Les annales du BTS

Mathématiques, groupement C

Frédéric Boure

Octobre 2013

IREM Paris XIII - Groupe « Enseignements technologiques »

Sommaire

Remerciements

Cette compilation des annales du BTS groupement C a été faite à partir des fichiers LaTeX tapuscrits de Denis Vergès disponibles sur la toile sur le site de l'A.P.M.E.P. (l'Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public)
http://www.apmep.asso.fr/spip.php?rubrique376
L'idée a été reprise de Vincent Pantaloni (vincent.pantaloni@ac-orleans-tours.fr) qui a produit des annales des Restitutions Organisées de Connaissances (ROC) du Baccalauréat de la série S jusqu'en 2008. Elles sont visibles sur son site personnel
http://prof.pantaloni.free.fr
Nous les remercions de nous avoir autorisé à utiliser leurs productions.

Groupement C, mai 2003

EXERCICE 1 **10 points**

Une usine de montage utilise des roulements provenant de deux entreprises de mécanique, l'une située à Reims, l'autre à Nancy. Son stock de roulements provient à 40 % de l'entreprise de Reims dont 4,5 % de la production est inutilisable. Le reste provient de l'entreprise de Nancy qui fournit 2 % de roulements inutilisables.

Les parties A et B sont indépendantes.

Partie A

1. On prélève au hasard un roulement dans le stock.
   a. Déterminer la probabilité qu'il soit utilisable, sachant qu'il provient de Reims.
   b. Déterminer la probabilité qu'il soit utilisable, sachant qu'il provient de Nancy.
   c. En déduire que la probabilité qu'il soit utilisable est $0,97$.
2. On prélève dans le stock, successivement et au hasard, dix roulements. On désigne par X la variable aléatoire égale au nombre de ceux qui sont utilisables. On assimilera ce prélèvement à un tirage avec remise.
   a. Quelle est la loi de probabilité de X ? Préciser les paramètres.
   b. Déterminer, au centième près par excès, la probabilité que sur ces dix roulements, neuf au moins soient utilisables.
3. On prélève dans le stock 100 roulements, successivement et au hasard. On note Y le nombre de ceux qui sont inutilisables. On assimilera ce prélèvement à un tirage avec remise. Ainsi, Y suit une loi binomiale de paramètres 100 et $0,03$; on approche cette loi par une loi de Poisson.
   a. Déterminer le paramètre de cette loi de Poisson.
   b. Déterminer la probabilité que moins de deux roulements soient inutilisables. On donnera un résultat arrondi au centième.

Partie B

On étudie dans cette partie le diamètre des roulements.
On note D la variable aléatoire qui, à chaque roulement, associe son diamètre en millimètres.
On admet que D suit une loi normale de moyenne $23,65$ et d'écart type $0,02$.

1. On choisit au hasard un roulement. Quelle est la probabilité que son diamètre appartienne à l'intervalle [23,61 ; 23,70] ?
2. Soit h un nombre réel. Déterminer h tel que $P(23,65 - h < D < 23,65 + h) = 0,90$.
   On donnera un résultat arrondi au millième.
3. En déduire un intervalle I tel que les diamètres des roulements de la production aient la probabilité $0,90$ de lui appartenir.

EXERCICE 2 **10 points**

Les trois parties de l'exercice sont indépendantes.

Un mobile est propulsé à très grande vitesse sur un axe, puis il est ralenti. On s'intéresse à la vitesse de ce mobile durant le freinage. Dans tout l'exercice, les distances sont exprimées en mètres, les temps en secondes et donc les vitesses en mètres par secondes.

Partie A

Les résultats seront arrondis au dixième.
On a relevé les vitesses instantanées v_i de ce mobile aux instants t_i pour i variant de 0 à 7.

t_i en s	0	1	2	3	4	5	6	7
v_i en m.s^{-1}	215	140	85	57	36	29	27	22

1. Dessiner le nuage de points de cette série statistique et expliquer pourquoi on n'envisagera pas un ajustement affine de ce nuage.
2. on pose $n_i = \ln(v_i - 15)$ pour i variant de 0 à 7. Dresser le tableau de la série $(t_i\ ;\ n_i)$.
3. Donner une équation de la droite de régression de n en t par la méthode des moindres carrés.
4. En déduire une expression de la vitesse v en fonction du temps t sous la forme

$$v = \alpha \mathrm{e}^{\beta t} + \gamma, \text{ où } \alpha,\ \beta \text{ et } \gamma \text{ sont des réels à déterminer.}$$

Partie B

Une modélisation mathématique permet d'écrire que la vitesse v, qui est une fonction positive du temps t, est solution de l'équation différentielle

$$\text{(E)} \quad 2y' + y = 15,$$

où y est une fonction dérivable de la variable réelle t.

1. Résoudre l'équation $2y' + y = 0$.
2. Rechercher une fonction constante solution particulière de l'équation (E).
3. En déduire la solution générale de l'équation (E).
4. Déterminer la fonction v, solution de (E), qui vérifie $v(0) = 215$.

Partie C

On admet que la vitesse du mobile est donnée par la fonction v, définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par :

$$v(t) = 200\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t} + 15.$$

1. Étudier les variations de v sur $[0\ ;\ +\infty[$.
2. Montrer que ce système de freinage ne permet pas, en théorie, au mobile de s'arrêter.
3. Sachant que la distance parcourue par le mobile entre les instants t_1 et t_2 est $\displaystyle\int_{t_1}^{t_2} v(t)\,\mathrm{d}t$, calculer la valeur exacte de la distance parcourue par le mobile entre les instants $t_1 = 0$ et $t_2 = 10$, puis en donner une valeur arrondie au dixième.

Retour au sommaire : 5

Groupement C, mai 2004

Exercice 1 **11 points**

Une entreprise spécialisée produit des boules de forme sphérique en grande série.
Le responsable de la qualité cherche à analyser la production. Il mesure pour cela le diamètre des boules d'un échantillon (E) de 50 pièces, et obtient les résultats suivants :

Diamètre en mm	72,6	72,7	72,8	72,9	73	73,1	73,2	73,3	73,4
Nombre de boules	3	5	7	8	10	9	4	3	1

Une boule est dite conforme si son diamètre d mesuré en millimètres, vérifie : $72,7 \leqslant d \leqslant 73,3$.

1. **a.** Quel est, pour l'échantillon (E), le pourcentage de boules non conformes ?

   b. Déterminer la moyenne et l'écart type de cet échantillon. Les résultats seront arrondis au centième.

2. On admet dans cette question que la probabilité qu'une boule ne soit pas conforme est $p = 0,12$.

   L'entreprise livre des lots de 50 boules à des clients. On assimile le choix de chaque boule d'un lot à un tirage au hasard et avec remise. On désigne par X la variable aléatoire mesurant le nombre de boules non conformes d'un lot.

   a. Préciser et justifier la loi de probabilité suivie par X.

   b. On approche la loi de probabilité de X par une loi de Poisson.

   i. Quel est le paramètre de cette loi ?

   ii. Déterminer la probabilité qu'il y ait plus de cinq boules non conformes dans un lot. La réponse sera arrondie au centième.

3. L'étude statistique de la production permet d'admettre que la variable aléatoire D, qui mesure le diamètre d'une boule, soit une loi normale de paramètres m et σ. Les résultats seront arrondis au millième. On choisit au hasard une boule produite.

   a. On suppose que $m = 73$ et $\sigma = 0,2$. Calculer la probabilité que la boule soit conforme, c'est-à-dire $p(72,7 \leqslant D < 73,3)$.

   b. Sachant que $m = 73$, quelle valeur devrait prendre σ pour que la probabilité d'obtenir une boule non conforme soit $0,1$?

4. La moyenne obtenue sur l'échantillon (E) amène à se poser la question : « Le diamètre moyen m des boules fabriquées est-il strictement inférieur à 73 mm ? »

   Pour cela, on construit un test d'hypothèse au risque de 5 %.

   L'hypothèse nulle H_0 est : $m = 73$;

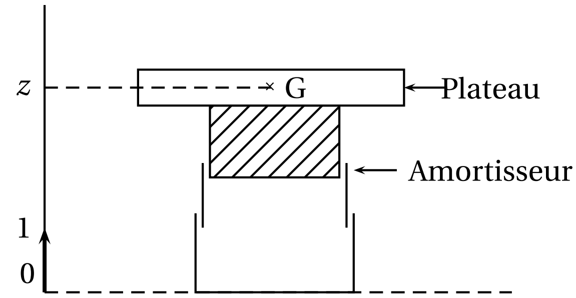
   L'hypothèse alternative H_1 est : $m < 73$.

   On admet que la variable aléatoire $\overline{D}$, qui mesure le diamètre moyen sur un échantillon de 50 boules prélevées au hasard et avec remise, suit une loi normale de moyenne 73 et d'écart type $\dfrac{0,2}{\sqrt{50}}$.

a. Calculer le nombre réel a tel que $p(\overline{D} \geqslant 73 - a) = 0,95$.
b. Énoncer la règle de décision du test.
c. Au risque de 5 % et au vu de l'échantillon (E), que peut-on conclure ?

Exercice 2 **9 points**

On considère un système mécanique formé d'un plateau soutenu par un amortisseur. Il est représenté sur le schéma ci-contre.



On note z la cote du centre de gravité du plateau. On suppose que z est une fonction de la variable réelle t, définie et deux fois dérivable sur un intervalle de $\mathbb{R}$ où t représente le temps exprimé en seconde.

L'étude de ce système mécanique permet de considérer que la fonction z est solution de l'équation différentielle

$$(E) \quad : \quad 5z'' + 6z' + z = 2.$$

Partie A

1. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $5z'' + 6z' + z = 0$.
2. Chercher une solution particulière constante de l'équation (E) et en déduire la solution générale de (E).
3. Donner la solution g de (E) qui vérifie les conditions $g(0) = 5$ et $g'(0) = 1$.

Partie B

On suppose pour la suite du problème que $z(t) = f(t)$, où f est la fonction définie sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ par

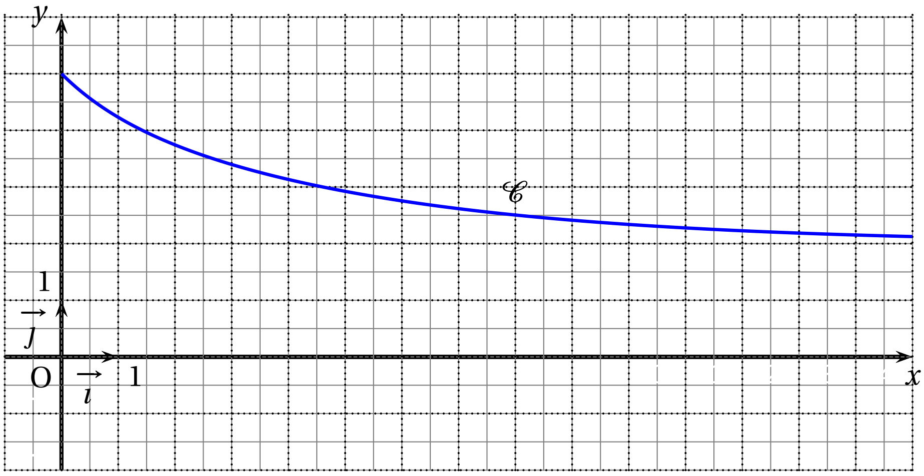
$$f(t) = 0,5\mathrm{e}^{-t} + 2,5\mathrm{e}^{-0,2t} + 2.$$

1. Étudier les variations de f.
2. Déterminer la limite de $f(t)$ quand t tend vers $+\infty$.
3. Déduire des deux questions précédentes l'évolution de la cote du point G en fonction du temps t.
4. On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$. Justifier l'existence d'une asymptote à la courbe $\mathscr{C}$ quand t tend vers $+\infty$; en donner une équation.
   Tracer cette asymptote sur le graphique de la feuille jointe en annexe.

Partie C

1. Déterminer une primitive de la fonction h, définie pour tout t de l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ par
$$h(t) = 0,5\mathrm{e}^{-t} + 2,5\mathrm{e}^{-0,2t}.$$
2. **a.** Calculer $\displaystyle\int_1^5 \left[f(t) - 2\right]\,\mathrm{d}t$.
   b. Interpréter géométriquement ce résultat sur la feuille jointe en annexe.

ANNEXE
(à rendre avec la copie)



Retour au sommaire : 5

Groupement C, mai 2005

Exercice 1 **9 points**

Partie A

On considère l'équation différentielle (E) : $y' - 2y = 4x$, où y désigne une fonction de la variable x définie et dérivable sur l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ et y' sa dérivée.

1. Soit l'équation différentielle (E') : $y' - 2y = 0$.
   Résoudre l'équation différentielle (E$'$).
2. Déterminer les réels a et b tels que la fonction g définie pour tout x réel par $g(x) = ax + b$ soit une solution particulière de l'équation (E).
   - **a.** Résoudre l'équation différentielle (E).
   - **b.** Déterminer la fonction f, solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle (E) satisfaisant la condition : $f(0) = 0$.

Partie B

Soit la fonction f, définie pour tout x réel par $f(x) = \mathrm{e}^{2x} - 2x - 1$.

1. Déterminer la limite de f en $-\infty$.
2. Déterminer la limite de f en $+\infty$ (on pourra mettre $2x$ en facteur dans l'expression de $f(x)$).
3. Soit f' la fonction dérivée de f. Calculer $f'(x)$.
   En déduire les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$ et le signe de $f(x)$ suivant les valeurs du réel x.

Partie C

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ d'unités graphiques 2 cm sur l'axe des abscisses et 1 cm sur l'axe des ordonnées.

1. Montrer que la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = -2x - 1$ est asymptote à la courbe $\mathscr{C}$ au voisinage de $-\infty$.
2. Construire la courbe $\mathscr{C}$ et la droite $\mathscr{D}$.
3. On considère l'aire $\mathscr{A}$ du domaine plan délimité par la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.
   Calculer la valeur exacte de $\mathscr{A}$ en cm^2, puis en donner l'approximation décimale arrondie an centième.

Exercice 2 **11 points**

Les parties A, B, C et D peuvent être traitées indépendamment les unes des autres.

Une entreprise produit en série des axes de moteurs électriques. Cette entreprise possède trois machines, que l'on appellera E, F et G. Chaque axe est produit par l'une de ces trois machines.

Partie A Les machines E, F et G produisent respectivement 25 %, 35 % et 40 % de la production totale.

On constate, un jour donné de production, que les machines E, F et G produisent respectivement 1,5 %, 2,5 % et 3 % d'axes défectueux.

Montrer que la probabilité de prélever au hasard un axe défectueux dans la production totale de l'entreprise de ce jour est de 0,0245.

Partie B

Dans cette partie, on s'intéresse aux axes de moteurs électriques produits par la machine E.

La machine E se déréglant au cours du temps, on décide de noter chaque jour le pourcentage des axes défectueux produits. On obtient alors le tableau suivant :

Jours x_i	1	2	3	4	5	6	7	8
Pourcentage d'axes défectueux y_i	0,8	1,1	1,9	2,3	2,1	2,4	2,8	2,9

1. Donner une équation de la droite de régression de y en x par la méthode des moindres carrés. (Les résultats seront arrondis à 10^{-3}).
2. En admettant que l'évolution du pourcentage d'axes défectueux constatée pendant huit jours se poursuive les jours suivants, quel est le pourcentage prévisible, arrondi à 0,1 %, d'axes défectueux produits le onzième jour par la mach E ?

Partie C

Dans cette partie, on s'intéresse aux axes de moteurs électriques produits par la machine F.

La machine F produit 2,5 % d'axes défectueux. On prélève au hasard, dans la production de la machine F, un lot de 50 axes. La production est suffisamment importante pour que ce prélèvement soit assimilé à un tirage avec remise. On note Y la variable aléatoire qui, à chaque prélèvement de 50 axes de moteurs électriques, associe le nombre d'axes défectueux.

1. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire Y. Justifier la réponse.
2. Calculer la probabilité que le lot contienne exactement deux axes défectueux (le résultat sera arrondi à 10^{-3}).

Partie D

Dans cette partie, on s'intéresse aux axes de moteurs électriques produits par la machine G.

La machine G est bien réglée si, dans la production d'une journée, la moyenne des longueurs des axes est de 350 millimètres.

Pour vérifier le réglage de la machine G on construit un test d'hypothèse bilatéral au risque de 5 %.

1. Quelle est l'hypothèse nulle H_0 ? Quelle est l'hypothèse alternative H_1 ?
2. On note $\overline{X}$ la variable aléatoire qui, à chaque échantillon de 100 axes prélevés dans la production de la machine G associe la moyenne des longueurs de ces axes. La production de la machine G est assez importante pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise. On suppose que, sous l'hypothèse nulle H_0, la variable aléatoire $\overline{X}$ suit la loi normale de moyenne 350 et d'écart-type $0,5$.
   Sous l'hypothèse H_0, déterminer le réel h tel que
   $P(350-h \leqslant \overline{X} \leqslant 350+h) = 0,95$.
3. Énoncer la règle de décision permettant d'utiliser ce test.
4. On prélève un échantillon de 100 axes et on constate que la moyenne des longueurs des axes de cet échantillon est de 349. Peut-on au risque de 5 %, conclure que la machine G est bien réglée ?

Retour au sommaire : 5

Groupement C, mai 2006

Exercice 1 **10 points**

y désigne une fonction de la variable z définie et deux fois dérivable sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels.
Soit (E) l'équation différentielle d'inconnue y suivante :

$$y'' - 4y' + 3y = -3x - 2.$$

Partie A

1. Résoudre sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels, l'équation différentielle $y'' - 4y' + 3y = 0$.
2. **a.** Soit a et b deux réels. On considère la fonction g définie sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels par $g(x) = ax + b$.
   Déterminer les réels a et b pour que la fonction g soit une solution particulière de l'équation (E).

   b. Résoudre l'équation (E).
3. Déterminer la fonction f, solution particulière sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels de l'équation (E), telle que : $f(0) = -1$ et $f''(0) = 9$.

Partie B

Soit la fonction f définie pour tout x réel par

$$f(x) = \mathrm{e}^{3x} - x - 2.$$

1. Déterminer la limite de f en $-\infty$.
2. En remarquant que, pour x différent de 0, $f(x) = x\left(\dfrac{\mathrm{e}^{2x}}{x} - 1 - \dfrac{2}{x}\right)$, déterminer la limite de f en $+\infty$.
3. Étudier les variations de la fonction f et dresser son tableau de variations sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels.
4. Soit $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ d'unités graphiques :
   - 4 cm pour 1 unité sur l'axe des abscisses,
   - 1 cm pour 1 unité sur l'axe des ordonnées.

   Montrer que la courbe $\mathscr{C}$ admet pour asymptote la droite $\mathscr{D}$ d'équation
   $y = -x - 2$ au voisinage de $-\infty$.
5. Déterminer les positions relatives de la courbe $\mathscr{C}$ et de la droite $\mathscr{D}$ selon les valeurs de x.
6. Tracer $\mathscr{D}$ et $\mathscr{C}$.

Partie C

Calculer l'aire $\mathscr{A}$, en cm^2, du domaine compris entre les droites d'équations $x = -2$ et $x = 0$, la droite $\mathscr{D}$ et la courbe $\mathscr{C}$. Donner la valeur exacte puis la valeur arrondie au centième de $\mathscr{A}$.

Exercice 2 **10 points**

On donnera la valeur arrondie au millième de chacun des résultats de cet exercice.

Une entreprise fabrique des jouets en bois en grande série. On s'intéresse à l'une des pièces de ce jouet comportant une partie cylindrique permettant l'assemblage des différents éléments du jouet

Partie A

Pour que l'assemblage soit réalisable, c'est-à-dire que la pièce étudiée soit conforme, le diamètre de la partie cylindrique doit être compris entre 13,7 mm et 14,2 mm.
Soit X la variable aléatoire qui, à toute pièce prélevée au hasard dans la production de l'entreprise, associe le diamètre de la partie cylindrique.
On admet que X suit la loi normale $\mathcal{N}(14\ ;\ 0,1)$.
Calculer la probabilité qu'une pièce prélevée au hasard dans la production de l'entreprise soit conforme.

Partie B

Dans cette partie, on considère que 2,4 % des pièces de la production ne sont pas conformes.
Soit Y la variable aléatoire qui, à tout lot de 100 unités prélevées au hasard dans la production, associe le nombre de pièces non conformes. On admet que la production de l'entreprise est suffisamment importante pour que ce prélèvement soit assimilé à un tirage avec remise.

1. Quelle est la loi suivie par Y ? Justifier la réponse. En donner le (ou les) paramètre(s).
2. Quelle est la probabilité qu'il y ait au moins trois pièces non conformes dans un lot de 100 unités ?
3. a. On approche la variable aléatoire Y par une variable aléatoire Z qui suit une loi de Poisson. Donner le paramètre de cette loi.
   b. À l'aide de la variable aléatoire Z, calculer une estimation de la probabilité qu'il y ait exactement trois pièces non conformes dans un lot de 100 unités.

Partie C

L'assemblage des pièces du jouet doit être définitif. Ainsi, la partie cylindrique de la pièce étudiée dans les parties A et B est enduite de colle avant l'assemblage.
Le jouet est destiné à des enfants de moins de 36 mois. Ces enfants ne doivent en aucun cas pouvoir arracher la pièce du jouet, celle-ci présentant un risque d'ingestion.
Pour cette raison, l'entreprise réalise un test d'arrachement sur des échantillons de 50 jouets prélevés au hasard. Ces prélèvements sont assimilés à des tirages avec remise, compte tenu du grand nombre de jouets produits.
Soit $\overline{\mathrm{R}}$ la variable aléatoire qui, à tout échantillon de 50 jouets, associe la résistance mécanique moyenne de l'assemblage. Cette résistance mécanique est exprimée en déca-newton, noté daN.
Soit r la résistance mécanique moyenne de l'ensemble des jouets produits par l'entreprise. On admet que $\overline{\mathrm{R}}$ suit la loi $\mathcal{N}\left(r\ ;\ \dfrac{1}{\sqrt{50}}\right)$.
On construit un test d'hypothèse unilatéral au risque de 1 %, destiné à savoir si la résistance mécanique moyenne des assemblages est égale à 10 daN.
On donne l'hypothèse alternative $\mathrm{H}_1\ :\ r > 10$.

1. Donner l'hypothèse H_0.
2. Sous l'hypothèse H_0, quelle est la loi subie par $\overline{\mathrm{R}}$?

3. Sous l'hypothèse H_0,calculer le réel h tel que $P\left(\overline{R} \leqslant 10+h\right) = 0,99$.

4. Quelle est la règle de décision du test ?

5. **a.** Sur un échantillon de 50 jouets, on a relevé les résistances exprimées dans le tableau ci-dessous. Calculer la moyenne r_e, et l'écart type σ_e de cet échantillon. Aucune justification de ces résultat, n'est demandée.

Résistance (daN)	7,5	8	8,5	9	9,5	10	10,5	11	11,5	12	12,5	13
Effectifs	1	0	1	3	9	9	10	9	3	2	2	1

b. Au seuil de risque de 1 %, et d'après cet échantillon, les jouets produits par l'entreprise sont-ils assez solides ?

Retour au sommaire : 5

Groupement C, mai 2007

Exercice 1 10 **points**

Le but du problème est l'étude de la demande et de l'offre pour un nouveau produit de grande consommation. Une étude statistique a donné les résultats suivants où :
x désigne le prix unitaire en euros du produit ;
y désigne la demande (la quantité de produit demandée par les consommateurs), en milliers d'unités ;
z désigne l'offre (la quantité de produit offerte sur le marché par les producteurs), en milliers d'unités.

x en euros	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4
y en milliers	7,8	6,1	4,7	3,7	3	2,5	2,2	2
z en milliers	0,9	1,4	1,7	1,9	2,1	2,3	2,4	2,6

Partie A. Étude de la demande

On considère l'équation différentielle

$$(\mathrm{E}) \quad : \quad y' + 0{,}4y = 0{,}4x - 1$$

où y désigne une fonction de la variable x, définie et dérivable sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels et y' sa fonction dérivée.

1. Résoudre sur l'ensemble des nombres réels, l'équation différentielle :

$$y' + 0,4y = 0.$$

2. a. Déterminer les réels a et b pour que la fonction g, définie pour tout x réel par $g(x) = ax + b$, soit une solution particulière de l'équation (E).

b. Résoudre l'équation différentielle (E).

3. Déterminer la fonction f, solution sur l'ensemble des nombres réels de l'équation différentielle (E), telle que $f(0) = 10$.

4. On appelle d la fonction demande, en milliers d'unités pour un prix de x euros, définie sur l'intervalle $[0{,}5\,;\,4]$ par $y = d(x)$. On admet que, pour tout x de l'intervalle $[0{,}5\,;\,4]$,

$$d(x) = 15\mathrm{e}^{-0{,}4x} + x - 5.$$

a. Soit d' la fonction dérivée de la fonction d. Déterminer $d'(x)$ et en déduire les variations de la fonction d sur l'intervalle $[0{,}5\,;\,4]$.

b. Le plan est muni d'un repère orthogonal d'unités graphiques 2 cm sur l'axe des abscisses et 1 cm sur l'axe des ordonnées. On admet que le tableau de valeurs ci-dessus est le tableau de valeurs de la fonction d définie par $y = d(x)$.
Construire la courbe $\mathscr{C}_d$ représentative de la fonction d sur l'intervalle $[0{,}5\,;\,4]$.

Partie B : Étude de l'offre

1. **a.** Compléter, après l'avoir reproduit, le tableau suivant. Les résultats seront arrondis à 10^{-2}.

x	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4
z	0,9	1,4	1,7	1,9	2,1	2,3	2,4	2,6
$Z = \mathrm{e}^z$	2,46							

   b. Donner une équation de la droite de régression de Z en x par la méthode des moindres carrés sous la forme $Z = ax + b$ où a et b seront arrondis au dixième.

   c. En déduite une expression de z en fonction de x.

2. On appelle h la fonction offre, en milliers d'unités pour un prix de x euros, définie sur l'intervalle $[0,5\,;\,4]$ par $z = h(x)$. On admet que, pour tout z de l'intervalle $[0,5\,;\,4]$, $h(x) = \ln(3x + 0,9)$.

   a. Soit h' la fonction dérivée de la fonction h. Déterminer $h'(x)$ et en déduire les variations de la fonction h sur l'intervalle $[0,5\,;\,4]$.

   b. Construire la courbe $\mathscr{C}_h$ représentative de la fonction h dans le même repère que la courbe $\mathscr{C}_d$.
   On pourra utiliser le tableau de valeurs ci-dessus.

   c. Déterminer graphiquement, avec la précision permise par le graphique, une valeur approchée du prix de vente en euros, à 10 centimes près, pour lequel la demande est égale à l'offre.

Exercice 2 10 **points**

Les parties A, B, et C peuvent être traitées indépendamment les unes des autres.

Une entreprise produit en grande série trois modèles de stylos notés, M_1, M_2 et M_3.
Un stylo peut être conforme ou non conforme.

Partie A. Dans cette partie, on s'intéresse aux stylos du modèle M_1

Un des stocks est constitué de stylos du modèle M_1, provenant de deux chaînes de production C_1 et C_2. Ces chaînes produisent respectivement 40 % et 60 % du stock. On constate que la chaîne C_1 produit 6 % de stylos non conformes.
On prélève au hasard un stylo dans ce stock.

1. Quelle est la probabilité de prélever au hasard un stylo provenant de la chaîne C_1 et non conforme ?
2. On appelle t le pourcentage de stylos non conformes produit par la chaîne C_2. Déterminer t pour que la probabilité de prélever au hasard un stylo non conforme dans le stock de stylos du modèle M_1 soit égale à $0,09$.

Partie B. Dans cette partie, on s'intéresse aux stylos du modèle M_2

Un autre stock est constitué de stylos du modèle M_2. On admet que 3 % des stylos de ce stock sont non conformes. On prélève au hasard, dans ce stock, un lot de 50 stylos.
On admet que ce stock est suffisamment important pour que ce prélèvement soit assimilé à un tirage avec remise. On note X la variable aléatoire qui, à chaque prélèvement de 50 stylos, associe le nombre de stylos non conformes.

1. Déterminer la loi de probabilité de la variable X. Justifier la réponse et préciser les paramètres.

2. Dans cette question les résultats seront arrondis à 10^{-3},

a. Quelle est la probabilité que ce lot contienne exactement 2 stylos non conformes 7

b. Quelle est la probabilité que ce lot contienne au moins 2 stylos non conformes ?

3. **a.** On approche la variable aléatoire X par une variable Y qui suit une loi de Poisson. Donner le paramètre de cette loi.

b. À l'aide de la variable aléatoire Y, donner une estimation de la probabilité qu'il y ait exactement 47 stylos conformes dans ce lot.

Partie C. Dans cette partie, on s'intéresse à la masse des stylos du modèle M_3

Un autre stock est constitué de stylos du modèle M_3. Ce stock est conforme quant à la masse si la moyenne des masses des stylos de ce stock est de 11 grammes. Pour vérifier cette affirmation on construit un test d'hypothèse bilatéral au risque de 10 %.

1. **a.** Quelle est l'hypothèse nulle H_0 ? Quelle est l'hypothèse alternative H_1 ?

b. On note $\overline{Z}$ la variable aléatoire qui, à chaque échantillon aléatoire de 100 stylos prélevés dans ce stock associe la moyenne des masses des stylos de ce stock. On considère ces prélèvements comme des tirages avec remise car ce stock est très important. On suppose que, sous l'hypothèse nulle H_0, la variable aléatoire $\overline{Z}$ suit la loi normale de moyenne 11 et d'écart-type $0,4$.
Sous l'hypothèse nulle H_0, déterminer le nombre réel positif h tel que :

$$P(11-h \leqslant \overline{Z} \leqslant 11+h)=0,9.$$

c. Énoncer la règle de décision permettant d'utiliser ce test.

2. On prélève un échantillon aléatoire de 100 stylos et on constate que la moyenne des masses des stylos de cet échantillon est de 10,6 grammes. Peut-on au risque de 10 % conclure que le stock de stylos du modèle M_3 est conforme quant à la masse ?

Retour au sommaire : 5

Groupement C, mai 2008

Exercice 1 **9 points**

Partie A

L'étude d'un mouvement a montré que la vitesse exprimée en mètres par seconde est une fonction dérivable y de la variable réelle positive t vérifiant l'équation différentielle (E)

$$y' + 2y = 50.$$

1. Résoudre, sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$, l'équation différentielle $y' + 2y = 0$.
2. Déterminer une fonction constante solution de l'équation (E) sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$.
3. En déduire la solution générale de (E) sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$.
4. Sachant que la vitesse initiale à l'instant $t = 0$ est nulle, déterminer la vitesse y en fonction de t.

Partie B

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$ par

$$f(t) = 25\left(1 - \mathrm{e}^{-2t}\right).$$

On donne sur la feuille *annexe*, à remettre avec la copie, la représentation graphique Γ de la fonction f dans un repère orthogonal.

La fonction f représente la fonction vitesse déterminée dans la partie A.

Le but de l'exercice est de justifier et de compléter la représentation graphique de la fonction f donnée en annexe.

1. **a.** Par lecture graphique déterminer une valeur arrondie au dixième de l'instant t_0 où la vitesse dépasse 20 m.s^{-1}.

   b. Résoudre l'inéquation $f(t) > 20$. En déduire la valeur exacte de t_0.
2. Déterminer la limite de f en $+\infty$ et en donner une interprétation graphique.
3. Démontrer que la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$.
4. Déterminer une équation de la tangente T à la courbe au point O, origine du repère. Construire cette droite sur l'*annexe* à remettre avec la copie.
5. En utilisant le graphique donné en *annexe*, estimer l'aire en unités d'aire de la partie du plan comprise entre la courbe Γ, l'axe des abscisses et les droites d'équation $t = 1$ et $t = 2$.
6. **a.** Déterminer une primitive F de la fonction f sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$.

   b. Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_1^2 f(t)\,\mathrm{d}t$. En donner une interprétation graphique.

Exercice 2 **11 points**

Les résultats seront arrondis au centième.

Partie A

Dans une usine U, une machine produit des barres de métal.
Dans cette partie on étudie la longueur de ces barres.
On définit la variable aléatoire X qui à chaque barre associe sa longueur exprimée en centimètres et on admet que la variable aléatoire X suit une loi normale de moyenne $m = 92,50$ et d'écart-type σ.
Une barre de la production est mise au rebut si sa longueur est inférieure à 92,20 cm oi supérieure à 92,80 cm.

1. On suppose que $\sigma = 0,20$.

a. Calculer la probabilité qu'une barre extraite au hasard dans la production de la machine soit mise au rebut.

b. Déterminer le réel a tel que la probabilité que la variable aléatoire X prenne de valeurs comprises entre $92,5 - a$ et $92,5 + a$ soit égale à $0,95$.

2. Quelle valeur faut-il donner à l'écart type a pour que la probabilité de mise au rebut d'une barre soit égale à $0,08$?

Dans la suite de l'exercice, on suppose que l'écart type est $\sigma = 0,17$.

Partie B

Dans la production de la machine, 8 % des barres sont mises an rebut. On prélève un lot de 30 barres extraites au hasard dans la production de la machine. Le nombre de barres produites est suffisamment important pour que l'on assimile ce prélèvement à un tirage avec remise de 30 barres.
On appelle N la variable aléatoire qui à chaque lot de 30 barres associe le nombre de barres qui sont mises au rebut dans ce lot.

1. Déterminer la loi de probabilité suivie par la variable aléatoire N et donner ses paramètres. Justifier.

2. Calculer la probabilité qu'aucune barre de ce lot ne soit mise au rebut.

3. Calculer la probabilité que dans un tel lot, au moins 90 % des barres ne soient pas mises au rebut.

Partie C

La machine se déréglant dans le temps, on veut tester la moyenne m des longueurs des barres produites par la machine. On se demande si on peut accepter, au seuil de risque de 5 %, l'hypothèse selon laquelle la moyenne m des longueurs des barres est encore de $92,50$ cm.
Pour cela, on construit un test d'hypothèse bilatéral.
On suppose que la variable aléatoire X, qui à tout échantillon de 30 barres de métal prélevées au hasard associe la moyenne des longueurs en centimètres des barres de l'échantillon, suit une loi normale de moyenne m et d'écart type $0,03$.
On choisit l'hypothèse nulle H_0 : «$m = 92,50$».

1. Donner l'hypothèse alternative H_1.

2. Sous l'hypothèse H_0, calculer le réel h tel que $P(92,5 - h < X < 92,5 + h) = 0,95$.

3. Énoncer la règle de décision du test.

4. On prélève un échantillon de 30 barres extraites au hasard dans la production de la machine, on obtient les résultats suivants :

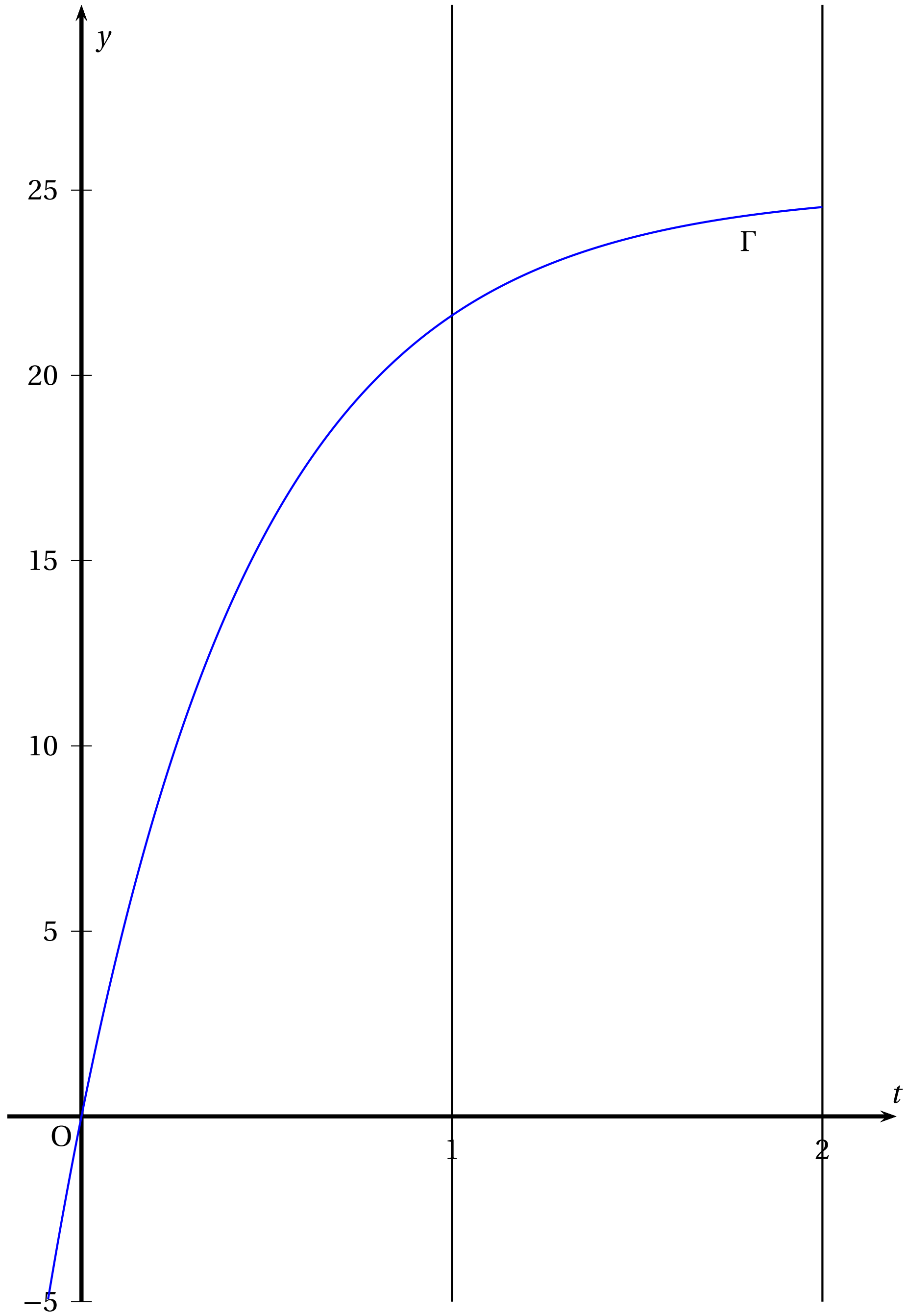
Longueurs (en cm)	92,1	92,2	92,3	92,4	92,5	92,6	92,7	92,8	92,9
Nombre de barres	3	2	6	5	5	3	2	2	2

Au vu des résultats de cet échantillon, peut-on admettre au seuil de risque de 5 %, l'hypothèse selon laquelle la moyenne m des longueurs des barres est encore de 92,50 cm ?

ANNEXE (À RENDRE AVEC LA COPIE)

Exercice 1

Courbe représentative de la fonction f



Retour au sommaire : 5

Groupement C, mai 2009

Exercice 1 **10 points**

Partie A : Résolution d'une équation différentielle

On considère l'équation différentielle (E) : $y'' + 2y' + y = 3$ où y désigne une fonction de la variable réelle x définie et deux fois dérivable sur l'ensemble des nombres réels, y' désigne sa fonction dérivée et y'' sa fonction dérivée seconde.

1. Déterminer une solution constante de (E).
2. Résoudre l'équation (E).
3. La courbe $\mathscr{C}$ représentée en annexe est la représentation graphique d'une solution f de l'équation différentielle (E). En utilisant les propriétés graphiques de cette courbe, déterminer l'expression de (E).

Partie B : Étude statistique

Un nuage de points est dessiné sur le graphique donné en annexe. Les coordonnées de ces points sont donnés dans le tableau :

x	2,3	1,4	$-0,6$	2,9	$-0,3$	$-0,8$	0,8	0,1
y	3,8	4,4	1,6	3,5	3,8	1,3	4,8	4,9

Ce nuage de points a la même allure que la courbe $\mathscr{C}$ représentant la fonction f.
On cherche à déterminer si ce nuage de points peut être ajusté par une courbe représentant une solution de l'équation différentielle (E).
On effectue pour cela le changement de variable : $z = (y-3)\mathrm{e}^{x}$.

1. Compléter le tableau donné en annexe avec les valeurs de z arrondies au dixième.
2. Construire sur papier millimétré le nuage de points de coordonnées $(x\,;\,z)$. Que peut-on observer ?
3. Déterminer une équation de la droite de régression de z en x, ainsi que le coefficient de corrélation linéaire de z en x (on ne demande pas le détail des calculs ; les résultats numériques seront arrondis au centième).
4. Le nuage de points peut-il être ajusté par une courbe représentant une fonction solution de l'équation (E) ? Si oui, donner cette solution.

Exercice 2 **10 points**

Les deux parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.
Les résultats seront arrondis au centième.

Dans un centre d'assistance téléphonique, chaque client doit patienter avant d'être mis en relation avec un conseiller.

Partie A

On admet que 5 % des clients attendent plus de 8 minutes.

Un sondage réalisé par ce centre téléphonique consiste à demander à 60 clients choisi au hasard s'ils ont attendu plus de 8 minutes. On suppose que les durées d'attente sont indépendantes les unes des autres et que le nombre de clients est suffisamment grand pour que ce choix au hasard soit assimilé à un tirage avec remise.

On note Y la variable aléatoire qui associe à cet échantillon, le nombre de clients ayant attendu plus de 8 minutes. On admet que Y suit la loi binomiale de paramètre $n = 60$ et $p = 0{,}05$.

On approche Y par une variable aléatoire Z qui suit une loi de Poisson.
Donner le paramètre de cette loi.
En utilisant la variable aléatoire Z, calculer une estimation de la probabilité qu'au moins 6 clients attendent plus de 8 minutes.

Partie B

Les clients se plaignant d'attendre trop longtemps, une enquête est alors effectuée sur un échantillon de 100 personnes pour vérifier la moyenne μ, exprimée en minutes, du temps d'attente.
Les résultats sont regroupés dans le tableau ci-dessous.

Temps d'attente en minutes	[0 ; 2[	[2 ; 3[	[3 ; 4[	[4 ; 5[	[5 ; 6[	[6 ; 8[	[8 ; 12[
Nombre de clients	13	16	19	17	15	15	5

On admet que la répartition du nombre de clients est régulière dans chacun des intervalles.

1. Calculer la moyenne $\bar{d}$ de cet échantillon (on utilisera les centres des classes pour effectuer les calculs).
2. On se propose de construire un test unilatéral pour vérifier si le temps d'attente moyen n'est pas supérieur à 4 minutes.
   On note D la variable aléatoire qui, à chaque client associe son temps d'attente, exprimé en minutes.
   La variable D suit la loi normale de moyenne inconnue μ et d'écart-type $\sigma = 2{,}4$.
   On désigne par $\overline{D}$ la variable aléatoire qui, à chaque échantillon de 100 client choisis au hasard associe la moyenne de leurs temps d'attente. Le nombre de clients est suffisamment élevé pour que l'on puisse assimiler ce choix de clients à un tirage avec remise.

   L'hypothèse nulle est $H_0 : \mu = 4$.

   a. Déterminer l'hypothèse alternative H_1.

b. Sous l'hypothèse H_0, la variable aléatoire $\overline{D}$ suit la loi normale de moyenne 4 et d'écart-type 0,24.
Déterminer sous cette hypothèse le nombre réel h positif tel que : $P(\overline{D} \leqslant 4 + h) = 0{,}95$.

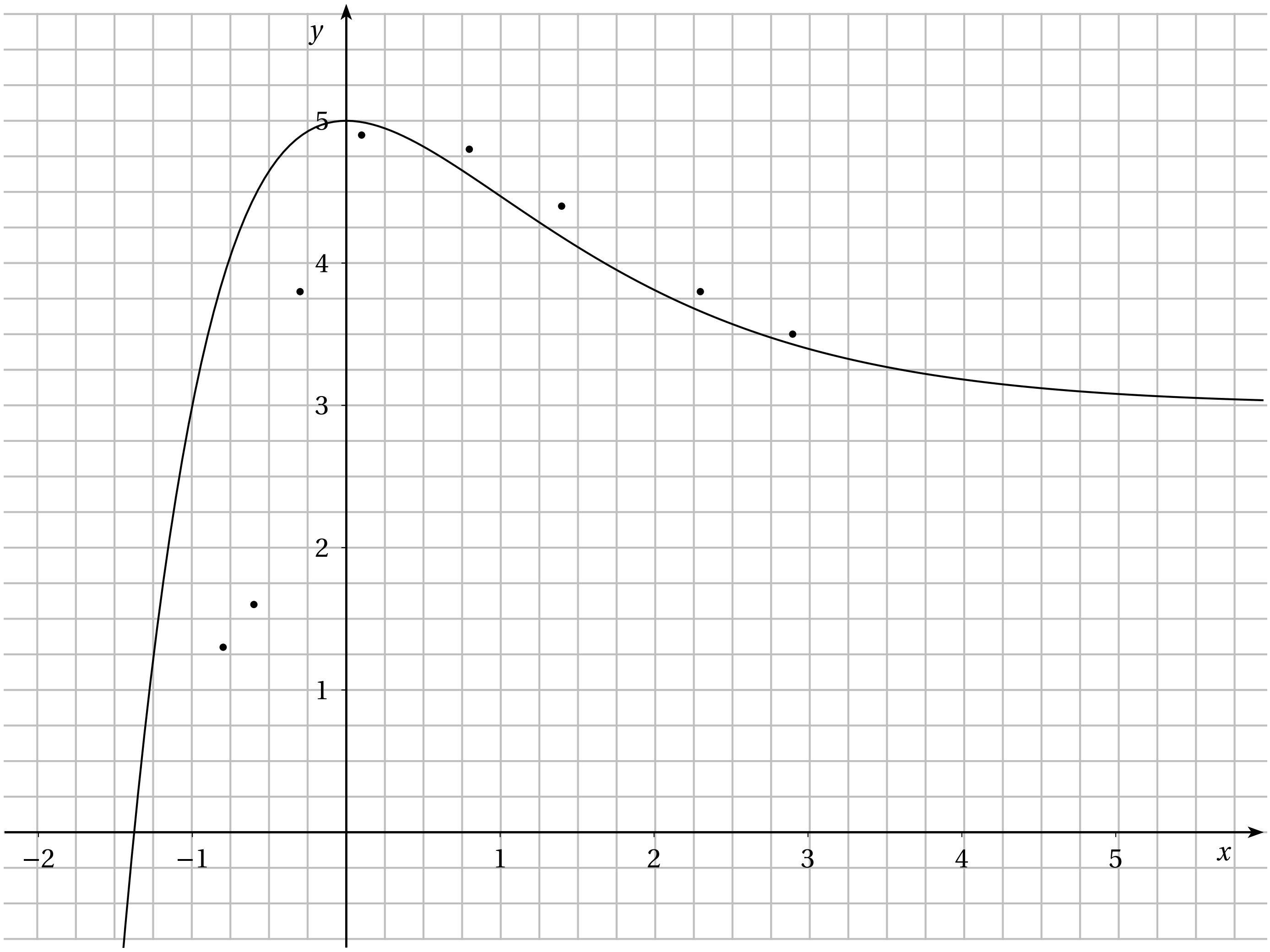
c. En déduire la règle de décision de ce test.

d. D'après l'échantillon étudié, peut-on au seuil de 5 % conclure que la moyenne des temps d'attente n'est pas supérieure à 4 minutes ?

Annexe (à rendre avec la copie)

Exercice 1

Sur le graphique ci-dessous sont représentées :
– Une courbe $\mathscr{C}$, utilisée dans la partie A de l'exercice 1.
– Un nuage de points utilisés dans la partie B de l'exercice 1.
(Les coordonnées des points de ce nuage sont données dans le tableau figurant sous le graphique).



Partie C

1) Coordonnées du nuage de points

x	2,3	1,4	−0,6	2,9	−0,3	−0,8	0,8	0,1
y	3,8	4,4	1,6	3,5	3,8	1,3	4,8	4,9
$z=(y-3)\mathrm{e}^x$								

Retour au sommaire : 5

Groupement C, mai 2010

Exercice 1 **12 points**

Les deux parties A et B peuvent être traitées de façon indépendante.

Partie A

1. **a.** Résoudre l'équation différentielle : $2y'' + y' - y = 0$ où y est une fonction de la variable réelle x, définie et deux fois dérivable sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels, y' est la fonction dérivée de y et y'' est la fonction dérivée seconde de y.

   b. Déterminer les nombres réels a et b pour que la fonction g définie sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels par $g(x) = ax + b$ soit une solution de l'équation différentielle :

$$2y'' + y' - y = -x + 2. \qquad \text{(E)}$$

   c. En déduire les solutions de l'équation (E) sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels.

2. Déterminer la solution f de l'équation (E) qui vérifie $f(0) = 0$ et $f'(0) = 0$.

Partie B

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = \mathrm{e}^{-x} + x - 1$.
On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormal $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ d'unité graphique 2 cm.

1. **a.** Calculer $f'(x)$ et étudier son signe.

   b. Déterminer la limite de f en $+\infty$.

   c. Dresser le tableau de variation de la fonction f.

2. **a.** Montrer que la droite D d'équation $y = x-1$ est asymptote à la courbe $\mathscr{C}$ au voisinage de $+\infty$.

   b. Étudier la position de la courbe $\mathscr{C}$ par rapport à la droite $\mathscr{D}$.

   c. Tracer l'asymptote $\mathscr{D}$ et la courbe $\mathscr{D}$.

   d. Calculer $\int_0^2 \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$ et en déduire l'aire $\mathfrak{A}$, en cm^2, de la portion du plan délimitée par la courbe $\mathscr{C}$, la droite $\mathscr{D}$ et les droites d'équation $x = 0$ et $x = 2$. On donnera la valeur exacte puis la valeur décimale arrondie au centième de l'aire $\mathfrak{A}$.

Exercice 2 **10 points**

Les deux parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.
Les résultats approchés sont à arrondir à 10^{-2}.

Une entreprise fabrique en très grande série une pièce technique de précision en matière plastique. Les questions posées se rapportent à la mesure d'une des cotes de cette pièce.

A Loi normale

Soit X la variable aléatoire qui, à chaque pièce prélevée au hasard dans la production, associe sa cote en millimètres.
On suppose que X suit la loi normale de moyenne $\mu = 60,3$ et d'écart-type σ.
On qualifie de conforme toute pièce dont la cote est comprise entre 59,5 mm et 61,1 mm.

1. Dans cette question on pose $\sigma = 0,4$. Calculer la probabilité qu'une pièce prélevée au hasard dans la production soit conforme.

2. Quelle valeur faut-il donner à l'écart-type σ pour que la probabilité d'obtenir une pièce conforme soit égale à $0,99$.

B Loi binomiale et loi de Poisson

On admet que 95 % des pièces produites sont conformes.
On note Y la variable aléatoire qui, à tout échantillon de 80 pièces prises au hasard dans la production, associe le nombre de pièces non conformes.
La production est assez importante pour qu'on puisse assimiler tout échantillon de 80 pièces à un échantillon aléatoire prélevé avec remise.

1. Justifier que la variable aléatoire Y suit une loi binomiale dont on déterminera les paramètres.

2. Calculer la probabilité que l'on ait exactement trois pièces non conformes.

3. On considère que la loi Y peut-être approchée par une loi de Poisson.

a. Donner le paramètre de cette loi.

b. Calculer la probabilité d'obtenir au plus trois pièces non conformes.

Retour au sommaire : 5

Groupement C, mai 2011

Exercice 1 **11 points**

Les deux parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante

Partie A : Résolution d'une équation différentielle

On considère l'équation différentielle

$$(E): \quad y'' + 2y' + y = 2$$

dans laquelle y désigne une fonction de la variable réelle x, définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, y' désigne la fonction dérivée de y, et y'' désigne sa dérivée seconde.

1. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle

$$(E_0): \quad y'' + 2y' + y = 0.$$

2. Soit un réel b. On définit sur $\mathbb{R}$ la fonction constante g par : $g(x) = b$.
   Déterminer b pour que la fonction g soit une solution particulière de l'équation (E).
3. En déduire les solutions de l'équation (E).
4. Déterminer la fonction f, solution particulière de l'équation (E) sur $\mathbb{R}$, qui vérifie les conditions : $f(0) = 3$ et $f\left(-\dfrac{1}{2}\right) = 2$.

Partie B : Étude d'une fonction

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (2x+1)\mathrm{e}^{-x} + 2.$$

On appelle $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ d'unité graphique 2 cm.
La courbe $\mathscr{C}$ est représentée en annexe qui devra être rendue avec la copie.

1. Déterminer la limite de la fonction f en $-\infty$.
2. a. En écrivant $f(x) = 2x\mathrm{e}^{-x} + \mathrm{e}^{-x} + 2$, déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.
   b. En déduire l'existence d'une asymptote D à $\mathscr{C}$ dont on donnera une équation.
   c. Tracer D sur le graphique fourni en annexe.
3. a. On appelle f' la fonction dérivée de f sur $\mathbb{R}$.
   Montrer que pour tout réel x, $f'(x) = (1-2x)\mathrm{e}^{-x}$.
   b. Étudier les variations de la fonction f et dresser son tableau de variations sur $\mathbb{R}$.
4. Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$F(x) = (-2x-3)\mathrm{e}^{-x} + 2x.$$

   a. Vérifier que F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.
   b. Calculer la mesure $\mathscr{A}$, en cm^2, de l'aire du domaine délimité par la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses, et les droites d'équation $x = 0$ et $x = 2$. On donnera la valeur exacte puis la valeur arrondie au centième de $\mathscr{A}$.

Exercice 2 **9 points**

Les trois parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante

Les valeurs approchées sont à arrondir à 10^{-3}.

Une usine fabrique en grande série des disques de diamètre théorique 238 millimètres.

Partie A

Un disque est considéré comme conforme pour son diamètre si ce diamètre, exprimé en mm, est dans l'intervalle [237,18 ; 238,82]. Dans le cas contraire, le disque est non-conforme.

On définit par X la variable aléatoire qui à tout disque produit associe son diamètre en mm. On admet que X suit la loi normale de moyenne 238 et d'écart type $0,4$.
Calculer la probabilité qu'une pièce prise au hasard dans la production soit conforme pour son diamètre.

Partie B

On considère dans cette partie un stock important de disques. On suppose que 4 % des disques de ce stock n'ont pas un diamètre conforme.
On prélève au hasard dans ce stock des lots de 50 disques pour vérification du diamètre.
Le nombre de disques de ce stock est suffisamment important pour que l'on puisse assimiler chaque prélèvement à un tirage avec remise de 50 disques.
On définit par Y_1 la variable aléatoire qui à chaque lot de 50 disques associe le nombre de disques non-conformes pour leur diamètre.

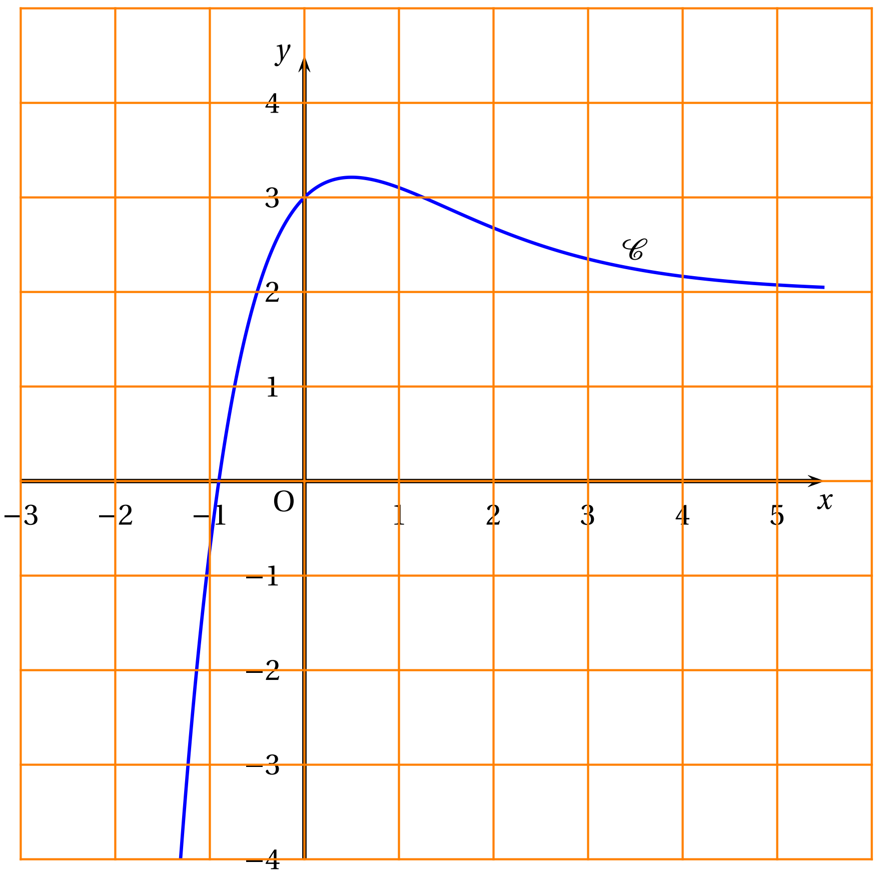
1. Justifier que Y_1 suit une loi binomiale dont on donnera les paramètres.
2. On prélève un lot de 50 disques. Calculer la probabilité que tous les disques de ce lot aient un diamètre conforme.
3. Dans cette question, on décide d'approcher Y_1 par une variable aléatoire Y_2 qui suit une loi de Poisson de paramètre λ.
   a. Justifier que $\lambda = 2$.
   b. À l'aide de l'approximation de Y_1 par Y_2, calculer la probabilité que le lot prélevé ait au plus 3 disques non-conformes pour leur diamètre.

Partie C

Une grande quantité de disques est livrée à un client. Celui-ci se propose de construire un test bilatéral au risque de 5 %, afin de vérifier si la moyenne μ de l'ensemble des diamètres des disques de la livraison est égale à 238 mm.
On désigne par $\overline{Z}$ la variable aléatoire qui à tout échantillon de 45 disques prélevé dans la livraison associe la moyenne des diamètres de ces 45 disques (la livraison est suffisamment importante pour que l'on puisse assimiler ces prélèvements à des tirages avec remise).
L 'hypothèse nulle est H_0 : « $\mu = 238$ ».

1. Quelle est l'hypothèse alternative H_1 ?
2. Sous l'hypothèse H_0, on suppose que la variable aléatoire $\overline{Z}$ suit la loi normale de moyenne 238 et d'écart type $0,06$.
   Déterminer sous cette hypothèse le réel h tel que : $P(238 - h \leqslant \overline{Z} \leqslant 238 + h) = 0,95$.
3. Énoncer la règle de décision du test.
4. On prélève au hasard un échantillon 45 disques dans la livraison. La moyenne des diamètres des disques de cet échantillon est $\overline{z} = 237,91$ mm.
   Peut-on, au seuil de 5 %, conclure que la moyenne des disques de la livraison est de 238 mm ?

Annexe (à rendre avec la copie)

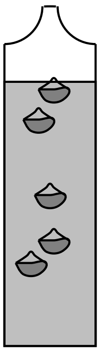


Retour au sommaire : 5

Groupement C, mai 2012

Exercice 1 **9 points**

Les trois parties de cet exercice peuvent être traitées indépendamment



Le thermomètre de Galilée est composé d'un cylindre en verre clos rempli d'un liquide dans lequel on a placé des petites boules de même volume et de masses différentes. Lorsque la température du liquide varie, les boules vont monter ou descendre, indiquant ainsi la température ambiante.

Partie 1

Lors de la construction d'un tel thermomètre, l'étude de la chute d'une boule dans un fluide conduit à l'équation différentielle :

$$(\mathrm{E}) : \ y' + \frac{1}{2}y = \frac{13}{2}$$

où y est une fonction de la variable t, définie et dérivable sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ et où y' est la fonction dérivée de y.

1. Résoudre l'équation différentielle $y' + \frac{1}{2}y = 0$.
2. Déterminer le réel k tel que la fonction g, définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par $g(t) = k$, soit une solution particulière de l'équation (E).
3. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E).
4. Déterminer la fonction f, définie sur $[0\ ;\ +\infty[$, solution de l'équation différentielle (E) qui vérifie $f(0) = 0$.

Partie 2

On considère la fonction f définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par $f(t) = 13\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t}\right)$.

Le plan est muni d'un repère orthogonal. La courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction f est représentée sur le graphique joint en annexe 1, à rendre avec la copie.

1. Soit f' la fonction dérivée de la fonction f sur $[0\ ;\ +\infty[$. Calculer $f'(t)$.
2. Étudier les variations de la fonction f sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.
3. Démontrer que $\mathscr{C}$ admet une asymptote horizontale $\mathscr{D}$ dont on précisera une équation.
4. Déterminer une équation de la tangente T à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0. Tracer T sur le graphique joint en annexe 1, à rendre avec la copie.

Partie 3

On admet que la vitesse de chute de la boule à l'instant t est égale à $f(t)$. La vitesse est exprimée en mm.s^{-1} et le temps est donné en secondes.

1. Déterminer graphiquement à partir de quel instant la vitesse de chute de la boule dépasse 10 mm.s^{-1}.
2. Retrouver le résultat précédent par le calcul.
3. Calculer la vitesse moyenne V_m de chute de la boule entre les instants $t = 2$ et $t = 4$. On donnera une valeur exacte puis une valeur approchée à $0,01$ près.

   On rappelle que $V_m = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_2^4 f(t)\,\mathrm{d}t$.

Exercice 2 **11 points**

Les quatre parties de cet exercice peuvent être traitées indépendamment

Une usine fabrique des pièces en bois dont la cote principale C doit être égale à 15 mm.

Partie A

Pour un réglage donné de la machine-outil qu'il utilise pour la réalisation de ces pièces, un opérateur s'est aperçu que la cote, obtenue dans les conditions de mise en œuvre sur un chantier, varie en fonction du taux d'humidité du bois, lors du travail en atelier. Il réalise quelques mesures, dont les résultats sont donnés dans le tableau suivant :

Rang i	1	2	3	4	5	6
t_i : taux d'humidité	11,2	11,6	12	12,4	12,8	13
C_i : cote (en mm)	15,25	15,17	15,07	14,93	14,82	14,81

Le nuage de cette série statistique $(t_i\ ;\ C_i)$ est donné en annexe 2, à rendre avec la copie.

1. Donner l'équation de la droite $\mathscr{D}$ d'ajustement de C en t, obtenue par la méthode des moindres carrés. Les coefficients seront arrondis à 10^{-3} près.
2. Tracer la droite $\mathscr{D}$ sur le graphique fourni en annexe 2, à rendre avec la copie.
3. Avec le réglage donné de la machine, si l'on se réfère à cet ajustement, donner, par la méthode de votre choix, le taux d'humidité du bois utilisé pour obtenir la cote attendue (c'est-à-dire 15 mm).

Partie B

Dans cette usine, on maintient dorénavant le taux d'humidité du bois à une valeur constante.
Les pièces en bois sont fabriquées en grande série dans deux ateliers SUD et NORD.
L'atelier SUD produit 100 pièces par jour et l'atelier NORD produit 400 pièces par jour.
Après fabrication, on constate que 2 % des pièces produites par l'atelier SUD et 3 % de celles de l'atelier NORD présentent un défaut de finition.
À la fin de la journée, on choisit au hasard une pièce dans la production totale de la journée.
Calculer la probabilité que cette pièce ne présente aucun défaut de finition.

Partie C

On s'intéresse, dans cette partie, aux pièces fabriquées qui n'ont aucun défaut de finition.
On admet que la variable aléatoire qui donne la cote C des pièces suit une loi normale de moyenne 15 et d'écart type σ.
Une pièce est acceptée si sa cote se situe dans l'intervalle [14,9 ; 15,1].

1. Quelle est la probabilité qu'une pièce soit acceptée, lorsque $\sigma = 0,05$?
2. Déterminer la valeur de σ pour que la probabilité qu'une pièce soit refusée soit égale à $0,002$.

Partie D

Les responsables de l'usine souhaitent contrôler, à l'aide d'un test bilatéral au seuil de risque de 5 %, que la cote moyenne de l'ensemble des pièces de la production de l'usine est bien égale à 15 mm.
Pour cela, ils projettent de réaliser un tirage d'un échantillon de 50 pièces de la production.
On admet pour la suite que les tirages d'un tel échantillon sont des tirages avec remise.

1. Donner l'hypothèse nulle H_0 et l'hypothèse alternative H_1 qui seront utilisées pour ce test.

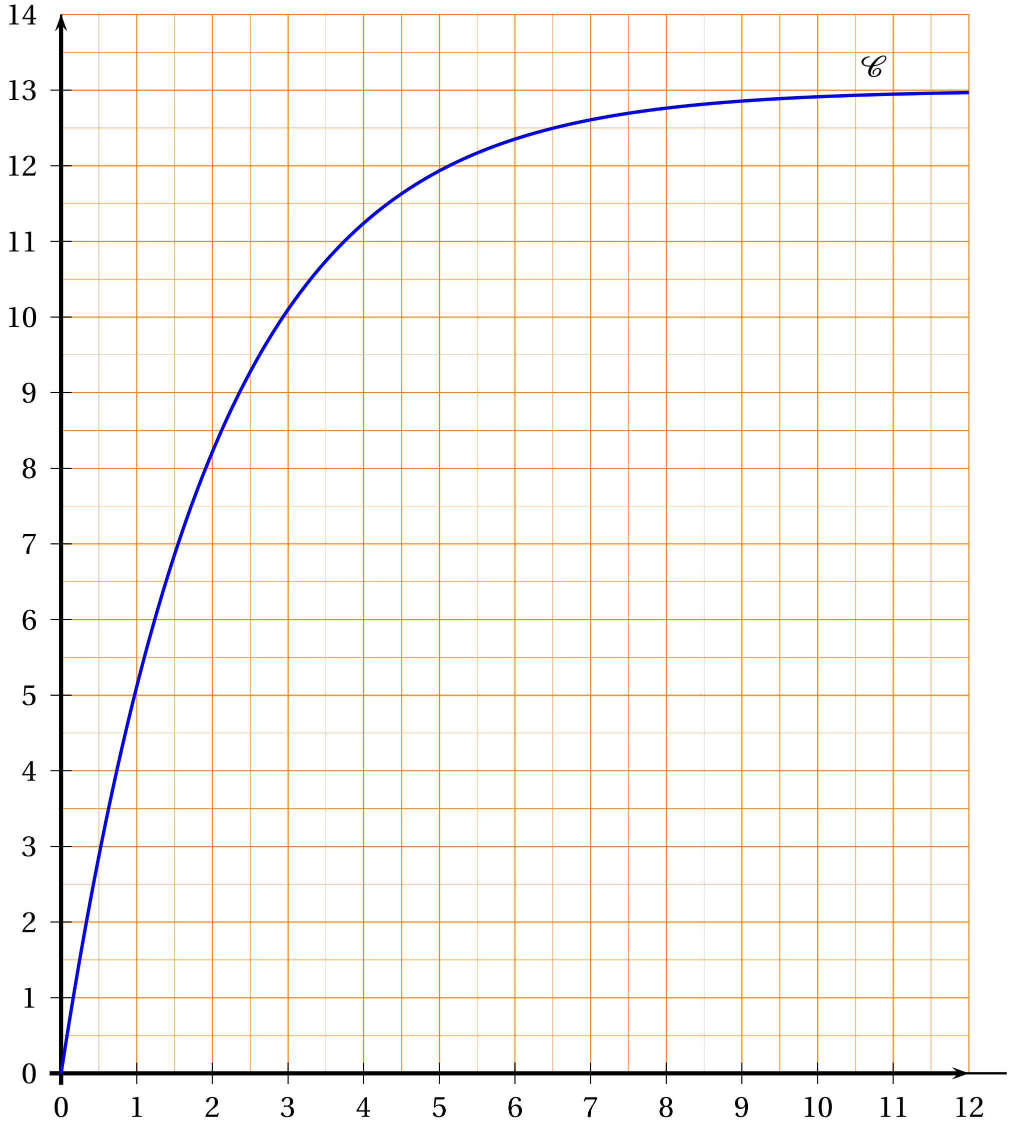
   On appelle $\overline{\mathrm{C}}$ la variable aléatoire qui, à tout échantillon de 50 pièces, associe la cote moyenne des pièces de l'échantillon.

   On admet que, sous l'hypothèse nulle, $\overline{\mathrm{C}}$ suit la loi normale de moyenne 15 et d'écart type $0,02$.
2. **a.** Déterminer le réel h tel que $P\left(15 - h \leqslant \overline{\mathrm{C}} \leqslant 15 + h\right) = 0,95$.

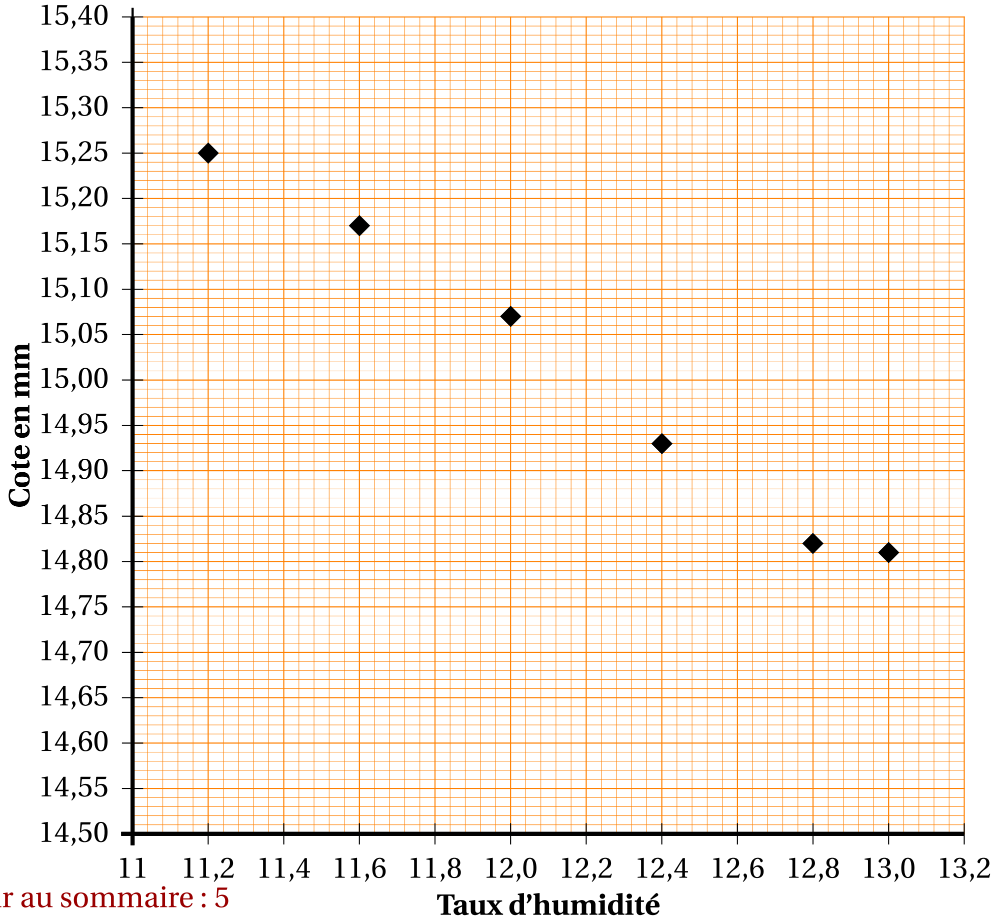
   b. Énoncer la règle de décision du test.
3. Les responsables disposent, pour ce test, d'un échantillon de 50 pièces. La cote moyenne des pièces de cet échantillon est $15,02$.

   Au vu de cet échantillon, peuvent-ils considérer que la cote moyenne de l'ensemble des pièces de la production est égale à 15 mm ?

ANNEXE 1, À RENDRE AVEC LA COPIE



ANNEXE 2, À RENDRE AVEC LA COPIE



Retour au sommaire : 5

Groupement C, mai 2013

Exercice 1 **10 points**

La farine est classée selon des « types » définis en fonction du taux de cendres, c'est-à-dire en fonction du taux de minéraux présent dans la farine. Cette teneur en matière minérale est obtenue par une analyse qui consiste à brûler la farine et à peser le résidu : « les cendres ». Plus la farine est blanche, plus le taux de cendres est faible. Quelques exemples de types de farine courants sont répertoriés dans le tableau ci-dessous :

Type de farine	Taux de cendres en %	Nom commun
T 55	entre 0,5 et 0,6	Farine blanche
T 65	entre 0,62 et 0,75	Farine bise
T 80	entre 0,75 et 0,9	Farine semi-complète
T 110	entre 1 et 1,2	Farine complète

Le problème porte sur l'étude de la production de la farine semi-complète d'une minoterie.

Partie 1

Dans un souci de contrôle de la qualité de la production de sa farine semi-complète, une minoterie décide de procéder à un contrôle du taux de cendres.

Le contrôle consiste à prélever 100 g de farine dans un paquet pris au hasard dans la production de farine semi-complète et à analyser ces 100 g.

Un paquet de farine semi-complète est conforme si la masse du résidu, pour les 100 g de farine prélevés, est comprise entre 750 mg et 900 mg.

On appelle X la variable aléatoire qui, à tout prélèvement de 100 g de farine d'un paquet, associe la masse du résidu obtenu en mg. On suppose que X suit la loi normale d'espérance 825 et d'écart type $32,6$.

Déterminer la probabilité qu'un paquet de farine, pris au hasard dans la production de farine semi-complète, soit conforme.

Partie 2

Dans cette partie, on admet que 2 % des paquets de la production de farine semi-complète ne sont pas conformes. On choisit au hasard un lot de 50 paquets de farine semi-complète dans la production. On admet que la production est suffisamment importante pour que ce choix puisse être assimilé à un tirage avec remise de 50 paquets.
On appelle Y la variable aléatoire égale au nombre de paquets du lot non conformes au type T 80, c'est-à-dire de farine semi-complète.

1. Quelle est la loi suivie par Y ? Justifier.
2. Calculer la probabilité qu'il y ait au plus un paquet non conforme dans le lot.
3. On considère que la loi suivie par Y peut être approchée par une Loi de Poisson.
   a. Déterminer le paramètre λ de cette loi de Poisson.

b. À l'aide de cette loi de Poisson, calculer la probabilité qu'il y ait moins de quatre paquets non conformes dans le lot.

Partie 3

Une nouvelle qualité de blé est utilisée dans la minoterie pour fabriquer de la farine semi-complète. Afin de procéder à d'éventuels réglages des machines, on veut tester si la moyenne m de la masse des résidus des prélèvements de 100 g de farine est toujours de 825 mg.
Pour cela, on construit un test d'hypothèse bilatéral. On suppose que la variable aléatoire $\overline{Z}$, qui, à tout prélèvement de 50 paquets choisis au hasard dans la production utilisant la nouvelle qualité de blé, associe la moyenne des masses des résidus des prélèvements de 100 g par paquet, suit une loi normale d'espérance m et d'écart type $4,6$.

On choisit l'hypothèse nulle H_0 : « $m = 825$ ».

1. Préciser l'hypothèse alternative H_1.
2. Calculer le réel h tel que $P(825 - h \leqslant \overline{Z} \leqslant 825 + h) = 0,95$.
3. Énoncer la règle de décision permettant d'utiliser ce test.
4. On prélève au hasard 50 paquets dans la production réalisée avec la nouvelle qualité de blé. La moyenne des masses des résidus des prélèvements de 100 g par paquet est 860 mg.
   Que peut-on conclure au risque de 5 % ?

Exercice 2 **10 points**

Dans une entreprise, lors d'une intervention sur la sécurité routière, on s'intéresse au taux d'alcool dans le sang. Dans cet exercice, ce taux sera utilisé sans précision de l'unité.

Partie 1 : *Taux d'alcool, deux exemples*

Le tableau suivant donne les quantités d'alcool contenues dans certaines boissons alcoolisées.

Consommation	Quantité d'alcool (en g)
Un verre de 25 cl de bière	13 g
Un verre de 10 cl de vin	8 g
Une flûte de champagne	8 g
Un verre de 4 cl de whisky	13,2 g
Un verre de 5 cl d'apéritif	9 g

Environ une heure après ingestion, on peut estimer le taux d'alcool dans le sang d'une personne, en fonction de son poids P, en kilogrammes, de la quantité d'alcool ingérée Q, en grammes, et d'un coefficient de diffusion K, à l'aide de la formule suivante :

$$T = \frac{Q}{P \times K}$$

On admet que $K = 0,7$ pour les hommes et que $K = 0,6$ pour une femme.

1. À l'aide de la formule, estimer le taux d'alcool dans le sang, environ une heure après ingestion, d'un honme de 75 kg ayant consommé un verre de 25 cl de bière, deux verres de 10 cl de vin et une flûte de champagne.
2. Estimer la quantité d'alcool ingérée par une femme de 55 kg dont le taux d'alcool mesuré est 0,5 une heure après ingestion.

Partie 2 : *Résolution d'une équation différentielle*

On considère l'équation différentielle, notée E,

$$y' + y = 2\mathrm{e}^{-t},$$

où y désigne une fonction de la variable réelle t, définie et dérivable sur l'intervalle $[0,025\,;\,+\infty[$.

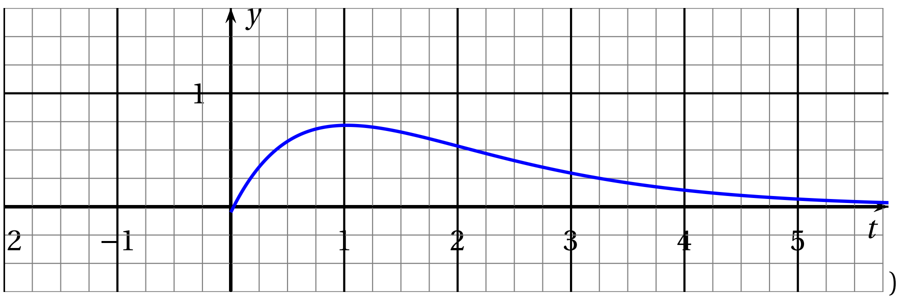
1. Résoudre l'équation différentielle $y' + y = 0$.
2. Déterminer la valeur du réel a telle que la fonction g définie sur l'intervalle $[0,025\,;\,+\infty[$ par $g(t) = at\mathrm{e}^{-t}$ soit une solution particulière de l'équation différentielle E.
3. En déduire la solution générale de l'équation différentielle E.
4. Déterminer la fonction f solution de l'équation différentielle E qui vérifie $f(0,025) = 0$.

Partie 3 : *Lectures graphiques*

Une personne a ingéré une certaine quantité d'alcool. On s'intéresse à l'évolution du taux d'alcool dans le sang de cette personne, en fonction du temps t, en heures.
Compte tenu du délai d'absorption par l'organisme, le taux d'alcool dans le sang de cette personne est donné par la fonction f définie sur $[0,025\,;\,+\infty[$ par

$$f(t) = (2t - 0,05)\mathrm{e}^{-t}.$$

La représentation graphique $\mathscr{C}_f$ de la fonction f dans un repère orthonormal est fournie ci-dessous.



1. Déterminer, à l'aide du graphique ci-dessus, pendant combien de temps le taux d'alcool dans le sang de cette personne reste supérieur à 0,5.
2. Déterminer, à l'aide du graphique, à quel instant le taux est maximum et donner ce maximum.

Partie 4 : *Étude d'une fonction*

1. On désigne par f' la fonction dérivée de la fonction f. Montrer que
$f'(t) = (2,05 - 2t)\mathrm{e}^{-t}$.

2. Étudier le signe de $f'(t)$ et en déduire la valeur exacte du maximum de la fonction f.

3. Démontrer que la fonction F définie sur $[0,025\ ;\ +\infty[$ par

$$F(t) = (-2t - 1,95)\mathrm{e}^{-t}$$

est une primitive de la fonction f sur $[0,025\ ;\ +\infty[$.

4. On considère $T_m = \frac{1}{2}\int_2^4 f(t)\,\mathrm{d}t$.

T_m est le taux d'alcool moyen entre les instants $t = 2$ et $t = 4$.

Calculer la valeur exacte de T_m et en donner une valeur arrondie à $0,01$ près.

Retour au sommaire : 5

Index