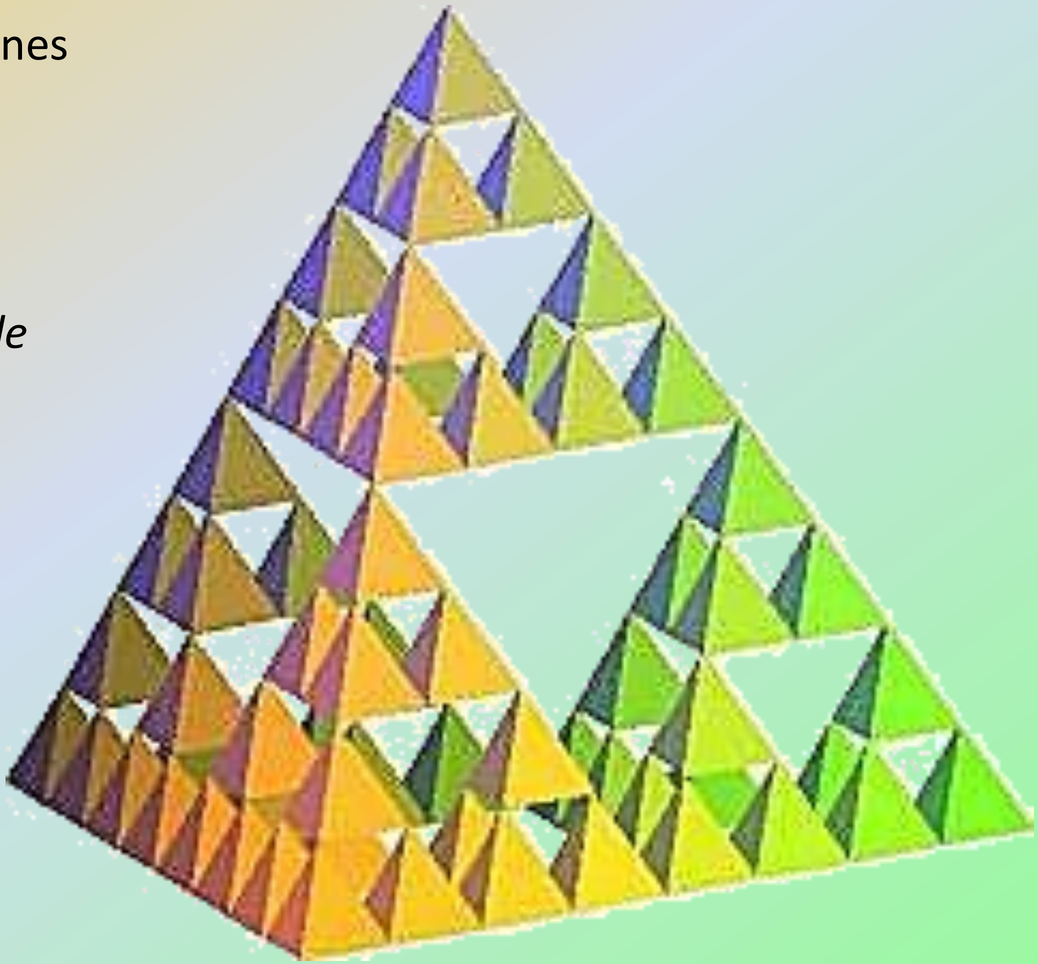
Tétraèdre de Sierpinski

Collège La Guinette, Villecresnes
Année scolaire 2015-16
Niveau 4^e

Projet fil rouge :
Construction d'un tétraèdre de Sierpinski avec des tickets de métro



Tétraèdre de Sierpinski

Collège La Guinette, Villecresnes – Année scolaire 2015/16 – Niveau 4^e

Tétraèdre de Sierpinski

Collège La Guinette, Villecresnes – Année scolaire 2015/16 – Niveau 4^{e}

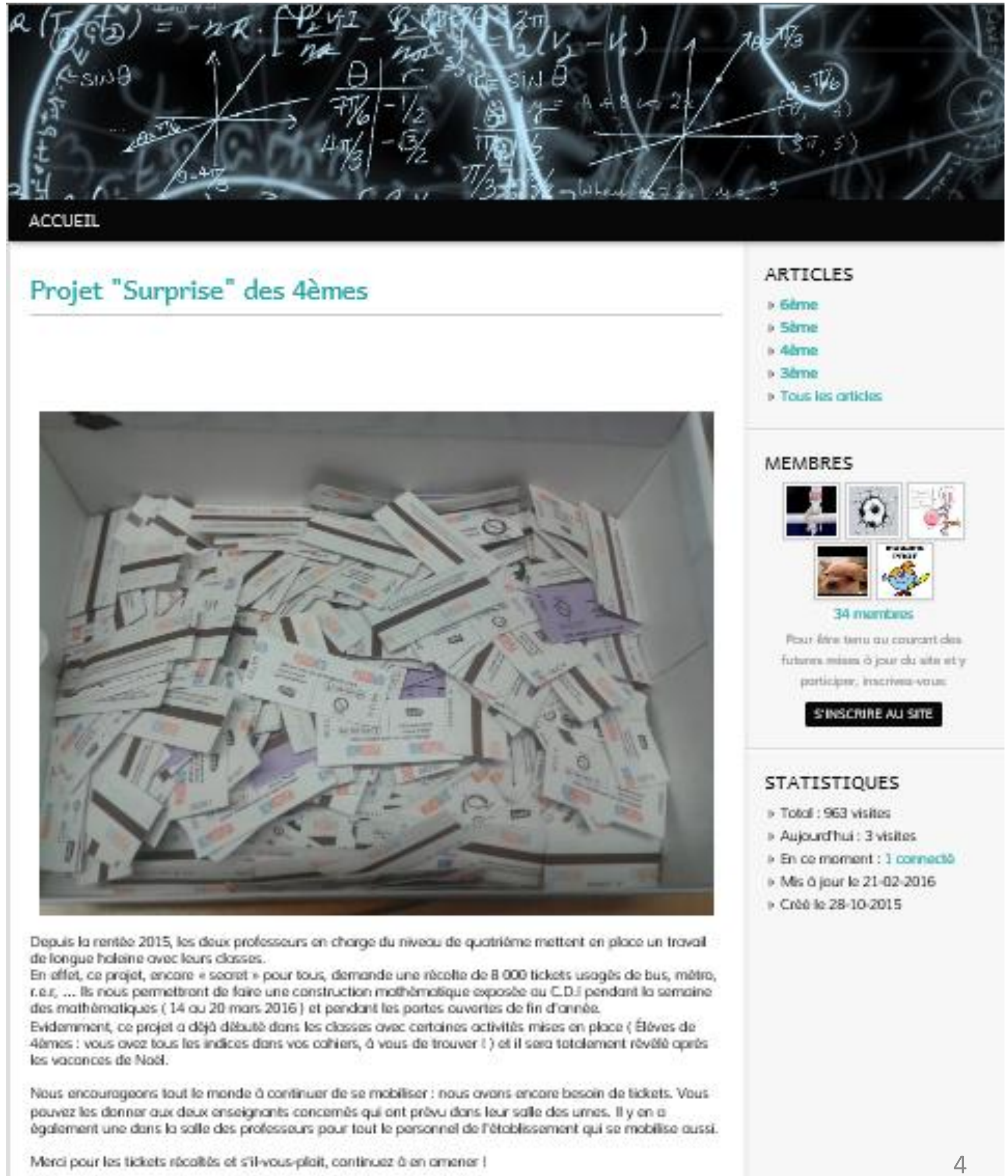
Etape 0 : annonce et lancement du projet

<u>Date</u> : début septembre

Réunion de rentrée :
« Un » projet fil rouge est annoncé aux familles.

Ainsi dès la deuxième semaine de la rentrée de septembre, les élèves, leurs parents et le personnel du collège sont mis à contribution d’une longue collecte de milliers de tickets de métro.

Sans rien de révéler du résultat final, ce projet fil rouge fait l’objet du premier article du blog de mathématiques afin de solliciter et attiser la curiosité de tous les élèves du collège. Le décompte des tickets récoltés est indiqué en page d’accueil.



Tétraèdre de Sierpinski

Collège La Guinette, Villecresnes – Année scolaire 2015/16 – Niveau 4^{e}

Etape 1 : le triangle de Mandelbrot

Date : octobre

Sous quelle forme ? devoir de recherche à la maison

Notion mathématique : théorème de la droite des milieux

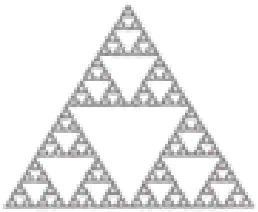
Au-delà des maths : fractales dans la nature et musée égyptien

Document : Collège La Guinette, Villecresnes (94) | Caroline Mathias

Enoncé du devoir de recherche à la maison

TRAVAIL DE RECHERCHE GEOMETRIQUE ET ARTISTIQUE !!	
DEVOIR A LA MAISON : A rendre lundi 2 Novembre 2015	
NOM : .... Prénom :	Classe : 4e
Compétences du socle commun : ☐ rechercher, extraire et organiser l'information utile ; ☐ mesurer, ~~calculer~~, appliquer des consignes ; ☐ ~~modéliser~~, conjecturer, ~~raisonner et démontrer~~ ; ☐ argumenter et présenter les résultats à l'aide d'un langage adapté.	Note :

Au fil des siècles



Le mathématicien franco-américain **Benoît Mandelbrot** (1924-2010) est l'inventeur des fractales, courbes « infiniment morcelées » : en zoomant sur une partie de la figure, on peut trouver une partie de la figure, on peut trouver toute la figure. C'est lui qui fait connaître le triangle ci-dessus au mathématicien polonais Wacław Sierpiński (1882-1969).

Partie A : Fractale de Mandelbrot

1) Qu'est ce qu'une fractale ?
2) Dans quels domaines retrouve-t-on les fractales ?
3) Trouver une fractale de Mandelbrot que l'on a à l'état naturel.
4) On va reproduire la figure ci-contre sur une feuille Canson :
   - a) Tracer un triangle équilatéral de côté 10 cm.
   - b) A l'intérieur de ce triangle, tracer un nouveau triangle dont les sommets sont les milieux des côtés du premier triangle. Colorier ce nouveau triangle.
   - c) Reproduire le même travail dans les 3 triangles blancs et continuer jusqu'à obtenir une figure semblable à celle ci-contre.

Les plus belles fractales de Mandelbrot seront affichées en classe.

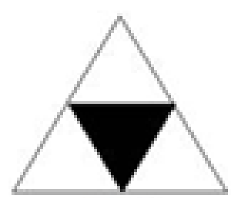
Partie B : Triangle de Sierpinski

Soit ABC un triangle équilatéral de 16 cm et I milieu de [AB], J milieu de [AC] et K milieu de [BC].

1) Construire la figure sur votre copie.
2) Faire les mesures nécessaires pour formuler une conjecture à propos de la nature des triangles IJK, AIJ, IBK et CKJ.

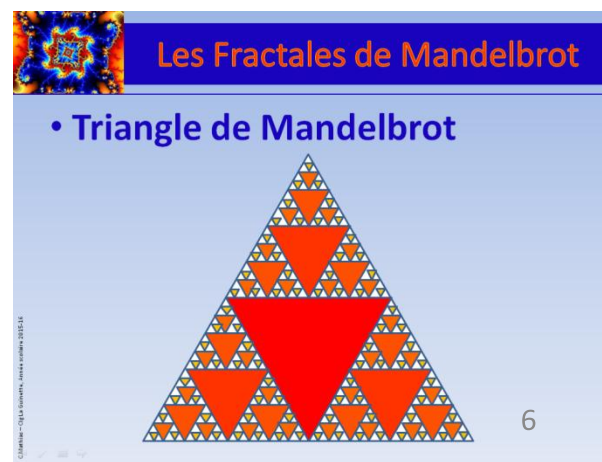
On considère la construction du triangle IJK à l'étape 1 pour créer un triangle de Sierpinski.

3) Combien de triangles blancs aura-t-on à l'étape 2 ? À l'étape 4 ? À l'étape 15 ? À l'étape x ?



Etape 1

Extraits du corrigé



Construction du grand musée égyptien du Caire :

Les pharaons du Caire vont pouvoir contempler le triangle de Sierpiński d'ici quelques années. Les architectes du futur « grand musée égyptien » ont conçu une façade imposante qui en reprend le motif principal. Des triangles de Sierpiński seront taillés dans une pierre translucide, pour former un mur de plusieurs **centaines de mètres de long**, atteignant une **hauteur de 40 mètres.**

Source : Serge Cantat, directeur de recherche à Rennes

http://images.math.cnrs.fr/Le-grand-musee-egyptien-du-Caire.html

Réalisations des élèves de 4A et 4B

Document : Collège La Guinette, Villecresnes (94) | Caroline Mathias

Tétraèdre de Sierpinski

Collège La Guinette, Villecresnes – Année scolaire 2015/16 – Niveau 4e

Etape 2 : fractales mathématiques

Date : novembre

Sous quelle forme ? séances de calcul mental

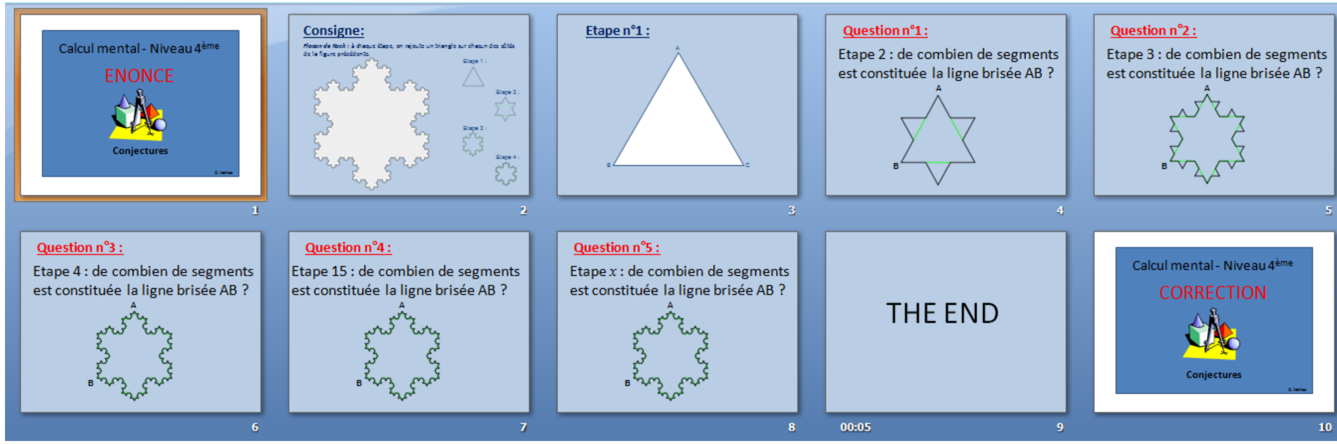
Notions mathématiques : conjecture, puissance et calcul littéral

Au-delà des maths : /

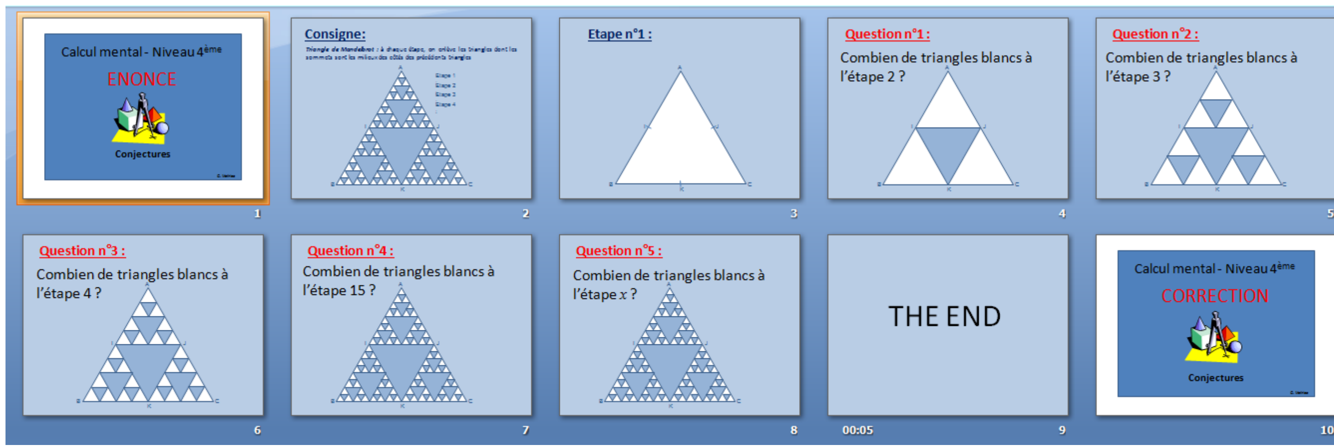
Séances de calcul mental sur les fractales

Document : Collège La Guinette, Villecresnes (94) | Caroline Mathias

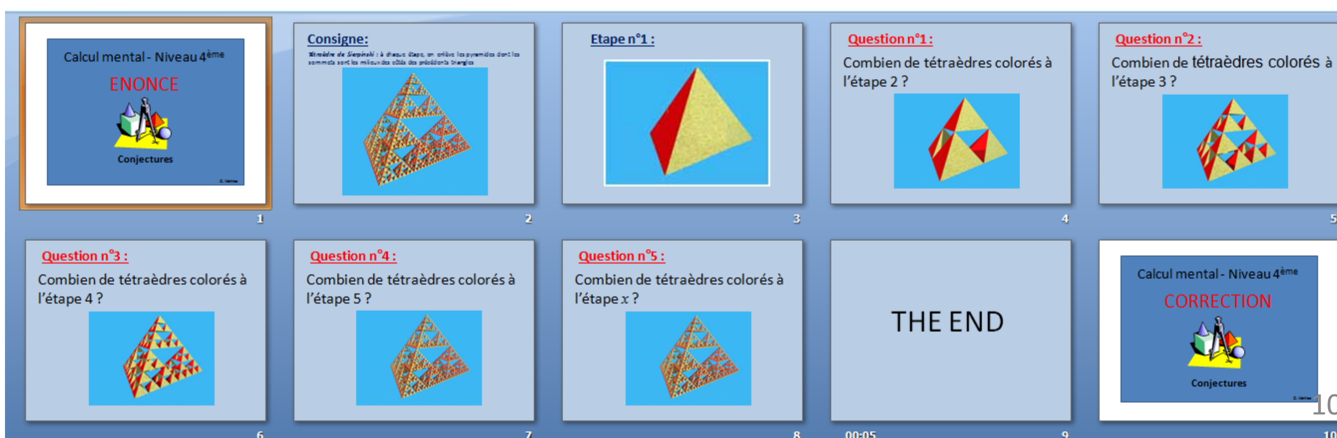
Séance n°1 : avec le flocon de Kock



Séance n°2 : avec le triangle de Mandelbrot



Séance n°3 : avec le tétraèdre de Sierpinski



Tétraèdre de Sierpinski

Collège La Guinette, Villecresnes – Année scolaire 2015/16 – Niveau 4e

Etape 3 : tétraèdre unité

Date : décembre

Sous quelle forme ? séance en classe et par binôme

Notion mathématique : pyramide et construction

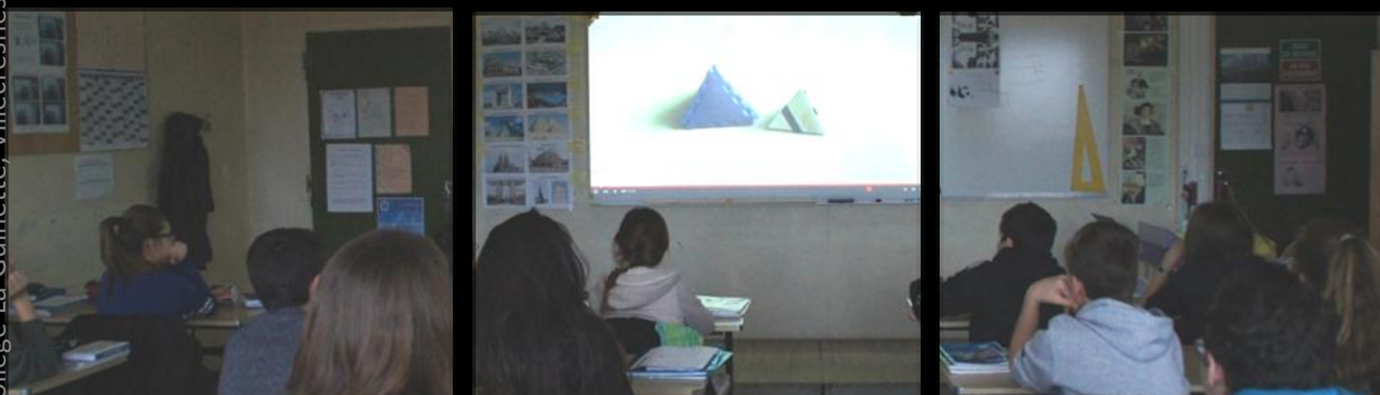
Au-delà des maths : domaine artistique

Enfin, le projet du tétraèdre de Sierpinski est révélé aux élèves en vidéo :

Vidéo du lycée Jacques Brel de la Courneuve sur leur construction du tétraèdre de Sierpinski:

https://www.youtube.com/watch?v=ektem-3VlPk

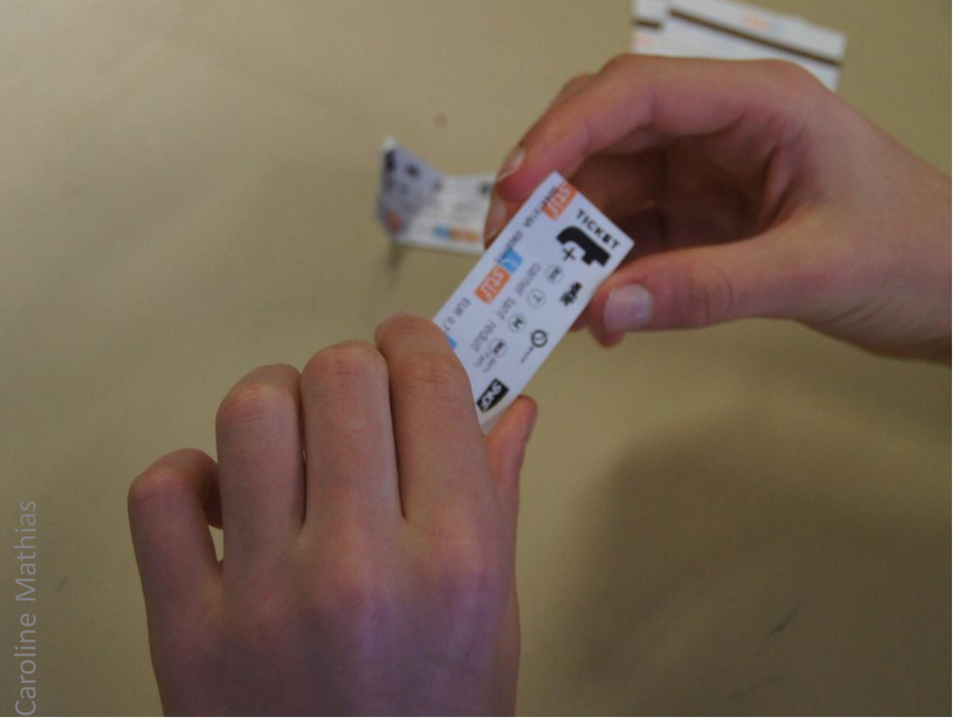
Une deuxième vidéo est diffusé pour leur expliquer la construction d’un tétraèdre unité :

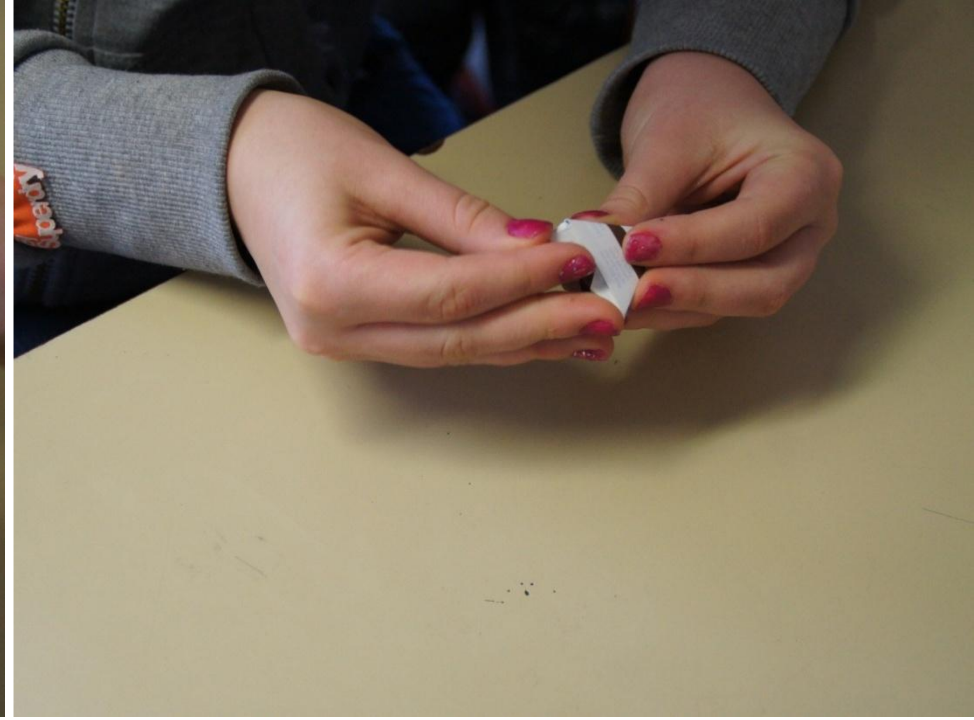


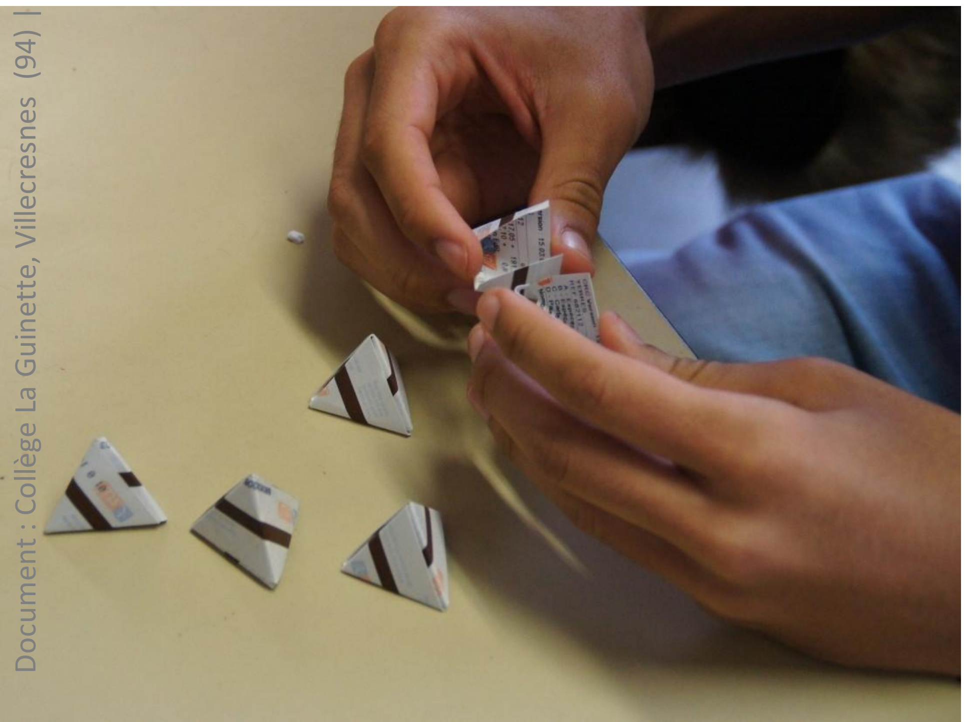
Vidéo de Michaël Launay sur la construction d’un mini tétraèdre avec 2 tickets de métro

https://www.youtube.com/watch?v=jvTlRkaNaQY

Pour la suite, aux élèves de jouer !







Document : Collège La Guinette, Villecresnes (94) | Caroline Mathias

Etape 4 : étude des besoins

Date : janvier

Sous quelle forme ? TP informatique par groupe de 3

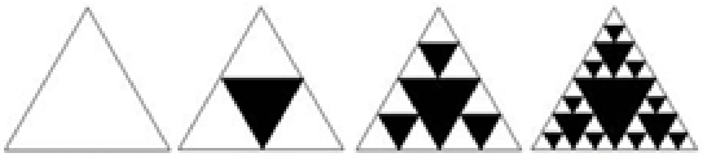
Notion mathématique : calcul littéral, puissance, tableur

Au-delà des maths : informatique

Projet Maths	PYRAMIDE DE SIERPINSKI	4e
	TP INFORMATIQUE	
NOM :		Classe : 4B

L'objectif de ce TP est déterminé le nombre de tickets de métro à obtenir au total ainsi que le nombre de tétraèdres à construire par classe.

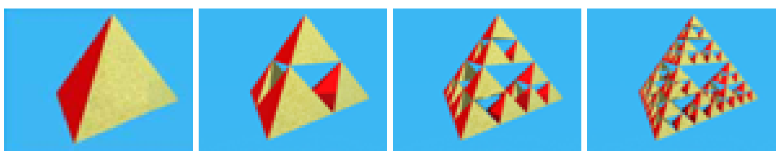
Illustration en 2 dimensions des premières étapes du découpage :



Triangle initial — Etape 1 — Etape 2 — Etape 3

Et que donne l'illustration en 3D ?

En 3D, le triangle équilatéral devient un tétraèdre régulier (c'est-à-dire une pyramide régulière à base triangulaire)

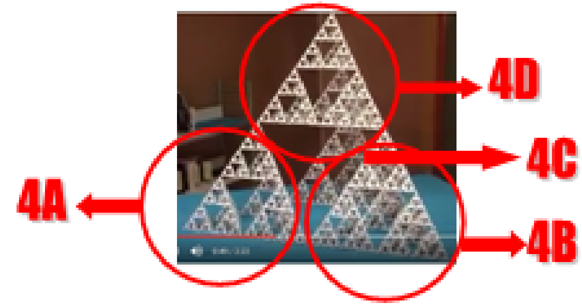


Tétraèdre initial — Etape 1 — Etape 2 — Etape 3

1) Complétez le tableau suivant afin d'obtenir une formule permettant de calculer le nombre de tétraèdres à une étape donnée :

Nombre d'étapes de découpage du tétraèdre de Sierpinski	Nombre de petits tétraèdres au total	Nombre de tétraèdres sur l'arête
Etape 0		
Etape 1		
Etape 2		
Etape 3		
Etape 4		
Etape 10		
Etape 100		
Conjecture pour l'étape n		

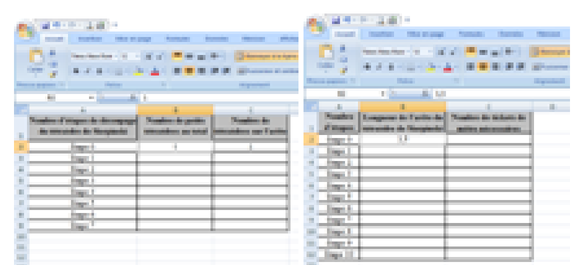
Nous allons construire un tétraèdre de Sierpinski avec des tickets de métro.
Deux tickets de métro permettent de construire un petit tétraèdre de 3,5 cm d'arête.
Pour calculer le nombre de tickets de métro dont on a besoin, on prend un autre angle de vue : on part d'un petit tétraèdre de tickets de métro pour construire une grande pyramide d'environ 2m.



2) a) Complétez le tableau suivant (vous pouvez utiliser une calculatrice ou mieux un tableur)

Nombre d'étapes	Longueur de l'arête du tétraèdre de Sierpinski	Nombre de tickets de métro nécessaires pour la construction de Sierpinski
Etape 0	3,5	2
Etape 1		
Etape 2		
Etape 3		
Etape 4		
Etape 5		
Etape 6		
Etape 7		
Etape 8		

b) Utilisez ce tableau pour répondre aux questions suivantes :
* surligne la partie du tableau qui pourrait correspondre à une construction d'environ 2m d'arête.
* Quelle serait la longueur exacte de l'arête de cette construction ?
* Combien de tickets de métro seraient nécessaires au total ?
* Combien chacune des 4 classes devra-t-elle construire de petits tétraèdres ?



Document : Collège La Guinette, Villecresnes (94) | Caroline Mathias

Avant ce TP :

- Une classe avait réalisé 1004 tétraèdres unités ;
- Une deuxième classe : 1116.

Le tout est de savoir pour un tétraèdre de Sierpinski final d'environ 2 mètres d'arête, s'ils ont construit assez d'éléments pour leur classe et si non, combien leur restait-il à construire ?

Au terme du TP, les élèves ont établi que l'arête de la pyramide finale devrait mesurer exactement **2,24 m** et donc que celle de leur classe 1,12 m.

Pour un tétraèdre final d'une telle dimension, ils doivent prévoir de **8192 tickets de métro au total**, soit **2048 par classe** car ils ont besoin de construire **1024 tétraèdres par classe**.

Tétraèdre de Sierpinski

Collège La Guinette, Villecresnes – Année scolaire 2015/16 – Niveau 4e

Etape 5 : 1er niveau de la construction

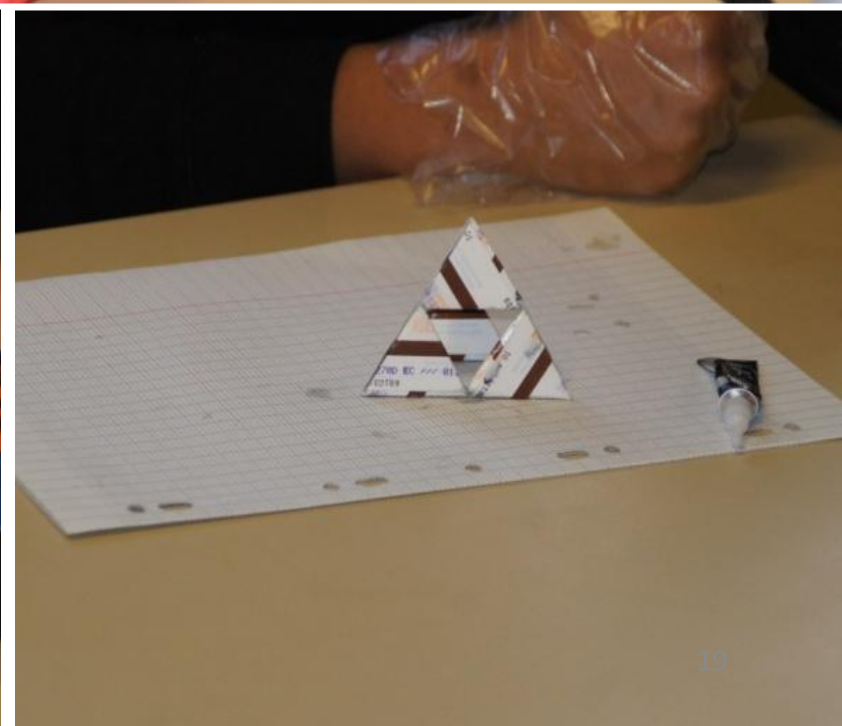
Date : février

Sous quelle forme ? TP manuel par binôme

Notion mathématique : pyramide et construction

Au-delà des maths : travaux manuels et sécurité



Tétraèdre de Sierpinski

Collège La Guinette, Villecresnes – Année scolaire 2015/16 – Niveau 4e

Etape 6 : Construction en fil rouge

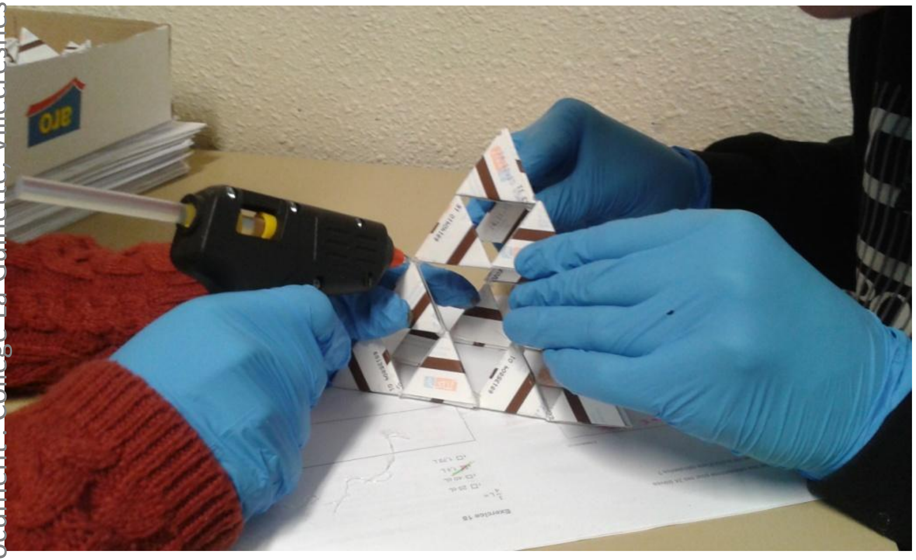
<u>Date</u> : mars-avril

<u>Sous quelle forme ?</u> travail manuel en fil rouge pendant les cours

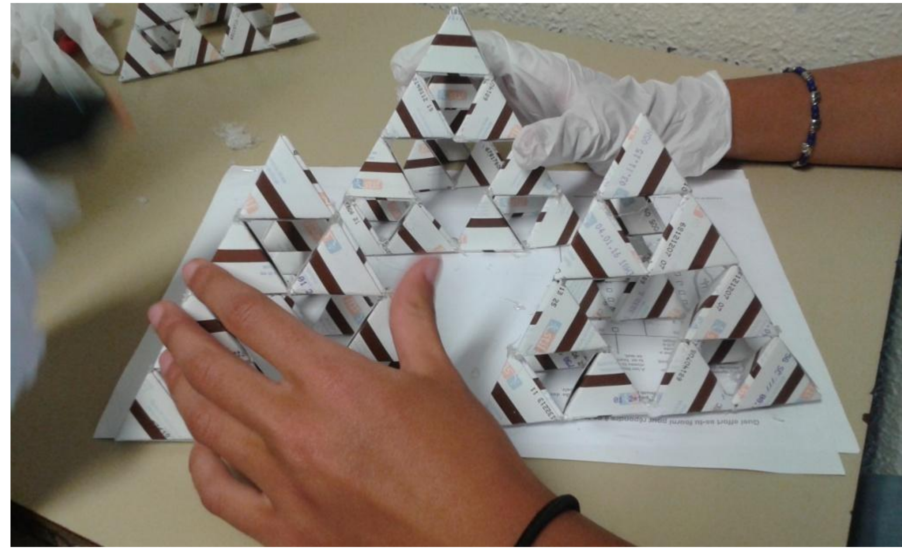
<u>Notion mathématique</u> : pyramide et construction

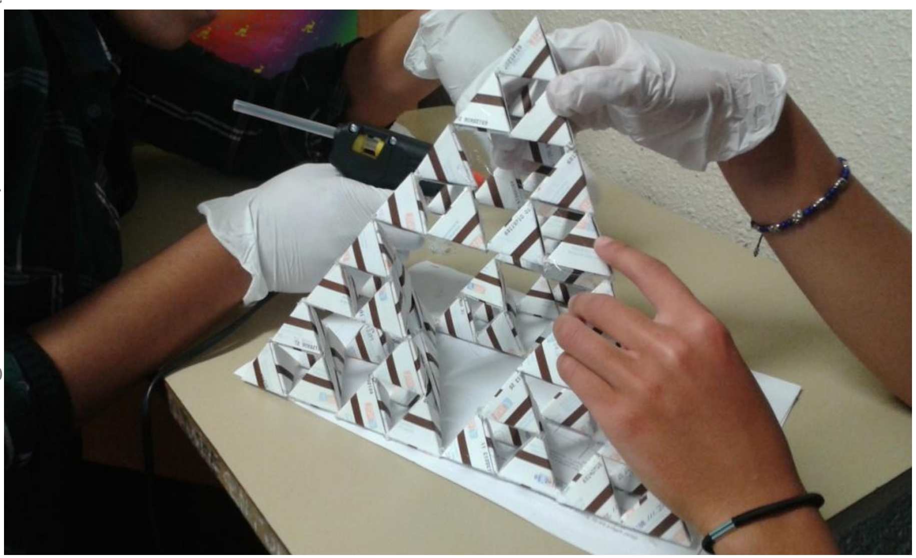
<u>Au-delà des maths :</u> travaux manuels et sécurité

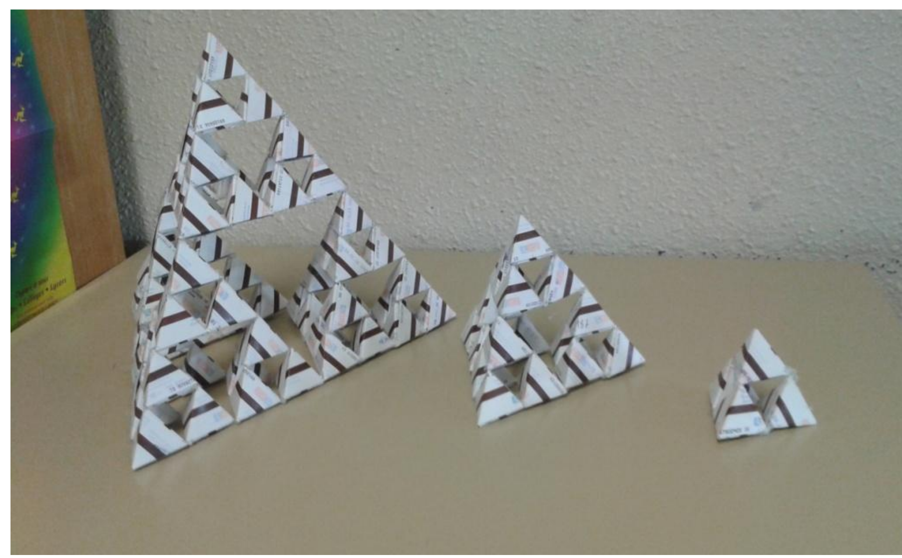
Etape n°2 de la Pyramide de Sierpinski



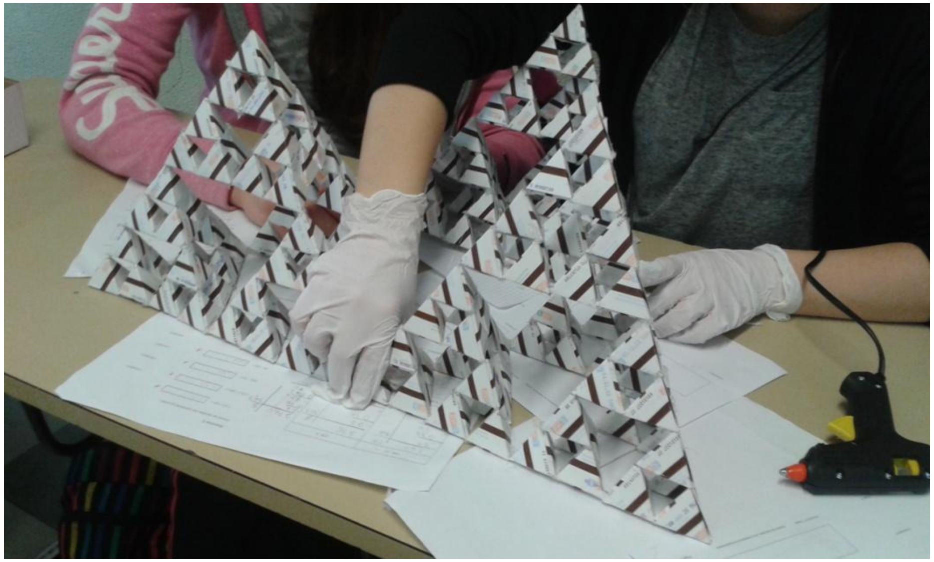
Etape n°3 de la Pyramide de Sierpinski

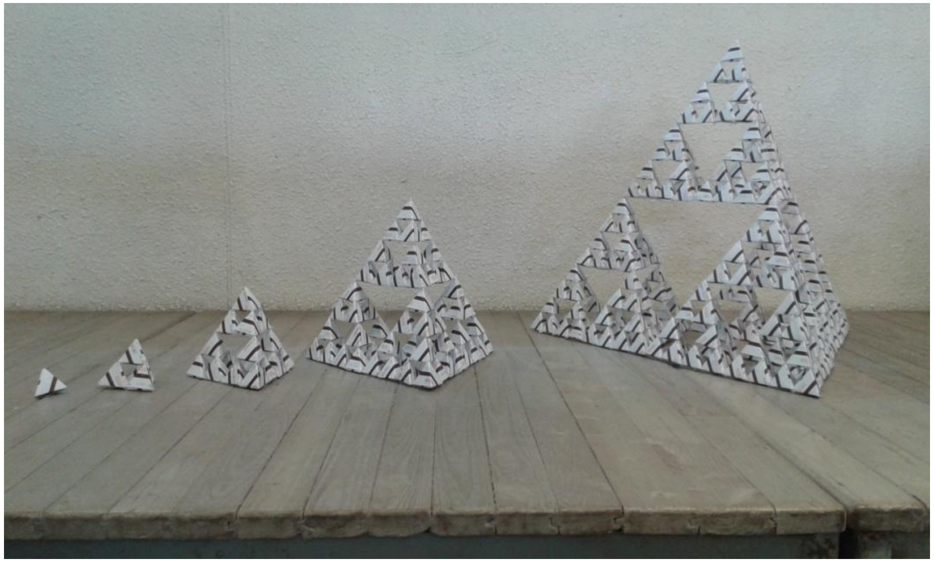






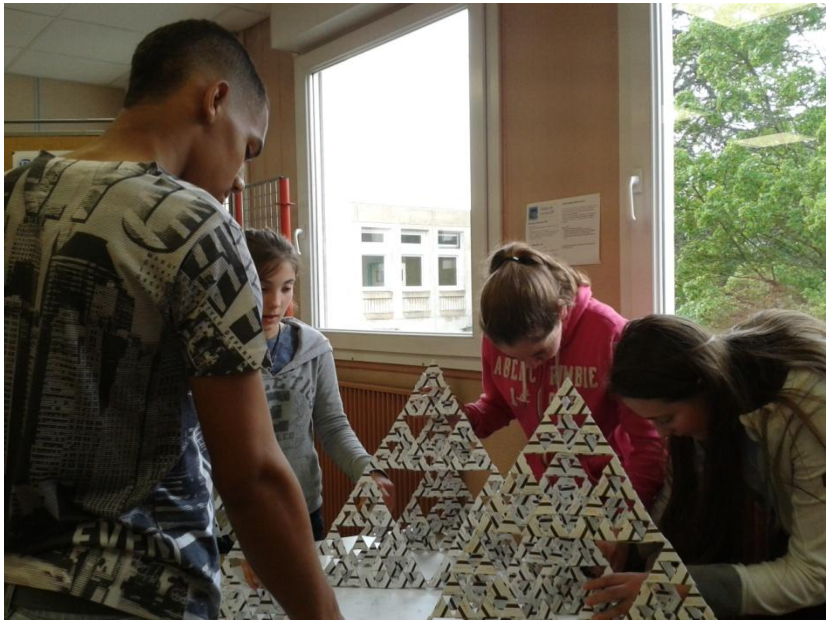
Etape n°4 de la Pyramide de Sierpinski

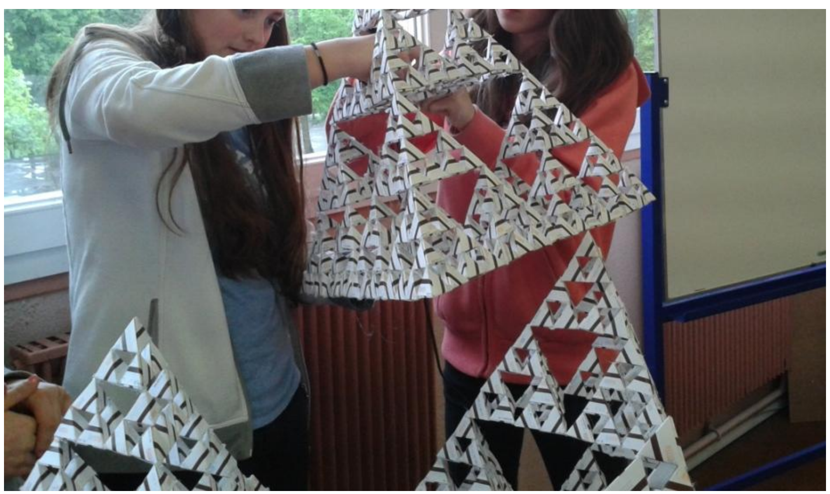


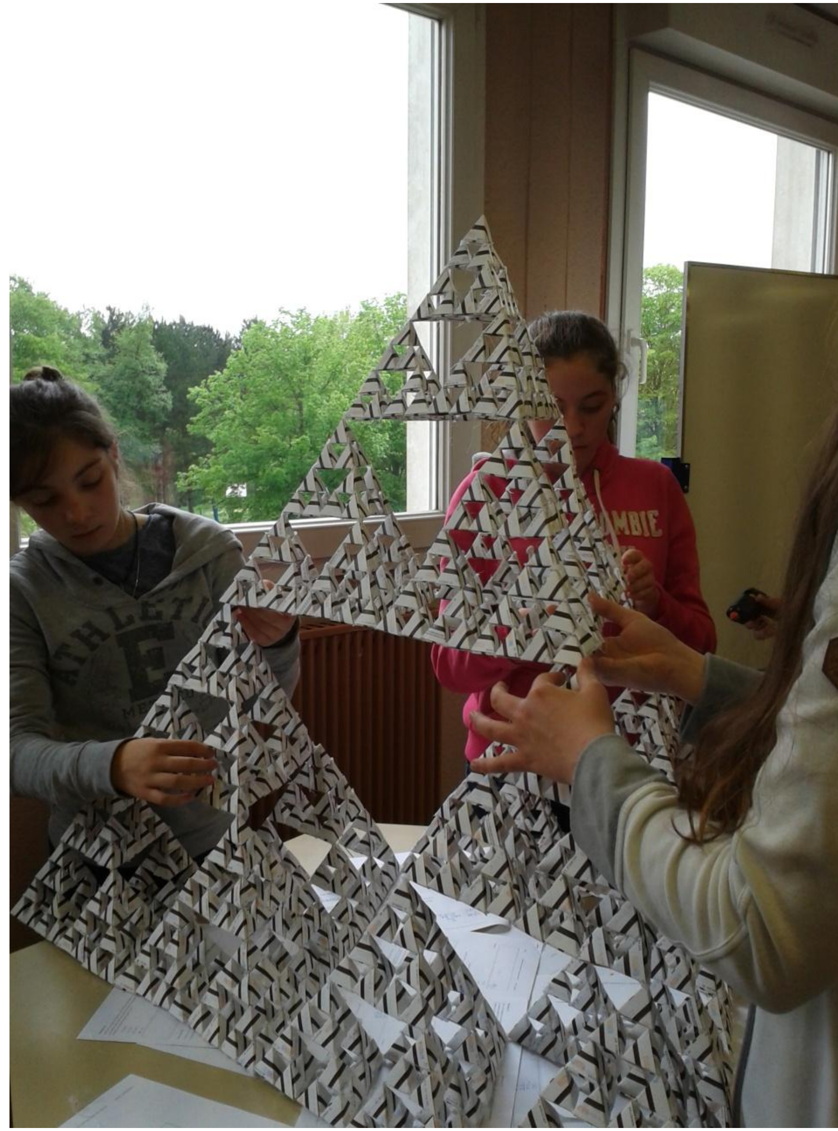


Document : Collège La Guinette, Villecresnes (94) | Caroline Mathias

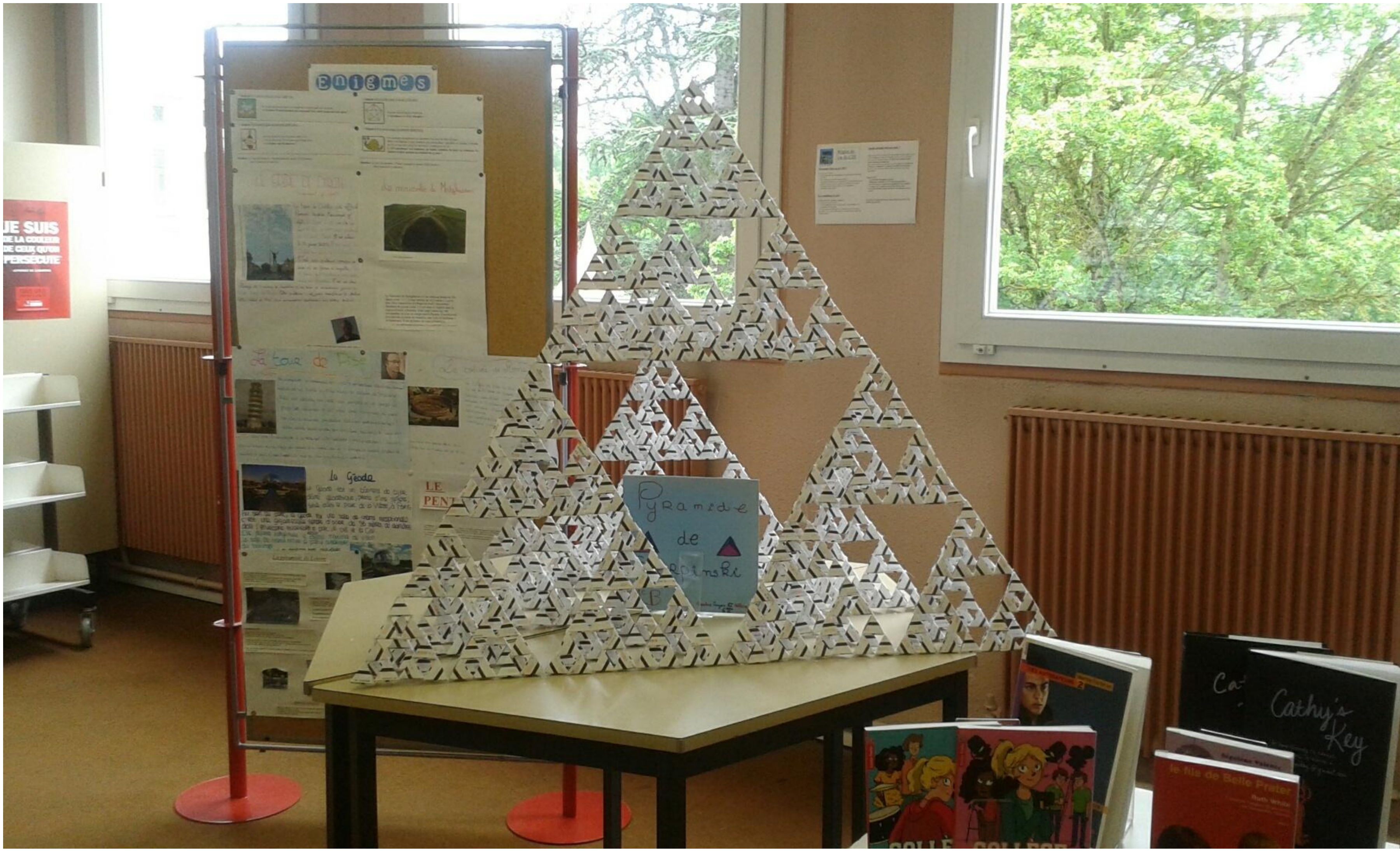
Etape n°5 de la Pyramide de Sierpinski







Pyramide de Sierpinski de la 4B



Tétraèdre de Sierpinski

Collège La Guinette, Villecresnes – Année scolaire 2015/16 – Niveau 4e

Etape 7 : Programmation

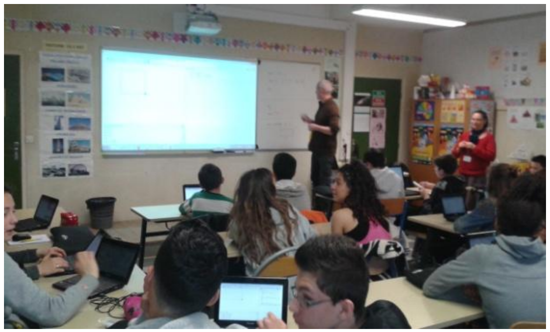
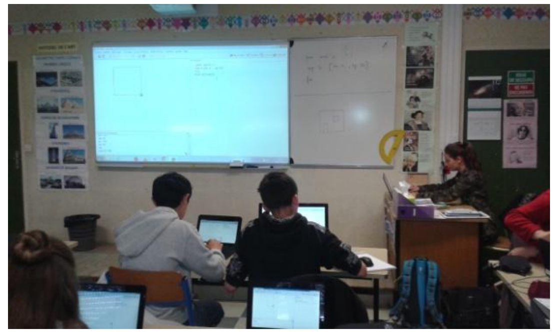
Date : 26 mai

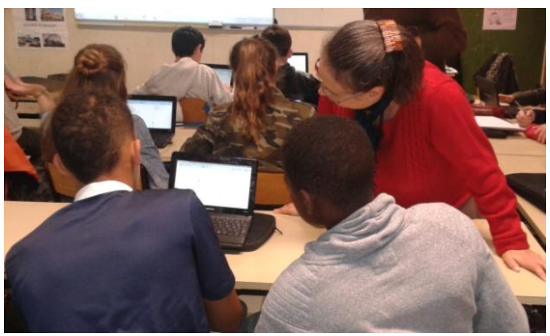
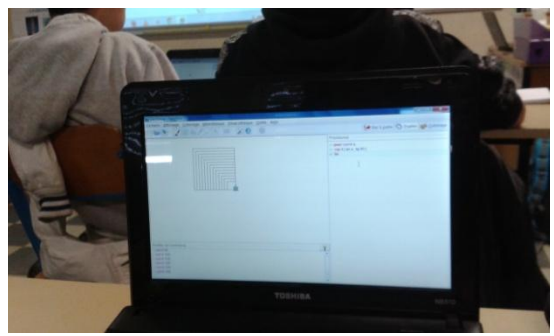
Sous quelle forme ? TP informatique (2h) avec IREM Paris Nord

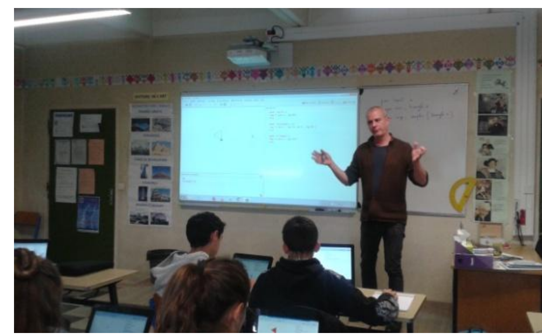
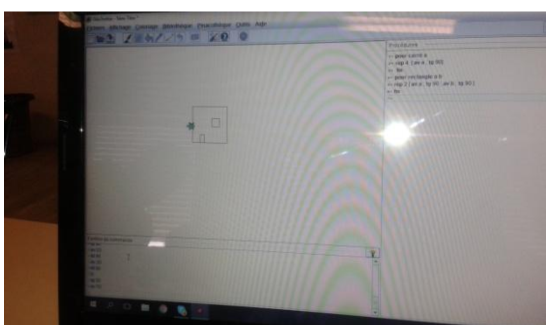
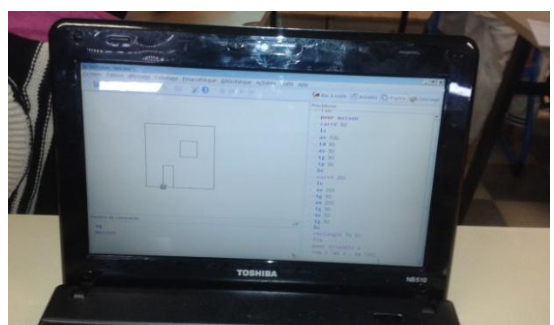
Notion mathématique : algorithmique et programmation (GéoTortue)

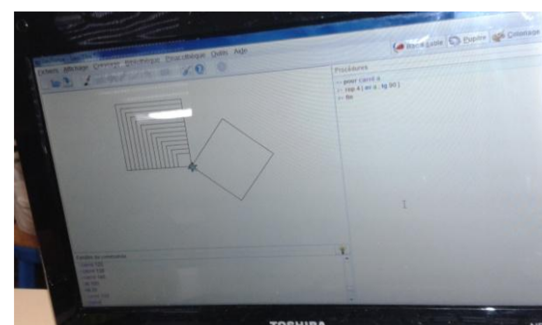
Au-delà des maths : rencontre avec des professionnels

<u>1re étape :</u> introduction à GéoTortue et prise en mains du logiciel par les élèves



Document : Collège La Guinette, Villecresnes (94) | Caroline Mathias

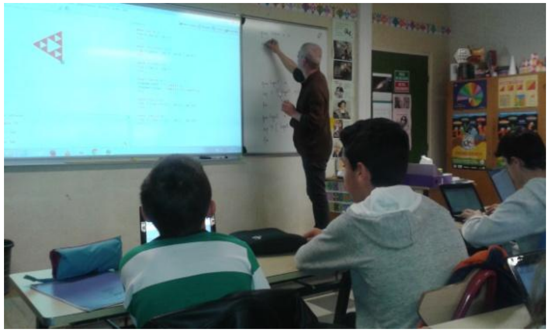
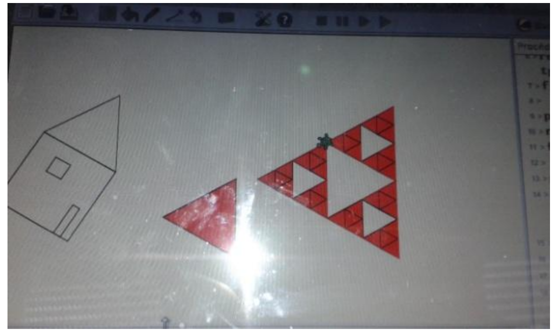
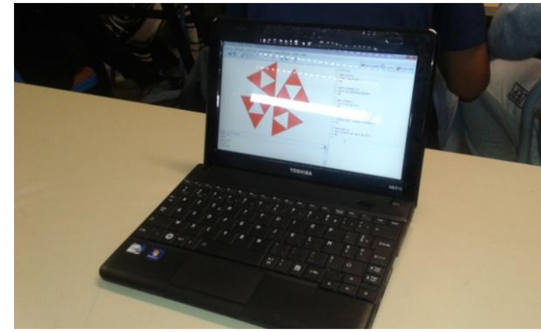
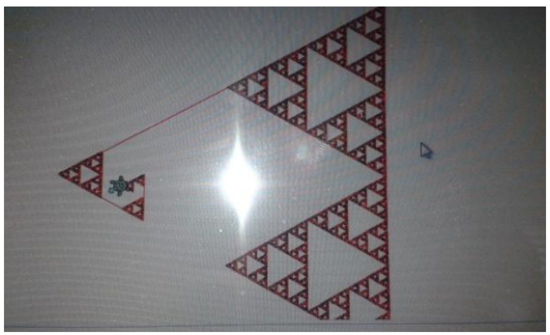
Extrait de l'article publié sur le blog de maths du collège à propos de cette séance :

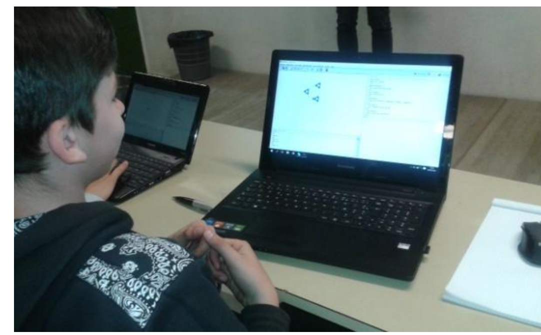
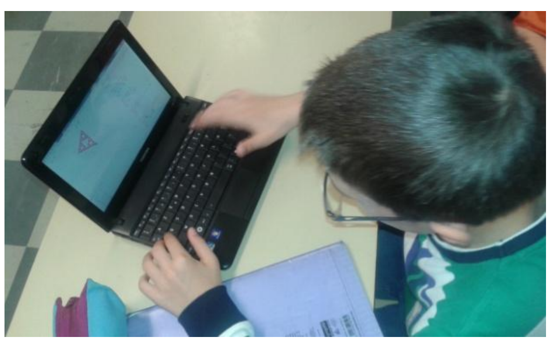
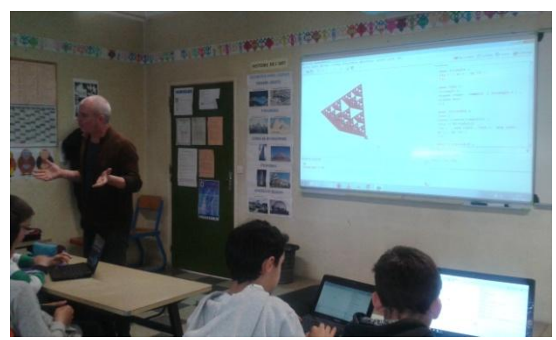
« (…) Mme Schwer, directrice de l'IREM Paris Nord, et un de ses collègues, Frédéric Clerc nous ont fait le plaisir et l'honneur de venir à la rencontre des élèves du collège pour une séance de 2 heures de programmation sur le logiciel GéoTortue. Mais de quoi s'agit-il donc ? et quel est le lien avec le projet ?

Lors de la 1re heure, les élèves ont appris très rapidement à se familiariser avec Géotortue : en programmant et en construisant un carré, puis un rectangle, puis une maison…

Tous sans exception sont entrés pleinement dans l'activité et ont pris en main GéoTortue au point de prendre des initiatives pour créer des figures complexes. Pas à pas, ils sont passés dans la programmation d'étapes répétitives à des « boucles »… une chose est sûre, les premiers pas sont acquis pour tous ! D'ailleurs, les élèves en difficulté d'habitude, se sont montrés ici très surprenants en tirant leur épingle du jeu avec une autonomie et une rigueur remarquables.

2e étape : lien avec la pyramide de Sierpinski

Extrait de l'article publié sur le blog de maths du collège à propos de cette séance :

« (…) Après la petite pause de récréation, les élèves n'ont pas tardé à remonter en cours pour une deuxième heure consacrée à des « cascades de triangles »… D'eux-mêmes les élèves ont reconnu des fractales et ont fait le lien avec leur travail de début d'année sur le triangle de Mandelbrot.
Très investis, ils nous ont surpris Mme Schwer, Mr Clerc et moi-même qui ne nous attendions pas à ce qu'ils y arrivent si vite… si bien qu'ils ont pu avant la fin de l'heure voir la pyramide de Sierpinski programmée par Géotortue !
Si vous aussi vous voulez en savoir plus sur GéoTortue et vous lancer avec le logiciel, allez voir le site de l'IREM Paris Nord de plus près en cliquant ici !

Un très grand merci aux deux intervenants de l'IREM Paris Nord d'avoir pris le temps de faire cette séance de très grande qualité avec les élèves de 4B qui sauront sans aucun doute en faire un très bon profit pour leur scolarité à venir.

Un très grand bravo enfin à tous les élèves pour leur investissement, leur sérieux et leur enthousiasme pendant ces deux heures . »

Tétraèdre de Sierpinski

Collège La Guinette, Villecresnes – Année scolaire 2015/16 – Niveau 4e

Bravo et merci !

Bravo et merci à tous les élèves de 4e du collège qui se sont pleinement investis toute l'année sur ce projet fil rouge. Leur enthousiasme et leur engagement ont été exemplaires et nous – les deux collègues de maths de 4e – ont inspirées à développer ce travail dessus.

Merci à tous les élèves, parents, enseignants, animateurs du club ado qui ont prêté mains fortes pour la collecte massive de tickets, les prêts et dons de matériel.

Merci à notre principale, Mme Baron, qui a porté un regard bienveillant, intéressé et encourageant sur ce projet.

Merci à notre documentaliste, Valérie Balmette, qui a accueilli l'exposition de la pyramide finale au CDI pour que tout le monde puisse en profiter.

Merci à la directrice de l'IREM Paris Nord Sylviane Schwer et Frédéric Clerc pour leur suivi et le prolongement du fil rouge avec leur intervention de qualité sur GéoTortue.

Un grand merci enfin à l'équipe de mathématiques du collège : merci à Annabelle Ménabé pour ce merveilleux projet sur tout le niveau 4e ainsi qu'à Nathalie Choiset et Danielle Spadi-Gorny pour le pétillant travail d'équipe. Un bonheur de travailler ensemble.