M. H. DELANNOY

Sous-Intendant militaire en retraite, à Guéret.

SUR LES ARBRES GÉOMÉTRIQUES ET LEUR EMPLOI DANS LA THÉORIE DES COMBINAISONS CHIMIQUES [J 1 b]

— *Séance du 10 août 1894* —

Dans l'*Intermédiaire des Mathématiciens*, M. Friedel a posé, sous le n° 20, la question suivante :

«Étant données n boules garnies chacune de quatre crochets placés symétriquement, trouver le nombre des arrangements possibles des n boules accrochées les unes aux autres de façon à former un ensemble, chaque boule étant attachée *au moins* à une autre et pouvant en recevoir jusqu'à quatre.

» Le problème a été résolu par M. Cayley.

» Mais il serait intéressant pour les chimistes de savoir, d'abord, s'il existe une méthode générale simple de le résoudre autrement que par des constructions graphiques faites de proche en proche, et dans ce cas d'avoir cette méthode.

» Une note abrégée sur le travail de M. Cayley se trouve dans les *Berichte der deutschen Gesellschaft*, t. VIII, p. 1056 ; 1875. Un mathématicien rendrait service aux chimistes en publiant dans un journal de chimie une *sorte* de traduction du travail de M. Cayley ou au moins de la note des *Berichte* et la rendant aussi accessible que possible aux savants qui ne sont pas des mathématiciens proprement dits. »

Je n'ai pu me procurer le mémoire de Cayley ; je n'ai eu sous les yeux que la note des *Berichte*, dont je donne la traduction textuelle, me bornant à signaler, par des renvois, les inexactitudes qu'elle paraît présenter.

Les paraffines C^nH^{2n+2} contiennent n atomes de carbone qui sont liés les uns aux autres par $(n-1)$ points d'attache, ou bien, comme je l'ai dit dans une autre circonstance, nous avons dans ces paraffines n nœuds qui sont réunis, sous l'apparence d'arbres, au moyen de $(n-1)$ branches. Ainsi, nous avons, quand $n=5$, les formes suivantes (*fig. 1*) :

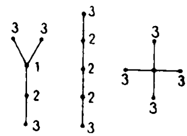


Fig. 1.

Si chaque atome de carbone est uni à autant d'atomes d'hydrogène qu'il peut en recevoir, nous trouvons alors, comme le montrent les nombres inscrits ci-dessus, que chaque forme contient 12 atomes d'hydrogène.

Le symbole d'arbres géométriques est complètement déterminé par les atomes de carbone seuls et la question de trouver le nombre des paraffines théoriquement possibles revient à trouver le nombre des arbres d'atomes de carbone qui contiennent n nœuds.

Considérée au point de vue mathématique, la question se présente d'une manière un peu différente, car un arbre de cette nature sort d'une racine unique et nous arrivons ainsi à neuf formes différentes, au lieu des trois indiquées ci-dessus, savoir (*fig. 2*) :

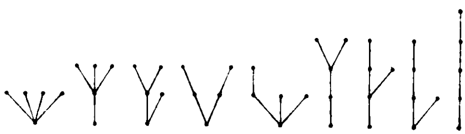


Fig. 2.

Le problème mathématique est le suivant : trouver le nombre d'arbres qui contiennent n nœuds et exclure ceux qui, au point de vue chimique, sont identiques avec un ou plusieurs autres. Pour y arriver, nous introduirons la notion d'arbres à centre unique, c'est-à-dire qui sortent d'une seule racine, et d'arbres à double centre, c'est-à-dire qui sortent de deux nœuds convenablement choisis et réunis entre eux. Si nous revenons maintenant au cas précédent, nous avons la figure 3 et nous trouvons trois formes comme en premier lieu.

Arbres à centre unique. Fig. 3. Arbre à deux centres.

La première de ces formes se compose de deux branches principales, de hauteur égale à 2 ; la seconde de quatre branches principales, de hauteur 1 ; et la troisième de trois branches, également de hauteur 1. Le problème chimique se présente maintenant comme il suit : trouver le nombre des arbres à un et à deux centres qui contiennent n nœuds. Il faut entendre par centre unique un nœud d'où sortent deux ou plusieurs branches d'égale hauteur et qui sont plus hautes que toute autre branche (*), et entendre par double centre deux nœuds de chacun desquels sortent une ou plusieurs branches d'égale hauteur et plus grandes que toute autre branche.

Le nombre des arbres à deux centres dépend de celui des arbres à un centre et ce dernier, à son tour, du nombre des arbres-racines (*Wurzelbäume)*, dont la détermination constitue le problème mathématique fondamental.

En classant ces arbres (**) d'après le nombre des branches principales et d'après la hauteur de la plus longue branche (ou des plus longues), on trouve que la solution mathématique dépend de la manière dont on construit des arbres de hauteur donnée au moyen d'arbres de la hauteur immédiatement inférieure, et d'arbres dont la hauteur ne dépasse pas cette hauteur immédiatement inférieure, comme le montre la figure 4 (***), dans laquelle un arbre de hauteur 3 est

FIG. 4.

construit au moyen de deux arbres de hauteur 2 et d'un troisième arbre dont la hauteur n'est pas supérieure à 2.

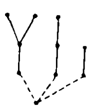
On fait ainsi dépendre la solution du problème, pour une hauteur déterminée, des solutions qui se rapportent à des hauteurs moindres, et on obtient ainsi successivement, pour chaque hauteur, une fonction génératrice qui, pour les arbres de hauteur n, est :

$$tx^{n+1} + (t, t^2)x^{n+2} + (t, t^2, t^3)x^{n+3} + \dots \text{ (****)}$$

(*) Ceci n'est pas exact. Il faut dire : qui sont *au moins aussi hautes* que toute autre branche, c'est-à-dire que les autres branches (s'il en existe) ne peuvent pas être plus longues que ces deux branches égales qui constituent la hauteur de l'arbre ; mais elles peuvent être aussi hautes.

(**) Il s'agit ici des arbres-racines ou *Wurzelbäume.*

(***) Cette figure est mal faite. Si l'on greffait les deux premiers arbres sur un nœud du troisième, on n'obtiendrait pas les arbres dans lesquels la hauteur de cette troisième branche égale celle des deux premières. La figure devrait être faite comme il est indiqué figure 4 suivant que la troisième branche a la hauteur 1 ou la hauteur 0.



ou bien

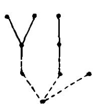


FIG. 5.

(****) Cette formule ne donne pas le nombre des arbres-racines. Elle est l'expression algébrique de cette proposition évidente : Le nombre des arbres de hauteur n est égal au nombre des arbres à une branche de $(n+1)$ nœuds et de hauteur n ; plus les arbres à une et à deux branches, de $(n+2)$ nœuds, de hauteur n ; plus les arbres à une, deux et trois branches, de $(n+3)$, $(n+4)$ ... nœuds de hauteur n. Le dernier terme de la formule se rapporte aux arbres contenant $(3^n + 3^{n-1} + \dots + 3^2 + 3^1 + 3^0)$ nœuds.

dans laquelle le coefficient numérique d'une expression quelconque $t^\alpha x^{n+3}$ représente le nombre des arbres-racines de hauteur n, α le nombre des branches principales, $n+3$ le nombre des nœuds.

La fonction ci-dessus conduit facilement à celles qui sont relatives aux arbres à un et à deux centres et, au moyen de ces dernières, nous trouvons, pour les paraffines contenant jusqu'à 13 atomes de carbone, les nombres suivants :

$n =$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
A un centre.	1	0	1	1	2	2	6	9	20	37	86	183	419
A deux centres	0	1	0	1	1	3	3	9	15	38	73	174	380
TOTAL . . .	1	1	1	2	3	5	9	18	35	75	159	357	799

Nous devons faire remarquer ici que le nombre des arbres à un centre s'obtient de la manière suivante : par exemple, pour $n = 9$:

NOMBRE DES BRANCHES PRINCIPALES	HAUTEURS			TOTAUX
	2	3	4	
2	1	7	1	9
3	3	3	»	6
4	4	1	»	5
	8	11	1	20

Il résulte de là que, pour trois branches principales, de hauteur 2, on a trois arbres (*fig. 6*) :

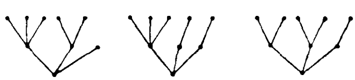


FIG. 6.

Le nombre total est ainsi divisé en nombres plus petits et les arbres de chaque sous-division se construisent facilement sans que l'on puisse craindre qu'il se produise une omission ou une répétition.

La note des *Berichte*, malgré quelques inexactitudes, m'a donné une idée du procédé qu'avait pu employer Cayley. Il doit être analogue à la première méthode, dont je me suis servi pour résoudre le problème.

PREMIÈRE MÉTHODE

Les enchaînements de boules forment des arbres géométriques, que nous distinguerons en arbres à un centre et arbres à deux centres.

Ainsi que le dit Cayley, le nombre des arbres à deux centres dépend de celui des arbres à un centre et ce dernier dépend, à son tour, de celui des *arbres-racines* ou *tiges* (*) qui servent à former les arbres à un centre.

LES TIGES. — Une *tige* peut avoir une, deux ou trois branches. Elle ne peut pas en avoir quatre ; en effet, elle est destinée à être greffée sur un nœud pour former un arbre à un centre. La branche de jonction formerait donc une cinquième branche et il y aurait un nœud d'où partiraient cinq branches, ce qui est impossible puisque les boules n'ont que quatre crochets. (Un atome de carbone, corps tétratomique, ne peut s'unir qu'à quatre autres *au plus*.)

Une *tige* de hauteur h a une branche de hauteur h ; la hauteur de ses autres branches (s'il en existe) peut varier de 1 à h.

Les tiges à une branche et à n nœuds, de hauteur h, s'obtiennent en greffant sur un nœud les *tiges* à une, deux ou trois branches et à $(n-1)$ nœuds, de hauteur $(h-1)$. Le nombre des *tiges* à une branche de hauteur h et à $(n-1)$ nœuds est donc égal à la somme de toutes les *tiges* à une, deux ou trois branches et à $(n-1)$ nœuds, de hauteur $(h-1)$.

On a, par suite :

$$ {}_1t_n^h = T_{n-1}^{h-1} $$

en désignant par ${}_\alpha t_n^h$ le nombre des *tiges* à α branches et à n nœuds, de hauteur h, et par T_n^h la somme des nombres de *tiges* à une, deux ou trois branches et à n nœuds, de hauteur h.

Les *tiges* à deux branches et à n nœuds, de hauteur h, s'obtiennent en prenant:

Une *tige* à une, deux ou trois branches et à p nœuds, dont la hauteur varie de 0 à $h-1$,

(*) La note des *Berichte* appelle *Wurzelbäume* ces arbres-racines. Nous les désignerons, dans tout ce qui va suivre, sous le nom de *tiges*, pour éviter toute confusion avec les arbres à un ou à deux centres.

Et une *tige* à une, deux ou trois branches et à $n - (p + 1)$ nœuds, de hauteur $h - 1$;

Puis en greffant ces deux tiges sur un nœud.

On a donc : $${}_2t_n^h = \sum T_p^f \cdot T_{n-(p+1)}^{h-1}$$

p variant de 1 à $n - (h + 1)$ et f de 0 à $h - 1$.

Les *tiges* à trois branches et à n nœuds, de hauteur h, s'obtiennent en prenant :

Une *tige* à une, deux ou trois branches et à p nœuds, dont la hauteur varie de 0 à $h - 1$,

Une *tige* à une, deux ou trois branches et à q nœuds, dont la hauteur varie aussi de 0 à $h - 1$,

Et une *tige* à une, deux ou trois branches et à $n - (p + q + 1)$ nœuds, de hauteur $h - 1$,

Et en greffant ces trois *tiges* sur un même nœud.

On a donc : $${}_3t_n^h = \sum T_p^f \cdot T_q^g \cdot T_{n-(p+q+1)}^{h-1}$$

p variant de 1 à $E\left(\frac{n - (h+1)}{2}\right)$, c'est-à-dire de 1 à entier de $\frac{n-(h+1)}{2}$;
q variant de p à $n - (1 + h + p)$;
f et g variant de 0 à $h - 1$.

Nota. — Dans l'application de ces formules, il y a lieu de remarquer que :

1° Pour éviter les répétitions, on doit négliger les termes dans lesquels, l'indice supérieur d'un facteur étant égal à $(h - 1)$, l'indice inférieur est plus grand que celui d'un des facteurs suivants qui a également $(h - 1)$ pour indice supérieur ;

2° Quand, dans un terme, γ facteurs sont égaux à T_s^k, on remplace leur produit par le nombre des combinaisons *complètes* de T_s^k objets pris γ à γ, c'est-à-dire par $\frac{T_s^k(T_s^k+1)(T_s^k+2)\ldots(T_s^k+\gamma-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots \gamma}$.

Ces deux remarques s'appliquent également aux formules que nous donnerons plus loin pour les arbres à un centre.

Au moyen des formules précédentes on forme le tableau des *tiges* jusqu'à la valeur de n que l'on veut. Le tableau ci-après donne le nombre des *tiges* jusqu'à $n = 9$.

I. — Tableau des Tiges

N	HAUTEUR 0	HAUTEUR 1			HAUTEUR 2			HAUTEUR 3			HAUTEUR 4			HAUTEUR 5			HAUTEUR 6			HAUTEUR 7			HAUTEUR 8		
		1 br.	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3
1	1	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»
2	»	1	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»
3	»	»	1	»	1	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»
4	»	»	»	1	1	1	»	1	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»
5	»	»	»	»	1	2	1	2	1	»	1	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»
6	»	»	»	»	»	2	2	4	3	1	3	1	»	1	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»
7	»	»	»	»	»	2	3	4	8	3	8	4	1	4	1	»	1	»	»	»	»	»	»	»	»
8	»	»	»	»	»	1	3	5	13	9	15	13	4	13	5	1	5	1	»	1	»	»	»	»	»
9	»	»	»	»	»	1	3	4	22	17	27	33	14	32	19	5	19	6	1	6	1	»	1	»	»

Afin de bien faire comprendre le mode de formation de ce tableau, indiquons le détail des opérations effectuées pour obtenir, par exemple, le nombre des *tiges* à trois branches et à neuf nœuds, de hauteur 3.

La formule générale donnera :

$$ {}_3t_9^3 = T_p^f \cdot T_q^g \cdot T_{9-(p+q+1)}^2 $$

p variant de 1 à $E\left[\dfrac{9-(3+1)}{2}\right]$, c'est-à-dire de 1 à 2 ;
q variant de p à $n-(1+h+p)$, c'est-à-dire de p à $9-(1+2+p)$; f et g variant de 0 à 2.

On fera d'abord $p=1$ avec $q=1$, puis 2, puis 3, puis 4 ; ensuite $p=2$ avec $q=2$, puis 3, et on aura ainsi :

$$ {}_3t_9^3 = T_1^0T_1^0T_6^2 + T_1^0T_2^1T_5^2 + T_1^0T_3^1T_4^2 + T_1^0T_3^2T_4^2 + T_1^0T_4^1T_3^2 \\ + T_2^1T_2^1T_4^2 + T_2^1T_3^1T_3^2 + T_2^1T_3^2T_3^2. $$

Remplaçant les T par leur valeur prise dans les premières lignes du tableau 1, en se rappelant que T_6^2 représente la somme des *tiges* à une, deux ou trois branches et à six nœuds de hauteur 2, il vient :

$$ {}_3t_9^3 = 1.1.4 + 1.1.4 + 1.1.2 + 1.1.2 + 1.1.2 + 1.1.2 + 1.1.1 \\ + 1\frac{1(1+1)}{1.2} = 17. $$

Les arbres a un centre. — Les arbres à un centre ont deux, trois ou quatre branches.

Les arbres à un centre de hauteur h ont deux branches de hauteur h ; la hauteur des autres branches (s'il en existe) peut varier de 1 à h.

Les arbres à un centre de hauteur h, à deux branches contenant ensemble n nœuds, s'obtiennent en greffant sur un même nœud :

Une *tige* à une, deux ou trois branches et à p nœuds, de hauteur $h-1$,

Et une tige à une, deux ou trois branches et à $n-(p+1)$ nœuds, de hauteur $h-1$.

On a donc, en désignant par ${}_\alpha a_n^h$ le nombre des arbres à un centre, de hauteur h, à α branches contenant n nœuds :

$$ {}_2a_n^h = \sum T_p^{h-1} \cdot T_{n-(p+1)}^{h-1} $$

p variant de h à $E\left[\dfrac{n-1}{2}\right]$.

Les arbres à un centre de hauteur h, à trois branches contenant n nœuds, s'obtiennent en greffant sur un centre unique :

Une *tige* à une, deux ou trois branches et à p nœuds, dont la hauteur varie de 0 à $h-1$;

Une *tige* à une, deux ou trois branches et à q nœuds, de hauteur $h-1$;

Et une *tige* à une, deux ou trois branches et à $n-(p+q+1)$ nœuds, de hauteur $h-1$.

On a:

$$_{3}a_n^h = \sum T_p^f \cdot T_q^{h-1} \cdot T_{n-(p+q+1)}^{h-1}.$$

p variant de 1 à $n-(2h+1)$; q variant de h à $E\left[\frac{n-(p+1)}{2}\right]$; f variant de 0 à $h-1$.

Les arbres à un centre de hauteur h, à quatre branches contenant ensemble n nœuds (y compris le centre unique) s'obtiennent en greffant sur un même nœud:

Une *tige* à une, deux ou trois branches et à p nœuds, dont la hauteur varie de 0 à $h-1$;

Une *tige* à une, deux ou trois branches et à q nœuds, dont la hauteur varie également de 0 à $h-1$;

Une *tige* à une, deux ou trois branches et à r nœuds, de hauteur $h-1$,

Et une *tige* à une, deux ou trois branches et à $n-(p+q+v+1)$ nœuds, de hauteur $h-1$.

On a:

$$_{4}a_n^h = \sum T_p^f \cdot T_q^g \cdot T_r^{h-1} \cdot T_{n-(p+q+r+1)}^{h-1}.$$

p variant de 1 à $E\left[\frac{n-(2h+1)}{2}\right]$; q variant de p à $n-(2h+1+p)$; r variant de h à $E\left[\frac{n-(p+q+1)}{2}\right]$; f et g variant de 0 à $h-1$.

Veut-on, par exemple, calculer $_{4}a_{11}^3$, la formule précédente donnera:

$$_{4}a_{11}^3 = T_1^0T_1^0T_3^2T_5^2 + T_1^0T_1^0T_4^2T_4^2 + T_1^0T_2^1T_3^2T_4^2 + T_1^0T_3^1T_3^2T_3^2$$
$$+ T_1^0T_3^2T_3^2T_3^2 + T_2^1T_2^1T_3^2T_3^2.$$

En remplaçant les T par leurs valeurs prises dans le tableau I et en tenant compte des remarques qui suivent les formules relatives aux *tiges*, il vient:

$$_{4}a_{11}^3 = 1.1.1,4 + 1.1.\frac{2(2+1)}{1.2} + 1.1.1.2 + 1.1.\frac{1(1+1)}{1.2}$$
$$+ 1.\frac{1(1+1)(1+2)}{1.2.3} + 1.1.\frac{1(1+1)}{1.2} = 12.$$

Au moyen de ces formules nous construisons le tableau II, qui donne les arbres à un centre jusqu'à $n = 13$.

II. — Tableau des arbres a un centre.

N	Hauteur 0	Hauteur 1			Hauteur 2			Hauteur 3			Hauteur 4			Hauteur 5			Hauteur 6			Totaux
		2 br.	3	4	2	3	4	2	3	4	2	3	4	2	3	4	2	3	4	
1	1	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	1
2	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	0
3	»	1	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	1
4	»	»	1	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	1
5	»	»	»	1	1	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	2
6	»	»	»	»	1	1	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	2
7	»	»	»	»	2	2	1	1	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	6
8	»	»	»	»	1	3	2	2	1	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	9
9	»	»	»	»	1	3	4	7	3	1	1	»	»	»	»	»	»	»	»	20
10	»	»	»	»	»	3	4	12	11	3	3	1	»	»	»	»	»	»	»	37
11	»	»	»	»	»	2	5	23	24	12	14	4	1	1	»	»	»	»	»	86
12	»	»	»	»	»	1	4	30	51	28	39	19	4	4	1	»	»	»	»	181
13	»	»	»	»	»	1	4	42	88	66	108	63	20	23	5	1	1	»	»	422
14	»	»	»	»	»	»	»	47	»	»	244	»	»	84	»	»	5	»	»	»

Nous y avons ajouté les arbres à deux branches de quatorze nœuds, qui sont nécessaires pour obtenir le nombre des arbres à deux centres de treize nœuds.

Les arbres a deux centres. — Dans les arbres bicentriques, il sort de chaque centre une, deux ou trois branches.

Les arbres à deux centres de hauteur h ont, pour chaque centre, une branche de hauteur h ; la hauteur des autres branches (s'il en existe) peut varier de 1 à h.

En désignant par b_n^h le nombre des arbres bicentriques à n nœuds, de hauteur h, on a :

$$b_n^h = {}_2a_{n+1}^{h+1}.$$

En effet, si l'on prend l'un quelconque des arbres à un centre, de hauteur $(h+1)$, et à deux branches contenant $(n+1)$ nœuds (*fig. 7*),

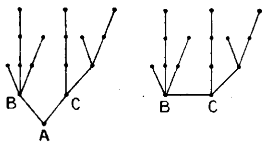


Fig. 7.

on peut le remplacer par un arbre bicentrique, de hauteur h, en supprimant le nœud A et réunissant les nœuds B et C.

On trouve dans le tableau II tous les éléments nécessaires pour former le tableau des arbres à deux centres.

III. — Tableau des arbres a deux centres.

N	Hauteurs 0	1	2	3	4	5	6	Totaux
1	»	»	»	»	»	»	»	0
2	1	»	»	»	»	»	»	1
3	»	»	»	»	»	»	»	0
4	»	»	1	»	»	»	»	1
5	»	»	1	»	»	»	»	1
6	»	»	2	1	»	»	»	3
7	»	»	1	2	»	»	»	3
8	»	»	1	7	1	»	»	9
9	»	»	»	12	3	»	»	15
10	»	»	»	23	14	1	»	38
11	»	»	»	30	39	4	»	73
12	»	»	»	42	108	23	1	174
13	»	»	»	47	244	84	5	380

En réunissant les totaux des tableaux II et III, nous obtenons le total des arbres à un et à deux centres, c'est-à-dire le nombre des enchaînements de boules pour les valeurs de $n = 1$ à $n = 13$, savoir :

IV. — Tableau récapitulatif des arbres a un et a deux centres.

Nombre de nœuds	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Arbres à un centre. . .	1	0	1	1	2	2	6	9	20	37	86	181	422
Arbres à deux centres. .	0	1	0	1	1	3	3	9	15	38	73	174	380
Totaux. . . .	1	1	1	2	3	5	9	18	35	75	159	355	802

Il existe une légère différence entre nos résultats et ceux de Cayley qui, d'après les *Berichte*, a trouvé 183 arbres à un centre de douze nœuds et 419 de treize nœuds. L'autorité de Cayley est si grande qu'il nous en coûte d'avoir à signaler ces différences ; mais nous avons recommencé plusieurs fois les calculs et toujours nous avons trouvé 181 et 422, au lieu de 183 et 419.

Les nombres d'arbres à deux centres étant exacts, ceux des arbres à un centre à deux branches le sont également. Par suite la différence porte sur les arbres à trois ou quatre branches.

Pour permettre au lecteur de vérifier par lui-même l'exactitude de nos calculs, nous donnons le détail des opérations pour les arbres de douze nœuds.

$$ {}_3a_{12}^2 = T_3^1T_4^1T_4^1 = 1; $$

$$ \begin{aligned} {}_4a_{12}^2 &= T_1^0T_2^1T_4^1T_4^1 + T_1^0T_3^1T_3^1T_4^1 + T_2^1T_2^1T_3^1T_4^1 + T_2^1T_3^1T_3^1T_3^1 \\ &= 1 + 1 + 1 + 1 = 4; \end{aligned} $$

$$ {}_2a_{12}^3 = T_3^2T_8^2 + T_4^2T_7^2 + T_5^2T_6^2 = 4 + 10 + 16 = 30; $$

$$ \begin{aligned} {}_3a_{12}^3 &= T_1^0T_3^2T_7^2 + T_1^0T_4^2T_6^2 + T_1^0T_5^2T_5^2 + T_2^1T_3^2T_6^2 + T_2^1T_4^2T_5^2 + T_3^1T_3^2T_5^2 \\ &\quad + T_3^2T_3^2T_5^2 + T_3^1T_4^2T_4^2 + T_3^2T_3^2T_4^2 + T_4^1T_3^2T_3^2 \\ &= 5 + 8 + 10 + 4 + 8 + 4 + 4 + \frac{2.3}{1.2} + \frac{2.3}{1.2} + 2 = 51; \end{aligned} $$

$$ \begin{aligned} {}_4a_{12}^3 &= T_1^0T_1^0T_3^2T_6^2 + T_1^0T_1^0T_4^2T_5^2 + T_1^0T_2^1T_3^2T_5^2 + T_1^0T_2^1T_4^2T_4^2 + T_1^0T_3^1T_3^2T_4^2 \\ &\quad + T_1^0T_3^2T_3^2T_4^2 + T_1^0T_4^1T_3^2T_3^2 + T_2^1T_2^1T_3^2T_4^2 + T_2^1T_3^1T_3^2T_3^2 + T_2^1T_3^2T_3^2T_3^2 \\ &= 4 + 8 + 4 + \frac{2.3}{1.2} + 2 + 2 + 1 + 2 + 1 + 1 = 28; \end{aligned} $$

$$ {}_2a_{12}^4 = T_4^3T_7^3 + T_5^3T_6^3 = 15 + 24 = 39; $$

$$ {}_3a_{12}^4 = T_1^0T_4^3T_6^3 + T_1^0T_5^3T_5^3 + T_2^1T_4^3T_5^3 + T_3^1T_4^3T_4^3 + T_3^2T_4^3T_4^3 $$

$$ = \quad + \frac{3.4}{1.2} + 3 + 1 + 1 = 19; $$

$$ {}_4a_{12}^4 = T_1^0T_1^0T_4^3T_5^3 + T_1^0T_2^1T_4^3T_4^3 = 3 + 1 = 4; $$

$$ {}_2a_{12}^5 = T_5^4T_6^4 = 4; $$

$$ {}_3a_{12}^5 = T_1^0T_5^4T_5^4 = 1. $$

La récapitulation de tous ces a_{12} nous donne bien 181.

La méthode que nous avons employée permet d'obtenir les arbres sans construction graphique; mais elle ne les donne que de proche en proche, c'est à dire que, pour trouver le nombre d'arbres à n nœuds, de hauteur h, il faut avoir obtenu toutes les *tiges* de hauteur moindre et d'un nombre de nœuds moindre.

Pour satisfaire au *desideratum* exprimé par M. Friedel, nous avons cherché une autre méthode fournissant directement le nombre d'enchaînements des n boules.

Voici celle que nous avons trouvée :

SECONDE MÉTHODE

Désignons par b_α une boule qui a α crochets d'engagés. Les boules accrochées deux à deux forment une chaîne, dont chaque extrémité est terminée par une boule b_1.

Si l'on accroche une boule au troisième crochet de l'une des boules de la chaîne, on commence ainsi une chaîne auxiliaire qui se terminera par une boule b_1. Si au quatrième crochet on accroche une autre boule, on commence une seconde chaîne auxiliaire, qui se terminera également par une boule b_1.

En désignant par B_α la somme des boules b_α, on aura donc :

$$ (1) \qquad B_1 = 2 + B_3 + 2B_4. $$

Comme on a, d'autre part :

$$ (2) \qquad B_1 + B_2 + B_3 + B_4 = n, $$

la combinaison des équations (1) et (2) donne :

$$ 3B_4 + 2B_3 + B_2 = n - 2. $$

Cette équation indéterminée est toujours très facile à résoudre. On connaîtra ainsi le nombre des boules b_1, b_2, b_3, b_4 entrant dans chaque chaîne. En permutant ces boules, dans l'intérieur de la chaîne, de toutes les manières possibles, en ayant soin d'éviter les répétitions, on aura le nombre de manières dont les n boules peuvent s'accrocher les unes aux autres.

Par exemple, pour $n = 8$, l'équation :

$$3B_4 + 2B_3 + B_2 = 6$$

donne les valeurs de B_2, B_3, B_4 ; en les portant dans l'équation (2) on obtient B_1. Nous indiquons ces valeurs dans le tableau ci-après :

	B_4	B_3	B_2	B_1
1°	0	0	6	2
2°	0	1	4	3
3°	0	2	2	4
4°	0	3	0	5
5°	1	0	3	4
6°	1	1	1	5
7°	2	0	0	6

On peut donc former sept chaînes différentes.

Reste à trouver le nombre de permutations des boules dans chaque chaîne. Pour simplifier l'écriture, représentons les boules b_2, b_3, b_4 par leurs indices et négligeons les boules b_1, de telle sorte que la chaîne (*fig. 8*) sera représentée par la formule $224_2^{2^2}3^322$.

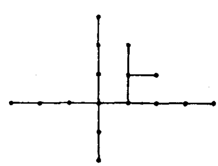


FIG. 8.

La première chaîne donne une seule solution : 222222.

La seconde en donne quatre : 32222, 23222, 22322 et 23^222.

La troisième chaîne donne cinq solutions : 3322, 3232, 3223, 2332 et 33^22.

La quatrième ne donne qu'une seule solution : 333.

La cinquième en donne trois : 4222, 2422 et 24^22.

La sixième, également trois : 432, 324, 243.

La septième, une seule : 44.

Donc, en tout : 18 solutions.

Quand une chaîne se bifurque à ses extrémités, il faut commencer par la branche la plus longue ou, en cas d'égalité de longueur, par la branche dont la première boule a le plus fort indice (c'est l'inverse pour l'extrémité finale).

Ainsi on n'écrira pas $34^{2^2}23^{3^2}22$,

Mais bien $224^3 23^{2^2}32$.

Ceci est indispensable pour éviter les répétitions.

Nous avons appliqué cette méthode jusqu'à la valeur de $n = 13$ et nous avons trouvé identiquement les nombres inscrits, sous la dénomination : total, dans le tableau IV. Nous sommes donc en droit de regarder comme exacts ces nombres obtenus par deux méthodes absolument différentes l'une de l'autre.

Il serait, sinon impossible, du moins bien difficile de trouver une formule générale donnant le nombre des enchaînements des n boules pour une valeur quelconque de n. Le problème en question est un cas particulier du problème — non résolu — des *Partitions*, cas particulier peut-être plus difficile que le cas général par suite de la présence des chaînes auxiliaires.

On peut cependant donner une formule qui fournit le nombre C des enchaînements de boules, pour les premières valeurs de n.

Dans le cas de n pair et égal à $2p$, on a

$$C = 1 + (p - 1) + (p - 2)(p - 1) + \frac{p-3}{3}(2p^2 + 3p - 20)$$
$$+ \frac{p-4}{6}(2p^3 + 62p^2 - 537p + 1053) - (2p - 9)^2.$$

Pour $n = 2p + 1$, on a :

$$C = 1 + 2(p - 1) + (p - 2)(3p - 5) + \frac{p-3}{3}(14p^2 - 66p + 82)$$
$$+ \frac{p-4}{6}(18p^3 - 42p^2 - 471p + 1491) - 2\left[(2p - 9)^2 + 1\right]$$

Dans ces formules il faut remplacer par zéro les facteurs qui deviennent négatifs par suite de la valeur donnée à n ; on ne doit donc pas faire de réductions de termes.

De plus, ces formules, malgré leur complication, ne sont exactes que jusqu'à $n = 11$. Pour des valeurs supérieures de n, il faudrait ajouter de nouveaux termes, la valeur de C étant représentée par un polynome de degré $p - 1$ (*).

(*) Un extrait de cette communication a paru dans le nº 5 de l'*Intermédiaire des Mathématiciens* et dans le *Bulletin de la Société chimique de Paris* (3ᵉ série, t. XI, p. 239-248).