SUR UNE QUESTION DE PROBABILITÉS TRAITÉE PAR D'ALEMBERT;

Par M. Delannoy.

Dans un numéro récent du *Bulletin de la Société mathématique* (t. XXIII, p. 185), M. Maupin cherche à expliquer, par des omissions de facteurs, les erreurs commises par d'Alembert dans la résolution de certains problèmes de probabilités. Cette explication n'est pas admissible, car les formules données par d'Alembert ne ressemblent en rien aux formules véritables.

Il faut reconnaître que d'Alembert s'est complètement trompé, et cela n'a rien d'étonnant, car, tout grand mathématicien qu'il fût, il n'entendait rien aux questions de probabilités ([1]). La preuve, c'est qu'il ne voulut jamais admettre $\frac{3}{4}$ pour la probabilité d'amener une fois *pile* en deux coups, au jeu de *pile ou face ;* il soutenait que la probabilité était $\frac{2}{3}$, disant qu'il faut réduire à une les deux combinaisons qui donnent *pile* au premier coup, puisque dès que *pile* est venu le jeu est fini et le second coup est compté pour rien.

Bien plus, il n'était pas démontré, pour d'Alembert, que la probabilité d'un événement quelconque ne dût pas toujours être considérée comme égale à $\frac{1}{2}$ ([2]).

La solution bien connue du *problème des rencontres* nous donne les formules véritables.

Appelons Q_n le nombre des combinaisons dans lesquelles aucune des n cartes ne sort à son rang. On a

$$Q_n = n!\left[\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \ldots + \frac{(-1)^n}{n!}\right].$$

([1]) L'esprit de d'Alembert, habituellement juste et fin, déraisonnait complètement sur le Calcul des probabilités (J. Bertrand, *Calcul des probabilités*, Préface, p. x).

([2]) Il peut se faire qu'un événement arrive, il se peut aussi qu'il n'arrive pas ; ce sont deux cas possibles, un seul est favorable. Toute probabilité est donc $\frac{1}{2}$. L'erreur est grossière. D'Alembert a élevé l'objection et refusé de passer outre (J. Bertrand, *loc. cit.*, p. 2).

D.

Le nombre des combinaisons dans lesquelles p cartes sortent à leur rang est égal au produit de Q_{n-p} par le nombre C_n^p des combinaisons de n objets pris p à p.

Par suite, la probabilité qu'une carte *au moins* sortira à son rang est

$$1 - \frac{Q_n}{n!} = 1 - \left[\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{(-1)^n}{n!}\right].$$

La probabilité qu'une carte *seulement* sortira à son rang est

$$P_1 = \frac{n(n-1)!}{n!}\left[\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}\right]$$
$$= \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}.$$

La probabilité que deux cartes *au moins* sortiront à leur rang est

$$1 - \left(\frac{Q_n}{n!} + P_1\right) = 1 - \left\{\frac{(-1)^n}{n!} + 2\left[\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}\right]\right\}\text{(1)}.$$

La probabilité que deux cartes *seulement* sortiront à leur rang est

$$P_2 = \frac{n(n-1)}{1.2}\,\frac{(n-2)!}{n!}\left[\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{(-1)^{n-2}}{(n-2)!}\right]$$
$$= \frac{1}{2!}\left[\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{(-1)^{n-2}}{(n-2)!}\right].$$

On voit que ces formules ne ressemblent en rien à celles de d'Alembert et pas davantage à celles de M. Maupin.

Ces dernières sont cependant exactes [2], mais seulement pour le tirage dans les urnes considérées.

Or, le tirage dans ces urnes ne peut être assimilé au tirage des cartes. La probabilité de tirer une boule blanche dans la $p^{\text{ième}}$ urne

---

(1) Cette formule n'est pas complètement identique à celle qui se trouve à la page 95 du *Traité sur les jeux de hasard*. M. Laurent n'a pas donné le dernier terme de P_1, qui n'est pas $\frac{(-1)^n}{n!}$, comme il semble l'admettre dans la formule qu'il donne pour deux cartes *seulement* sortant à leur rang.

(2) Sauf celle du cas III du dernier problème. Il n'y a pas une seule chance de n'avoir que des boules noires. Il y en a $7!$ et la probabilité cherchée est $1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$ et, pour le cas général, $\frac{n-1}{n}$.

est toujours $\frac{1}{n-p+1}$, tandis que la probabilité du tirage de la carte p dépend des cartes sorties antérieurement. Cette probabilité est bien $\frac{1}{n-p+1}$ au $p^{\text{ième}}$ tirage si la carte p n'est pas déjà sortie ; mais elle est nulle si cette carte a été tirée à l'un des coups précédents. M. Maupin n'a pas tenu compte de cette éventualité, et c'est pour cela que ses formules ne sont pas applicables aux problèmes traités par d'Alembert (sauf pour le premier cas où l'on cherche la probabilité que toutes les cartes sortiront à leur rang).

Montmort, dans son *Essai d'analyse sur les jeux de hasard*, a cherché la probabilité qu'une carte *au moins* sortira à son rang (p. 54). Il a résolu le problème exactement pour les premières valeurs de n.

Je profite de l'occasion qui m'est offerte, pour rectifier une erreur (¹) commise par Montmort dans le même Traité (p. 107), à l'article *Brelan*.

Le *Brelan* se jouait avec un jeu de piquet dont on avait retiré les quatre *sept*, par conséquent avec 28 cartes.

Voici le problème, avec la solution de Montmort :

« *Pierre, Paul et Jacques jouent au Brelan, Pierre et Paul tiennent le jeu, et Jacques passe. La carte qui retourne est le roi de cœur ; Pierre est premier, il a l'as et le roi de carreau, et l'as de cœur. Paul a l'as, le neuf et le huit de trèfle. Deux des spectateurs, qui ont vu chacun les jeux de Pierre et de Paul et n'ont pas vu celui de Jacques, disputent pour savoir lequel des deux joueurs, Pierre et Paul, a le plus beau jeu et le plus d'espérance de gagner. L'un des deux, nommé Jean, parie pour Pierre ; l'autre, nommé Thomas, parie pour Paul. L'argent de la gageure est nommé* A. *On demande quel est le sort des deux spectateurs, Jean et Thomas, et ce qu'ils devraient mettre chacun au jeu pour parier sans avantage ni désavantage.*

» Il faut remarquer : 1° que Jean gagnera, si les trois cartes

---

(¹) Cette erreur a été reproduite dans le *Dictionnaire des jeux mathématiques* (p. 15).

de Jacques sont ou trois cœurs ou trois carreaux ; 2° qu'il gagnera encore si l'une des trois cartes étant un pique ou un trèfle, les deux autres cartes sont ou deux cœurs ou deux carreaux ; 3° que si l'une des trois cartes de Jacques est un cœur ou un carreau, les autres étant des piques, Jean aura gagné ; 4° qu'il gagnera encore si les trois cartes de Jacques sont un carreau, un cœur et un pique, et que dans toute autre disposition des cartes de Jacques il a perdu.

» Cela posé, il ne reste plus qu'à examiner combien il y a de hasards différents, qui donnent chacune de ces quatre dispositions différentes des trois cartes de Jacques. On trouvera, par les propositions 11, 12, 13, 14, qu'il y en a vingt pour la première, deux cent vingt pour la seconde, deux cent dix pour la troisième, et cent soixante-quinze pour la quatrième ; et, par conséquent, le sort de Jean sera $\frac{125}{266} = \frac{1}{2}A - \frac{4}{133}$, ce qui fait voir que la condition de Pierre est *moins* avantageuse que celle de Paul, et que Jean, pour parier également contre Thomas, devrait mettre au jeu 125 contre 141. »

Dans la seconde disposition des trois cartes de Jacques, l'énumération de Montmort est incomplète. Il faut dire :

2° Il gagnera encore si l'une des trois cartes étant un pique, ou un trèfle, *ou un carreau,* les deux autres sont des cœurs ; ou bien si l'une des trois cartes étant un pique, ou un trèfle, *ou un cœur,* les deux autres sont deux carreaux.

Le nombre des hasards correspondant à cette seconde disposition des trois cartes de Jacques est donc 320, au lieu de 220 ; par conséquent, le sort de Jean sera $\frac{145}{266} = \frac{1}{2}A + \frac{6}{133}$; ce qui fait voir que la condition de Pierre est *plus* avantageuse que celle de Paul, et que Jean, pour parier à chances égales contre Thomas, devrait mettre au jeu 145 contre 121.

(Extrait du *Bulletin de la Société mathématique de France,* t. XXIII ; 1895.)

22871 Paris. — Imprimerie GAUTHIER-VILLARS ET FILS, quai des Grands-Augustins, 55.