PUBLICATION N°27 DU GROUPE INTER IREM "LYCEES TECHNIQUES"

EXERCICES ET PROBLEMES POUR STS

FASCICULE 4

(JUIN 1996)

Université Paris-Nord

IREM - Institut Galilée

Avenue J. B. Clément
93430 VILLETANEUSE

UNIVERSITE PARIS-NORD

IREM

EXERCICES ET PROBLEMES DE BTS
classés par modules

ISBN 2 86 240 80 7

Geneviève CHAVIGNY :	(IREM de Besançon)
Hélène DELCLAUX :	(IREM de Paris)
Françoise DELZONGLE :	(IREM Paris-Nord)
Jean MATIVET :	(IREM Paris-Nord)
Bernard VERLANT :	(IREM Paris-Nord)

Retirage Juin 1996

600 ex.

40.00 F

SOMMAIRE

AVANT PROPOS.................................... 5

❑ SUITES ET SERIES NUMERIQUES........................ 7

Liste des modules et travaux pratiques... 8

Les textes proposés... 9

❑ ALGEBRE LINEAIRE.................................... 23

Les textes proposés 24

Liste des modules et travaux pratiques... 25

❑ CALCUL VECTORIEL.................................... 44

❑ CONFIGURATIONS GEOMETRIQUES 50

❑ COURBES PLANES... 58

Liste des modules et travaux pratiques... 42

Les textes proposés............................ 43

AVANT PROPOS

Cette brochure regroupe des exercices ou problèmes posés aux épreuves de BTS de ces dernières années.

Afin d'élargir les champs d'investigation, les textes ont été classés par thèmes. Dans chaque thème, les sujets ont été généralement regroupés par grandes filières.

Certains énoncés ont été modifiés pour améliorer la compréhension.
Pour chaque exercice ont été indiqués le ou les modules et travaux pratiques correspondant à l'exercice et qui font partie du programme de la section.

SUITES ET SERIES NUMERIQUES

Liste des modules et travaux pratiques

Suites numériques 1

TP1 : Etude du comportement de suites définies par une relation $u_n = f(u_n)$.
TP2 : Exemples d'étude de suites définies par une relation de la forme :
$u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$ et une condition initiale.

Suites et séries numériques 2

TP1 : Etude du comportement de suites définies par une relation $u_n = f(u_n)$.
TP2 : Etude du comportement de suites définies par une relation $u_{n+1} = f(u_n)$
et leur premier terme, approximation d'un point fixe de f à l'aide d'une telle suite.
TP3 : Exemples d'emploi de suites pour l'approximation d'un nombre.
TP4 : Exemples simples d'études de séries numériques.

Analyse des phénomènes exponentiels

TP6 : Exemples d'étude du comportement de suites définies par une relation $u_{n+1} = au_n + b$
ou $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$ et une condition initiale.
TP7: Exemples d'étude du comportement de suites définies par une relation $u_n = f(u_n)$
et leur premier terme, approximation d'un point fixe de f à l'aide d'une telle suite.
TP8 : Exemples d'étude du comportement de suites définies par une relation $u_{n+1} = f(u_n)$
et leur premier terme, approximation d'un point fixe de f à l'aide d'une telle suite.

LES TEXTES PROPOSES :

1. Industries du cuir - 90 - 11
2. Industries du cuir - 92 11
3. Informatique de gestion - 90 11
4. Informatique de gestion - 91 12
5. Informatique de gestion - 92 12
6. Informatique de gestion - 95 13
7. Géomètre topographe - 92 13
8. Informatique de gestion - 90, (Nouvelle Calédonie) 13
9. Etude et économie de la construction - 89 15
10. Comptabilité et gestion - 91 16
11. Informatique de gestion - 89 17
12. C.I.R.A. - 92 17
13. Industries papetières - 95 19
14. Photonique - 93 21

1. Industries du cuir - 90 -

Suites numériques 1 (TP1)

Pour régler un achat, d'un montant de 80 000 F, une personne a utilisé deux sources de financement

- Comme source principale, la totalité d'un capital personnel, constitué en trois ans par le placement, au taux annuel de 5,5 %, à la fin du mois de décembre 1986 d'une somme de 15 000 F puis, à la fin de chacun des 36 mois suivants, d'une somme de 1 000 F.
- Comme source complémentaire un emprunt, effectué au taux annuel de 11,5 % et remboursable sur deux ans, par mensualités constantes.

1° Source principale :
  a) Donner le taux mensuel équivalent du taux annuel de 5,5 % (on donnera et utilisera dans la suite la valeur décimale arrondie à 10^{-5} près de ce taux mensuel).
  b) Calculer le capital personnel dont disposait la personne au 31 décembre 1989 (arrondir à la centaine de francs supérieure).

2° Source complémentaire :
  a) Donner la somme empruntée.
  b) Calculer la mensualité du remboursement (arrondir au centime supérieur).

2. Industries du cuir - 92

Suites arithmétiques et géométriques

Un industriel a acheté chez un fabricant, en 1986, une machine neuve, pour un prix de 300 kF.
(1 kF = 1 000F).

1° Par rapport à son prix d'achat, la valeur de reprise de cette machine perd 20 % chaque année. (La valeur de reprise est le prix de rachat de la machine usagée par le fabricant, pour l'achat d'une nouvelle machine neuve par l'industriel.)
On note V_n cette valeur de reprise, exprimée en kF, n années après l'achat de la machine neuve.
  a) Vérifier que $V_1 = 240$.
  b) Montrer que la suite (V_n) est une suite géométrique ; donner la raison de cette suite. Exprimer V_n en fonction de n.

2° Chez le fabricant, le prix de vente de la machine neuve, exprimé en kF, augmente de 4 % chaque année. On note P_n ce prix, au bout de n années.
P_0 étant égal à 300, exprimer P_n en fonction de n.

3° Cinq ans s'étant écoulés, l'industriel achète à nouveau une machine neuve, identique à celle achetée en 1986, tout en revendant cette dernière au fabricant.
Ces transactions se faisant dans les conditions des questions 1° et 2°, quelle somme, arrondie au kF le plus proche, l'industriel devra-t-il débourser ?

3. Informatique de gestion - 90

Suites numériques 1 (TP2)

On se propose d'étudier la convergence de la suite u, à termes strictement positifs, définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_1 = 2 \\ (u_{n+2})^2 = u_{n+1} \times u_n, \text{pour tout entier naturel } n. \end{cases}$$

Soit v la suite définie par : $v_n = ln(u_n)$ pour tout entier naturel n.
(ln désigne la fonction logarithme népérien).

1° Montrer que la suite v vérifie : quel que soit l'entier naturel n, $2v_{n+2} = v_{n+1} + v_n$ (1)

2° Déterminer les deux suites géométriques de premier terme 1, de raisons non nulles, qui vérifient la relation (1).

3° Montrer que, quels que soient les nombres réels a et b, la suite w, de terme général : $w_n = a + b\left(\frac{-1}{2}\right)^n$, vérifie la relation (1).

4° On admet que la suite v a pour terme général :

$$v_n = x + y\left(\frac{-1}{2}\right)^n$$

où x et y sont deux nombres réels que l'on déterminera à partir du calcul de v_0 et v_1.
Donner l'expression de v_n en fonction de n.

5° Montrer que la suite v est convergente et calculer sa limite. En déduire la limite de la suite u.

4. Informatique de gestion - 91

Suites et séries numériques 2 (TP2)

Soit la suite numérique u définie sur $\mathbb{N}^*$ par :

$$\begin{cases} u_1 = 0 \\ u_{n+1} = \alpha u_n + \beta n + \gamma, \text{ pour tout entier naturel } n \text{ non nul.} \end{cases}$$

où α, β et γ désignent trois coefficients réels.

1° Calculer α, β et γ, sachant que $u_2 = 3$, $u_3 = 4$, $u_4 = 3$.

2° Dans cette question on prend : $\alpha = 2$, $\beta = -3$ et $\gamma = 4$.
Soit la suite v définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $v_n = u_n - 3n + 1$, pour tout entier naturel n non nul.

a) Montrer que la suite v est une suite géométrique dont on déterminera le premier terme et la raison.

b) Calculer v_n en fonction de n. En déduire u_n en fonction de n.

c) Pour tout entier n supérieur ou égal à 2, calculer

$$S_n = v_1 + v_2 + \cdots + v_n \text{ en fonction de } n.$$

En déduire $\Sigma_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$ en fonction de n.

On rappelle que $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

5. Informatique de gestion - 92

Suites et séries numériques 2 (TP1) ; Calcul différentiel et intégral 2 (TP1 - TP6)

L'objet de cet exercice est l'étude d'une suite définie par une intégrale.
Les quatre questions sont indépendantes.

Soit la suite u définie pour tout entier naturel n non nul par : $u_n = \int_0^1 \frac{t^n}{t+1}\,dt$

1° Calculer u_1 (on remarquera que $\frac{t}{t+1} = 1 - \frac{1}{t+1}$).

2° Montrer que pour tout entier n non nul : $u_{n+1} + u_n = \frac{1}{n+1}$.

3° Démontrer que la suite u est décroissante.

4° a) Montrer que pour tout réel t de l'intervalle [0 ; 1] : $0 \le \frac{t^n}{t+1} \le t^n$.

b) En déduire que pour tout entier n non nul : $0 \le u_n \le \frac{1}{n+1}$.

c) Montrer que la suite u est convergente et donner sa limite.

6. Informatique de gestion - 95

Suites et séries numériques 2 (TP2 - TP4)

On considère la suite de nombres réels $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par son premier terme $U_0 = 2$ et par la relation $U_{n+1} = \dfrac{2U_n + 1}{U_n + 2}$ vérifiée pour tout entier naturel n.

Le but de l'exercice est d'exprimer U_n en fonction de n.

1° Calculer U_1, U_2 et U_3.

2° On admet qu'il existe une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ unique telle que, pour tout entier naturel n, on a :

$$U_{n+1} = \frac{3a_n - 1}{3a_n - 2}$$

a) Montrer que $a_0 = 1$.

b) Exprimer U_{n+1} en fonction de a_{n+1}, puis de a_n et en déduire que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie, pour tout entier naturel n, la relation : $a_{n+1} = 3a_n - 1$.

c) Calculer a_1, a_2 et a_3.

3° Soit $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie, pour tout entier naturel n, par $b_n = a_n - \frac{1}{2}$.

a) Montrer que la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison 3 et de premier terme $\frac{1}{2}$.

b) Calculer b_n en fonction de n.

c) En déduire l'expression de a_n, puis celle de U_n en fonction de n.

d) Déterminer la limite de U_n quand n tend vers $+\infty$.

7. Géomètre topographe - 92

Suites et séries numériques 2 - TP4 ; Calcul différentiel et intégral 2 (TP5)

Soit f la fonction définie sur $[3\ ;\ +\infty[$ par $f(t) = \dfrac{1}{t^2 - 3t + 2}$.

a) Décomposer la fraction rationnelle $\dfrac{1}{x^2 - 3x + 2}$ en éléments simples.

b) En utilisant cette décomposition, déterminer la fonction F, primitive de f sur $[3\ ;\ +\infty[$ qui s'annule pour $t = 3$.

c) On considère la série de terme général $u_n = f(n)$, $n \geq 3$.

- Trouver la nature de cette série.
- Calculer, en fonction de n, $S_n = \sum_{k=3}^{n} f(k)$ (on utilisera le a).
- En déduire la somme de la série.

8. Informatique de gestion - 90, (Nouvelle Calédonie)

Suites et séries numériques 2 (TP2) ; Statistique descriptive (TP2) ; Calcul différentiel et intégral 2 (TP1 - TP3)

Les parties I et II peuvent être traitées de façon indépendante.

PREMIERE PARTIE

Pour l'achat d'un nouveau matériel, un chef d'entreprise a réalisé un emprunt de 250 000 F sur quinze ans à remboursements mensuels.

A la fin de chaque mois, on note :

- y le solde restant dû après échéance, en milliers de francs.
- x le montant des bénéfices cumulés réalisés depuis l'achat du nouveau matériel en milliers de francs (pour le premier mois ce montant tient compte de la revente de l'ancien matériel).
- $z = ln\,(y - 275)$

On donne le tableau suivant, correspondant à un relevé pendant les neuf premiers mois du remboursement d'un emprunt consenti par une banque à une entreprise.

N° du mois	x_i	y_i	$z_i = ln(y_i - 275)$
1	35	284,415	2,242
2	40	283,712	2,165
3	46	283,125	2,095
4	54	282,395	2,001
5	65	281,809	1,918
6	81	281,124	1,812
7	96	280,487	1,702
8	112	279,805	1,570
9	133	279,111	1,414

Dans cette partie, les calculs seront effectués avec le maximum de précision, les résultats seront donnés sous forme de valeurs décimales approchées à 10^{-3} près.

1° Pour i entier variant de 1 à 9, représenter le nuage de points $M_i(x_i, y_i)$.
On prendra :
pour origine : A(30 ; 276)
pour unités : 1 cm pour dix mille francs en abscisse,
: 2 cm pour mille francs en ordonnée.

2° Sans écrire les calculs intermédiaires sur la copie, donner :
a) le coefficient de corrélation linéaire entre z et x.
b) une équation de la droite de régression de z en x.

3° En déduire que le nuage de points $M_i(x_i, y_i)$ peut être ajusté par une courbe d'équation :

$$y = ke^{ax} + b$$

DEUXIEME PARTIE

Dans un but prévisionnel, le directeur désire savoir à partir de quand, si la tendance constatée se poursuit, les bénéfices réalisés lui permettront de rembourser le solde de l'emprunt.

1° Soit la fonction numérique définie pour tout nombre réel positif ou nul x par :

$$f(x) = 11{,}905e^{-0{,}008x} + 275 - x.$$

a) Etudier les variations de f ainsi que la limite de f en $+\infty$.
Justifier tous les résultats.
b) En déduire que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α.
Montrer que $270 < \alpha < 279$.

2° Soit la fonction numérique g définie pour tout nombre réel positif ou nul x par :

$$g(x) = 11{,}905e^{-0{,}008x} + 275.$$

a) Etudier les variations de g, et tracer la courbe représentative de la restriction de g à l'intervalle [35 ; 135] sur le graphique utilisé à la première question de la première partie.
b) En déduire que, pour tout réel x élément de [270 ; 279], $g(x)$ est aussi élément de [270 ; 279].
c) Montrer que, pour tout réel x de [270 ; 279], on a $|g'(x)| \leq \frac{1}{80}$ (g' est la fonction dérivée de g).

3° On définit la suite u d'éléments de l'intervalle [270 ; 279] par :

$$\begin{cases} u_0 = 270 \\ u_{n+1} = g(u_n) \text{ pour tout entier naturel } n \end{cases}$$

En appliquant l'inégalité des accroissements finis à la fonction g sur l'intervalle fermé de bornes u_n et α démontrer que pour tout entier naturel n, $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{80}|u_n - \alpha|$.

4° En déduire que, pour tout entier naturel n, $|u_n - \alpha| \leq \frac{9}{80^n}$.

Donner une valeur décimale approchée de α à 10^{-2} près.

5° Le tableau d'amortissement du prêt fourni par la banque donne pour les mois suivants :

N° du mois	y_i
10	278,514
11	277,891
12	277,255
13	276,702
14	276,116
15	275,498

A la fin de quel mois le directeur peut-il penser être en mesure de rembourser le solde de l'emprunt ?

9. Etude et économie de la construction - 89

Suites arithmétiques ou géométriques ; équations différentielles 1 (TP1); calcul différentiel et intégral 2 (TP1)

I - Soit l'équation différentielle :

$$10y' - y = -110 + 3\alpha \quad (1)$$

où y désigne une fonction de la variable réelle α.

1° Résoudre l'équation : $10y' - y = 0$ (2)

2° Trouver une solution particulière y_0 de l'équation (1).

3° En déduire la solution générale de l'équation (1).

II - Déterminer la solution de (1) vérifiant $y(0) = 100$.

III - Le prix d'un produit, sur une période de cinq années se compose :

a) d'une partie fixe $P_1(\alpha) = 50$.

b) d'une partie « linéaire » $P_2(\alpha) = 30 - 3\alpha$

c) d'une partie « exponentielle » $P_3(\alpha) = 20e^{\frac{\alpha}{10}}$.

Le prix du produit est ainsi défini par une fonction numérique : $P(\alpha) = P_1(\alpha) + P_2(\alpha) + P_3(\alpha)$ où α est un nombre réel compris entre 0 et 5 ($\alpha \in [0; 5]$).

Etudier les variations de P pour $\alpha \in [0; 5]$.

Pour quelle valeur de α, le prix P sera-t-il minimal ?

Tracer la courbe de $z(\alpha) = P(\alpha) - 100$ en repère orthonormal (on prendra 2 cm pour unité).

IV - Calculer (à 10^{-2} près) la valeur moyenne $\overline{P}$ du produit :

on donne $\overline{P} = \frac{1}{5}\int_0^5 P(\alpha)d\alpha$

V - L'inflation annuelle prévue pendant la période de cinq ans à venir est de 2,5 %.

Soit la suite géométrique de premier terme $U_0 = 100$ et de raison $a = 1{,}025$.

Calculer (à 10^{-2} près) les termes U_1, U_2, U_3, U_4, U_5.

Le terme général de la suite est donné par la relation $U_n = U_0 \times a^n$ pour tout entier n.

En déduire les variations annuelles (à 10^{-2} près) du prix P hors inflation, c'est à dire la valeur de $q^n = P(n) - U_n$ avec $0 \leq n \leq 5$, n entier.

10. Comptabilité et gestion - 91

Analyse des phénomènes exponentiels (TP2 - TP6)

Une observation faite par un journal, sur ses abonnés, a permis de constater, pour chaque année, un taux de réabonnement voisin de 80 %, ainsi que l'apparition d'environ 5 000 nouveaux abonnés.

L'objet de cet exercice est l'étude du devenir du nombre annuel de ces abonnés, en supposant que la situation décrite par l'observation reste la même au fil des ans; on prendra les données numériques précédentes comme base de calcul.

Les questions 2 et 3 peuvent être traitées indépendamment l'une de l'autre.

On note a_n le nombre des abonnés après n années et on précise que a_0 = 10 000.

1° Expliquer pourquoi, pour tout nombre entier naturel n, $a_{n+1} = 0{,}8a_n + 5000$.

2° L'objet de cette question est l'étude graphique de la suite (a_n).

a) Tracer, dans un même repère orthonormal, et pour les abscisses comprises entre 0 et 30 000, la droite D_1 d'équation $y = 0{,}8x + 5000$, et la droite Δ, d'équation $y = x$.
(*Utiliser une feuille de papier millimétré ; unité graphique* : 0,5 cm *représente* 1 000.)

b) Placer a_0 sur l'axe des abscisses, puis le point A_0 de la droite D, d'abscisse a_0.
Quel terme de la suite (a_n) le point A_0 a-t-il pour ordonnée ?
Construire le point B_1 de la droite Δ, ayant la même ordonnée que A_0.
Quel terme de la suite (a_n) le point B_1 a-t-il pour abscisse ?
A partir de ce terme construire, par le même procédé, des points A_1, A_2, et A_3 sur D, des points B_2, B_3 et B_4 sur Δ et placer successivement a_2, a_3 et a_4 sur l'axe des abscisses.

c) En poursuivant le processus graphique précédent, quelle limite peut-on présumer pour la suite (a_n) ? La faire apparaître sur le dessin.

3° L'objet de cette question est l'étude numérique de la suite (a_n).
Soit (u_n) la suite définie, pour tout entier naturel n, par u_n = 25 000 − a_n.

a) En exprimant u_{n+1} en fonction de u_n, montrer que la suite (u_n) est une suite géométrique, dont on précisera la raison et le premier terme.

b) Soit n un nombre entier naturel ; exprimer u_n en fonction de n.
En déduire que $a_n = 25000 - 15000 \times 0{,}8^n$.

c) En utilisant le résultat précédent, déterminer la limite de la suite (a_n).

4° a) Résoudre, pour $x \in \mathbb{R}$, l'inéquation $25000 - 15000 \times 0{,}8^x > 22\,000$.
(On rappelle que $0{,}8^x = e^{x \ln(0{,}8)}$)

b) En déduire après combien d'années le nombre d'abonnés dépasse 22 000.

11. Informatique de gestion - 89

Suites et séries numériques 2 (TP2) ; Calcul différentiel et intégral 2 (TP1 - TP3)

A) Soit la fonction g définie sur $[0, +\infty[$ par : $g(x) = (x+1)e^{-x} - x$.

1° Etudier les variations de g.

2° Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution α et une seule qui appartient à l'intervalle $[0, 1]$.

B) On considère la fonction f définie sur $[0, 1]$ par :

$$f(x) = \frac{1}{3}\left(2(x+1)e^{-x} + x\right)$$

1° Démontrer que l'équation $f(x) - x = 0$ admet α comme unique solution.

2° Calculer f', dérivée de F, puis f'', dérivée de f'.

3° Etudier les variations de f.

4° Tracer, avec précision, la courbe représentative $\mathcal{C}$ de f dans le plan rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$, (unité graphique 10 cm).
Sur la même figure, tracer la droite d'équation $y = x$.

5° En s'aidant du graphique puis de la calculatrice, donner les valeurs décimales approchées de α à 0,1 près.

C) On se propose d'étudier un procédé d'approximation de α.

1° Montrer que, pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[0,8 ; 0,9]$, $f(x)$ appartient à ce même intervalle et $f'(x)$ à l'intervalle $[0 ; 0,1]$.

2° On désigne par (u_n), $n \in \mathbb{N}$, la suite définie par : $\begin{cases} u_0 = 0{,}8 \\ \text{et pour tout entier naturel } n : u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$

a) A l'aide de l'inégalité des accroissements finis, montrer que, pour tout entier naturel n :

$$|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{10}|u_n - \alpha|.$$

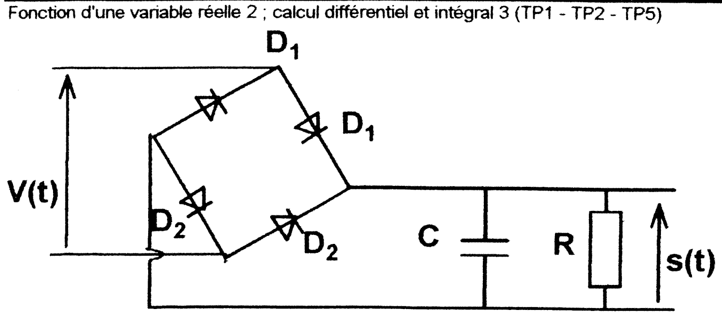
b) En déduire que, pour tout entier naturel n, $|u_n - \alpha| \leq \dfrac{1}{10^{n+1}}$

Quelle est la limite de la suite (u_n), $n \in \mathbb{N}$?

3° Donner une valeur décimale approchée de α à 10^{-5} près.

12. C.I.R.A. - 92

Fonction d'une variable réelle 2 ; calcul différentiel et intégral 3 (TP1 - TP2 - TP5)



Un redresseur double alternance est constitué de quatre diodes idéales. Il débite dans un dipôle constitué par un condensateur de filtrage et une résistance de charge montés en parallèle (voir schéma du montage).

On donne : $v(t) = 15\sin(100\pi t)$.

On se propose de déterminer, pour un choix particulier des diodes, du condensateur et de la résistance, l'instant t_c de remise en conduction des diodes D_1 et D_2.

Pour connaître cet instant, on est conduit à étudier les fonctions f_1 et f_2 définies sur $\left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$ par :

$$f_1(\theta) = 15e^{\frac{1,9-\theta}{\pi}}$$

$$f_2(\theta) = -15\sin\theta$$

On notera (C_1) et (C_2) les courbes représentatives des fonctions f_1 et f_2 définies dans un repère orthogonal. Si les courbes (C_1) et (C_2) se coupent en un point unique d'abscisse θ_c, alors θ_c est lié à t_c par la relation : $t_c = \dfrac{\theta_c}{100\pi}$.

Partie A : Méthode graphique

1° Etudier, sur l'intervalle $\left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$, les variations des fonctions f_1 et f_2.

2° Reproduire, en le complétant, le tableau :

θ	π	$\frac{13\pi}{12}$	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{17\pi}{12}$	$\frac{3\pi}{2}$
$f_1(\theta)$							
$f_2(\theta)$							

(On donnera des approximations décimales à 10^{-2} près).

3° a) Tracer les courbes (C_1) et (C_2), sur une feuille de papier millimétrée.
On prendra comme unité :
$\frac{\pi}{12}$ est représenté par 1,5 cm sur l'axe des abscisses.
L'unité de longueur est représentée par 0,5 cm sur l'axe des ordonnées.

b) En utilisant le graphique précédent, déterminer une valeur approchée de θ_c, abscisse de l'unique point d'intersection des courbes (C_1) et (C_2). En déduire une valeur approchée de l'instant t_c de remise en conduction des diodes D_2 et D_4.

Partie B : Méthode numérique.

1° L'abscisse θ_c du point d'intersection des courbes (C_1) et (C_2) est la solution unique (voir partie A) de l'équation :

$$f_1(\theta) = f_2(\theta) \text{ avec } \pi \leq \theta \leq \frac{3\pi}{2}.$$

Montrer que θ_c est solution de l'équation :

$$\theta = \pi + Arc\sin\left(e^{\frac{1,9-\theta}{\pi}}\right) \quad \text{(E)}.$$

2° On se propose d'utiliser la méthode dite du "point fixe" pour obtenir une valeur approchée de la solution θ_c de l'équation (E).

Pour cela, on considère la fonction g définie sur $\left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$ par :

$$g(\theta) = \pi + Arc\sin\left(e^{\frac{1,9-\theta}{\pi}}\right).$$

a) Montrer que la fonction g est décroissante sur $\left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$.

On pourra éventuellement utiliser la formule : $\left[Arc\sin(u(\theta))\right]' = \frac{u'(\theta)}{\sqrt{1-(u(\theta))^2}}$.

b) Calculer une approximation décimale à 10^{-2} près de $g(\pi)$ et puis de $g\left(\frac{3\pi}{2}\right)$.

Donner le tableau de variation de la fonction g.

c) En déduire que pour tout θ appartenant à $\left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$, $g(\theta)$ appartient à $\left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$.

d) On peut donc définir la suite réelle (U_n), dont les termes appartiennent à l'intervalle $\left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$, par :

$$\begin{cases} U_0 = \pi \\ U_{n+1} = g(U_n) \text{ pour tout entier naturel n.} \end{cases}$$

On admettra que, pour tout θ appartenant à l'intervalle $\left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$, on a : $|g'(\theta)| \leq 0,3$.

En appliquant l'inégalité des accroissements finis à la fonction g sur un intervalle convenable, montrer que, pour tout entier naturel non nul p :

$$|U_p - \theta_c| \leq 0,3|U_{p-1} - \theta_c|.$$

On rappelle que $\theta_c = g(\theta_c)$.

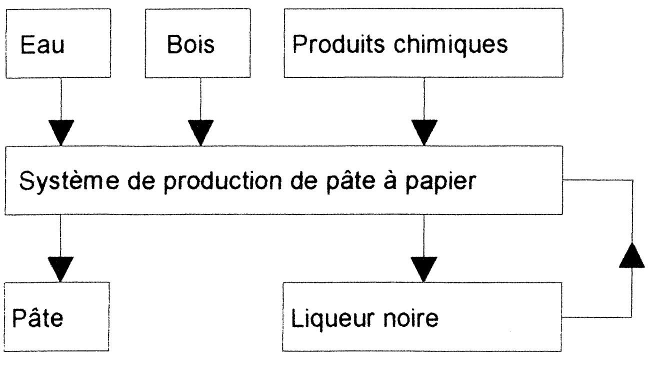
e) En écrivant l'inégalité précédente pour p = 1, p = 2, ..., p = n successivement, montrer que la suite (U_n) converge vers θ_c.

f) Utiliser votre instrument de calcul pour donner une approximation décimale à 10^{-3} près des nombres $U_1, U_2, U_3, U_4, U_5, U_6$ puis une approximation à 10^{-3} près de θ_c. Quelle valeur approchée de t_c peut-on en déduire ?

13. Industries papetières - 95

Suites arithmétiques, suites géométriques (TP1) ; fonctions d'une variable réelle 1 ; calcul différentiel et intégral 1 (TP1) ; statistique descriptive (TP2)

Un système de production de pâte à papier est représenté par le schéma suivant :



En sortie, on récupère donc de la pâte et de la liqueur noire. La liqueur noire, mélange d'eau et de matières sèches qui proviennent du bois et de produits chimiques, est récupérée et réintroduite dans le système.
A la mise en route du système, on ne dispose pas de liqueur noire ; on la remplace donc par un produit équivalent.

Les parties A et B peuvent être traitées indépendamment l'une de l'autre.

Partie A

On s'intéresse à la concentration en matières sèches dissoutes dans la liqueur noire. On constate au cours des premiers passages que celle-ci varie après chaque passage. On appelle C_n la concentration après n passages.

I - Etude expérimentale

i	1	2	3	4
C_i	0,127	0,162	0,172	0,174

On mesure la concentration après les quatre premiers passages et on obtient les résultats suivants :

1° Dans un repère orthogonal, représenter graphiquement le nuage de points $M_i\left(i, C_i\right)$.

2° Un ajustement affine direct de ce nuage ne donnant pas de résultats satisfaisants, on effectue le changement de variable $w_i = ln\left(0{,}175 - C_i\right)$, où ln désigne le logarithme népérien.

a) Calculer w_i pour les quatre valeurs de i précédentes.
b) Dans un deuxième repère orthogonal, représenter le nuage de points $N_i\left(i, w_i\right)$.
c) Calculer le coefficient de corrélation puis justifier la validité de l'ajustement proposé.
d) En déduire une estimation de w_5, w_6 et w_7.
e) Exprimer C_i en fonction de w_i. En déduire une estimation au millième de C_5, C_6 et C_7. Quelle remarque faites-vous ?

II - Etude théorique

Par un calcul théorique, on peut obtenir les résultats suivants :
$C_1 = \dfrac{7}{55}$ et, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $C_{n+1} = \dfrac{7}{55} + \dfrac{3}{11}C_n$.

1° Montrer que la suite $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_n = \dfrac{7}{40} - C_n$, est une suite géométrique dont on précisera la raison.

2° Calculer u_n en fonction de n et prouver que $C_n = \dfrac{7}{40}\left[1 - \left(\dfrac{3}{11}\right)^n\right]$.

3° Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on a $C_n \leq 0{,}175$.
Résoudre, dans $\mathbb{N}^*$, l'inéquation $0{,}175 - C_n \leq 10^{-5}$.
En déduire un encadrement de C_n pour $n \geq 9$.
Que peut-on en conclure pour la concentration en matières sèches dissoutes dans la liqueur noire ?

Partie B

Lorsque le système de production fonctionne, il dégage de la chaleur et réchauffe le local dans lequel il se trouve. Une étude de la température de ce local a été effectuée à partir de lois physiques.

I - Etude d'une fonction

On considère la fonction f définie sur l'intervalle I = [0, +∞[par : $f(t) = 22 - 4{,}5e^{1-0{,}5t}$, et sa courbe représentative (C) dans le plan rapporté à un repère orthonormal d'unité graphique 1 cm.

1° Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.
2° Etudier le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle I.
3° Tracer la courbe (C).

II - Etude de la température du local
La fonction f permet de calculer la température du local $f(t)$, exprimée en degré Celsius, en fonction du temps t, exprimé en heure, écoulé depuis la mise en route du système.

1° Calculer la température du local lorsque le système a fonctionné 1 heure et demie.
2° Calculer le temps, arrondi à la minute, au bout duquel le local atteint la température de 19°C.

14. Photonique - 93

Fonction d'une variable réelle 2 ; calcul différentiel et intégral 3 (TP1 - TP2 - TP5)

Etude d'une suite récurrente

1° On considère les fonctions définies sur l'intervalle [0 ; $+\infty$[:

$$f(x) = 8e^{-x} \quad ; \quad g(x) = e^{x} + 2 \; ; \quad h(x) = \ln 8 - \ln\left(e^{x} + 2\right).$$

1.1 Etudier rapidement les variations de f et g. Résoudre dans [0 ; $+\infty$[l'équation d'inconnue x :

$$f(x) = g(x)$$

1.2 Tracer les représentations graphiques C_f et C_g de f et g dans un repère orthogonal $(O \,;\, \vec{i}, \vec{j})$ d'axes Ox et Oy avec comme unités graphiques 10 cm sur Ox et 2 cm sur Oy.

1.3 Etudier les variations de h' et justifier que :

$$\forall\, x \in [0,1], \left|h'(x)\right| \leq 0{,}6$$

2° n désignant un entier naturel, on place sur C_g un point A_n.
La parallèle à Ox passant par A_n coupe C_f au point B_{n+1}.
La parallèle à Oy passant par B_{n+1} coupe C_g au point A_{n+1}.

2.1 Placer sur le dessin du 1.1.2 le point A_0 de C_g d'abscisse 1 ;
puis construire les points B_1, A_1, B_2, A_2, B_3 ; calculer les abscisses de B_1 et de B_2.

2.2 On appelle x_n ($n \in \mathbb{N}^*$), l'abscisse de B_n (on pose $x_0 = 1$).
Montrer que $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $f(x_{n+1}) = g(x_n)$;
en déduire que : $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = h(x_n)$.

2.3 On définit la suite $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ par la relation de récurrence :

$$\begin{cases} x_{n+1} = h(x_n) \\ x_0 = 1 \end{cases}$$

On admet que tous les termes de la suite appartiennent à l'intervalle [0 , 1].

a) Calculer $h(\ln 2)$.
b) En appliquant l'inégalité des accroissements finis à h, vérifier que :
$\forall\, n \in \mathbb{N}$, $\left|x_{n+1} - \ln 2\right| \leq 0{,}6\left|x_n - \ln 2\right|$.
En déduire que $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $\left|x_n - \ln 2\right| \leq (0{,}6)^n$.
Montrer que la suite $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ converge vers une limite à préciser.

ALGEBRE LINEAIRE

LES TEXTES PROPOSES

I. Algèbre linéaire : calcul sur les matrices **27**
1. Créateur en art céramique - 89 27
2. Créateur en art céramique - 90 27
3. Comptabilité et gestion - 87 27
4. Esthétique industrielle - 89 28
5. Comptabilité et gestion - 88 28
6. Comptabilité et gestion Nouméa - 89 28
7. Comptabilité et gestion - 89 29
8. Services informatiques - 88 29
9. Informatique de gestion Nouméa - 90 29
10. Informatique de gestion - 89 (Nouméa) 30
11. Maintenance et exploitation des matériels aéronautiques - 89 30
12. Photonique - 92 31
13. Techniques physiques pour l'industrie et le laboratoire - 95 31
14. En assistance technique d'ingénieur - 88 33

II. Algèbre linéaire : problèmes de synthèse avec des suites. **34**
1. Informatique de gestion - 93 34
2. Informatique de gestion - 94 34
3. Photonique - 91 35
4. En assistance technique d'ingénieur - 87 35
5. En assistance technique d'ingénieur - 90 36
6. En assistance technique d'ingénieur - 92 37
7. Informatique industrielle - 91 38

III. Algèbre linéaire : problèmes de synthèse avec équations différentielles. **40**
1. Informatique industrielle - 89 40

LISTE DES MODULES ET TRAVAUX PRATIQUES

ALGEBRE LINEAIRE (1)

TP1 : Détermination de la matrice associée à une application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$ relativement aux bases canoniques et détermination de l'image d'un vecteur par une application linéaire de matrice donnée.

TP2 : Calcul de sommes et de produits de matrices.

TP3 : Pratique de la méthode du pivot de Gauss pour la résolution de systèmes linéaires.

ALGEBRE LINEAIRE (2)

TP1: Détermination de la matrice associée à une application linéaire de $\mathbb{K}^n$ dans $\mathbb{K}^n$ relativement aux bases canoniques et détermination de l'image d'un vecteur par une application linéaire de matrice donnée.

TP2: Calcul de sommes et de produits de matrices.

TP3: Pratique de la méthode du pivot de Gauss pour la résolution de systèmes linéaires.

TP4: Pratique de la diagonalisation d'une matrice.

I. Algèbre linéaire : calcul sur les matrices

1. Créateur en art céramique - 89

Algèbre linéaire 1 (TP1)

On considère la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

1° Calculer M^2 puis M^3.

2° Déterminer la matrice A pour que $M^2 + A = M^3$.

3° Déterminer $\vec{V}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ pour que $M \times \vec{V} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -7 \end{pmatrix}$.

2. Créateur en art céramique - 90

Algèbre linéaire 1 (TP1)

On considère la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

1° Calculer M^2.

2° Soit $\vec{V}\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Calculer $\vec{W}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ tel que $M^2 \times \vec{W} = \vec{V}$.

3. Comptabilité et gestion - 87

Algèbre linéaire 1 (TP1)

Soit E un espace vectoriel de dimension 3, de base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ et f l'application linéaire de E dans E définie par:

$$\vec{e_1} = f(\vec{i}) = \vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$$
$$\vec{e_2} = f(\vec{j}) = 2\vec{i} + 7\vec{j} + 3\vec{k}$$
$$\vec{e_3} = f(\vec{k}) = 3\vec{j} + 5\vec{k}$$

1° a) Démontrer que la famille $(\vec{e_1}, \vec{e_2})$ est libre.

b) Déterminer les deux réels a et b tels que: $\vec{e_3} = a\vec{e_1} + b\vec{e_2}$.

2° a) Soit $\vec{V} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ un vecteur de E ; en utilisant la question précédente, montrer que :

$f(\vec{V}) = (x - 2z)\vec{e_1} + (y + z)\vec{e_2}$

b) Démontrer que $f(\vec{V}) = \vec{0}$ si et seulement si $\vec{V}$ est colinéaire au vecteur $\vec{n} = 2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$.

3° a) Démontrer que la famille $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{n})$ est une base de E.

b) Ecrire la matrice de f dans cette base.

4. Esthétique industrielle - 89

Algèbre linéaire 1 (TP1 - TP2)

Soit $M = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ la matrice associée à une rotation de centre O et d'angle θ.

1° Calculer M_1 pour $\theta = 30°$, M_2 pour $\theta = 60°$, M_3 pour $\theta = 180°$.

2° Calculer $M' = M_1 \times M_2$. A quelle rotation correspond la matrice obtenue ? Pourquoi ?

3° Calculer $M'' = (M_3)^2$. A quelle transformation correspond la matrice obtenue ? Pourquoi ?

4° Dans un repère orthonormal dont le point O est l'origine, placer le point $A(1; 3)$.
Calculer les coordonnées du point A', image du point A par la rotation de centre O et d'angle 60°.
Placer A'.

5° Trouver une valeur de θ pour que le point A ait pour image le point $A''(0 ; \sqrt{10})$ dans la rotation de centre O et d'angle θ. On donnera θ au dixième de degré près.

5. Comptabilité et gestion - 88

Algèbre linéaire 1 (TP1)

Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$, on note $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ les vecteurs (1,0,0), (0,1,0) et (0,0,1) et $\vec{e_1}$ le vecteur $\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$.

Soit f l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$, définie par : $\begin{cases} f(\vec{i}) = \vec{j} + \vec{k} \\ f(\vec{j}) = \vec{i} + \vec{k} \\ f(\vec{k}) = \vec{j} + \vec{i} \end{cases}$

1° Ecrire la matrice de f dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

2° a) Montrer que pour tout vecteur $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ de $\mathbb{R}^3$, $f(\vec{u}) = (x + y + z)\vec{e_1} - \vec{u}$.

b) Vérifier que l'ensemble des vecteurs $\vec{u}$ de $\mathbb{R}^3$ tels que $f(\vec{u}) = -\vec{u}$ est un plan, dont une base est constituée par les vecteurs : $\vec{e_2} = -\vec{i} + \vec{j}$ et $\vec{e_3} = -\vec{i} + \vec{k}$.

3° a) Montrer que $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

b) Déterminer les composantes de $f(\vec{e_1})$ dans la base $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$.

c) Ecrire la matrice de f dans la base $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$.

6. Comptabilité et gestion Nouméa - 89

Algèbre linéaire 1 (TP1)

Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$, on note $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ les vecteurs (1,0,0), (0,1,0) et (0,0,1).

Soit f l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$, définie par : $\begin{cases} f(\vec{i}) = 5\vec{i} + \vec{k} \\ f(\vec{j}) = 5\vec{i} - 5\vec{j} - 2\vec{k} \\ f(\vec{k}) = 3\vec{i} - 3\vec{j} \end{cases}$

On pose $\vec{u} = 2\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ et $\vec{v} = \vec{i} - 2\vec{j} - \vec{k}$.

1° Montrer que $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{k})$ est une base de $\mathbb{R}^3$. En déduire que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont linéairement indépendants.

2° a) Vérifier que $f(\vec{u}) = 6(\vec{u} + \vec{v})$ et $f(\vec{v}) = -\vec{u} - 6\vec{v}$.

b) Montrer que $f(\vec{k})$ peut s'écrire sous la forme $f(\vec{k}) = a\vec{u} + b\vec{v}$, où a et b sont des nombres réels que l'on déterminera..

c) Prouver que, pour tout vecteur $\vec{w} = x\vec{u} + y\vec{v} + z\vec{k}$ de $\mathbb{R}^3$, $f(\vec{w})$ appartient à l'espace vectoriel dont une base est $(\vec{u}, \vec{v})$, et déterminer les composantes de $f(\vec{w})$ dans cette base.

7. Comptabilité et gestion - 89

Algèbre linéaire 1 (TP1 - TP2)

Pour une fabrication, une entreprise utilisera x pièces de type X, y pièces de type Y et z pièces de type Z.
La masse et le coût de chacune de ces pièces sont donnés dans le tableau suivant :

	X	Y	Z
masse en g	2,5	2	1
coût en F	1	1,5	0,5

L'entreprise effectue une étude en vue d'optimiser cette fabrication. Pour cela elle doit considérer le nombre total N des pièces employées, leur masse totale M en grammes et leur coût total C en francs.

1° Exprimer N, M et C en fonction de x, y et z.

2° On définit ainsi une application linéaire f de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$, qui à (x, y, z) associe (N, M, C).

a) Quelle est la matrice F de f dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, où $\vec{i} = (1,0,0)$, $\vec{j} = (0,1,0)$, $\vec{k} = (0,0,1)$.

b) Montrer que cette matrice est inversible et calculer sa matrice inverse.

3° L'étude a montré que la fabrication est optimale lorsque sont employés au total 140 pièces, d'une masse totale de 275 g et d'un coût total de 135 F.
Dans ces conditions, calculer les nombres de pièces de chacun des types X, Y et Z, qui seront utilisées pour cette fabrication.

8. Services informatiques - 88

Algèbre linéaire 1 (TP1 - TP2)

On considère les matrices M et I suivantes : $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -3 & 4 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $\mathrm{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

1° Calculer la matrice M^2.

2° a) Déterminer les nombres réels a et b tels que $M^2 = aM + b\mathrm{I}$.

b) En utilisant la relation de la question précédente montrer qu'il existe une matrice M' telle que : $M \times M' = M' \times M = \mathrm{I}$. Ecrire M'.

9. Informatique de gestion Nouméa - 90

Algèbre linéaire 1 (TP1 - TP2)

On considère les matrices M et I suivantes : $M = \begin{pmatrix} a & 1-a & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 1-a & a \end{pmatrix}$ et $\mathrm{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

où a et b désignent deux nombres réels.
Le but de cet exercice est de trouver, lorsque cela est possible, une matrice P telle que $P \times M = \mathrm{I}$.

1° Calculer $M^2 = M \times M$.

2° Exprimer $(a + b)M - M^2$ en fonction de a, b et I.

3° On suppose que le produit ab est non nul.
Montrer que le résultat de la seconde question permet de déterminer une matrice P telle que:

$$P \times M = \mathrm{I}.$$

Ecrire cette matrice P en fonction de a et de b seulement.

10. Informatique de gestion - 89 (Nouméa)

Algèbre linéaire 1 (TP1 - TP2)

On considère les matrices $\mathrm{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

A tout réel x, on associe la matrice $M(x) = \mathrm{I} + x\,A + \frac{x^2}{2}A^2$.

1° Calculer A^2 et expliciter la matrice $M(x)$ sous forme d'un tableau.

2° a) Montrer que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 3, la matrice A^n est la matrice nulle.

b) En déduire que pour tout réel x et y, on a :

$$M(x) \times M(y) = M(x + y).$$

c) Donner l'expression de $[M(x)]^n$ en fonction des matrices I, A et A^2 pour tout entier naturel n non nul.
Expliciter la matrice $[M(x)]^n$ sous forme d'un tableau.

3° Application : soit la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 12 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Calculer P^n , n étant un entier naturel non nul, et l'expliciter sous forme d'un tableau.

11. Maintenance et exploitation des matériels aéronautiques - 89

Algèbre linéaire 1 (TP1 - TP2)

Résolution d'un système d'équation.

1° Effectuer le produit $A \times B$ des matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & -10 & -1 \\ -2 & 8 & 2 \\ 2 & -4 & -2 \end{pmatrix}$$

En déduire la matrice B^{-1}, inverse de la matrice B.

2° Ecrire sous forme matricielle le système suivant, d'inconnues x, y et z, puis le résoudre.

$$\begin{cases} 3x - 10y - z = 4 \\ -2x + 8y + 2z = 8 \\ 2x - 4y - 2z = 4 \end{cases}$$

3° Déduire de ce qui précède la solution du système d'inconnues a, b et c :

$$\begin{cases} -10a - b + 3c = 4 \\ 4a + b - c = 4 \\ -2a - b + c = 2 \end{cases}$$

12. Photonique - 92

Algèbre linéaire 2 (TP1 - TP2 - TP4)

On considère dans un espace vectoriel de dimension 2, muni d'une base $(\vec{e_1}\ ;\ \vec{e_2})$, trois applications linéaires d_1, t, d_2 définies respectivement par les données suivantes :

- d_1 : $\vec{e_2}$ est un vecteur propre pour la valeur propre $\frac{2}{3}$ et $d_1(6\vec{e_1} + \vec{e_2}) = 6\vec{e_1}$.
- t : t laisse $\vec{e_1}$ invariant et $t(-27\vec{e_1} + 2\vec{e_2}) = 2\vec{e_2}$.
- d_2 : $\vec{e_2}$ est un vecteur propre pour la valeur propre $\frac{3}{2}$ et $d_2(9\vec{e_1} + 4\vec{e_2}) = 9\vec{e_1} + 5\vec{e_2}$.

1° Déterminer D_1 matrice de d_1 dans la base $(\vec{e_1}\ ;\ \vec{e_2})$ puis T, matrice de t et enfin D_2 matrice de d_2.

2° Soit S la matrice de $s = d_2 \circ t \circ d_1$.

a) Calculer S.

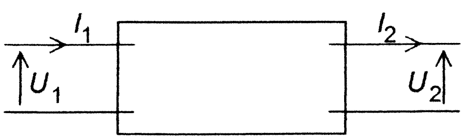
b) Vérifier que $S^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -9 \\ \frac{1}{9} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

3° Cette dernière matrice possède-t-elle des valeurs propres réelles ?

13. Techniques physiques pour l'industrie et le laboratoire - 95

Algèbre linéaire 2 (TP1 - TP2 - TP4)

Dans cet exercice, les intensités I_1 et I_2 sont exprimées en ampères, les tensions U_1 et U_2 en volts, les résistances R, R_1, R_2 et R_1' en ohms.
On s'intéresse à la notion de "matrice de transfert" d'un quadripôle en régime continu.
Un quadripôle est schématisé par la figure suivante :



Il est caractérisé par les grandeurs réelles dites "d'entrées" U_1 et I_1 et les grandeurs dites de "sorties" U_2 et I_2. L'application des lois de l'électricité montre que l'on a alors les relations :

$$\begin{cases} U_2 = aU_1 + bI_1 \\ I_2 = cU_1 + dI_1 \end{cases}$$ où a, b, c et d sont quatre nombres réels,

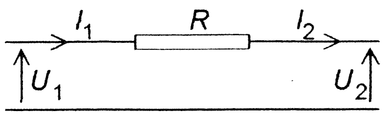
relations qui peuvent s'écrire sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} U_2 \\ I_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} U_1 \\ I_1 \end{pmatrix}$$

La matrice $t = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est appelée *matrice de transfert* du quadripôle.

1° Dans cette question, on s'intéresse aux matrices de transfert de deux types de quadripôles.

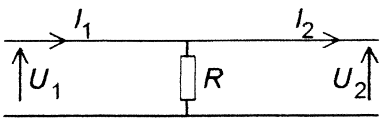
a) Quadripôle de type 1 :



Quadripôle de type 1

Ecrire la matrice t_1 de ce quadripôle sachant que : $\begin{cases} U_2 = U_1 - RI_1 \\ I_2 = I_1 \end{cases}$

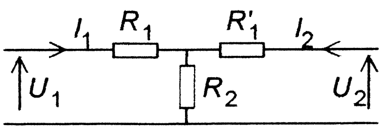
b) Quadripôle de type 2 :



Quadripôle de type 2

Ecrire la matrice t_2 de ce quadripôle sachant que : $\begin{cases} U_2 = U_1 \\ I_2 = -\dfrac{1}{R}U_1 + I_1 \end{cases}$

2° On considère le "quadripôle en T" suivant :



Quadripôle en "T"

que l'on peut considérer comme l'association en série d'un quadripôle Q_1 de type 1 avec $R = R_1$, suivi d'un quadripôle Q_2 de type 2 avec $R = R_2$, lui-même suivi d'un quadripôle Q_1' de type 1 avec $R = R_1'$.

a) On note T_1, T_2 et T_1' les matrices de transfert respectives des quadripôles Q_1, Q_2 et Q_1'. La matrice de transfert du "quadripôle en T" est alors la matrice T définie par :

$$T = T_1' \times T_2 \times T_1$$

Ecrire les matrices T_1, T_2 et T_1' puis donner l'expression de la matrice T en fonction de R_1, R_2 et R_1'.

b) Application numérique :

On pose : $R_1 = R_1' = 2$ et $R_2 = 1$.

- Vérifier que : $T = \begin{pmatrix} 3 & -8 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.
- On suppose de plus que $U_1 = 4$ et $U_2 = 2$. Quelles sont alors les valeurs des intensités I_1 et I_2 ? On trouvera pour I_2 une valeur négative, ce qui explique que dans le schéma du "quadripôle en T", le courant soit "rentrant".

3° Dans cette question, on travaille avec l'expression numérique de la matrice T, donnée en 2° b) et on suppose que U_1 et I_1 sont non nulles.

a) Montrer que si le vecteur $\begin{pmatrix} U_1 \\ I_1 \end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}^2$ est tel qu'il existe λ réel vérifiant :

$$(1) \qquad T \times \begin{pmatrix} U_1 \\ I_1 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} U_1 \\ I_1 \end{pmatrix}$$

alors λ est solution d'une équation du second degré que l'on résoudra.

b) Dans un "quadripôle en T", le facteur d'affaiblissement est le réel α égal au rapport des puissances disponibles P_2 à la sortie et P_1 à l'entrée.

$$\alpha = \frac{P_2}{P_1} = \frac{U_2 I_2}{U_1 I_1}$$

On sait que $\alpha < 1$ car la puissance ne peut que s'affaiblir.

Montrer que si la tension d'entrée et le courant d'entrée déterminent le vecteur $\begin{pmatrix} U_1 \\ I_1 \end{pmatrix}$ vérifiant la relation (1), alors le coefficient d'affaiblissement est égal à λ^2.

Donner, à 10^{-2} près, la valeur de α.

14. En assistance technique d'ingénieur - 88

Algèbre linéaire 2 (TP1 - TP2 - TP4)

Soit E un espace vectoriel réel de dimension 2 rapporté à une base $(\vec{i}, \vec{j})$. On considère l'application linéaire f dont la matrice relativement à la base $(\vec{i}, \vec{j})$ est:

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$$

1° Calculer les valeurs propres λ_1 et λ_2 $(\lambda_1 < \lambda_2)$ de f.

2° Montrer que les vecteurs $\vec{V}_1 = 7\vec{i} - 6\vec{j}$ et $\vec{V}_2 = \vec{i} + \vec{j}$ sont des vecteurs propres de f et qu'ils forment une base de E.

3° Déterminer la matrice D de f relativement à la base $(\vec{V}_1, \vec{V}_2)$.

4° Déterminer une matrice inversible P telle que: $M = P D P^{-1}$
et en déduire l'expression de M^n, n étant un entier naturel non nul.

II. Algèbre linéaire : problèmes de synthèse avec des suites.

1. Informatique de gestion - 93

Suites et séries numériques 2 (TP2) ; algèbre linéaire 1 (TP 2);

Les questions 1° et 2° sont indépendantes.
Dans tout l'exercice, n désigne un entier naturel non nul.

1° Une suite (u_n) est définie par sont premier terme $u_1 = 2$ et par la relation : $u_{n+1} = 3u_n + 2$.
Soit (v_n) la suite définie par : $v_n = u_n + 1$.
a) Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on donnera la raison.
b) Calculer (v_n), puis (u_n) en fonction de n.

2° On considère les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathrm{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Calculer les matrices A^2 et $B = 2A + \mathrm{I}$.
b) On admet que, pour tout entier n, il existe un réel a_n tel que : $B^n = a_n A + \mathrm{I}$.
En utilisant le fait que $B^{n+1} = B^n \times B$ avec $B^{n+1} = a_{n+1}A + \mathrm{I}$, calculer a_{n+1} en fonction de a_n.

3° En utilisant les résultats de 1° et 2°, exprimer B^n en fonction de A, I et n.

2. Informatique de gestion - 94

Algèbre linéaire 1 (TP2) ; suites et séries numériques 2 (TP2)

On considère la matrice : $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & -5 & 6 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix}$

1° Calculer A^2.

2° On admet que, pour tout entier n non nul, il existe un nombre réel a_n tel que A^n est de la forme :

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2a_n & 1-2a_n & 2a_n \\ a_n & -a_n & 1+a_n \end{pmatrix}$$

a) Calculer $A^{n+1} = A^n \times A$.

b) En déduire la relation : $a_{n+1} = 3 - a_n$.

3° Soit la suite (b_n) définie pour tout entier naturel n non nul par : $b_n = a_n - 1$.
a) Montrer que (b_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.

b) Calculer b_n puis a_n en fonction de n.

4° En déduire A^n en fonction de n.

3. Photonique - 91

Problème de synthèse : algèbre linéaire 2 (TP1 - TP2 - TP4) ; suites et séries numériques 2 (TP2)

SUITES ET CALCUL MATRICIEL

A toute suite réelle u de terme général u_n, on fait correspondre la suite $\Delta(u)$ de terme général Δu_n défini par:

$$\Delta u_n = u_{n+1} - u_n$$

On définit ainsi un opérateur linéaire sur les suites réelles.
On note: $\Delta^2(u) = \Delta(\Delta(u))$

1° Exprimer le terme général $\Delta^2 u_n$ de la suite $\Delta^2(u)$.

2° On se propose de résoudre l'équation (E):

$$(E) \quad \Delta^2(u) - 4\,u = 0$$

c'est à dire de chercher toutes les suites u qui vérifient (E).

a) Montrer que les solutions de (E) sont les suites u vérifiant (E') :

$$(E') \qquad \begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix} \text{ avec } M = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

On note f l'endomorphisme dont M est la matrice dans la base canonique.

b) Montrer que les nombres –1 et 3 sont les valeurs propres de f.
Déterminer les vecteurs propres I relatif à –1 et J relatif à 3.

c) Soit P la matrice dont les colonnes sont les coordonnées des vecteurs I et J dans la base canonique. On admettra que si D est la matrice de f dans la base (I; J), on a:

$$M = P.D.P^{-1} \qquad \text{et} \qquad M^n = P.D^n.P^{-1}$$

On demande:

- d'expliciter D et P;
- de calculer P^{-1}, D^n puis M^n.

d) Soit u une solution de (E). On pose: $V_n = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$

(E') s'écrit alors: $V_n = M.\ V_{n-1}$
On a donc $V_n = M^n.\ V_0$

En déduire le terme général u_n de toute suite u solution de (E), en fonction de n, u_0 et u_1.

4. En assistance technique d'ingénieur - 87

Problème de synthèse : algèbre linéaire 2 (TP1 - TP2 - TP4) ; suites et séries numériques 2 (TP1)

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ rapporté à une base $(\vec{i}, \vec{j})$. Si t est réel, on considère l'application linéaire f_t de E dans E dont la matrice dans cette base est:

$$M_t = \begin{pmatrix} t+1 & t^2-10 \\ 1 & t+3 \end{pmatrix}$$

1° La matrice M_t est-elle inversible ?

2° Déterminer, en fonction de t, les valeurs propres de M_t.

3° Si $t = 3$, montrer que 5 est valeur propre de M_3; en déduire les vecteurs propres correspondants.

4° Montrer que les vecteurs $\vec{u} = \vec{i} - \vec{j}$ et $\vec{v} = \vec{i} + \vec{j}$ forment une base de E.

Calculer $f_3(\vec{u})$ et $f_3(\vec{v})$ en fonction de $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Quelle est la matrice A de f_3 dans la base $(\vec{u}, \vec{v})$.

5° Montrer que A s'écrit $A = D + N$ où D est une matrice diagonale, N une matrice dont le carré est nul et telles que $DN = ND$.
Calculer A^n.

6° On pose $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Montrer que $M_3 = P\,A\,P^{-1}$. Calculer alors $(M_3)^n$.

7° Application :
On considère les deux suites (u_n) et (v_n), définies par $u_0 = 2$, $v_0 = 1$ et pour tout n entier positif :

$$u_{n+1} = 4\,u_n - v_n$$
$$v_{n+1} = u_n + 6\,v_n.$$

En posant $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$, montrer que $X_n = (M_3)^n\,X_0$.

En déduire u_n et v_n en fonction de n.

5. En assistance technique d'ingénieur - 90

Problème de synthèse : algèbre linéaire 2 (TP1 - TP2 - TP4) ; suites et séries numériques 2 (TP1 - TP2)

A - E étant un espace vectoriel réel muni d'une base $\mathcal{B}(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère l'application linéaire f de E dans E dont la matrice relativement à la base $\mathcal{B}$ est :

$$A = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,3 & 0,2 \\ 0,1 & 0,4 & 0,2 \\ 0,1 & 0,3 & 0,6 \end{pmatrix}$$

Déterminer l'ensemble des vecteurs $\vec{V}$ de coordonnées (X, Y, Z) tels que $f(\vec{V}) = \vec{V}$.

Déterminer, en particulier, le vecteur $\vec{V}$ tel que $X + Y + Z = 1$.

B - Le service commercial d'un grand magasin fait, chaque année, une enquête auprès de sa clientèle.

Pour l'année n, on désigne par :

a_n la proportion de clients satisfaits,
b_n la proportion de clients sans opinion,
c_n la proportion de clients mécontents.

On admet que tout client est classé dans une de ces catégories, c'est à dire que $a_n + b_n + c_n = 1$.

Une étude comparative des résultats sur deux années consécutives montre que l'on peut admettre que:

$$\begin{cases} a_{n+1} = 0{,}8a_n + 0{,}3b_n + 0{,}2c_n \\ b_{n+1} = 0{,}1a_n + 0{,}4b_n + 0{,}2c_n \\ c_{n+1} = 0{,}1a_n + 0{,}3b_n + 0{,}6c_n \end{cases}$$

On suppose connues a_0, b_0, c_0 pour une année "zéro".

1° On désigne par T_n la matrice unicolonne $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$.

Ecrire une relation entre les matrices T_{n+1} , T_n et A.

2° Dans le cas où $a_0 = \frac{6}{11}$, $b_0 = \frac{2}{11}$, $c_0 = \frac{3}{11}$, que peut-on dire des proportions a_n, b_n, c_n ?

3° On suppose maintenant $(a_0, b_0, c_0) \neq \left(\frac{6}{11}, \frac{2}{11}, \frac{3}{11}\right)$.

On se propose d'étudier les comportements des proportions a_n, b_n, c_n en fonction de n.

On considère les suites (x_n), (y_n), (z_n) définies par : $\begin{cases} x_n = a_n - \frac{6}{11} \\ y_n = b_n - \frac{2}{11} \\ z_n = c_n - \frac{3}{11} \end{cases}$

et on désigne par V_n la matrice unicolonne $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$.

Calculer $x_n + y_n + z_n$. Démontrer que $V_{n+1} = A.V_n$.

Exprimer x_{n+1} et y_{n+1} en fonction de x_n et y_n. On trouvera : $\begin{cases} x_{n+1} = \frac{1}{10}(6x_n + y_n) \\ y_{n+1} = \frac{1}{10}(-x_n + 2y_n) \end{cases}$.

4° On désigne par M_n le plus grand des deux nombres $|x_n|$ et $|y_n|$.

On a donc $|x_n| \leq M_n$ et $|y_n| \leq M_n$.

Démontrer que $|x_{n+1}|$ et $|y_{n+1}|$sont inférieurs à $\frac{7}{10} M_n$, c'est à dire que $M_{n+1} \leq \frac{7}{10} M_n$.

En déduire que pour tout entier naturel n, on a : $M_n \leq \left(\frac{7}{10}\right)^n .M_0$.

Quelle est la limite de la suite (M_n) ?

En déduire les limites des suites (x_n) et (y_n), puis celle de la suite (z_n).

5° Quelles sont les limites des suites (a_n), (b_n), (c_n) ? Commenter ce résultat.

6. En assistance technique d'ingénieur - 92

Problème de synthèse : algèbre linéaire 2 (TP1 - TP4) ; suites et séries numériques 2 (TP1 - TP2)

Partie A

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, de dimension 2, rapporté à une base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

On désigne par f l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ est :

$$A = \begin{pmatrix} \frac{8}{9} & -\frac{1}{9} \\ -\frac{2}{9} & \frac{7}{9} \end{pmatrix}$$

1° Déterminer les valeurs propres de A et les vecteurs propres correspondants dont la première coordonnée est 1.

2° On considère les vecteurs $\vec{e_1}(1 ; -1)$ et $\vec{e_2}(1 ; 2)$.

Reconnaître qu'ils sont des vecteurs propres de A et qu'ils constituent une base de E.

On pose : $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$.

Calculer la matrice inverse de P et montrer que $A = P.D.P^{-1}$.

Pour n entier naturel supérieur ou égal à 2, calculer D^n. En déduire A^n.

Partie B

On considère les suites réelles (u_n) et (v_n) définies sur $\mathbb{N}$ par : $u_0 = 1$, $v_0 = 1$ et les relations de récurrence :

$$\begin{cases} u_{n+1} = \frac{8}{9}u_n - \frac{1}{9}v_n \\ v_{n+1} = -\frac{2}{9}u_n + \frac{7}{9}v_n \end{cases}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit la matrice $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$.

Quelle relation existe-t-il entre X_n, X_{n+1} et A ?

Déterminer X_n en fonction de X_0, A et n.

En déduire l'expression des termes u_n et v_n en fonction de n.

Quelles sont les limites des suites (u_n) et (v_n).

7. Informatique industrielle - 91

Problème de synthèse : algèbre linéaire 2 (TP1 - TP2 - TP4) ; suites et séries numériques 2 (TP2)

Soient (U_n) et (V_n) deux suites numériques définies pour tout nombre entier n supérieur ou égal à 1, par:

$$(1)\begin{cases} U_n = 3U_{n-1} - \frac{2}{3}V_{n-1} \\ V_n = 8U_{n-1} - \frac{5}{3}V_{n-1} \end{cases} \quad \text{et} \quad (2\ )\begin{cases} U_0 = 1 \\ V_0 = -1 \end{cases}$$

A - 1° Calculer les termes U_1 et V_1.

2° Calculer les termes U_2 et V_2.

B - Le but de cette partie est de déterminer les expressions de U_n et de V_n en fonction de n et d'étudier la convergence des suites (U_n) et (V_n).

On considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$ et sa base canonique B.

Soit f l'application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ admettant pour matrice dans la base B :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -\frac{2}{3} \\ 8 & -\frac{5}{3} \end{pmatrix}$$

1° Pour tout entier n, on note X_n la matrice unicolonne $\begin{pmatrix} U_n \\ V_n \end{pmatrix}$.

Montrer que l'on a la relation $X_n = A\,X_{n-1}$ pour $n \geq 1$.

On admettra que, pour tout entier n, $X_n = A^n\,X_0$.

2° Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de f.

On désignera par λ_1 et λ_2 les valeurs propres (avec $\lambda_1 < \lambda$ e$_2$) et par $\overrightarrow{W_1}$ et $\overrightarrow{W_2}$ les vecteurs propres respectivement associés à λ_1 et λ_2 , vecteurs choisis de façon à ce que leur première coordonnée soit égale à 1.

Montrer que $\overrightarrow{W_1}$ et $\overrightarrow{W_2}$ forment une base B' de $\mathbb{R}^2$.

3° On appelle P la matrice carrée dont les colonnes sont les coordonnées respectives de $\overrightarrow{W_1}$ et $\overrightarrow{W_2}$dans la base canonique.

a) Montrer que $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$.

b) Calculer la matrice inverse P^{-1}.

c) Si l'on pose $D = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, vérifier que $A = PDP^{-1}$.

Pour tout entier n supérieur ou égal à 1, on admettra que :

$$A^n = P\, D^n\, P^{-1}, \text{ avec } D^n = \begin{pmatrix} \left(\frac{1}{3}\right)^n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

4° A partir des résultats précédents, démontrer que pour tout entier naturel n:

$$U_n = -\frac{4}{3^n} + 5 \text{ et } V_n = -\frac{16}{3^n} + 15.$$

5° En déduire la limite de chacune de ces deux suites quand n tend vers $+\infty$.

III. Algèbre linéaire : problèmes de synthèse avec équations différentielles.

1. Informatique industrielle - 89

Problème de synthèse : algèbre linéaire 2 (TP1 - TP2 - TP4) , équations différentielles 1 (TP1)

A -MATRICES

$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ est la matrice associée à un endomorphisme f dans une base $B_0 = (\vec{i}, \vec{j})$ fixée de $\mathbb{R}^2$.

1° Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de f.

2° Soient $\vec{U} = \vec{i} + \vec{j}$ et $\vec{V} = \vec{i} - \vec{j}$. Démontrer que $(\vec{U}, \vec{V})$ est une base de $\mathbb{R}^2$, notée B_1.

Montrer que, dans cette base B_1, la matrice $D = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ est associée à f.

3° a) Soit $\vec{W}$ le vecteur ayant pour coordonnées (x, y) dans la base B_0 et (X, Y) dans la base B_1. Trouver la matrice P, carrée d'ordre 2, telle que:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \qquad (1)$$

b) Trouver la matrice P^{-1}, carrée d'ordre 2, telle que :

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

c) Vérifier que $P D P^{-1} = M$.

B -APPLICATION

(S_0) est le système différentiel suivant: $\begin{cases} x' = 2x + y \\ y' = x + 2y \end{cases}$

dans lequel x et y désignent deux fonctions dérivables, de la variable réelle t, de dérivées respectives x' et y'.

M, P et D sont les matrices définies dans la partie A. Le système s'écrit: $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

1° a) Montrer que si x, y, X et Y sont des fonctions dérivables de la variable réelle t vérifiant la relation (1), alors : $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} X' \\ Y' \end{pmatrix}$

b) En déduire que le système (S_0) s'écrit: (S_1) $\begin{pmatrix} X' \\ Y' \end{pmatrix} = D \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$

2° a) Résoudre les deux équations différentielles:

$$\begin{cases} X' = 3X \\ Y' = Y \end{cases}$$

b) En déduire toutes les solutions x et y du système (S_0).

CALCUL VECTORIEL

CONFIGURATIONS GEOMETRIQUES

COURBES PLANES

CONFIGURATIONS GEOMETRIQUES

TP1 : Exemples d'études de problèmes portant sur les objets usuels du plan et de l'espace.

COURBES PLANES :

TP1 : Exemple de tracé de courbes planes définies par une représentation paramétrique ; cas des représentations polaires.

COURBES PLANES 2:

TP1 : Exemple de tracé de courbes planes définies par une représentation paramétrique ; cas des représentations polaires.

TP2 : Etude de quelques exemples de courbes dans l'espace définies par une représentation paramétriques ou par une représentation en coordonnées cylindriques ou sphériques.

TP3 : Exemples simples de calcul de rayons de courbure. Equation intrinsèque d'une courbe (sous la forme R = f(s)). Cas de la clothoïde.

LES TEXTES PROPOSES

A. Calcul vectoriel 44
1. Exercice 1 44
2. Exercice 2 44
3. Exercice 3 44
4. Exercice 4 44
5. Chaudronnerie et tuyauterie industrielle - 87 45
6. Chaudronnerie et tuyauterie industrielle - 90 45
7. Chaudronnerie et tuyauterie industrielle - 92 45
8. Bureau d'étude - 81 46
9. Bureau d'étude - 83 46
10. Bureau d'étude - 86 46
11. Fabrication mécanique - 76 46
12. Fonderie sur modèle - 87 47
13. Fonderie sur modèle - 89 47
14. Forge et estampage - 85 47
15. Forge et estampage - 87 48
16. Forge et estampage - 90 48
17. Forge et estampage - 92 48
18. ROC - 95 49

B. Configurations géométriques 50
1. Art céramique - 88 50
2. Art textile et impression - 92 50
3. Architecture intérieure - 90 51
4. Esthétique industrielle - 88 51
5. Plasticien de l'environnement architectural - 92 51
6. Esthétique industrielle - 92 52
7. Stylisme de mode - 89 53
8. Stylisme de mode - 90 53
9. Stylisme de mode - 92 54
10. Art céramique - 87 54
11. Géomètre topographe - 92 55
12. Industries du cuir (extrait) - 88 55
13. Industries céréalières - 92 56

C. Courbes planes 58
1. Esthétique industrielle - 94 58
2. Productique - 95 58
3. Conception de produits industriels - 95 59
4. Construction navale - 95 60

A. Calcul vectoriel

1. Exercice

Calcul vectoriel

Dans un repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j})$, on considère les points A et B de coordonnées respectives (6; 0) et (1; 5).

1° Déterminer les équations cartésiennes des hauteurs du triangle OAB, passant respectivement par A et B.

2° Déterminer, de même, les équations cartésiennes des médiatrices des cotés $[O, A]$ et $[O, B]$.

2. Exercice

Calcul vectoriel

Dans un repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j})$, on considère les points A et B dont les coordonnées sont respectivement: (6; 0) et (1; 5).

Calculer les coordonnées :

a) du point O', intersection des médiatrices

b) du point H, intersection des hauteurs

c) du point H' symétrique du point H par rapport à la droite (OA)

3. Exercice

Calcul vectoriel

Dans un repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j})$, on considère les points A et B dont les coordonnées sont respectivement: (6; 0) et (1; 5).

Déterminer une équation cartésienne du cercle C, circonscrit au triangle OAB et vérifier que H' appartient à C (H' est le point déterminé à l'exercice précédent).

4. Exercice

Calcul vectoriel

On rappelle que l'aire d'un triangle ABC peut s' exprimer $\mathcal{A} = \dfrac{\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\|}{2}$

Dans l'espace affine euclidien rapporté à un repère orthonormal direct $(O\,;\vec{i},\vec{j})$ on considère les points :

$$A(2; -2; 3),\quad B(4; -6; -1)\quad \text{et}\quad C(0; -1; 5).$$

L'unité graphique est le cm.

1° Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BC}$.

2° Calculer en cm les mesures des longueurs de chacun des côtés du triangle ABC.

3° Calculer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$.

4° Déterminer en cm^2 la mesure de l'aire du triangle ABC.

5° Calculer la distance du point A à la droite (BC) .

6° Calculer les produits scalaires $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{AC}$. En déduire la position de la droite (OA) par rapport au plan (ABC) .

5. Chaudronnerie et tuyauterie industrielle - 87

Calcul vectoriel ; configurations géométriques (TP1)

Dans l'espace rapporté au repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ direct, on considère les points :
$A(5; 4; -4)$ $B(1; -1; 4)$ et $C(2; 1; 5)$.

1° Déterminer une équation cartésienne du plan P passant par A ,B et C

2° Calculer l'aire du triangle ABC .

3° Calculer les coordonnées du point G , barycentre du système { $(A;1)$, $(B;3)$, $(C;2)$ } .

4° Donner une représentation paramétrique de la droite D passant par G et orthogonale au plan P .

5° Soit M le point d'intersection de D avec le plan d'équation $z = 0$.
Calculer la mesure de l'angle $\widehat{GMO}$.

6. Chaudronnerie et tuyauterie industrielle - 90

Calcul vectoriel ; configurations géométriques (TP1)

On considère l'espace rapporté au repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.
Soient les points : $A(2; 1; 0)$, $B(-3; 2; 3)$ et $C(1; -2; -1)$.

1° Donner une équation cartésienne du plan passant par ces trois points.

2° Calculer l'aire du triangle ABC .

3° Calculer en degrés les mesures des angles de ce triangle. Vérifier vos résultats.

4° Calculer les coordonnées du centre de gravité du tétraèdre $OABC$

5° Calculer le volume du tétraèdre $OABC$.

7. Chaudronnerie et tuyauterie industrielle - 92

Calcul vectoriel ; configurations géométriques (TP1)

Dans un repère orthonormal direct $(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ de l'espace, on donne les points :

$$A(1; 2; 3),\ B(-1; 3; 2) \text{ et } C(0; 0; 4).$$

1° Soit (P) le plan d'équation $x + y + z = 4$.

a) Vérifier que le plan(P) contient les points B et C mais pas le point A.

b) Montrer que les coordonnées du point I, projeté orthogonal de A sur le plan (P) sont : $\left(\frac{1}{3};\frac{4}{3};\frac{7}{3}\right)$

2° Calculer l'aire $\mathcal{A}$ du triangle ABC puis l'aire $\mathcal{A}'$ du triangle IBC.

3° Calculer l'angle θ du plan (P) et du plan contenant les points A, B et C.

4° Vérifier que $\mathcal{A}' = \mathcal{A}.|\cos\theta|$

8. Bureau d'étude - 81

Calcul vectoriel

L'unité de longueur est le *cm*. Dans un repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on considère les trois points :
$A(1;\,2;\,2)$ $B(2;\,3;\,2)$ $C(2;\,-1;\,0)$
Dans le plan défini par ces trois points, on considère le triangle ABC .

1° Calculer le produit vectoriel $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$.

2° En déduire l'aire, en cm^2 , du triangle *ABC*

3° Calculer la distance, en *cm*, du point *A* au côté $[B,C]$ du triangle .

9. Bureau d'étude - 83

Calcul vectoriel

L'espace est rapporté au repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ (unité 1cm).
On considère les trois points : $A(1;\,2;\,3)$, $B(2;\,3;\,1)$ et $C(3;\,1;\,2)$

1° Calculer les composantes du vecteur $\vec{u}= \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$? En déduire la mesure, en cm^2, de l'aire du triangle *ABC* .

2° $M(x;y;z)$ est un point quelconque de l'espace ;
calculer les composantes du vecteur $\vec{v} = \overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{MB}$ puis calculer le produit scalaire $\vec{v}\cdot\overrightarrow{MC}$.
En déduire une équation cartésienne du plan (ABC)

10. Bureau d'étude - 86

Calcul vectoriel

On considère un repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ de l'espace.

1° Déterminer une équation cartésienne de la sphère *S* de centre $I(1;\,1;\,-1)$ et de rayon 3.

2° Soit *P* le plan dont une équation cartésienne est $2x + y + z = 0$.
Vérifier que le plan *P* contient les points *O* , $A(-1;\,0;\,2)$ et $B(-1;\,2;\,0)$.

3° Soit Δ la droite passant par I et orthogonale au plan *P*. Déterminer les coordonnées du point d'intersection *E* de la droite Δ avec le plan *P* .

4° En déduire que l'intersection de la sphère *S* et du plan *P* est un cercle (*C*) dont on donnera le centre et le rayon .

5° Calculer les coordonnées des points d'intersection *M* et *N* de la droite Δ et de la sphère *S*.
Déterminer les équations cartésiennes des plans tangents en *M* et *N* à la sphère *S*.

11. Fabrication mécanique - 76

Calcul vectoriel

Dans un repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ (unité 1cm), on donne les quatre points :
$A(2;\,1;\,-3)$, $B(1;\,-1;\,-1)$, $C(0;\,-3;\,1)$ et $D(-4;\,1;\,3)$.

1° Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CD}$; en déduire la mesure de l'angle $\widehat{BCD}$.

2° Calculer les composantes du vecteur $\vec{W} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD}$ puis le produit scalaire $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}$; en déduire :
a) $\cos \widehat{BAD}$, $\sin \widehat{BAD}$, puis la mesure de l'angle $\widehat{BAD}$

b) L'aire, en cm^2, du triangle ABD.

3° Calculer le produit scalaire $\vec{W}\,.\,\vec{CD}$. Que peut-on en déduire pour quatre points A,B,C,D ?

12. Fonderie sur modèle - 87

Calcul vectoriel

L'espace est muni d'un repère orthonormal $(O\,;\,\vec{i},\,\vec{j},\,\vec{k})$, unité 1cm. On considère les points :
$A(4;\,1;\,2)$ $B(3;\,1;\,3)$ $C(2;\,2;\,3)$ $D(2;\,3;\,2)$ $E(3;3;1)$ $F(4;\,2;\,1)$ et $S(6;5;5)$.

1° Montrer que les segments $[A,\,D]$, $[B,\,E]$ et $[C,\,F]$ ont même milieu W.

2° Calculer le produit vectoriel $\overrightarrow{WA} \wedge \overrightarrow{WB}$ et montrer que ce vecteur est colinéaire au vecteur $\overrightarrow{WS}$.

3° Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{WS}.\overrightarrow{CF}$.
En déduire que les points A,B,C,D,E sont coplanaires.

4° Montrer que les points A,B,C,D,E,F sont les sommets d'un hexagone régulier.

5° Calculer l'aire de cet hexagone régulier.

13. Fonderie sur modèle - 89

Calcul vectoriel

Le plan P est rapporté au repère orthonormal $(O\,;\,\vec{i},\,\vec{j})$, unité graphique 1 cm;
on considère les points :
$A(2;\,0)$ $B(0;\,1)$ et $M(m;\,m)$ où m est un réel quelconque de $\mathbb{R}$.

1° Montrer que l'ensemble des points M quand m varie est une droite dont on déterminera un point et un vecteur directeur.

2° Déterminer les valeurs de m pour lesquelles le triangle ABM est rectangle en M.
Vérifier que l'un de ces triangles est isocèle.

3° L'espace est rapporté à un repère orthonormal direct $(O\,;\,\vec{i},\,\vec{j},\,\vec{k})$; le plan $(O\,;\,\vec{i},\,\vec{j})$ étant le plan (P) précédemment défini.

Les points A, B, M ont donc comme coordonnées dans le repère $(O\,;\,\vec{i},\,\vec{j},\,\vec{k})$:
$A(2;\,0;\,0)$ $B(0;\,1;\,0)$ et $M(m;\,m;\,0)$

Soit f la fonction numérique qui à tout réel m associe l'aire en cm^2 du triangle ABM.

On rappelle que $f(m) = \dfrac{\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AM}\|}{2}$.

a) Calculer $f(m)$ en fonction de m.

b) Déterminer les valeurs de m pour lesquelles l'aire du triangle ABM est égale à 4 cm^2.

14. Forge et estampage - 85

Calcul vectoriel

L'espace est rapporté à un repère orthonormal $(O\,;\,\vec{i},\,\vec{j},\,\vec{k})$,(unité 1 cm).
On donne les points : $A(2;\,2;\,6)$ $B(1;\,2;\,2)$ $C(3;\,5;\,-1)$ et $D(-2;\,3;\,1)$.

1° Calculer l'angle des arêtes [*A*,*B*] et [*A*,*C*] du tétraèdre *ABCD*. On donnera une mesure de cet angle en degrés à 10^{-2} près. (On pourra utiliser le produit scalaire dans l'espace)

2° Calculer la distance de *A* à la droite (*BC*). Elle sera donnée en *cm* à 10^{-2} près.

15. Forge et estampage - 87

Calcul vectoriel

Soit $(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ un repère orthonormal direct de l'espace (unité 1 *cm*).
On considère les points :

$A(4;\,4;\,0)$ $B(4;\,-4;\,0)$ $C(-4;\,-4;\,0)$ et $D(-4;\,4;\,0)$.

1° Démontrer que ABCD est un carré dont le centre de gravité est *O*.

2° Soient I et J les milieux respectifs de [*A*,*D*] et de [*B*,*C*]. Déterminer les coordonnées du point *S*, de cote positive, pour que *SABCS* soit une pyramide régulière et que l'angle $I\hat{S}J = 60°$.

3° Tracer la pyramide *SABCD* en perspective cavalière.

4° Calculer une valeur approchée, à 10^{-3} près du volume *V* de *SABCS* en cm^3 (on rappelle que le volume d'une pyramide régulière est égal au tiers du produit de l'aire de base par la hauteur correspondante)

16. Forge et estampage - 90

Calcul vectoriel

$(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ est un repère orthonormal de l'espace (unité : 1cm).
Soient les points $A(10{,}5\,;\,0;\,0)$; $B(5{,}5;\,2{,}5;\,0)$ et $C(5;\,0;\,1)$.

1° Représenter le triangle *ABC* en perspective cavalière (135°, coefficient de projection : 0,7).

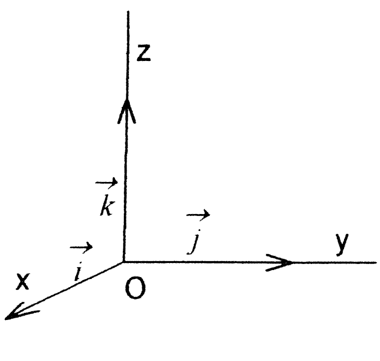
2° Déterminer les coordonnées du point *D* tel que *ABDC* soit un parallélogramme et placer *D* sur le dessin.

3° Comparer les distances *AB* et *AC*. Que peut-on en déduire pour le quadrilatère *ABDC*, ainsi que pour la position relative des droites (*AD*) et (*BC*) ?
Expliquer brièvement les développements des calculs et donner les résultats en millimètres, au dixième de millimètre près.

17. Forge et estampage - 92

Calcul vectoriel ; configurations géométriques 2 (TP1)

L'espace est rapporté au repère orthonormal direct $(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ que l'on représentera en perspective cavalière à 135 degrés, rapport de projection 0,75 et unité graphique 1 *cm*.



On considère les points $A(0\,;\,3\,;\,6)$, $B(2{,}5\,;\,0\,;\,3)$ et $C(0\,;\,7\,;\,0)$).

1° a) Calculer le produit vectoriel $\vec{AB} \wedge \vec{AC}$.

b) Evaluer, en degrés décimaux à 10^{-2} près, l'angle $\widehat{BAC}$.

2° a) Démontrer qu'une équation du plan (*P*) passant par les points *A*, *B* et *C* est :

$$6x + 3y + 2z - 21 = 0.$$

b) Quelle est la distance d de l'origine *O* au plan (*P*) ?

c) Donner les coordonnées des points D et E, intersections respectives de (P) et des droites $(O\ ;\ \vec{k})$ et $(O\ ;\ \vec{i})$? Tracer le triangle CDE.

3° Soit (Q) le plan passant par les points A et B, et perpendiculaire au plan horizontal $(O\ ;\ \vec{i},\ \vec{j})$. Tracer le polygône intersection de (Q) et de la pyramide $OCDE$.

18. ROC - 95

Calcul différentiel et intégral 1 (TP1 - TP5 - TP8) - Calcul vectoriel

Partie A : Calcul de volume par utilisation de la géométrie.

Dans un repère orthonormal direct $(O\ ;\ \vec{i},\ \vec{j},\ \vec{k})$ de l'espace, on donne les points $A(3;\ 1;\ 0)$ et $B(2;\ 3;\ 0)$.

1. a) Calculer $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}$.

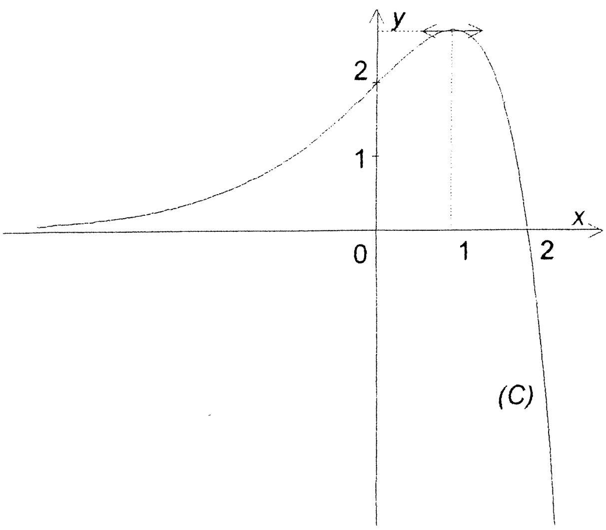
   b) En déduire une mesure en degrés de l'angle AOB à 10^{-1} près par excès.

2. a) Calculer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB}$.

   b) En déduire l'aire du triangle OAB.

3. On pose $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB}$. Calculer le volume du tétraèdre $OABC$.

Partie B :



Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (2 - x)e^x$.

La courbe représentative (C) de f est représentée ci-contre.

1. A l'aide de cette courbe :

   a) Préciser l'intervalle I sur lequel $\begin{cases} x \geq 0 \\ f(x) \geq 0 \end{cases}$

   b) Donner le tableau de variation de f sur $[0, 2]$. (l'étude de f n'est pas demandée).

2. Soit le solide (S) engendré par la rotation autour de l'axe des abscisses du domaine plan délimité sur $[0, 2]$ par (C) et les deux axes de coordonnées.

Soit V le volume de (S). On admet que :

$$V = \pi\int_0^2 [f(x)]^2\,dx$$

a) Démontrer que $F(x) = \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{2}x + \frac{13}{4}\right)e^{2x}$ est une primitive de $[f(x)]^2$.

b) En déduire V (on calculera d'abord la valeur exacte puis on donnera une valeur approchée à 10^{-3} près par excès).

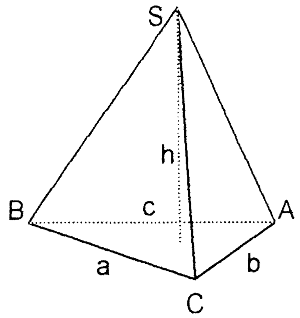
B. Configurations géométriques

1. Art céramique - 88

Configurations géométriques 1 (TP1)

On donne une pyramide de base triangulaire , appelée tétraèdre (voir figure jointe) , de dimensions :
$a = 3\ m$; $b = 4{,}5\ m$; $c = 6\ m$; $h = 10\ m$

a) Calculer en degrés , l'angle C du triangle ABC , puis l'aire de ce triangle .



En déduire le volume de la pyramide (on donnera les résultats en m^2 ou en m^3 à 10^{-2} près)

b) On applique à ce tétraèdre l'homothétie f de centre S et de rapport $\frac{1}{3}$.
Quelle est la nature du solide ainsi obtenu ? Le représenter sur la figure jointe. Quel est son volume .

FORMULES USUELLES DANS LE TRIANGLE

1° $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$ 2° $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C}$

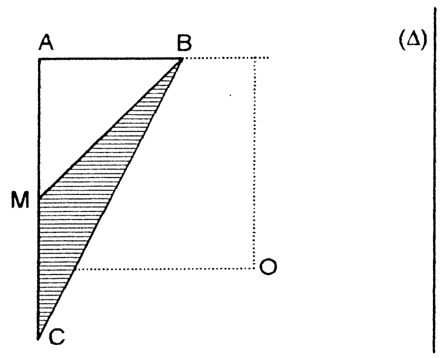
3° aire $= \dfrac{1}{2} ab \sin C$ 4° Aire $= \dfrac{\text{base} \times \text{hauteur}}{2}$

2. Art textile et impression - 92

Configurations géométriques 1 (TP1)

On donne la figure ci-contre :

- ABM est un triangle rectangle en A.
- $AM = AB = MC = 2\ cm$.
- (Δ) est une droite parallèle à (AC).
  La distance des droites (AC) et (Δ) est de $6\ cm$.
- Le point O est situé à trois cm des droites (AB) et (AC).
- La figure F est composée des deux triangles AMB et MBC.



1° Reproduire la figure F, le point O et la droite (Δ), dans la partie située en haut et à gauche d'une feuille de papier millimétré.
Colorier l'intérieur du triangle MBC.

2° Tracer :

- l'image F_1 de la figure F par la symétrie de centre O.
- l'image F_2 de la figure F par la rotation de centre O et d'angle $-\frac{\pi}{2}$.
- l'image F_3 de la figure F_2 par la symétrie de centre O.

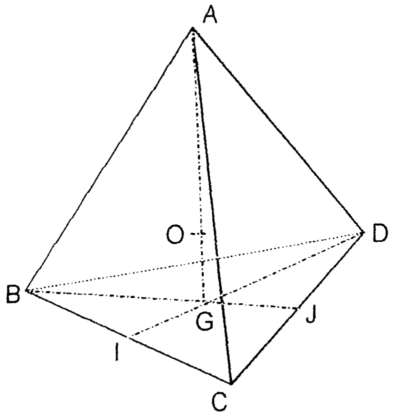
A chaque étape, l'image de toute partie coloriée sera coloriée.
On appelle G la figure obtenue par la réunion de F, F_1, F_2 et F_3.
Tracer l'image G' de la figure G par la symétrie orthogonale d'axe (Δ).

3° Tracer l'image des figures G et G' par la translation de vecteur $3.\overrightarrow{AM}$.

3. Architecture intérieure - 90

Configurations géométriques 1 (TP1)

Pour réaliser un luminaire destiné à une discothèque, on étudie sa structure en forme de tétraèdre régulier. Les arêtes doivent être découpées pour que le tétraèdre soit inscrit dans une sphère de diamètre 1m.



On pose $a = AB = BC = CD = DA = AC = BD$

I est le milieu de $[B,C]$, J le milieu de $[C,D]$; G est le centre de gravité du triangle BCD.

$$\vec{AO} = \frac{3}{4}\vec{AG}$$

On admettra que le triangle AGB est rectangle en G .

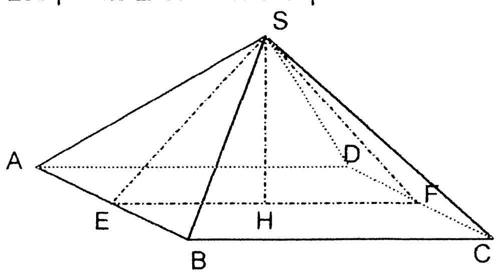
1° Calculer, en fonction de a, les longueurs des segments : $[B,J]$, $[B,G]$, $[A,G]$, $[O,A]$, $[O,G]$, $[O,B]$.
En déduire que O est le centre de la sphère circonscrite au tétraèdre.

2° Calculer la longueur de l'arête du tétraèdre, à 1cm près.

4. Esthétique industrielle - 88

Configurations géométriques 1 (TP1)

On considère la pyramide à base carrée $ABCD$, de sommet S placé sur la perpendiculaire à la base, élevée au centre H du carré.
Les points E et F sont respectivement les milieux des côtés $[A,B]$ et $[C,D]$ (voir figure).



On suppose que les proportions de la pyramide sont telles que le carré construit sur la hauteur $[SH]$ comme côté, a même aire que l'une quelconque des faces triangulaires latérales (toutes identiques par construction) .

1° Exprimer l'égalité des deux aires ainsi définies.
En déduire une expression de SE en fonction de SH et AB.

2° Exprimer $\frac{SE}{EH}$ en fonction de SH et AB.

3° On note $k = \frac{SE}{EH}$. Etablir une relation entre SH , EH , et SE .
En déduire que k est la solution positive de $k^2 - k - 1 = 0$. Quelle est cette solution ?

NB : k est appelé le Nombre d'Or. Selon Hérodote, la pyramide de Chéops aurait été construite sur ce modèle ......

5. Plasticien de l'environnement architectural - 92

Configurations géométriques 1 (TP1)

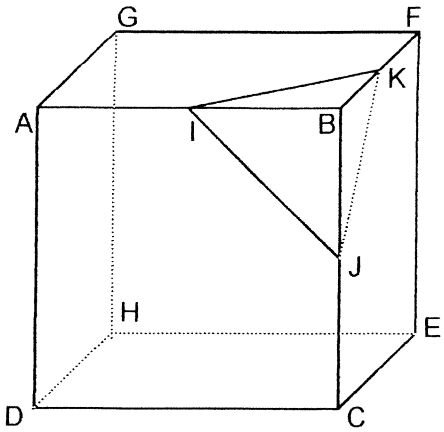
Exercice 1:

1° On considère un cercle de centre C, rayon 3 cm, un diamètre $[OO']$ de ce cercle et un point A sur ce cercle. On note θ une mesure de l'angle $\widehat{O'OA}$. Que peut-on dire de l'angle $\widehat{OAO'}$?
En déduire la longueur OA en fonction de θ.

2° Construire un cercle de centre C, rayon 3 cm et un diamètre $[OO']$.
Une droite (Δ) passant par O recoupe le cercle en A. Placer les points M et N sur (Δ) tels que :

$AM = AN = 3\ cm$.
L'ensemble des points obtenus lorsqu'on considère toutes les droites passant par O forme une courbe. Il s'agit d'un limaçon, courbe dessinée pour la première fois par Dürer en 1525, puis étudiée mathématiquement par Roberval et Etienne Pascal.
Dessiner l'allure de cette courbe en refaisant plusieur fois la construction des points M et N pour plusieurs droites (Δ) passant par O.

Exercice 2
On considère un cube dont les arêtes mesurent 6 *cm*. On le tronque en chacun de ses sommets suivant le schéma suivant :
troncature pour un sommet : enlèvement de la pyramide, à base triangulaire (BIJK).



I est milieu de [AB]

J est milieu de [BC]

K est milieu de [BF]

Faire un dessin soigné du polyèdre obtenu. Est-il régulier ?
Préciser le nombre et la nature de ses faces, le nombre d'arêtes et le nombre de sommets.
Calculer, en centimètres cubes, le volume de ce cube tronqué.

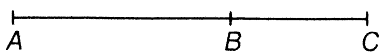
formulaire :
volume du cube d'arête a : a^3
volume d'une pyramide de hauteur h et de surface de base S : $\frac{1}{3} S \times h$.

6. Esthétique industrielle - 92

Configurations géométriques 1 (TP1)

Pendant longtemps, le nombre d'or a subjugué artistes et mathématiciens. On le retrouve en particulier dans la section dorée et le nombre d'or.

1° Section dorée



Soient trois points A, B et C. On dit que ces trois points forment une section dorée lorsque $\frac{AC}{AB} = \frac{AB}{BC}$.
$B \in [AC]$.
On posera, pour simplifier $AB = x$ et $BC = 1$.
Calculer x dans ce cas. x représente le nombre d'or.

2° Triangle d'or

On appelle triangle d'or un triangle isocèle ayant deux angles de 72°.

Soit ABC un triangle d'or tel que : $AB = AC$.
On trace la bissectrice de l'angle $\widehat{ABC}$ qui coupe $[AC]$ en D.

a) Montrer que les triangles ABD et BCD sont isocèles et que BDC est un triangle d'or.

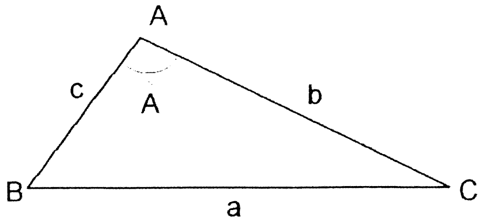
b) Tracer la bissectrice de l'angle $\widehat{BDC}$. Elle coupe $[BC]$ en E.
Montrer que (AB) et (DE) sont parallèles et que le triangle DEC est un triangle d'or.

c) Compléter la construction pour obtenir au total 5 triangles d'or sur le dessin.
(On prendra $BC = 10\ cm$).

7. Stylisme de mode - 89

Configurations géométriques 1 (TP1)

RAPPEL : Dans un triangle ABC, si on note A l'angle BAC, B l'angle ABC, C l'angle BCA , si de plus on note a la longueur du segment $[B,C]$, b la longueur du segment $[A,C]$, c la longueur du segment $[A,B]$ alors :



$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

$$A + B + C = 180°$$

Dans un triangle PQR, l'unité de mesure d'angle étant le degré, l'unité de longueur étant le centimètre, on donne $Q = 57°$; $R = 63°$ et $QR = 15\ cm$.

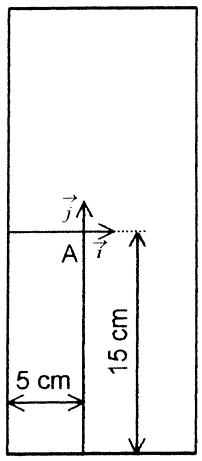
1° Tracer le triangle PQR (sur la copie) .

2° Calculer la mesure de l'angle P et les longueurs PQ et PR .

3° Soit I le milieu du côté $[Q,R]$. Calculer la longueur de la médiane PI à 10^{-1} près .

8. Stylisme de mode - 90

Configurations géométriques 1 (TP1)



On se place dans le plan orienté rapporté à un repère orthonormal $(A, \vec{i}, \vec{j})$ (unité graphique : 1cm). A, $\vec{i}$, $\vec{j}$ seront placés sur une feuille de papier millimétré suivant le schéma ci-contre.

Dessiner au crayon le triangle ABC ;
B et C sont définis par leurs coordonnées $B(1; 0)$ et $C(0; 1)$.

1° Calculer BC et la mesure des angles du triangle ABC.

2° I et J étant les milieux respectifs des segments $[A,C]$ et $[B,C]$, tracer à l'encre la figure $(\mathcal{F})$ formées des segments $[I,J]$ et $[J,B]$. Dans la suite de l'exercice, il est conseillé d'utiliser à chaque étape une couleur différente .
On note h l'homothétie de centre C et de rapport 2. Dessiner l'image de la figure $(\mathcal{F})$ par h. On note $\mathcal{D}$ l'image de $\mathcal{B}$ par h.

3° On appelle $(\mathcal{G})$ la figure formée par les segments $[I,J]$, $[J,B]$ et leurs homothétiques. Construire l'image de $(\mathcal{G})$ par la symétrie orthogonale d'axe (AC) .

4° On appelle $(\mathcal{H})$, la figure formée de $(\mathcal{G})$ et de son image construite à la question 3°.
Construire l'image de $(\mathcal{H})$ par la rotation de centre D et d'angle $-\frac{\pi}{2}$.

5° On appelle $(\mathcal{L})$ la figure formée de $(\mathcal{H})$ et de son image construite à la question 4°.
Construire l'image de $(\mathcal{L})$ par la symétrie centrale de centre C .

6° On appelle $(\mathcal{R})$ la figure formée de $(\mathcal{L})$ et de son image construite à la question 5°.
Construire l'image de $(\mathcal{R})$ par la translation de vecteur $\vec{AB}$ et l'image de $(\mathcal{R})$ par la translation de vecteur $4.\vec{CB}$.

9. Stylisme de mode - 92

Configurations géométriques 2 (TP2)

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O\,;\,\vec{i},\vec{j})$, (unité graphique : 1 *cm*).
Placer les points $A(1\,;\,1)$; $B(3\,;\,2)$; $C(2\,;\,3)$. On note T le triangle ABC.

1° Calculer les distances AB, AC et BC. Vérifier que T est un triangle isocèle.

2° Calculer $\cos\hat{A}$; en déduire la mesure en degrés de l'angle $\hat{A}$ (arrondir au degré le plus proche).

3° Construire l'image T_1 de T par l'homothétie de centre O et de rapport -2.

4° On note F la figure formée par la réunion des triangles T et T_1.
Les figures F_1 et F_2 définies ci-dessous seront représentées en utilisant deux couleurs différentes.

a) Construire l'image de F par la symétrie de centre O. On note F_1 la figure formée des quatre triangles ainsi représentés.

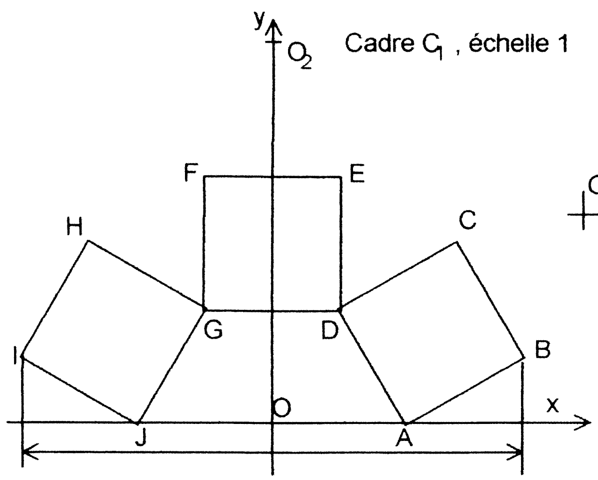
b) Construire F_2, image de F_1 par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$ radians.

10. Art céramique - 87

Configurations géométriques 1 (TP1)

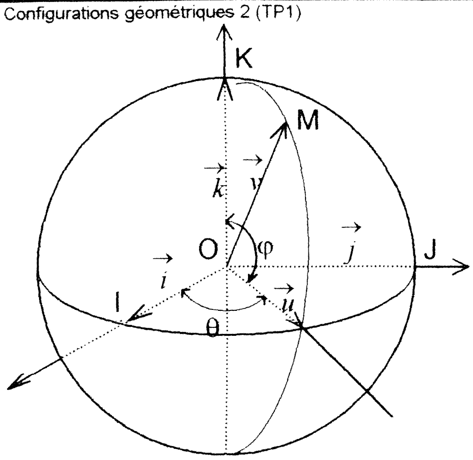
Soit le module extrait d'un pavage plan (nommé 3.4.6.4), et dessiné dans le cadre C1 (annexe 1) à l'échelle 1, sur un repère orthonormal d'axes Ox et Oy, l'unité étant le millimètre .
L 'origine est le centre d'un hexagone régulier, inscrit dans un cercle de rayon 20 mm .
1° Reporter et dessiner le module à partir des points O1 et O2 dans le cadre C1.
2° Calculer la largeur L du module, sachant que, les angles étant mesurés en degrés, on donne :

$\cos(30°) = 0.87$	$\cos(45°) = 0.7$	$\cos(60°) = 0.5$
$\sin(30°) = 0.5$	$\sin(45°) = 0.7$	$\sin(60°) = 0.87$



11. Géomètre topographe - 92

Configurations géométriques 2 (TP1)



Soit un repère cartésien orthonormal $(O\ ;\ \vec{i},\ \vec{j},\ \vec{k})$ avec $\vec{OI} = \vec{i}$, $\vec{OJ} = \vec{j}$, $\vec{OK} = \vec{k}$.

On considère la sphère (S) de centre O, de rayon 1. Tout point M est alors repéré par sa longitude θ et sa latitude φ ($\theta = (\vec{i},\ \vec{u})$, $\varphi = (\vec{u},\ \vec{v})$).

1° On considère sur (S) les points $A\left(\theta = \frac{\pi}{6}, \varphi = \frac{\pi}{6}\right)$ et $B\left(\theta = \frac{\pi}{3}, \varphi = \frac{\pi}{3}\right)$.

a) Calculer, en radians, les côtés et les angles du triangle sphérique ABJ à 10^{-3} près.

b) Soit N le milieu du côté AJ de ce triangle sphérique ABJ. Déterminer la longitude et la latitude de N.

2° Dans le repère $(O\ ;\ \vec{i},\ \vec{j},\ \vec{k})$, on considère la courbe (C), ensemble des points $M(x,\ y,\ z)$ tels que : $x = \cos^2 t$, $y = \cos t.\sin t$, $z = \sin t$, t prenant toute valeur réelle.

a) Montrer que tout point de (C) est sur la sphère (S).

b) Montrer que tout point de (C) appartient à la surface d'équation : $x^2 - x + y^2 = 0$.

3° On étudie les courbes (C_1) et (C_2), projections orthogonales de (C), respectivement sur les plans $(O\ ;\ \vec{i},\ \vec{j})$, $(O\ ;\ \vec{i},\ \vec{k})$.

a) Montrer que (C_1) est un cercle. Préciser son centre et son rayon.

b) Montrer que (C_2) est un arc d'une parabole P dont on précisera le foyer et la directrice.

Les trois questions peuvent être traitées indépendamment l'une de l'autre.

12. Industries du cuir (extrait) - 88

Problème de synthèse

L'espace est rapporté à un repère orthonormal $(O\ ;\ \vec{i},\ \vec{j},\ \vec{k})$.

PARTIE A

1° On considère le point A de coordonnées (0; 0; 2) et le point B, de coordonnées (2; 0; 0).

a) Représenter le repère $(O\ ;\ \vec{i},\ \vec{j},\ \vec{k})$ et placer les points A et B.

b) Soit C le point du plan $(O\ ;\ \vec{i},\ \vec{j})$, de coordonnées $(x_c\ ;y_c\ ;0)$,$y_c > 0$ tel que OBC soit un triangle équilatéral .
Déterminer x_c et y_c . Placer le point C sur la figure.

2° m étant un nombre réel choisi arbitrairement entre 0 et 2, on désigne par M le point du segment $[OB]$ d'abscisse m. Placer M sur la figure. D_m désigne la droite passant par M et parallèle à la droite (BC). Tracer D_m. On note S le point d'intersection de D_m avec (OC) .

3° Q_m désigne le plan contenant D_m et orthogonal au plan $(O\ ;\ \vec{i},\ \vec{j})$.
Q_m coupe la droite (AB) au point N et la droite (AC) au point R .

a) Montrer que la droite (MN) (intersection des plans Q_m et (O ; $\vec{i}$, $\vec{j}$)), et la droite (RS) (intersection des plans Q_m et OAC) sont parallèles .

b) Montrer que les droites (NR) et (BC) sont parallèles .

c) Déduire des deux questions précédentes que le quadrilatère $MNRS$ est un rectangle.

PARTIE B : Calcul de l'aire du rectangle *MNRS*

1° a) Montrer que $MS = OM = m$ et que $MN = MB = 2 - m$. (on pourra réaliser deux figures, l'une dans le plan (O ; $\vec{i}$, $\vec{j}$), l'autre dans le plan (O ; $\vec{i}$, $\vec{k}$).

b) Montrer que l'aire du rectangle $MNRS$ est égale à : $\mathcal{A}(m) = -m^2 + 2m$

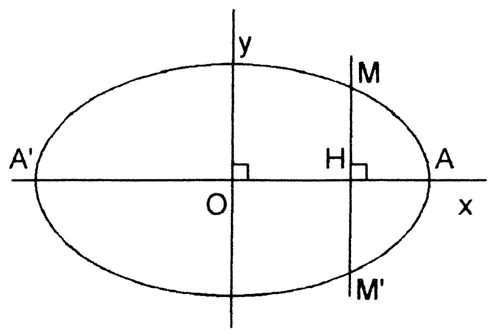
2° Après étude des variations de $\mathcal{A}(m)$ sur l'intervalle]0; 2[représenter graphiquement $\mathcal{A}$ dans un repère orthonormal (O ; $\vec{u}$, $\vec{v}$).

3° Quelle particularité le rectangle $MNRS$ offre-t-il lorsque $\mathcal{A}(m)$ est maximum ?

13. Industries céréalières - 92

Configurations géométriques 2 (TP1 - TP2) ; calcul différentiel et intégral 1 (TP3)

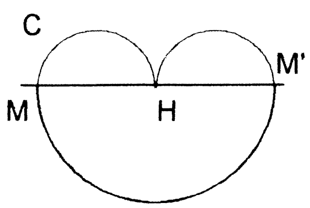
Le but de ce problème est de justifier que le taux d'extraction meunier optimal d'un grain de blé est maximum lorsque ce grain est quasi-sphérique.
La modélisation géométrique d'un grain de blé peut être obtenue de la façon suivante :



La courbe E est une ellipse, de grand axe $2a$, de petit axe $2b$; son équation, dans le plan rapporté au repère orthonormal d'axes Ox et Oy, est :

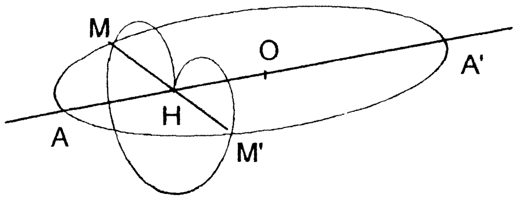
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$$

La droite d'équation $x = \lambda$, ($-a \leq \lambda \leq a$), coupe E en deux points M et M', le grand axe de E en H.



Dans le plan perpendiculaire au plan de E suivant la droite (MM'), on considère la courbe C formée de trois demi-cercles, l'un de diamètre [MM'), les deux autres de diamètres respectifs [MH] et [HM'], conformément à la figure ci-contre.

Lorsque H décrit [AA'], cette courbe C enveloppe un volume V dont la forme correspond approximativement à celle d'un grain de blé.



1° Calculer, pour une valeur λ quelconque de [$-a$; a], l'aire $A(\lambda)$ limitée par la courbe C, en fonction de a, b et λ.

2° En déduire le volume de V en fonction de a et b.

3° Dans cette question, on admet que l'amende contenue dans le grain de blé a la même forme que le grain, l'ellipse E' ayant alors pour grand axe $2a - 2d$, et pour petit axe $2b - 2d$, où d est une constante représentant l'épaisseur de l'enveloppe.

On suppose que les masses volumiques de tous les constituants du grain sont identiques.

Calculer le taux d'extraction meunier optimal R en fonction de a, b et d (R est le rapport entre la masse de l'amande et la masse totale du grain).

Application numérique : $2a = 6{,}07$ mm ; $2b = 3{,}00$ mm ; $d = 0{,}14$ mm.

4° On admet que : $R(a,b) = \dfrac{(a-d)(b-d)^2}{ab^2}$

On suppose que $ab^2 = 7\ mm^3$ et que $d = 0{,}14\ mm$.
Calculer $R(a,b)$ uniquement en fonction de b.
Calculer b pour que R soit maximum. En déduire a. Conclure.

C. Courbes planes

1. Esthétique industrielle - 94

Courbes planes (TP1)

$(O\,;\vec{i},\vec{j})$ est un repère orthonormal (unité graphique : 1 *cm*).

A chaque valeur du réel *t* de l'intervalle [-1 , 2], on associe le point M_t de coordonnées :

$$\begin{cases} x(t) = 2t^3 - 3t^2 \\ y(t) = 4t - t^2 \end{cases}$$

On note (*C*), la courbe décrite par le point M_t.

1. Etudier sur l'intervalle [-1 , 2], le sens de variation des fonctions : $t \mapsto x(t)$ et $t \mapsto y(t)$.

   Recopier et compléter le tableau suivant :

t	-1	0	1	2	
Signe de $x'(t)$					
Signe de $y'(t)$					
sens de variation de $x(t)$					
sens de variation de $x(t)$					

   Les valeurs de $x'(t)$, $y'(t)$, $x(t)$ et $y(t)$ pour les valeurs -1, 0, 1 et 2 devront figurer dans le tableau.

2. Tracer la courbe (*C*).

2. Productique - 95

Fonctions d'une variable réelle 1 ; calcul différentiel et intégral 2 (TP1 - TP8) ; nombres complexes 2 (TP1) ; courbes planes (TP1)

Le plan étant rapporté au repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j})$ (unité graphique 5 *cm*).
On appelle *C* la courbe définie par les équations paramétriques :

$$\begin{cases} x = f(t) = (2 + \cos(2t))\sin(t) \\ y = g(t) = \cos(t) \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

1. Montrer que *f* et *g* sont périodiques de période 2π. On limitera l'étude à l'intervalle $[-\pi\,;\,\pi]$.

2. Etudier la parité de chacune des fonctions *f* et *g* ; en déduire un élément de symétrie de la courbe *C*.

3. Calculer $f(\pi - t)$ et $g(\pi - t)$; en déduire un autre élément de symétrie de *C*.

4. a) Montrer que $f'(t) = 3\cos(t)\cos(2t)$.

   b) Etudier les variations de *f* et *g* sur l'intervalle $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$.

   Préciser les tangentes parallèles aux axes.

Tracer avec soin la partie de la courbe C correspondant à cet intervalle puis, à l'aide des symétries mises en évidence aux questions 2. et 3., tracer C.

5. On démontre que l'aire, exprimée en unités d'aire, du domaine limité par la courbe C est donné par la formule :

$$A = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left|f(t)g'(t)\right| dt$$

(On ne demande pas d'établir cette formule).

a) Préciser le signe de $f(t)$ et de $g'(t)$ pour $t \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ et montrer que A est l'intégrale sur l'intervalle $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ de la fonction h telle que $h(t) = 8\sin^2(t) + 4\sin^2(t)\cos(2t)$.

b) Linéariser la fonction h.

c) En déduire l'aire A.

3. Conception de produits industriels - 95

Calcul différentiel et intégral 1 (TP1) ; courbes planes (TP1) ; configurations géométriques (TP1)

Le problème comporte l'étude d'une courbe définie paramétriquement qui permettra le dessin d'une came.

Le plan est muni d'un repère orthonormal direct $(O\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath})$ d'unité graphique 1 *cm*.

On désigne par C_1 la courbe ensemble des points $M(x, y)$ du plan tels que :

$$\begin{cases} x = 7 - 3t^2 \\ y = 6\sqrt{3}\,t - 2\sqrt{3}\,t^2 \end{cases} \text{ avec } 0 \leq t \leq 1.$$

1. Soient f et g les fonctions définies sur l'intervalle [0, 1] par :
   $f(t) = 7 - 3t^2$ et $g(t) = 6\sqrt{3}\,t - 2\sqrt{3}\,t^2$.
   Etudier les variations des fonctions f et g et rassembler les résultats dans un même tableau.

2. Reproduire et compléter le tableau suivant :

t	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1
$f(t)$						
$g(t)$						

On donnera, pour $t \neq 0$, des valeurs décimales arrondies à 0,1 près.

3. a) On note A le point de la courbe C_1 de paramètre $t = 0$.
   Placer le point A ; déterminer les coordonnées d'un vecteur directeur de la tangente D en A à la courbe C_1.
   Montrer, en le justifiant, que les droites (OA) et D sont perpendiculaires.

   b) On note A' le point de la courbe C_1 de paramètre $t = 1$.
   Placer le point A' ; déterminer les coordonnées d'un vecteur directeur de la tangente D' en A' à la courbe C_1.
   Montrer, en le justifiant, que les droites (OA') et D' sont perpendiculaires.

   c) Tracer la courbe C_1.

d) Montrer que, en radians, $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OA'}) = \frac{\pi}{3}$.

4. Tracer la courbe C_2 symétrique de la courbe C_1 par rapport à l'axe des abscisses.
On note C la réunion des arcs de courbe C_1 et C_2.

5. On note Γ l'image de la courbe C par la rotation de centre O, d'angle $\frac{2\pi}{3}$, puis Γ' l'image de Γ par cette même rotation.
La réunion des courbes C, Γ et Γ' représente le profil d'une came utilisée en mécanique. Tracer ce profil.

6. Calculer l'intégrale $\mathrm{I} = 3\int_0^1 \left[f(t)g'(t) - g(t)f'(t)\right]dt$ qui représente l'aire, en cm^2, de la came.
On donnera la valeur exacte puis la valeur décimale arrondie à 0,01 près.

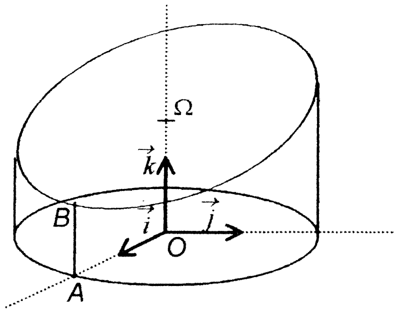
4. Construction navale - 95

Fonctions d'une variable réelle 1 ; calcul différentiel et intégral 2 (TP4 - TP8) ; calcul vectoriel ; courbes planes

Une cheminée de navire a la forme d'une portion de cylindre droit, à base circulaire, coupée par un plan (P).
La surface latérale de cette cheminée est une surface développable, fabriquée à partir d'une tôle. On souhaite déterminer quelques propriétés de cette surface.

Partie A

Soit $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère orthonormal direct de l'espace ; l'unité utilisée est le mètre. On désigne par (x, y, z) les coordonnées d'un point M relativement à ce repère.
Le cercle de base est le cercle de centre O et de rayon R, $R = 2$, ce cercle est situé dans le plan $(O ; \vec{i}, \vec{j})$
L'axe du cylindre est de repère $(O ; \vec{k})$.
On définit les points A, B et Ω par leurs coordonnées respectives (2, 0, 0), (2, 0, 1) et (0, 0, 2).



1. Soit $\vec{n} = \overrightarrow{\Omega B} \wedge \vec{j}$. Calculer les coordonnées de $\vec{n}$.

2. Le plan (P) est le plan qui contient Ω et de vecteur normal $\vec{n}$.
Ecrire une équation cartésienne du plan (P).

3. Pour $M \neq O$, on désigne par m le projeté orthogonal du point M sur le plan de repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ et on pose $\theta = (\vec{i}, \overrightarrow{Om})$; $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Démontrer que le point $M(x, y, z)$ est sur la courbe intersection du cylindre et du plan (P) si et seulement si : $\begin{cases} x = 2\cos(\theta) \\ y = 2\sin(\theta) \\ z = -\cos(\theta) + 2 \end{cases}$

On développe le cylindre après l'avoir coupé le long de la génératrice (AB). Le plan de la surface développée est muni d'un repère orthonormal direct $(A ; \vec{u}, \vec{k})$.

On admet que la plaque plane obtenue est l'ensemble des points N dont les coordonnées (X, Z) dans le repère $(A ; \vec{u}, \vec{k})$ sont telles que : $\begin{cases} 0 \leq X \leq 4\pi \\ 0 \leq Z \leq -\cos\left(\frac{X}{2}\right) + 2 \end{cases}$.