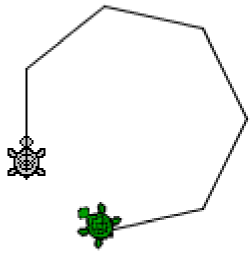
DES POLYGONES REGULIERS AU CERCLE

Les polygones réguliers

Observations préliminaires

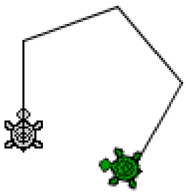
1. En faisant répéter par la tortue une suite d'instructions telle que : **(av … ; td…)**, nous obtenons le tracé d'une ligne brisée constituée de segments de même longueur et faisant entre eux, deux à deux, le même angle.

2. En choisissant des valeurs "judicieuses" nous pouvons faire en sorte que la tortue revienne au point de départ et obtenir ainsi, des polygones réguliers.

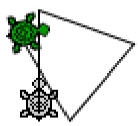


A partir du CARRE

Pour la majorité des élèves, il ne fait aucun doute que la tortue doit répéter quatre fois la même suite d'instructions pour obtenir un carré. Cela acquis, deux familles de figures apparaissent : celles où "l'on a pas assez tourné" et celles où "l'on a trop tourné" :



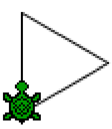
rep 4 (av 50 ; td 70)



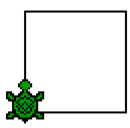
rep 4 (av 50 ; td 110)

En associant d'autres valeurs à l'ordre **av**, les expérimentateurs constatent que ce paramètre ne fait que modifier la taille du tracé, le problème réside donc bien dans la recherche de l'angle de rotation de la tortue.
A partir de ce stade, le rôle du maître n'est plus de dispenser un savoir mais plutôt celui d'UN arbitre-coordonnateur qui doit souvent calmer l'excitation ambiante. Le problème étant parfaitement identifié, les élèves sont en mesure de décider si la figure obtenue convient ou ne convient pas, leur autonomie est donc totale.

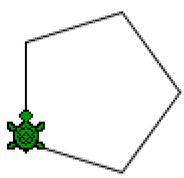
Chacun suivant son propre rythme, nous regroupons les premiers résultats obtenus pour les polygones réguliers de 3, 4, 5 et 6 côtés :



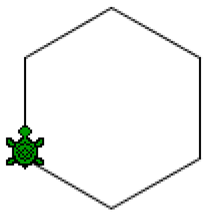
rep 3 (av 45 ; td 120)



rep 4 (av 45 ; td 90)



rep 5 (av 45 ; td 72)



rep 6 (av 45 ; td 60)

En laissant provisoirement en attente l'étude de l'heptagone pour lequel la tortue éprouve visiblement” des difficultés à revenir au point de départ, on peut poursuivre l'expérimentation pour l'octogone, l'ennéagone,…

Chaque réussite du tracé d’un polygone s’accompagne de la création d’une procédure. Ultérieurement elle sera réinvestie pour d’autres réalisations, exemple :

rep 6 (hexagone ; td 60) …

pour hexagone
rep 6 (av 45 ; td 60)
fin

Un théorème fondamental

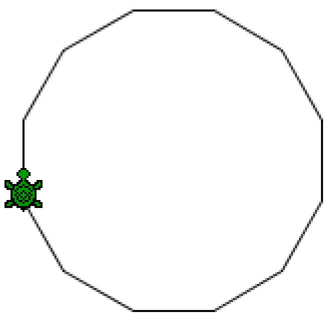
La plupart du temps, les premiers essais suffisent pour faire surgir la question : “Si je veux obtenir un polygone ayant 8, 9 ,10 côtés…, à quelle (s) condition(s) la tortue reviendra-t-elle à son point de départ ?”
La façon qu'a la tortue de dessiner un polygone régulier, met en lumière un angle inhabituel en géométrie euclidienne, l'angle qui mesure le changement d'orientation à chaque sommet. Cette façon de faire a des conséquences intéressantes : en particulier elle fait émerger un concept étonnant : la rotation totale qui permet de formuler un théorème :

Pour tracer un polygone régulier, quel que soit le nombre de ses côtés,
la tortue devra effectuer une rotation totale de 360 degrés !

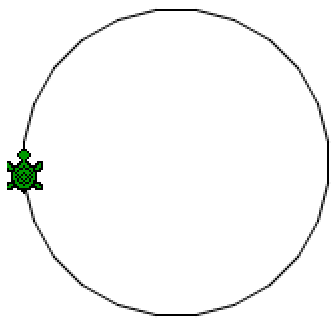
Approche du cercle

Des polygones-cercles

La mise en œuvre du théorème de la rotation totale de la tortue, va naturellement conduire les expérimentateurs vers une approche du cercle que n’aurait pas désavouée Archimède.
En effet, tracer un polygone de 12, 24 ou 48 côtés est désormais un jeu d'enfant, d’autant que le tortue peut effectuer elle-même la division (la multiplication des côtés produisant des figures de plus en plus grandes, la taille du côté est également modifiée pour que le dessin tienne dans le cadre de l'écran) :



rep 12 (av 40 ; td 360/12)



rep 24 (av 20 ; td 360/24)

Les derniers dessins de polygones font apparaître que plus on augmente le nombre de côtés et plus la ligne polygonale tend à devenir une ligne circulaire; a fortiori si la longueur des côtés est très petite. Pour bon nombre d'enfants, le plus petit côté que la tortue puisse tracer est un côté de longueur 1, c'est pourquoi la suite d'ordres : **rep 360 (av 1 ; td 1)** leur apparaît comme une “bonne” représentation du cercle.

Approximation de π

Polygones isopérimétriques

Problème et consigne : à partir d'un hexagone dont la mesure du périmètre est 480 pas de tortue (par exemple…!) nous allons considérer une suite de polygones de même périmètre obtenus en doublant le nombre de côtés. A chaque étape nous noterons dans un tableau : le nombre de côtés, la distance qui sépare deux sommets opposés et le quotient décimal approché du périmètre par cette distance.
A la limite, le polygone tend vers un cercle, la distance relevée tend vers le diamètre de ce cercle et le quotient tend vers…?

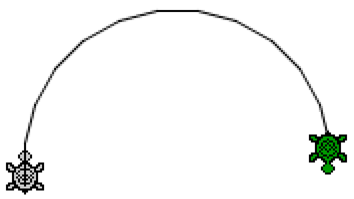
Expérimentation : Nous faisons appel à deux tortues.
La tortue se trouvant sur l'écran s'appelle George. Nous allons donc créer une nouvelle tortue de la manière suivante : **appeler Marie.**

et proposons le scénario suivant :

- au départ, les deux tortues sont placées dans le même état (position et orientation),
- Marie reste sur place tandis que George trace le demi polygone choisi,
- parvenu au sommet diamétralement opposé nous demandons alors à George d'afficher la distance qui le sépare de Marie,

Pour s'adresser à George, il suffit d'entrer cette commande : **à George**

A chaque étape nous doublons le nombre de côtés du polygone tout en conservant la mesure du périmètre (480 pas).



rep 12 (av 20 ; td 360/24)

show *dist*(Marie)

une fenêtre apparaît dans laquelle est indiquée la distance séparant Georges et Marie : **153.2259515108078**

Côtés	Périmètre / Distance
6	3.1058…
12	3.1326…
24	3.1393…
48	3.1410…
96	3.1414…

Pour l'anecdote, signalons qu'un polygone de 49152 côtés fournit un rapport de 3,141519265… résultat assez remarquable pour des tortues.