \le a)$, coupe E en deux points M et M', le grand axe de E en H.



Dans le plan perpendiculaire au plan de E suivant la droite (MM'), on considère la courbe C formée de trois demi-cercles, l'un de diamètre [MM'], les deux autres de diamètres respectifs [MH] et [HM'], conformément à la figure ci-contre.

Lorsque H décrit [AA'], cette courbe C enveloppe un volume V dont la forme correspond approximativement à celle d'un grain de blé.



1° Calculer, pour une valeur λ quelconque de $[-a ; a]$, l'aire $A(\lambda)$ limitée par la courbe C, en fonction de a, b et λ.

2° En déduire le volume de V en fonction de a et b.

3° Dans cette question, on admet que l'amende contenue dans le grain de blé a la même forme que le grain, l'ellipse E' ayant alors pour grand axe 2a – 2d, et pour petit axe 2b – 2d, où d est une constante représentant l'épaisseur de l'enveloppe.

On suppose que les masses volumiques de tous les constituants du grain sont identiques.
Calculer le taux d'extraction meunier optimal R en fonction de a, b et d (R est le rapport entre la masse de l'amande et la masse totale du grain).

Application numérique : 2a = 6,07 mm ; 2b = 3,00 mm ; d = 0,14 mm.

4° On admet que : $R(a,b) = \dfrac{(a-d)(b-d)^2}{ab^2}$

On suppose que $ab^2 = 7\ mm^3$ et que d = 0,14 mm.
Calculer R(a,b) uniquement en fonction de b.
Calculer b pour que R soit maximum. En déduire a. Conclure.

19. Industries du cuir (extrait) - 88

Problème de synthèse

L'espace est rapporté à un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

PARTIE A

1° On considère le point A de coordonnées (0; 0; 2) et le point B, de coordonnées (2; 0; 0).

a) Représenter le repère $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ et placer les points A et B.

b) Soit C le point du plan $(O ; \vec{i}, \vec{j})$, de coordonnées $(x_c ; y_c ; 0)$, $y_c > 0$ tel que OBC soit un triangle équilatéral.
Déterminer x_c et y_c. Placer le point C sur la figure.

2° m étant un nombre réel choisi arbitrairement entre 0 et 2, on désigne par M le point du segment [OB] d'abscisse m. Placer M sur la figure. D_m désigne la droite passant par M et parallèle à la droite (BC). Tracer D_m. On note S le point d'intersection de D_m avec (OC).

3° Q_m désigne le plan contenant D_m et orthogonal au plan $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.
Q_m coupe la droite (AB) au point N et la droite (AC) au point R.

a) Montrer que la droite (MN) (intersection des plans Q_m et $(O ; \vec{i}, \vec{j})$), et la droite (RS) (intersection des plans Q_m et OAC) sont parallèles.

b) Montrer que les droites (NR) et (BC) sont parallèles.

c) Déduire des deux questions précédentes que le quadrilatère MNRS est un rectangle.

PARTIE B : Calcul de l'aire du rectangle MNRS

1° a) Montrer que MS = OM = m et que MN = MB = 2 – m. (on pourra réaliser deux figures, l'une dans le plan $(O ; \vec{i}, \vec{j})$, l'autre dans le plan $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

b) Montrer que l'aire du rectangle MNRS est égale à : $\mathcal{A}(m) = -m^2 + 2m$

2° Après étude des variations de $\mathcal{A}(m)$ sur l'intervalle]0; 2[représenter graphiquement $\mathcal{A}$ dans un repère orthonormal $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

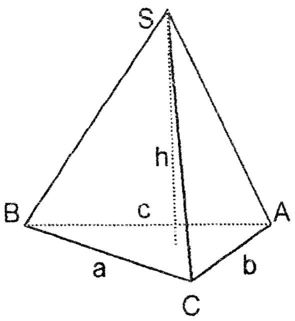
3° Quelle particularité le rectangle MNRS offre-t-il lorsque $\mathcal{A}(m)$ est maximum ?

20. Art céramique - 88

Configurations géométriques 1 (TP1)

On donne une pyramide de base triangulaire , appelée tétraèdre (voir figure jointe) , de dimensions :
a = 3m ; b = 4,5 m ; c = 6 m ; h = 10 m

a) Calculer en degrés , l'angle C du triangle ABC , puis l'aire de ce triangle .



En déduire le volume de la pyramide (on donnera les résultats en m^2 ou en m^3 à 10^{-2} près)

b) On applique à ce tétraèdre l'homothétie f de centre S et de rapport $\frac{1}{3}$.
Quelle est la nature du solide ainsi obtenu ? Le représenter sur la figure jointe. Quel est son volume .

FORMULES USUELLES DANS LE TRIANGLE

1° $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$

2° $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$

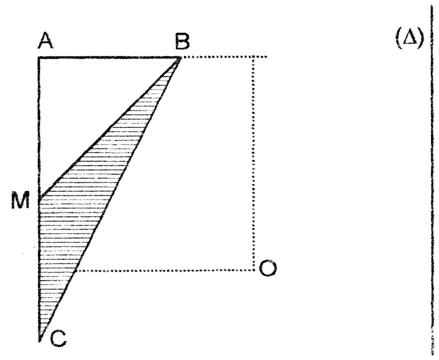
3° aire = $\frac{1}{2} ab \sin C$

4° Aire = $\frac{\text{base} \times \text{hauteur}}{2}$

21. Art textile et impression - 92

Configurations géométriques 1 (TP1)

On donne la figure ci-contre :



- ABM est un triangle rectangle en A.
- AM = AB = MC = 2 cm.
- (Δ) est une droite parallèle à (AC).
  La distance des droites (AC) et (Δ) est de 6 cm.
- Le point O est situé à trois cm des droites (AB) et (AC).
  - La figure F est composée des deux triangles AMB et MBC.

1° Reproduire la figure F, le point O et la droite (Δ), dans la partie située en haut et à gauche d'une feuille de papier millimétré.
Colorier l'intérieur du triangle MBC.

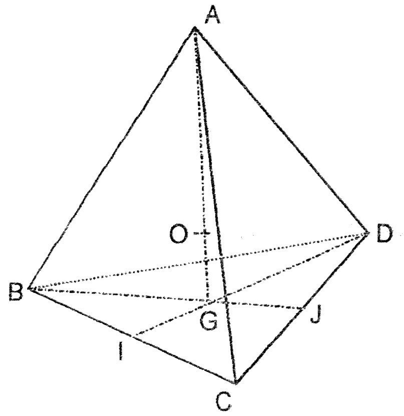
2° Tracer :
- l'image F_1 de la figure F par la symétrie de centre O.
- l'image F_2 de la figure F par la rotation de centre O et d'angle $-\frac{\pi}{2}$.
- l'image F_3 de la figure F_2 par la symétrie de centre O.
  A chaque étape, l'image de toute partie coloriée sera coloriée.
  On appelle G la figure obtenue par la réunion de F, F_1, F_2 et F_3.
  Tracer l'image G′ de la figure G par la symétrie orthogonale d'axe (Δ).

3° Tracer l'image des figures G et G′ par la translation de vecteur $3.\overrightarrow{AM}$.

22. Architecture intérieure - 90

Configurations géométriques 1 (TP1)

Pour réaliser un luminaire destiné à une discothèque, on étudie sa structure en forme de tétraèdre régulier. Les arêtes doivent être découpées pour que le tétraèdre soit inscrit dans une sphère de diamètre 1m.



On pose a = AB = BC = CD = DA = AC = BD

I est le milieu de [B,C] , J le milieu de [C,D] ; G est le centre de gravité du triangle BCD.

$$\vec{AO} = \frac{3}{4}\vec{AG}$$

On admettra que le triangle AGB est rectangle en G .

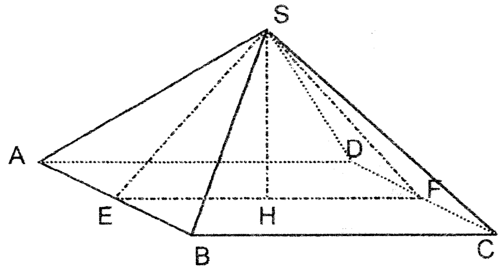
1° Calculer, en fonction de a, les longueurs des segments : [B,J] , [B,G] , [A,G] , [O,A] , [O,G] , [O,B] .
En déduire que O est le centre de la sphère circonscrite au tétraèdre.

2° Calculer la longueur de l'arête du tétraèdre, à 1cm près.

23. Esthétique industrielle - 88

Configurations géométriques 1 (TP1)

On considère la pyramide à base carrée ABCD, de sommet S placé sur la perpendiculaire à la base, élevée au centre H du carré.
Les points E et F sont respectivement les milieux des côtés [A,B] et [C,D] (voir figure).



On suppose que les proportions de la pyramide sont telles que le carré construit sur la hauteur [SH] comme côté, a même aire que l'une quelconque des faces triangulaires latérales (toutes identiques par construction) .

1° Exprimer l'égalité des deux aires ainsi définies.
En déduire une expression de SE en fonction de SH et AB.

2° Exprimer $\frac{SE}{EH}$ en fonction de SH et AB.

3° On note $k = \frac{SE}{EH}$. Etablir une relation entre SH , EH , et SE .
En déduire que k est la solution positive de $k^2 - k - 1 = 0$. Quelle est cette solution ?
NB : k est appelé le Nombre d'Or. Selon Hérodote, la pyramide de Chéops aurait été construite sur ce modèle ......

24. Plasticien de l'environnement architectural - 92

Configurations géométriques 1 (TP1)

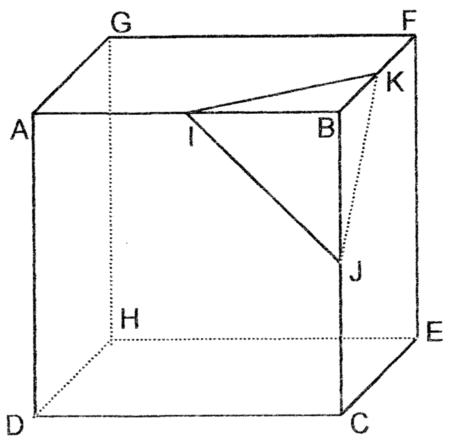
Exercice 1

1° On considère un cercle de centre C, rayon 3 cm, un diamètre [OO'] de ce cercle et un point A sur ce cercle. On note θ une mesure de l'angle $\widehat{O'OA}$. Que peut-on dire de l'angle $\widehat{OAO'}$?
En déduire la longueur OA en fonction de θ.

2° Construire un cercle de centre C, rayon 3 cm et un diamètre [OO'].
Une droite (Δ) passant par O recoupe le cercle en A. Placer les points M et N sur (Δ) tels que :

AM = AN = 3 cm.
L'ensemble des points obtenus lorsqu'on considère toutes les droites passant par O forme une courbe. Il s'agit d'un limaçon, courbe dessinée pour la première fois par Dürer en 1525, puis étudiée mathématiquement par Roberval et Etienne Pascal.
Dessiner l'allure de cette courbe en refaisant plusieur fois la construction des points M et N pour plusieurs droites (Δ) passant par O.

Exercice 2
On considère un cube dont les arêtes mesurent 6 cm. On le tronque en chacun de ses sommets suivant le schéma suivant :
troncature pour un sommet : enlèvement de la pyramide, à base triangulaire (BIJK).



I est milieu de [AB]

J est milieu de [BC]

K est milieu de [BF]

Faire un dessin soigné du polyèdre obtenu. Est-il régulier ?
Préciser le nombre et la nature de ses faces, le nombre d'arêtes et le nombre de sommets.
Calculer, en centimètres cubes, le volume de ce cube tronqué.

formulaire :
volume du cube d'arête a : a^3
volume d'une pyramide de hauteur h et de surface de base S : $\frac{1}{3} S \times h$.

25. Esthétique industrielle - 92

Configurations géométriques 1 (TP1)

Pendant longtemps, le nombre d'or a subjugué artistes et mathématiciens. On le retrouve en particulier dans la section dorée et le nombre d'or.

1° Section dorée

Soient trois points A, B et C. On dit que ces trois points forment une section dorée lorsque $\frac{AC}{AB} = \frac{AB}{BC}$.
B $\in$ [AC].
On posera, pour simplifier AB = x et BC = 1.
Calculer x dans ce cas. x représente le nombre d'or.

2° Triangle d'or

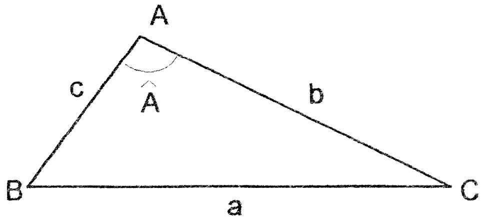
On appelle triangle d'or un triangle isocèle ayant deux angles de 72°.

Soit ABC un triangle d'or tel que : AB = AC.
On trace la bissectrice de l'angle $\widehat{ABC}$ qui coupe [AC] en D.
a) Montrer que les triangles ABD et BCD sont isocèles et que BDC est un triangle d'or.
b) Tracer la bissectrice de l'angle $\widehat{BDC}$. Elle coupe [BC] en E.
Montrer que (AB) et (DE) sont parallèles et que le triangle DEC est un triangle d'or.
c) Compléter la construction pour obtenir au total 5 triangles d'or sur le dessin.
(On prendra BC = 10 cm).

26. Stylisme de mode - 89

Configurations géométriques 1 (TP1)

RAPPEL : Dans un triangle ABC, si on note A l'angle BAC, b l'angle ABC, C l'angle BCA , si de plus on note a la longueur du segment [B,C], b la longueur du segment [A,C], c la longueur du segment [A,B] alors :



$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

$$A + B + C = 180°$$

Dans un triangle PQR, l'unité de mesure d'angle étant le degré, l'unité de longueur étant le centimètre, on donne Q = 57°; R = 63° et QR = 15 cm.

1° Tracer le triangle PQR (sur la copie) .

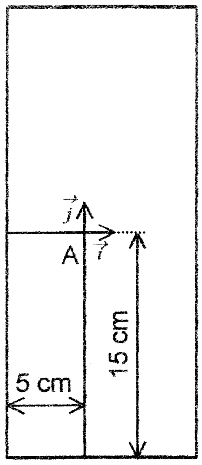
2° Calculer la mesure de l'angle P et les longueurs PQ et PR .

3° Soit I le milieu du côté [Q,R] . Calculer la longueur de la médiane PI à 10^{-1} près .

27. Stylisme de mode - 90

Configurations géométriques 1 (TP1)

On se place dans le plan orienté rapporté à un repère orthonormal $(A, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$
(unité graphique : 1cm). A, $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$ seront placés sur une feuille de papier millimétré suivant le schéma ci-contre.



Dessiner au crayon le triangle ABC ;
B et C sont définis par leurs coordonnées B(1; 0) et C(0; 1).

1° Calculer BC et la mesure des angles du triangle ABC.

2° I et J étant les milieux respectifs des segments [A,C] et [B,C], tracer à l'encre la figure ($\mathcal{F}$) formées des segments [I,J] et [J,B]. Dans la suite de l'exercice, il est conseillé d'utiliser à chaque étape une couleur différente .
On note h l'homothétie de centre C et de rapport 2. Dessiner l'image de la figure ($\mathcal{F}$) par h. On note $\mathcal{D}$ l'image de $\mathcal{B}$ par h.

3° On appelle ($\mathcal{G}$) la figure formée par les segments [I,J], [J,B] et leurs homothétiques. Construire l'image de ($\mathcal{G}$) par la symétrie orthogonale d'axe (AC) .

4° On appelle ($\mathcal{H}$) , la figure formée de ($\mathcal{G}$) et de son image construite à la question 3°.
Construire l'image de ($\mathcal{H}$) par la rotation de centre D et d'angle $-\frac{\pi}{2}$.

5° On appelle ($\mathcal{L}$) la figure formée de ($\mathcal{H}$) et de son image construite à la question 4°.
Construire l'image de ($\mathcal{L}$) par la symétrie centrale de centre C .

6° On appelle ($\mathcal{R}$) la figure formée de ($\mathcal{L}$) et de son image construite à la question 5°.

Construire l'image de ($\mathcal{R}$) par la translation de vecteur 8 $\overrightarrow{AB}$ et l'image de ($\mathcal{R}$) par la translation de vecteur 4 .$\overrightarrow{CB}$

28. Stylisme de mode - 92

Configurations géométriques 2 (TP2)

Le plan est rapporté à un repère orthonormal (O ; $\vec{i}$, $\vec{j}$), (unité graphique : 1 cm).
Placer les points A(1; 1); B(3; 2); C(2; 3). On note T le triangle ABC.

1° Calculer les distances AB, AC et BC. Vérifier que T est un triangle isocèle.

2° Calculer $\cos\hat{A}$; en déduire la mesure en degrés de l'angle $\hat{A}$ (arrondir au degré le plus proche).

3° Construire l'image T_1 de T par l'homothétie de centre O et de rapport −2.

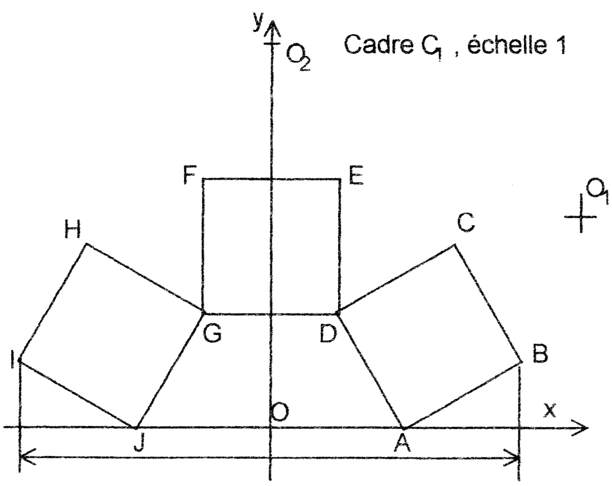
4° On note F la figure formée par la réunion des triangles T et T_1.
Les figures F_1 et F_2 définies ci-dessous seront représentées en utilisant deux couleurs différentes.
a) Construire l'image de F par la symétrie de centre O. On note F_1 la figure formée des quatre triangles ainsi représentés.
b) Construire F_2, image de F_1 par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$ radians.

29. Art céramique - 87

Configurations géométriques 1 (TP1)

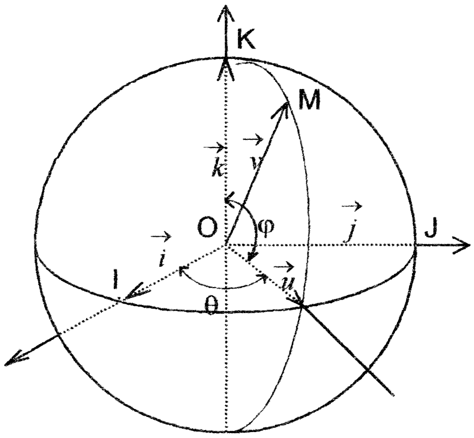
Soit le module extrait d'un pavage plan (nommé 3.4.6.4), et dessiné dans le cadre C1 (annexe 1) à l'échelle 1, sur un repère orthonormal d'axes Ox et Oy, l'unité étant le millimètre .
L 'origine est le centre d'un hexagone régulier, inscrit dans un cercle de rayon 20 mm .
1° Reporter et dessiner le module à partir des points O1 et O2 dans le cadre C1.
2° Calculer la largeur L du module, sachant que, les angles étant mesurés en degrés, on donne :

cos(30°) = 0.87	cos(45°) = 0.7	cos(60°) = 0.5
sin (30°) = 0.5	sin (45°) = 0.7	sin(60°) = 0.87



30. Géomètre topographe - 92

Configurations géométriques 2 (TP1)



Soit un repère cartésien orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ avec $\overrightarrow{OI} = \vec{i}$, $\overrightarrow{OJ} = \vec{j}$, $\overrightarrow{OK} = \vec{k}$.

On considère la sphère (S) de centre O, de rayon 1. Tout point M est alors repéré par sa longitude θ et sa latitude φ ($\theta = (\vec{i}, \vec{u})$, $\varphi = (\vec{u}, \vec{v})$).

1° On considère sur (S) les points $A\left(\theta = \frac{\pi}{6}, \varphi = \frac{\pi}{6}\right)$ et $B\left(\theta = \frac{\pi}{3}, \varphi = \frac{\pi}{3}\right)$.

a) Calculer, en radians, les côtés et les angles du triangle sphérique ABJ à 10^{-3} près.
b) Soit N le milieu du côté AJ de ce triangle sphérique ABJ. Déterminer la longitude et la latitude de N.

2° Dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère la courbe (C), ensemble des points M(x, y, z) tels que : $x = \cos^2 t$, $y = \cos t . \sin t$, $z = \sin t$, t prenant toute valeur réelle.

a) Montrer que tout point de (C) est sur la sphère (S).
b) Montrer que tout point de (C) appartient à la surface d'équation : $x^2 - x + y^2 = 0$.

3° On étudie les courbes (C_1) et (C_2), projections orthogonales de (C), respectivement sur les plans $(O; \vec{i}, \vec{j})$, $(O; \vec{i}, \vec{k})$.

a) Montrer que (C_1) est un cercle. Préciser son centre et son rayon.
b) Montrer que (C_2) est un arc d'une parabole P dont on précisera le foyer et la directrice.

Les trois questions peuvent être traitées indépendamment l'une de l'autre.