PUBLICATION N° 22 DU GROUPE INTER-IREM "LYCEES TECHNIQUES"

RECUEIL DE SUJETS AVEC CORRIGES
DE BTS DE LA FILIERE
MATERIAUX
DES SESSIONS DE 1989 à 1997

Université PARIS NORD

IREM - CSP

Avenue J.B. Clément
94430 VILLETANEUSE

UNIVERSITE PARIS-NORD - IREM

RECUEIL DE SUJETS AVEC CORRIGES DE BTS DE LA FILIERE MATERIAUX ENERGIE DES SESSIONS DE 1990 à 1997

ISBN 2 86240 0876

Retirage

1997

500 ex
8.00€

AVANT PROPOS

Cette brochure regroupe des exercices ou problèmes posés à des épreuves de BTS de la filière MATERIAUX - ENERGIE des sessions 1989 à 1997 . Certains des textes ont été modifiés pour améliorer la progressivité.

En page 2 figure le tableau de correspondance entre les modules de programmes et les programmes de certains BTS de la filière MATERIAUX .

On peut se reporter à ces modules pour obtenir la liste des travaux pratiques qui sont le champ des problèmes de l'examen.

Les formulaires officiels qui sont distribués avec les épreuves figurent à partir de la page 157.

SOMMAIRE

INDEX THEMATIQUE

ANALYSE

STATISTIQUE DESCRIPTIVE

PROBABILITES

STATISTIQUE INFERENTIELLE

VADEMECUM DES TEXTES DE PROGRAMMES DANS DES SECTIONS DE TECHNICIENS SUPERIEURS EN MATHEMATIQUES OCTOBRE 1991

sections de techniciens supérieurs	textes réglementaires		date d'effet		Formulaire B.O
	Arrêté	B. O	T.S.1	B.T.S	
Bâtiment	06.05.1988 08.03.1991 02.09.1991	04.05.1989 09.05.1991 19.09.1991	1987 1991	1989 1993	09.11.1989 fin 1993
Domotique	03.04.1989 02.09.1991	18.05.1989 19.09.1991	1987 1991	1989 1993	09.11.1989
Equipement Technique Energie	30.07.1986 02.09.1991	09.10.1986 19.09.1991	1986 1991	1988 1993	21.01.1988 fin 1993
Etude et Economie de la Construction	03.07.1987 06.05.1988 08.03.1991 02.09.1991	10.12.1987 30.06.1988 09.05.1991 19.09.1991	1987 1991	1989 1993	21.01.1988 fin 1993
Industries papetières	01.06.1988 02.09.1991	30.06.1988 19.09.1991	1986 1991	1988 1993	21.01.1988 fin 1993
Travaux publics	27.08.1987 06.05.1988 08.03.1991 02.09.1991 19.08.1993	17.12.1987 14.07.1988 09.05.1991 19.09.1991 30.09.1993	1987 dernière 1991 1993	1989 session 1993 1995	21.01.1988 en 1994 fin 1993

MODULES CHOISIS POUR DES SECTIONS DE TECHNICIENS SUPERIEURS MATERIAUX ENERGIE :

	Bâtiment	Domotique	Equipement technique-énergie	Etude et économie de la construction	Travaux publics
Nombres complexes	2	2	2	2	2
Suites et séries numériques				1ère F	
Fonctions d'une variable réelle	1	1	1	1	1
Calcul différentiel et intégral	2	2	2	2	2
Analyse spectrale: séries de Fourier					
Analyse spectrale: transformation de Laplace					
Équations différentielles	1	1	1	1	1
Fonctions de deux ou trois variables	1	1	1	1	1
Analyse des phénomènes exponentiels					
Modélisation géométrique					
Algèbre linéaire	1	1			
Organisation et traitement des données					
Statistique descriptive	1	1	1	1	1
Calcul des probabilités	2	2	2	2	2
Statistique inférentielle	2	2	2	2	2
Calcul vectoriel	1		1	1	
Configurations géométriques	1	1	1	1	
Courbes planes	1	1	1	1	

BÂTIMENT

Session 1989

EXERCICE 1 (9 points)

Pour la construction de maisons en Côte-d'Ivoire, on a utilisé des parpaings de géobéton, matériau obtenu en compressant de la terre. Un laboratoire d'Abidjan a réalisé des essais de résistance à la compression.

Le tableau suivant donne les mesures obtenues pour 13 murs (notés M_1,.......,M_{13}) constitués de parpaings provenant de la même fabrication. Les résistances sont exprimées en mégapascals.

	M_1	M_2	M_3	M_4	M_5	M_6	M_7	M_8	M_9	M_{10}	M_{11}	M_{12}	M_{13}
Résistance x_i des parpaings (en MPa)	6,17	6,5	3,08	3,58	3,33	4,08	3,3	3,92	4,33	4,5	6,33	3,83	5,42
Résistance y_i des murs (en MPa)	2,28	2,25	0,8	1,16	1,12	1,36	1,04	1,48	1,52	1,36	2,04	1,28	1,52

1° Représenter dans un repère orthogonal le nuage de points de coordonnées(x_i , y_i) associés à cette série statistique. On prendra les unités suivantes : en abscisse 2 cm pour 1 MPa ; en ordonnée 2,5 cm pour 1 MPa.

2° Utiliser la méthode des moindres carrés pour donner une équation de la forme $y = a\,x + b$ de la droite d'ajustement au nuage, c'est à dire de la droite de régression de y en x. Le coefficient directeur et le terme constant seront déterminés à 10^{-3} près.

3° Déterminer une valeur approchée à 10^{-3} près du coefficient de corrélation linéaire de série statistique de variables x et y.

4° Quelle résistance à la compression peut-on attendre pour un mur constitué de parpaings ayant une résistance à la compression de 5 MPa ?

EXERCICE 2 (11 points)

Un des objectifs de cet exercice est d'obtenir une valeur approchée d'une intégrale.

On considère la fonction numérique de la variable réelle x définie sur $]-1\,;1[$ par

$$f(x) = \frac{e^x}{\sqrt{x+1}}.$$

Soit $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j})$ (unité graphique : 5 cm).

A - Etude des variations de f, construction de sa courbe représentative

1° Déterminer $\lim\limits_{x\to-1} f(x)$.

2° Etudier les variations de f sur $]-1\,;1[$.

3° Ecrire le développement limité d'ordre 2 au voisinage de 0 de f .
En déduire une équation de la tangente T à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0.

4° Construire la tangente T et la courbe $\mathscr{C}$ dans le repère $(O\,;\vec{i},\vec{j})$.

B - Recherche d'une valeur approchée d'une intégrale

1° Etudier les variations de la fonction g définie sur $[0,\frac{1}{2}]$ par

$$g(x) = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2.$$

2° On se propose de tracer sur la figure de la partie A- la courbe représentative Γ de g .

a) Montrer que $\mathscr{C}$ et Γ ont même tangente au point d'abscisse 0.

b) Déterminer une valeur approchée décimale arrondie à 10^{-2} près des ordonnées des points de la courbe Γ d'abscisses respectives : 0,1 ; 0,2 ; 0,3 ; 0,4 ; 0,5 . Placer ces points sur la figure de la partie A - et vérifier ainsi que Γ coïncide pratiquement avec $\mathscr{C}$ sur $[0,\frac{1}{2}]$.

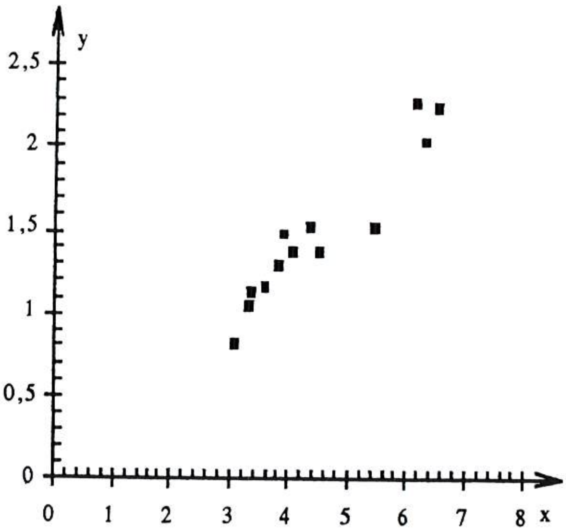
3° Pour déterminer l'aire de la partie de plan limitée par la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x=\frac{1}{2}$; on convient donc de remplacer le calcul de cette aire par celui de l'aire $\mathscr{S}$ de la partie du plan limitée par Γ , l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x=\frac{1}{2}$.

a) Calculer $\mathscr{S}$ en unités d'aire.

b) Donner une valeur approchée décimale, arrondie à 10^{-3} près, de $\mathscr{S}$, exprimée en cm^2 .

EXERCICE 1 :

1°



2° On obtient directement avec la calculatrice :

$y = 0{,}358\ x - 0{,}132$.

3° On obtient $r = 0{,}951$ à 10^{-3} près.

4° Avec $x = 5\ MP_a$ on obtient une résistance de $1{,}66\ MP_a$.

EXERCICE 2 :

A - 1° a) $\lim\limits_{x \to -1} e^{x} = e^{-1}$, $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{1}{\sqrt{x+1}} = +\infty$

donc d'après un théorème sur la limite d'un produit, $\lim\limits_{x \to -1} f(x) = +\infty$, $\mathscr{C}$ admet la droite d'équation

$x = -1$ comme asymptote .

2° f est un quotient de fonctions dérivables sur $]-1, 1]$ donc dérivable sur $]-1, 1]$. Pour tout x de $]-1, 1]$, $f'(x) = \dfrac{e^{x}\sqrt{x+1} - \dfrac{e^{x}}{2\sqrt{x+1}}}{x+1}$,

$f'(x) = \dfrac{2e^{x}(x+1) - e^{x}}{2(x+1)\sqrt{x+1}}$, $f'(x) = \dfrac{2(x+1)\ e^{x}}{2(x+1)\sqrt{x+1}}$,

Pour tout x de $]-1, 1]$, $f'(x)$ a le signe de $2x + 1$.

Le signe de $f'(x)$ est donné par :

x	-1		$-\frac{1}{2}$		1
$2x + 1$		$-$	0	$+$	

f admet un extremum pour $x = -\frac{1}{2}$, $f(-\frac{1}{2}) = \sqrt{\frac{2}{e}}$.

D'où le tableau de variation :

x	-1		$-\frac{1}{2}$		1
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$\sqrt{\frac{2}{e}}$	↗	$\frac{e}{\sqrt{2}}$

3° Pour tout x de $]-1, 1]$, $f(x) = \dfrac{e^{x}}{\sqrt{x+1}}$,

$f(x) = \dfrac{e^{x}}{(x+1)^{0,5}}$, $f(x) = e^{x}(x+1)^{-0,5}$

Le formulaire donne directement

$e^{x} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + x^2\,\varepsilon(x)$, avec $\lim\limits_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$.

$(1+x)^{\alpha} = 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + x^2\,\varepsilon(x)$

avec $\lim\limits_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$.

$(1+x)^{-0,5} = 1 + \dfrac{-\frac{1}{2}}{1!}x + \dfrac{-\frac{1}{2}(-\frac{1}{2}-1)}{2!}x^2 + x^2\varepsilon(x)$

avec $\lim\limits_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$.

$(1+x)^{-0,5} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + x^2\varepsilon(x)$

avec $\lim\limits_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$.

La partie régulière du développement limité de f(x) s'obtient en effectuant le produit des parties régulières des développements limités des deux facteurs en ne consevant que les termes de degré inférieur ou égal à deux.

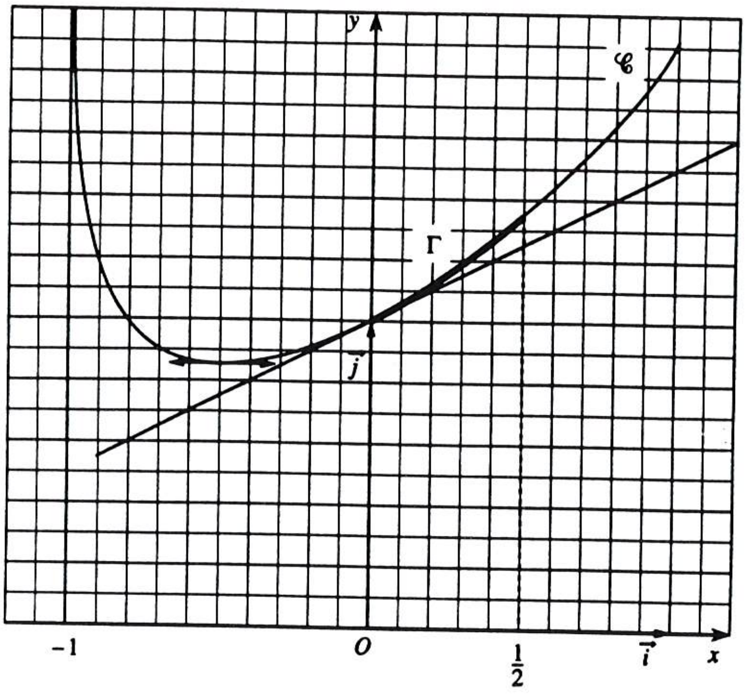
$(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!})(1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2) = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + ...$

$f(x) = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + x^2\,\varepsilon(x)$, avec $\lim\limits_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$

Une équation de la tangente T au point d'abscisse 0 est donnée par le développement limité d'ordre 1 au voisinage de 0 de f :

$$y = 1 + \frac{1}{2}x\ .$$

4°



B- 1° g est une fonction polynôme donc dérivable sur $[0, \frac{1}{2}]$, pour tout x de $[0, \frac{1}{2}]$, $g'(x) = \frac{1}{2} + \frac{3}{4}x$,

$g'(x) = \frac{3x + 2}{4}$ d'où le tableau de variation :

x	0	$\frac{1}{2}$
g '(x)	+	
g(x)	1 ↗	$\frac{43}{32}$

2° a) $\mathscr{C}$ et Γ ont en commun leur abscisse 0, puisque $g(0) = f(0) = 1$.

D'autre part $f'(0) = g'(0) = \frac{1}{2}$. $\mathscr{C}$ et Γ ont donc même tangente en ce point.

b)

x	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
g(x)	1,05	1,12	1,18	1,26	1,34

3° a) g est positive sur $[0, \frac{1}{2}]$ l'aire cherchée est donc en unités d'aire :

$$\mathscr{S} = \int_0^{\frac{1}{2}} g(x)\,dx$$

$$\mathscr{S} = \left[x + \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{3}x^3 \right]_0^{0,5},$$

$$\mathscr{S} = \frac{37}{64}.$$

b) L'unité d'aire est 25 cm^2 d'où

$\mathscr{S} \approx 14,453$ cm^2.

BÂTIMENT

Session 1990

EXERCICE 1

Une machine fabrique des vis pour la construction. On a mesuré les diamètres en millimètres d'un échantillon de 1000 vis. Les résultats sont consignés dans le tableau suivant :

Diamètres en mm	2,9	2,8	2,7	2,6	2,5	2,4	2,3	2,2	2,1	2	1,9
Effectifs	18	35	175	180	200	160	150	40	22	12	8

A. *Statistique.*

1. Calculer, à l'aide de la calculatrice, à 0,1 près par excès, la moyenne $\overline{x}$ et l'écart type σ de cette série statistique.

2. On considère qu'une vis est défectueuse si son diamètre est inférieur ou égal à 2,2 mm ou supérieur ou égal à 2,8 mm. Calculer le pourcentage de vis défectueuses fabriquées par la machine à partir de l'échantillon précédent.

B. *Probabilités.*

On admet que la probabilité qu'une vis prélevée au hasard dans la production de la machine observée soit défectueuse est 0,135. Soit Y la variable aléatoire qui associe à tout lot de 100 vis prises au hasard, le nombre de vis défectueuses de ce lot. La production est supposée suffisamment importante pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement exhaustif à un prélèvement avec remise.

1. Expliquer pouquoi Y suit une loi binomiale. Donner les paramètres de cette loi.

2. Calculer la probabilité qu'un lot de 100 vis prises au hasard ne contienne aucune vis défectueuse. Donner une valeur approchée du résultat à 10^{-7} près.

3. Calculer la probabilité, dans les mêmes conditions de prélèvement, qu'un lot de 100 vis contienne exactement 95 vis non défectueuses.
Donner une valeur approchée du résultat à 10^{-4} près.

EXERCICE 2 *(12 points)*

Le but de cet exercice est d'obtenir un encadrement de l'intégrale:

$$I = \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}x^2}\,dx.$$

1. Soit f la fonction numérique de variable réelle x définie sur [-1,1] par :

$$f(x) = e^{-\frac{1}{2}x^2}.$$

a) Vérifier que f est paire.

b) Etudier les variations de f.

c) Construire la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j}\,)$ d'unité graphique 5 cm sur chaque axe.

2. Donner à l'aide du graphique précédent une interprétation de l'intégrale :

$$J = \int_{-1}^{1} e^{-\frac{1}{2}x^2}\,dx.$$

Quelle propriété de f permet de déduire que $J = 2\int_{0}^{1} e^{-\frac{1}{2}x^2}\,dx$?

3. Du développement limité de e^t qui figure dans le formulaire, déduire les développements limités à l'ordre 4, puis à l'ordre 6 de f en 0. On note :

$g(x) + x^6\varepsilon(x)$, avec $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$, le développement limité à l'ordre 6 de f en 0,

et $h(x) + x^4\varepsilon(x)$, avec $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$, le développement limité à l'ordre 4 de f en 0.

4. On admet que, pour tout x de l'intervalle [0,1], on a : $g(x) \leq e^{-\frac{1}{2}x^2} \leq h(x)$.

En déduire un encadrement de l'intégrale : $\int_{0}^{1} e^{-\frac{1}{2}x^2}\,dx$,

puis de : $J = \int_{-1}^{1} e^{-\frac{1}{2}x^2}\,dx$, et enfin de : $I = \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}\,dx$.

5. La table de la loi normale du formulaire donne : $\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}x^2}\,dx \approx 0{,}6826$.

Vérifier que cette valeur est compatible avec l'encadrement trouvé à la question précédente.

EXERCICE 1

A. *Statistique.*

1. La calculatrice donne : $\overline{X} = 2{,}4931...$

d'où $\overline{X} \approx 2{,}5$ mm à 0,1 près par excès.

$\sigma = 0{,}188...$ d'où $\sigma \approx 0{,}2$ mm à 0,1 près par excès.

2. Le tableau donné montre qu'il y a :

18 + 35 = 53 vis de diamètre supérieur ou égal à 2,8 mm, 40 + 22 + 12 + 8 = 82 vis de diamètre inférieur ou égal à 2,2 mm, soit 53 + 82 = 135 vis défectueuses dans cet échantillon de 1000 vis, ce qui donne un pourcentage de 13,5% vis défectueuses dans cette production.

B. *Probabilités.*

1. Puisque le prélèvement est assimilé à un prélèvement avec remise, on considère qu'on est en présence d'une succession de cent épreuves génératrices d'événements indépendants, chacune ayant deux éventualités pour issue:

la vis est défectueuse avec la probabilité constante 0,135 ou bien la vis n'est pas défectueuse avec la probabilité 0,865.

La variable aléatoire Y donnant le nombre de vis défectueuses au cours de cent tirages suit donc la loi binomiale de paramètres n =100 et p = 0,135.

2.La variable aléatoire Y suit la loi $\mathcal{B}$ (100 ; 0,135).

On en déduit:

$P(Y = 0) = C_{100}^{0} \times 0{,}135^{0} \times 0{,}865^{100}$.

La calculatrice donne:

$P(Y = 0) \approx 5 \times 10^{-7}$ à 10^{-7} près.

3. Avec les mêmes conditions de prélèvement on obtient:

$P(Y = 5) = C_{100}^{5} \times 0{,}135^{5} \times 0{,}865^{95}$.

La calculatrice donne:

$P(Y = 5) \approx 35 \times 10^{-4}$ à 10^{-4} près.

EXERCICE 2

1. a) Pour tout x de [– 1, 1], –x appartient à [–1,1],

$f(-x) = e^{-\frac{1}{2}(-x)^2}$, $f(-x) = e^{-\frac{1}{2}x^2}$, $f(-x) = f(x)$.

La fonction f est donc paire.

b) • *Conséquence de la parité:* La fonction f est paire, sa courbe représentative dans un repère orthonormal est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées, on étudie donc la restriction de f à l'intervalle [0,1].

• *Calcul et étude du signe de la dérivée :*

Pour tout nombre réel x de [0,1] on a

$f'(x) = -x\,e^{-\frac{1}{2}(x)^2}$,

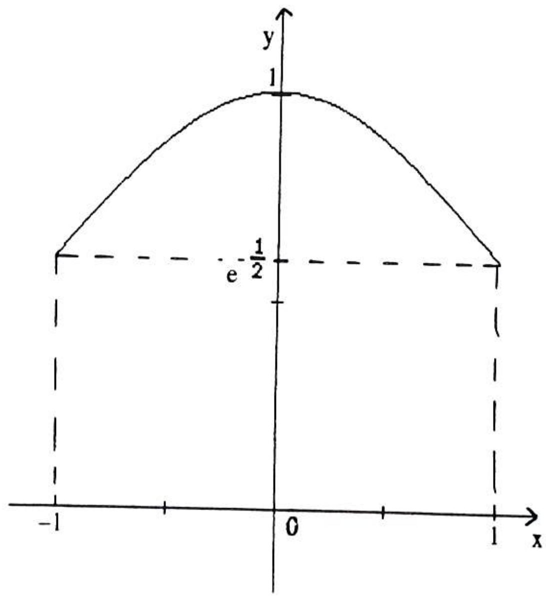
Pour tout nombre réel x de [0,1],

$x\,e^{-\frac{1}{2}(x)^2} \geq 0$ et $-x \leq 0$, $f'(x) \leq 0$ sur [0,1], et par suite f est décroissante sur cet intervalle.

• *Tableau de variation:*

x	0		1
f'	0	–	
f	1	↘	$e^{-\frac{1}{2}}$

c) Tracé de la courbe représentative de f :



2. • L'intégrale $J = \int_{-1}^{1} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx$ est l'aire, en unités d'aire, de la partie du plan limitée la courbe représentative de la fonction f, l'axe des abscisses et les droites d'équations x = -1 et x = 1.

• La fonction f est paire, sa courbe représentative est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées dans le orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$, la surface décrite ci-dessus admet l'axe des ordonnées pour axe de symétrie, donc :

$$J = 2\int_{0}^{1} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx.$$

3. On sait que pour tout nombre réel t on a:

$$e^{-\frac{1}{2}t^2} = 1 + t - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + t^3\varepsilon(t) \quad \text{avec} \quad \lim_{t \to 0} \varepsilon(t) = 0$$

Puisque $\lim_{x \to 0} (-\frac{1}{2}x^2) = 0$, on peut utiliser le développement précédent avec $t = -\frac{1}{2}x^2$.

On obtient alors, à l'ordre 4 :

$$e^{-\frac{1}{2}x^2} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{8} + x^4\varepsilon(x) \quad \text{avec} \quad \lim_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$$

Et à l'ordre 6 :

$$e^{-\frac{1}{2}x^2} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{8} - \frac{x^6}{48} + x^6\varepsilon(x) \quad \text{avec} \quad \lim_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$$

On en déduit alors :

$$g(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{8} - \frac{x^6}{48}, \quad h(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{8}$$

4. • Pour tout x de l'intervalle [0,1], on a :

$g(x) \leq e^{-\frac{1}{2}x^2} \leq h(x)$, soit :

$$1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{8} - \frac{x^6}{48} \leq e^{-\frac{1}{2}x^2} \leq 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{8}.$$

En intégrant ces inégalités sur l'intervalle [0,1] on obtient :

$$\left[x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{40} - \frac{x^7}{336}\right]_0^1 \leq \int_0^1 e^{-\frac{1}{2}x^2} dx \leq \left[x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{40}\right]_0^1$$

d'où :

$$1 - \frac{1}{6} + \frac{1}{40} - \frac{1}{336} \leq \int_0^1 e^{-\frac{1}{2}x^2} dx \leq 1 - \frac{1}{6} + \frac{1}{40}.$$

La calculatrice donne:

$1 - \frac{1}{6} + \frac{1}{40} - \frac{1}{336} = 0,85535...$

et $1 - \frac{1}{6} + \frac{1}{40} = 0,85833...$

On en déduit: $0,85535 \leq \int_0^1 e^{-\frac{1}{2}x^2} dx \leq 0,85834.$

• Puisque $J = 2\int_0^1 e^{-\frac{1}{2}x^2} dx$, on obtient :

$1,7107 \leq J \leq 1,71668.$

• $I = \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx$, donc $I = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} J.$

Or la calculatrice donne:

$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} = 0,39894...$ donc $0,39894 \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \leq 0,39895.$

La multiplication membres à membres des inégalités de même sens entre nombres positifs donne:

$1,7107 \times 0,39894 \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} J \leq 1,71668 \times 0,39895$

d'où: $0,6824 \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} J \leq 0,6849.$

5. On a $0,6824 \leq 0,6826 \leq 0,6849$.

La valeur 0,6826 donnée par la table de la loi normale est tout à fait compatible avec l'encadrement précédent.

BÂTIMENT

Session 1991

Exercice 1 (9 points)

L'entreprise MARTO est spécialisée dans la location de matériels pour le bâtiment et les travaux publics. Son parc de pelles mécaniques sur pneus comporte :
deux pelles "Poclain PY45", dont le prix de location TTC par jour est de 2.600 F *
deux pelles "Poclain 75P", dont le prix de location TTC par jour est de 3.000 F *
une pelle "Poclain 90P", dont le prix de location TTC par jour est de 3.600 F *
En relevant sur une longue période le nombre de pelles louées par jour, un gestionnaire de l'entreprise MARTO admet que, pendant l'hiver, il y a trois pelles louées chaque jour.
Dans ce qui suit on appelle "location" un sous ensemble de trois éléments de l'ensemble des cinq pelles.

1° Combien y a-t-il de " locations" possibles ?

2° Chaque "location" définit un événement élémentaire. L'observation sur une longue période conduit à admettre que tous les événements élémentaires sont équiprobables.
Calculer les probabilités respectives $P(E_1)$, $P(E_2)$, $P(E_3)$, $P(E_4)$, $P(E_5)$ des événements E_1, E_2, E_3, E_4, E_5, suivants :
a) E_1 : on a loué un jour donné deux pelles "PY45" et une pelle "75P" ;
b) E_2 : on a loué un jour donné deux pelles "PY45" et une pelle "90P" ;
c) E_3 : on a loué un jour donné une pelle de chaque type ;
d) E_4 : on a loué un jour donné deux pelles "75P" et une pelle "PY45" ;
e) E_5 : on a loué un jour donné deux pelles "75P" et une pelle "90P" .

3° On note X la variable aléatoire qui à chaque "location" associe le chiffre d'affaires par jour correspondant de l'entreprise MARTO.
Déterminer l'ensemble des valeurs prises par X.

4° Déterminer la loi de probabilité de X. (La représenter sous forme de tableau selon le modèle ci-dessous).

chiffre d'affaire pour un jour : x_i		. . .
$P(X = x_i)$		. . .

5° Calculer l'espérance mathématique de X notée E(X). Que représente E(X) ?

* tarifs au 01/01/91.

Exercice 2 (11 points)

A - Soit (E) l'équation différentielle $y' + y = 1 - e^{-x}$ où l'inconnue y est une fonction de la variable réelle x, définie et dérivable sur R.

1° Résoudre l'équation différentielle $(E_1) : y' + y = 0$.

2° Déterminer une fonction numérique u définie dérivable sur R telle que la fonction définie par $x \rightarrow y_0 = u(x)\, e^{-x}$ soit solution de (E) ?

3° Quel est l'ensemble des solutions de (E) ?

4° Déterminer la solution particulière g de (E) vérifiant la condition initiale $g'(0) = 0$.

B - Soit g la fonction définie sur R par $g(x) = 1 - (x+1)e^{-x}$ et C sa courbe représentative dans le plan muni du repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$, unité 2 cm .

1° Déterminer la limite de g en $-\infty$ et en $+\infty$. En déduire l'existence d'une asymptote D pour C .

2° Etudier les variations de g.

3° Construire la droite D et la courbe C , après avoir déterminé les coordonnées d'une dizaine de ses points à l'aide d'une calculatrice programmable.

4° a) A l'aide d'une intégration par parties, calculer l'intégrale :

$$I = \int_{-1}^{2} (x+1)\, e^{-x}\, dx$$

b) En déduire l'aire $\mathscr{A}$ en cm^2, de la partie du plan limitée par C , D et la droite d'équation $x = 2$.

c) Donner un encadrement de $\mathscr{A}$ d'amplitude 10^{-2}.

EXERCICE 1

1° Il y a autant de "locations possibles" que de sous-ensembles à trois éléments de l'ensemble des cinq pelles : $C_5^3 = \frac{5.4.3}{3!} = 10$

2° Tous les événements élémentaires sont équiprobables. Les probabilités demandées sont donc de la forme :

$P = \frac{\text{nombre de "locations favorables"}}{\text{nombre de "locations possibles"}}$

a) Il y a un seul choix possible pour les 2 pelles "PY45" et deux choix possibles pour la pelle "75P", donc deux "locations favorables", d'où $P(E_1) = \frac{2}{10}$.

b) Il y a un seul choix possible pour les 2 pelles "PY45" et un seul choix possible pour la pelle "90P", donc une seule "location favorable", d'où $P(E_2) = \frac{1}{10}$.

c) Il y a un deux choix possibles pour la pelle "PY45" , deux choix possibles pour la pelle "75P", un choix possible pour la pelle "90P", donc $2 \times 2 \times 1 = 4$ "locations favorables", d'où $P(E_3) = \frac{4}{10}$.

d) Il y a un seul choix possible pour les 2 pelles "75P", et deux choix possibles pour la pelle "PY45", donc deux "locations favorables", d'où $P(E_4) = \frac{2}{10}$.

e) Il y a un seul choix possible pour les 2 pelles "75P" et un seul choix possible pour la pelle "90P", donc une seule "location favorable", d'où $P(E_5) = \frac{1}{10}$.

3° La variable aléatoire X associe le chiffre d'affaire correspondant à chaque événement "location" , à E_1 correspond $2600 + 2600 + 3000 = 8200$ à E_2 correspond $2600 + 2600 + 3600 = 8800$, de même à E_3 correspond 9200 à E_4 correspond 8600 à E_5 correspond 9600. L'ensemble des valeurs prises par X est donc : { 8200, 8800, 9200, 8600, 9600 }.

4°

chiffre d'affaire x_i	8.200	8.600	8.800	9.200	9.600
$P(X = x_i)$	0,2	0,2	0,1	0,4	0,1

5° $E(X) = \sum x_i P(X = x_i)$

$E(X) = 8200 \times 0,2 + 8800 \times 0,1 + 9200 \times 0,4 + 8600 \times 0,2 + 9600 \times 0,1$

$E(X) = 8880.$

E(X) représente la moyenne des chiffres d'affaires par jour que peut "espérer" l'entreprise MARTO si la situation "3 pelles par jour" se répète un très grand nombre de fois.

EXERCICE 2

A - 1° L'équation (E_1) : $y' + y = 0$, est de la forme $y' + ay = 0$ toutes les solutions sont définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = C e^{-ax}$ où C est une constante quelconque réelle. Toutes les solutions de (E_1) sont donc définies sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = C e^{-x}$.

2° On cherche une fonction numérique u telle que la fonction définie par $y_0 = u(x) e^{-x}$ soit solution de (E). Pour tout x on a : $y'_0 = u'(x)e^{-x} - u(x)e^{-x}$, la fonction cherchée est solution de (E) si et seulement si pour tout réel x :

$u'(x)e^{-x} - u(x) e^{-x} + u(x)e^{-x} = 1 - e^{-x}$ d'où

$u'(x)e^{-x} = 1 - e^{-x}$, donc $u'(x) = e^{x} - 1$,

$u(x) = e^{x} - x + k$, d'où une fonction u définie par $u(x) = e^{x} - x$ et une solution y_0 de (E) définie par : $u(x) e^{-x} = 1 - x e^{-x}$

3° L'ensemble des solutions de (E) est donc la somme des fonctions obtenues au 1° et au 2° ; c'est à dire l'ensemble des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par

$g(x) = 1 - x e^{-x} + C e^{-x}$

4° g est solution de l'équation (E), on a donc

$g(x) = 1 - x e^{-x} + Ce^{-x}$, par ailleurs :

$g'(x) + g(x) = 1 - e^{-x}$ d'où

$g'(x) = 1 - e^{x} - (1 - x e^{-x} + Ce^{-x})$

$g'(x) = - e^{x} + x e^{-x} - Ce^{-x}$

$g'(0) = 0$ donc $0 = -1 - C$ donc $C = -1$ donc

$g(x) = 1 - x e^{-x} - e^{-x}$.

B - 1° de $\lim_{x \to -\infty} e^{-x} = +\infty$ et $\lim_{x \to -\infty} -(x+1) = +\infty$ on déduit $\lim_{x \to -\infty} -(x+1)e^{-x} = +\infty$ donc que $\lim_{x \to -\infty} g(x) = +\infty$; pour tout x de $\mathbb{R}$

$g(x) = 1 - x e^{-x} - e^{-x}$, $g(x) = 1 - \frac{x}{e^{x}} - e^{-x}$,

$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ donc $\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{e^x} = 0.$

de $\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$ et $\lim_{x \to +\infty} e^{-x} = 0$ on déduit que

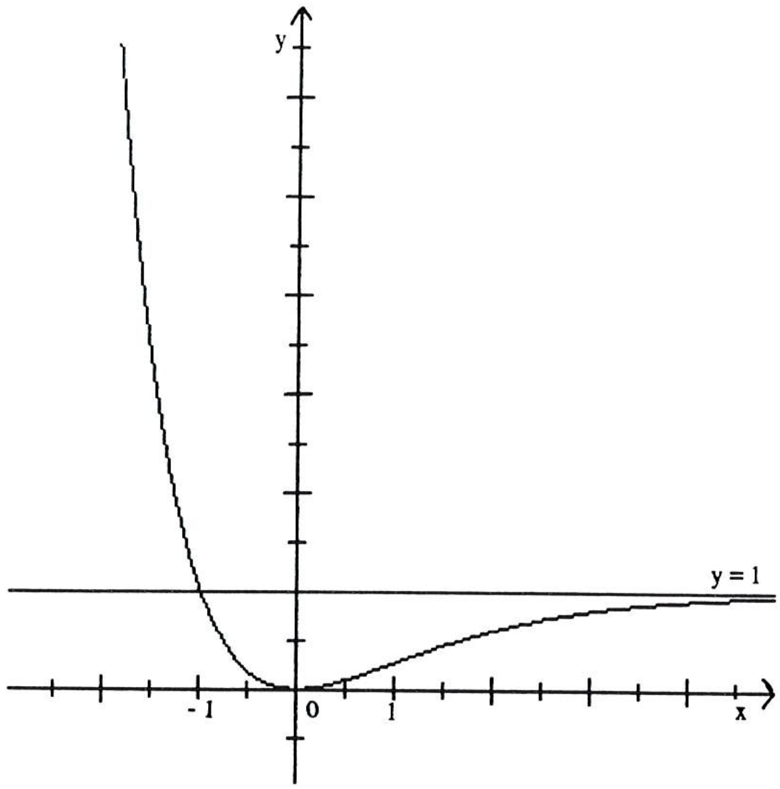
$\lim_{x \to +\infty} g(x) = 1$ donc la droite d'équation $y = 1$ est asymtote à la courbe C en $+\infty$.

2° $g'(x) = - e^{-x} + xe^{-x} + e^{-x}$ donc $g'(x) = x e^{-x}$ est du signe de x.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
g'(x)		—	0	+	
g(x)	$+\infty$	↘	0	↗	1

3°

x	- 1,5	- 1	- 0,5	0	0,5	1	2	3	4
g(x)	3,24	1	0,17	0	0,09	0,26	0,59	0,8	0,91



4°

a) $I = \int_{-1}^{2} (x+1)e^{-x}\,dx$ pour tout x de [– 1, 2] on pose $u(x) = x + 1$, $v'(x) = e^{-x}$,

$u'(x) = 1$, $v(x) = -e^{-x}$,

en intégrant par parties : $I = [-(x+1)e^{-x}]_{1}^{2} - \int_{-1}^{2} -e^{-x}\,dx$;

$I = -3e^{-2} + [-e^{-x}]_{1}^{2}$;

$I = -3e^{-2} - e^{-2} + e$ donc $I = e - 4e^{-2}$.

b) On sait que si f et g sont deux fonctions continues donc intégrables sur [– 1, 2] , si pour tout x de [– 1, 2] $f(x) \leq g(x)$, alors l'aire de la partie de plan limitée par les courbes représentatives de f et g et les droites d'équations $x = -1$ et $x = 2$ est en unités d'aire ,

$$\int_{-1}^{2} [g(x) - f(x)]\,dx \ .$$

L'aire $\mathscr{A}$ de la partie du plan limitée par C , D et la droite d'équation $x = 2$ est donc obtenue par l'intégrale :

$\int_{-1}^{2} 1 - [1 - (x+1)e^{-x}]\,dx = \int_{-1}^{2} (x+1)e^{-x}\,dx = I$ l'unité d'aire vaut 4 cm^2 ,

donc $\mathscr{A} = (e - 4e^{-2}).4\ cm^2$ $\mathscr{A}$ $\approx$ **8,7077 cm²** .

c) Avec la calculatrice on obtient **8,7 ≤** $\mathscr{A}$, **≤ 8,71**

BÂTIMENT Nouvelle Calédonie

Session 1991

EXERCICE 1 (9 points)

Dans un jeu, une urne contient trois boules vertes, deux boules rouges et quatre boules noires. Un joueur extrait simultanémént deux boules de l'urne. Le tirage d'une boule verte fait gagner deux francs, celui d'une boule rouge fait gagner un franc et celui d'une boule noire fait perdre trois francs. On admet qu'il y a équiprobabilité des tirages.

1° Quelle est la probabilité que le joueur perde six francs ?

2° On note X la variable aléatoire qui à chaque tirage de deux boules associe le gain. Déterminer l'ensemble des valeurs prises par X.

3° Déterminer la loi de probabilité de X. (La représenter sous forme de tableau selon le modèle ci-dessous).

gain x_i	-6	-2	-1	2	3	4
$P(X = x_i)$						
$P(X \leq x_i)$						

4° a) Quelle est la probabilité de perdre de l'argent ?

b) Quelle est la probabilité d'en gagner ?

5° Calculer l'espérance mathématique de X, notée $E(X)$. Que représente $E(X)$?

EXERCICE 2 (11 points)

A - Soit (E) l'équation différentielle : $y'' + 2y' + 2y = 0$ où y désigne une fonction de la variable réelle x définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, y' la dérivée de y et y'' sa fonction dérivée seconde.

1° Résoudre l'équation différentielle (E).

2° Déterminer la solution particulière g de (E) vérifiant les conditions $g(0) = 0$ et $g'(0) = 12\sqrt{2}$.

B - Soit f la fonction définie sur l'intervalle $I = [0, 2\pi]$ par $f(x) = 12\sqrt{2}\, e^{-x} \sin x$ et C sa courbe représentative dans le plan muni du repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$, unité 2 cm.

1° Montrer que, pour tout réel x de I, $f'(x) = 24\, e^{-x} \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$.

2° Résoudre dans $[0, 2\pi]$ l'équation $f'(x) = 0$

3° Déterminer les coordonnées des trois points d'intersection de C et de l'axe des abscisses sur $[0, 2\pi]$ ainsi que le coefficient directeur de la tangente à C en chacun de ces points. (On ne demande pas les valeurs approchées).

4° Construire le tableau de variation de f sur $[0, 2\pi]$. Pour déterminer le signe de la dérivée sur $[0, 2\pi]$ on pourra, par exemple, utiliser les résultats du 3°.

5° Construire C. On fera figurer sur le graphique les points et les tangentes obtenues au 3°.

EXERCICE 1

1° Un joueur perd 6 francs dans le cas où il tire deux boules noires : $P(N,N) = \dfrac{C_4^2}{C_9^2} = \dfrac{1}{6}$.

2° L'ensemble des valeurs prises par X est :
$\{-6, -2, -1, 2, 3, 4\}$.

3°

x_i	-6	-2	-1	2	3	4
$P(X = x_i)$	$\frac{6}{36}$	$\frac{8}{36}$	$\frac{12}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{3}{36}$
$P(X \le x_i)$	$\frac{6}{36}$	$\frac{14}{36}$	$\frac{26}{36}$	$\frac{27}{36}$	$\frac{33}{36}$	$\frac{36}{36}$

4° a) La probabilité de perdre est $P(X < 0) = \dfrac{13}{18}$.

b) La probabilité de gagner est $P(X > 0) = \dfrac{5}{18}$.

5° $E(X) = \dfrac{-36-16-12+2+18+12}{36} = -\dfrac{32}{36}$,

$E(X) = -\dfrac{8}{9} \approx -0{,}89$ F (c'est une perte) .

E(X) représente en moyenne la perte que l'on peut obtenir si l'on répète l'expérience un très grand nombre de fois.

EXERCICE 2 :

A. 1° L'équation caractéristique est $r^2 + 2r + 2 = 0$; $\Delta = -4 = 4i^2$. Il y a deux solutions complexes $r = -1 - i$ et $r = -1 + i$. Toutes les solutions de l'équations sont donc définies sur $\mathbb{R}$ par :

$g(x) = e^{-x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x)$

où C_1 et C_2 sont deux constantes réelles quelconques.

2° Si une solution particulière de cette équation est nulle pour $x = 0$ et si la dérivée vaut $12\sqrt{2}$ pour $x = 0$,

alors (A) $\begin{cases} g(0) = 0 \\ g'(0) = 12\sqrt{2} \end{cases}$

Pour tout réel x,

$g'(x) = -e^{-x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x) + e^{-x}(-C_1 \sin x + C_2 \cos x)$

$g'(x) = e^{-x}((-C_1 + C_2)\cos x + (C_1 - C_2)\sin x)$

(A) s'écrit : $\begin{cases} C_1 = 0 \\ C_2 = 12\sqrt{2} \end{cases}$

La solution particulière cherchée est donc définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 12\sqrt{2}\, e^{-x} \sin x$.

B. 1° Soit f la fonction numérique définie sur $[0, 2\pi]$ par $f(x) = 12\sqrt{2}\, e^{-x} \sin x$.

Pour tout x de $[0, 2\pi]$,

$f'(x) = 12\sqrt{2} e^{-x}(\cos x - \sin x)$,

$f'(x) = 24\, e^{-x}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} \cos x - \dfrac{\sqrt{2}}{2} \sin x\right)$,

$f'(x) = 24\, e^{-x}\left(\cos\dfrac{\pi}{4} \cos x - \sin\dfrac{\pi}{4} \sin x\right)$,

$f'(x) = 24\, e^{-x} \cos\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$.

2° $f'(x) = 0$ équivaut à $\cos\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) = 0$ et à $x + \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$, sur $[0, 2\pi]$ l'ensemble des solution est $\left\{\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{5\pi}{4}\right\}$.

3° $f(x) = 0$ équivaut à $12\sqrt{2}\, e^{-x} \sin x = 0$ et à $\sin x = 0$ $(12\sqrt{2}\, e^{-x} \neq 0)$, les abscisses des trois points d'intersection de C et de l'axe des abscisses sur $[0, 2\pi]$ sont $\{0, \pi, 2\pi\}$, les ordonnées de ces trois points sur $[0, 2\pi]$ sont nulles. Les coefficients directeurs des tangentes à C en ces points sont $f'(0) = 12\sqrt{2}$,
$f'(\pi) = -12\sqrt{2}\, e^{-\pi}$ et $f'(2\pi) = 12\sqrt{2}\, e^{-2\pi}$.

4° Pour tout réel x, $e^{-x} > 0$ donc les inéquations suivantes sont équivalentes : $f'(x) \geq 0$, $\cos\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) \geq 0$.

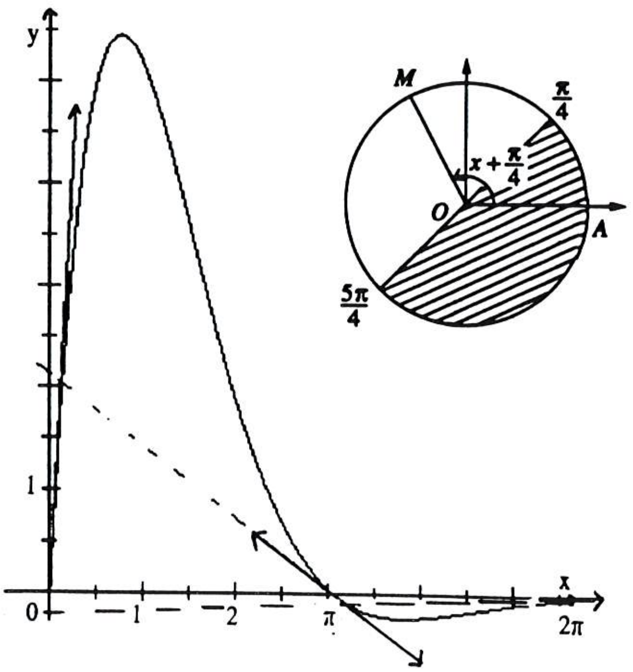
Etudions le signe de $\cos\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$ dans le tableau suivant:

x	0		$\frac{\pi}{4}$		π		$\frac{5\pi}{4}$		2π
$x + \frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{5\pi}{4}$		$\frac{3\pi}{2}$		$\frac{7\pi}{4}$
$\cos(x + \frac{\pi}{4})$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	+	0	−	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	−	0	+	$\frac{\sqrt{2}}{2}$

D'où le tableau de variation:

x	0		$\frac{\pi}{4}$		π		$\frac{5\pi}{4}$		2π
$f'(x)$		+	0	−			0	+	
$f(x)$	0	↗	$f(\frac{\pi}{4})$	↘			$f(\frac{5\pi}{4})$	↗	0

$f(\frac{\pi}{4}) = 12\, e^{-\pi/4} \approx 5{,}47$, $f(\frac{5\pi}{4}) = -12\, e^{-5\pi/4} \approx$,236.



BÂTIMENT

Session 1992

EXERCICE 1

Résistance à la compression à 28 jours d'un ciment.

Dans la notice concernant les ciments on considère comme élevée la probabilité que la résistance à la compression à 28 jours d'un ciment soit comprise entre 50 mégapascal (MPa) et 60 MPa. On se propose de déterminer cette probabilité.

1° On note X la variable aléatoire qui, à un sac de ciment choisi au hasard dans la fabrication d'une usine, associe sa résistance à la compression à 28 jours.

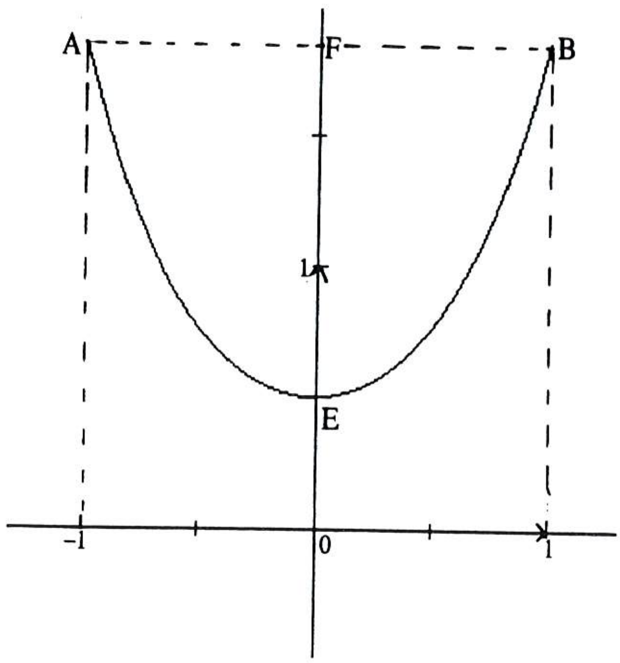
Un croquis sur la notice permet d'admettre que X suit la loi normale de moyenne $m = 55$ MPa et d'écart type $\sigma = 3$ MPa. Déterminer la probabilité $P(50 \leq X \leq 60)$ à 10^{-4} près, en utilisant éventuellement une interpolation linéaire.

2° La résistance à la compression à 28 jours minimale de chaque sac, garantie par cette usine, est de 45 MPa ; quelle est la probabilité qu'un sac ait une résistance à la compression à 28 jours insuffisante ?

Déterminer cette probabilité à 10^{-4} près en utilisant éventuellement une interpolation linéaire.

EXERCICE 2

Un objectif du problème est de calculer pour un fil de longueur 3 mètres suspendu entre deux points fixes A et B tels que AB = 2 m, la longueur de la flèche EF (Voir figure).



Le fil prend la forme de la courbe de la figure. On montre en mécanique que cette courbe est la représentation graphique, dans le repère orthonormal $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j}\,)$ de la fonction définie sur l'intervalle $[-1\,;\,1]$ par $\quad f(x) = \dfrac{e^{\lambda x} + e^{-\lambda x}}{2\lambda}$

où λ est un nombre réel strictement positif. La figure n'est pas à l'échelle.

1° a) Exprimer en fonction de λ la flèche $EF = f(1) - f(0)$.

b) On désigne par f' la fonction dérivée de f sur $[-1\,;\,1]$.
Montrer que pour tout nombre réel x de l'intervalle $[-1\,;1]$,
$1 + [f'(x)]^2 = \left[\dfrac{e^{\lambda x} + e^{-\lambda x}}{2}\right]^2$.

c) On admet que la longueur $L(\lambda)$ de l'arc de courbe AB est donnée par :

$L(\lambda) = \displaystyle\int_{-1}^{+1} \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\; dx$, utiliser le b) pour montrer que $L(\lambda) = \dfrac{e^{\lambda} - e^{-\lambda}}{\lambda}$.

d) Vérifier que l'équation $L(\lambda) = 3$ équivaut sur $]0\,;+\infty[$ à $\dfrac{e^{\lambda} - e^{-\lambda}}{3} = \lambda$.

2° On se propose dans cette question de déterminer graphiquement une valeur approchée de la solution de l'équation obtenue au 1° d).
Soit g la fonction définie sur $[0\,;+\infty[$ par $g(x) = \dfrac{e^{x} - e^{-x}}{3}$.

a) Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$.

b) Etudier les variations de g sur $[0\,;+\infty[$.

c) Soit (C) la courbe représentative de g dans le plan muni du repère orthonormal $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j}\,)$ unité 4 cm. Construire la courbe représentative (C) après avoir déterminé les coordonnées d'une dizaine de ses points à l'aide d'une calculatrice programmable.

d) Lire sur le graphique une valeur approchée à 10^{-1} près de la solution λ de l'équation $g(x) = x$, λ appartenant à l'intervalle $]0, +\infty[$.

e) En déduire une valeur approchée en mètres de la flèche EF à 10^{-1} près.

Exercice 1

1° La variable aléatoire X suit la loi normale $\mathcal{N}(55\ ;\ 3)$. On cherche $P(50 \le X \le 60)$, en utilisant la variable aléatoire $T = \dfrac{X - 55}{3}$ qui suit la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0\ ;\ 1)$ on obtient :

$P(50 \le X \le 60) \quad = P(-\frac{5}{3} \le T \le \frac{5}{3})$

$P(50 \le X \le 60) \approx P(-1{,}666\,6 \le T \le 1{,}6666)$

$P(50 \le X \le 60) = 2\pi(1{,}6666) - 1$

La table du formulaire donne $\pi(1{,}66) = 0{,}9515$ et $\pi(1{,}67) = 0{,}9525$, par interpolation linéaire on obtient

$P(50 \le X \le 60) \quad \approx 2 \times 0{,}9522 - 1$

$P(50 \le X \le 60) = 0{,}9044$ à 10^{-4} près.

2° La probabilité que la résistance à la compressiond'un sac soit insuffisante se traduit par :

$P(X \le 45) = P(T \le -\frac{10}{3})$ utilisant le même changement de variable que précédemment , ce qui équivaut à $P(T \le -3{,}333) = 1 - \pi(3{,}333)$.

La table donne $\pi(3{,}3) = 1 - 0{,}99952$,

$\pi(3{,}4) = 0{,}99966$, par interpolation linéaire

$\pi(\frac{10}{3}) = 0{,}99957$ à 10^{-5} près par excès , donc

$P(T \le \frac{10}{3}) = 1 - 0{,}99957$

$P(X \le 45) = 4.\ 10^{-4}$ à 10^{-4} près par défaut.

Exercice 2

1° a) $EF = f(1) - f(0)$,

$EF = \dfrac{e^{\lambda} + e^{-\lambda}}{2\lambda} - \dfrac{2}{2\lambda}$, $\quad EF = \dfrac{e^{\lambda} + e^{-\lambda} - 2}{2\lambda}$

b) pour tout réel x de $[-1\ ;\ 1]$,

$f'(x) = \dfrac{\lambda e^{\lambda x} - \lambda e^{-\lambda x}}{2\lambda}$, $f'(x) = \dfrac{e^{\lambda x} - e^{-\lambda x}}{2}$

$1 + [f'(x)]^2 = 1 + \dfrac{e^{2\lambda x} - 2 + e^{-2\lambda x}}{4}$,

$1 + [f'(x)]^2 = [\dfrac{e^{\lambda x} + e^{-\lambda x}}{2}]^2$.

c) $L(\lambda) = \displaystyle\int_{-1}^{+1} \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,dx$,

$L(\lambda) = \displaystyle\int_{-1}^{+1} \left|\frac{e^{\lambda x} + e^{-\lambda x}}{2}\right| dx$

$\dfrac{e^{\lambda x} + e^{-\lambda x}}{2}$ étant positif pour tout réel,

$L(\lambda) = \displaystyle\int_{-1}^{+1} \frac{e^{\lambda x} + e^{-\lambda x}}{2}\,dx$

$L(\lambda) = [\dfrac{\frac{1}{\lambda} e^{\lambda x} - \frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x}}{2}]_{-1}^{1}$, d'où

$L(\lambda) = \dfrac{e^{\lambda} - e^{-\lambda}}{\lambda}$.

d) Les équations suivantes sont équivalentes sur $]0\ ;\ +\infty[$: $L(\lambda) = 3$, $\dfrac{e^{\lambda} - e^{-\lambda}}{\lambda} = 3$, $\dfrac{e^{\lambda} - e^{-\lambda}}{3} = 3$.

2° a) $\quad g(x) = \dfrac{e^{x} - e^{-x}}{3}$,

$\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$ car $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{x} = +\infty$ et

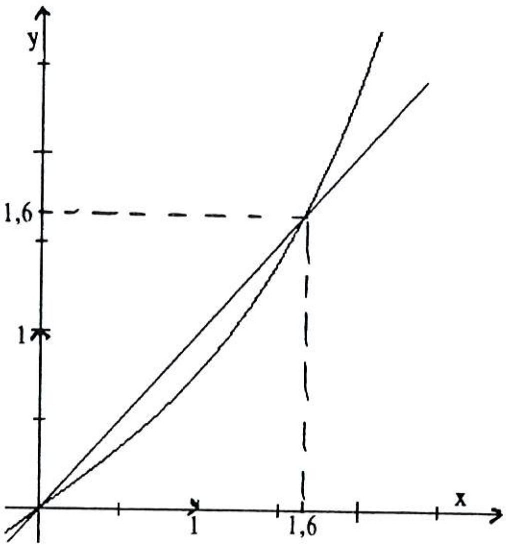
$e^{-x} = \dfrac{1}{e^{x}}$

b) Pour tout réel x de $]0\ ;\ +\infty[$, $g'(x) = \dfrac{e^{x} + e^{-x}}{3}$

d'où le tableau de variation :

x	0		+∞
g'(x)		+	
g(x)	0	↗	+∞

c) courbe



d) On lit sur le dessin

$\lambda \approx 1{,}6$

e) D'après la question 1° a)

$EF \approx \dfrac{e^{1,6} - e^{-1,6} - 2}{2 \times 1{,}6}$

$EF = 1{,}0$ m à 10^{-1} près.

BÂTIMENT Nouvelle Calédonie

Session 1992

On envisage l'installation d'une pompe à chaleur "en relève de chaudière" dans un hotel "deux étoiles" en construction. On se propose d'étudier si le contrat de maintenance forfaitaire annuel proposé par l'installateur, après la période de garantie d'un an, est plus avantageux que la facturation au prix réel des interventions ponctuelles.

Une étude statistique permet au constructeur d'affirmer que la probabilité de l'évènement "la pompe à chaleur tombe en panne une fois pendant un mois donné" est 0,125.

Dans un but de simplification, on admet que, pendant un mois donné, la pompe à chaleur ne peut tomber en panne qu'au plus une seule fois et que les pannes éventuelles survenues deux mois d'une même année sont indépendantes. On note X la variable aléatoire qui, à chaque année (de douze mois!) associe le nombre de pannes survenues à la pompe à chaleur.

1° Expliquer pourquoi X suit une loi binomiale. Donner les paramètres de cette loi.

2° Calculer la probabilité des événements suivants :

a) il n'y a pas de panne dans l'année ;

b) il y a au plus deux pannes dans l'année.

3° Calculer l'espérance mathématique notée $E(X)$ de la variable aléatoire X. Que représente $E(X)$?

4° Les résultats d'une étude statistique menée auprès de nombreux utilisateurs de ce modèle de pompe à chaleur n'ayant pas souscrit de contrat de maintenance annuel permettent d'admettre que le coût d'une intervention est de 2100 F TTC.

Soit Y la variable aléatoire qui à chaque année associe le montant total en francs (TTC) des frais de réparation de la pompe à chaleur.

a) Quelle est l'espérance mathématique notée $E(Y)$ de la variable Y ? Que représente $E(Y)$?

b) Le contrat de maintenance forfaitaire annuel de la pompe à chaleur est proposé par l'intallateur au prix de 4500 F TTC.

Quelle est la solution de maintenance la plus intéressante sur une longue période ?

5° On approche la loi binomiale du 1° par une loi de Poisson de paramètre $\lambda = np$, où n et p sont les paramètres de cette loi binomiale. En utilisant la loi de Poisson, déterminer les probabilités respectives des deux événements du a) et du b) de la question 2°.

6° On considère que, pour un événement l'approximation d'une loi binomiale par une loi de Poisson est justifiée lorsque l'erreur relative $\dfrac{p - p'}{p}$ est, en valeur absolue, inférieure à 10 % (p étant la probabilité de cet événement mesurée avec la loi binomiale et p' celle du même évènement mesurée avec la loi de Poisson). Pour chacun des deux événements précédents, déterminer si l'approximation de la loi binomiale du 1° par la loi de Poisson du 5° est justifiée.

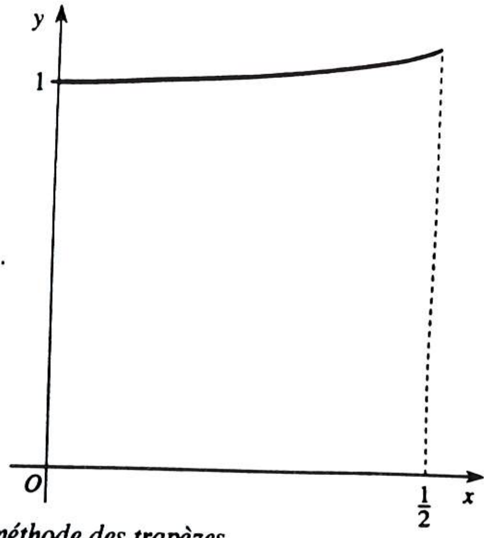
Dans cet exercice chaque probabilité demandée sera calculée à 10^{-3} près.

EXERCICE 2 (11 points)

Ne connaissant pas la primitive de la fonction f définie sur $[0, \frac{1}{2}]$ par

$f(x) = \frac{e^x}{1 + x}$, on se propose de déterminer une valeur approchée de l'intégrale :

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{e^x}{1 + x}.$$



La figure donne la courbe représentative C de la fonction f.

Le plan est muni du repère orthogonal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

Unités : 10 cm sur l'axe $(O ; \vec{i})$ et 5 cm sur l'axe $(O ; \vec{j})$.

1° Interpréter graphiquement l'intégrale I.

2° *Recherche d'une valeur approchée de l'intégrale I par la méthode des trapèzes.*

On note M_0, M_1, M_2, M_3, M_4 les points de C d'abscisses respectives 0 ; 0,125 ; 0,250 ; 0,375 ; 0,500. Soit H_1, H_2, H_3, H_4 les projections orthogonales respectives sur l'axe des abscisses des points M_1, M_2, M_3, M_4.

Donner une valeur approchée A, à 10^{-3} près, en unités d'aire, de la somme des aires des quatre trapèzes $H_1M_1M_0O$, $H_2M_2M_1H_1$, $H_3M_3M_2H_2$, $H_4M_4M_3H_3$.

(On rappelle que l'aire d'un trapèze est égale à la demi-somme des bases multipliée par la hauteur.)

3° *Recherche d'un encadrement de l'intégrale I.*

a) Etudier les variations de f sur $[0, \frac{1}{2}]$ et en déduire que, pour tout réel x de $[0, \frac{1}{2}]$,

$$1 \leq f(x) \leq \frac{2\sqrt{e}}{3}.$$

b) Démontrer que, pour tout réel x de $[0, \frac{1}{2}]$, $\frac{1}{1 + x} = 1 - x + \frac{x^2}{1 + x}$.

c) Déduire du b) que : $I = \int_0^{\frac{1}{2}} (1 - x)\, e^x\, dx + \int_0^{\frac{1}{2}} x^2 f(x)\, dx.$

d) A l'aide d'une intégration par parties, calculer la valeur exacte de l'intégrale : $J = \int_0^{\frac{1}{2}} (1 - x)\, e^x\, dx$

e) Déduire de l'encadrement obtenu au a) que : $\frac{1}{24} \leq \int_0^{\frac{1}{2}} x^2 f(x)\, dx \leq \frac{\sqrt{e}}{36}$

f) A l'aide des trois questions précédentes, écrire un encadrement de l'intégrale I.

En déduire un encadrement de I, d'amplitude 5.10^{-3}, par des nombres décimaux.

EXERCICE 1 :

1° Chaque mois on a deux possibilités et deux seulement : ou la pompe tombe en panne de probabilité $p = 0{,}125$, ou elle fonctionne correctement avec la probabilité 0,875. Au cours d'une année cette expérience est réalisée 12 fois et les résultats sont indépendants puisque les pannes éventuelles survenues deux mois d'une même année sont supposées indépendantes.

X suit donc la loi binomiale $\mathcal{B}$ (12 ; 0,125).

2° a) $p_1 = P(X = 0)$, $p_1 = C_{12}^{0}\,(0{,}125)^0(0{,}875)^{12}$

$p_1 \approx 0{,}2014$.

b) $p_2 = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)$, puisque les événements $X = 0$, $X = 1$, $X = 2$ sont incompatibles deux à deux, $p_2 \approx 0{,}2014 + 0{,}3453 + 0{,}2713$,

$p_2 \approx 0{,}8180$.

3° $E(X) = n\,p = 12 \times 0{,}125$, $E(X) = 1{,}5$ an.

Sur un très grand nombre d'années, le nombre moyen de pannes de cette pompe est voisin de 1,5.

4° a) Par définition des variables aléatoires X et Y $Y = 2100\,X$, $E(Y) = E(2100\,X)$, $E(Y) = 2100\,E(X)$, $E(Y) = 3150$ F. Sur un très grand nombre d'années, le montant moyen des frais de réparation de cette pompe à chaleur est voisin de 3150 F.

b) $3150 < 4500$, sur une longue période la facturation aux prix réels est plus intéressante que le contrat forfaitaire.

5° X suit la loi $\mathcal{P}$ (1,5), $p_1' \approx 0{,}2231$, $p_2' \approx 0{,}8088$.

6° $\left|\dfrac{p_1 - p_1'}{p_1}\right| \approx 0{,}109 > 10\%$

$\left|\dfrac{p_2 - p_2'}{p_2}\right| \approx 0{,}011 < 10\ \%$. L'approximation est justifiée pour le calcul de p_2 mais pas celui de p_1.

EXERCICE 2 :

1° I représente l'aire de la partie de plan limitée par la courbe représentative de f, l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = \frac{1}{2}$.

2° Avec une calculatrice on obtient :

x	0	0,125	0,250	0,375	0,5
f(x)	1	1,0072	1,0272	1,0582	1,0991

D'où $A \approx 0{,}518$.

3° a) f est dérivable sur $[0, \frac{1}{2}]$.

Pour tout réel x de $[0, \frac{1}{2}]$, $f'(x) = \dfrac{x\,e^x}{(1+x)^2}$,

Pour tout réel x de $[0, \frac{1}{2}]$, $x \geq 0$, $e^x > 0$ et $(1+x)^2 > 0$ donc $f'(x) \geq 0$.

$f(0) = 1$, $f(\frac{1}{2}) = \dfrac{2\sqrt{e}}{3}$ d'où le tableau de variation :

x	0	$\frac{1}{2}$
f'(x)	+	
f(x)	1 ↗	$\frac{2\sqrt{e}}{3}$

On en déduit pour tout réel x de $[0, \frac{1}{2}]$,

$$1 - x + \frac{x^2}{1+x} = \frac{(1-x)(1+x) + x^2}{1+x},$$

$$1 - x + \frac{x^2}{1+x} = \frac{1}{1+x}.$$

c) Du b) on en déduit que

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{e^x}{1+x} = \int_0^{\frac{1}{2}} \left(1 - x + \frac{x^2}{1+x}\right) e^x\,dx,$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{e^x}{1+x} = \int_0^{\frac{1}{2}} (1-x)\,dx + \int_0^{\frac{1}{2}} x^2 f(x)\,dx,$$

d) Pour tout réel x de $[0, \frac{1}{2}]$ on pose

$u(x) = 1 - x$ donc $u'(x) = -1$,

$v'(x) = e^x$ donc $v(x) = e^x$,

$$J = \Big[u(x)v(x)\Big]_0^{1/2} - \int_0^{\frac{1}{2}} u'(x)v(x)\,dx,$$

$$J = [(1-x)\,e^x]_0^{1/2} - \int_0^{\frac{1}{2}} -e^x dx,$$

$$J = \Big[(1-x)\,e^x\Big]_0^{1/2} + \Big[e^x\Big]_0^{1/2}, \quad J = \Big[(2-x)\,e^x\Big]_0^{1/2},$$

$$J = \frac{3}{2}\,e^{1/2} - 2, \qquad J = \frac{3}{2}\sqrt{e} - 2.$$

e) Pour tout réel x de $[0, \frac{1}{2}]$

$1 \leq f(x) \leq \dfrac{2\sqrt{e}}{3}$, donc $x^2 \leq x^2 f(x) \leq \dfrac{2x^2\sqrt{e}}{3}$

en utilisant le théorème d'intégration des inégalités,

$$\int_0^{\frac{1}{2}} x^2\,dx \leq \underbrace{\int_0^{\frac{1}{2}} x^2 f(x)\,dx}_{K} \leq \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{2x^2\sqrt{e}}{3}\,dx$$

$$\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{1/2} \leq K \leq \frac{2\sqrt{e}}{3}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{1/2},$$

$$\frac{1}{24} \leq K \leq \frac{2\sqrt{e}}{3}\,\frac{1}{24}, \quad \frac{1}{24} \leq K \leq \frac{\sqrt{e}}{36},$$

f) $I = J + K$, donc $\dfrac{1}{24} + J \leq K + J \leq \dfrac{\sqrt{e}}{36} + J$,

$$\frac{1}{24} + \frac{3}{2}\sqrt{e} - 2 \leq I \leq \frac{\sqrt{e}}{36} + \frac{3}{2}\sqrt{e} - 2,$$

d'où $0{,}514 \leq I \leq 0{,}519$.

BÂTIMENT

Session 1993

EXERCICE 1 (8 points)

Etude de l'absentéisme dans une entreprise du bâtiment.

Dans cet exercice chaque probabilité demandée sera calculée à 10^{-3} près.

Une agence d'une entreprise du bâtiment emploie vingt personnes. Une étude statistique permet d'admettre qu'un jour donné la probabilité qu'un employé donné soit absent est 0,05. On admet que les absences des employés survenues un jour donné sont indépendantes les unes des autres.

On note X la variable aléatoire qui à chaque jour associe le nombre d'employés absents.

1° Expliquer pourquoi X suit une loi binomiale. Donner les paramètres de cette loi.

2° Calculer la probabilité des événements suivants :

a) E_1 : un jour donné il y a exactement trois absents ;

b) E_2 : un jour donné il y a strictement plus de deux absents ;

c) E_3 : un jour donné le nombre d'absents est compris entre trois et six (bornes comprises).

3° Calculer l'espérance mathématique notée $E(X)$ de la variable aléatoire X. Que représente $E(X)$?

4° On approche la loi binomiale du 1° par une loi de Poisson de paramètre $\lambda = np$, où n et p sont les paramètres de cette loi binomiale.

En utilisant la loi de Poisson, déterminer les probabilités respectives des trois événements E_1, E_2, E_3 de la question 2°.

Vérifier que les résultats obtenus au 4° diffèrent de moins de 1% des résultats obtenus au 2°.

EXERCICE 2 (12 points)

Le plan est muni du repère orthogonal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ où les unités graphiques sont 4 cm sur l'axe des abscisses et 2 cm sur l'axe des ordonnées.

A Résolution d'une équation différentielle

On considère l'équation différentielle : $y'' + 2y' + y = 0$ où y désigne une fonction de la variable réelle x définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, y' la dérivée de y et y'' sa fonction dérivée seconde.

1° Résoudre cette équation différentielle.

2° Déterminer la solution de cette équation qui vérifie les deux conditions suivantes :

(1) la courbe représentative de cette solution passe par le point I de coordonnéez (0, - 2),

(2) la tangente à cette courbe au point I a pour coefficient directeur 1.

B Etude des variations d'une fonction et construction de sa courbe représentative

Soit f la fonction définie sur R par $f(x) = (-x-2)\,e^{-x}$ et C sa courbe représentative dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1° a) Déterminer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

En déduire l'existence d'une asymptote pour C dont on donnera une équation.

b) Etudier les variations de f sur R et dresser son tableau de variation.

2° Ecrire le développement limité à l'ordre 3 de f au voisinage de 0.
En déduire une équation de la tangente T à C au point d'abscisse 0, et la position relative de T et de C au voisinage de ce point.

3° Construire la tangente T et la courbe C dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

C Calcul d'une intégrale

$$\text{Soit } J = \int_{-2}^{0} (-x-2)\,e^{-x}\,dx .$$

1° a) Calculer l'intégrale J à l'aide d'une intégration par parties.

b) Donner une valeur approchée à 10^{-2} près de J.

2° Donner une interprétation graphique de J.

EXERCICE 1 :

1° On est en présence d'une épreuve aléatoire pouvant déboucher sur deux éventualités :" un employé donné est absent un jour donné " de probabilité p = 0,05 , " un employé donné n'est pas absent un jour donné " de probabilité p = 0,95.

Cette épreuve est réalisée 20 fois un jour donné, les 20 épreuves sont indépendantes, on est donc en présence d'une loi binomiale $\mathcal{B}$ **(20 ; 0,05) .**

X suit la loi binomiale $\mathcal{B}$ (20 ; 0,05) .

2° a) $P(E_1) = C_{20}^{3}(0,05)^3(0,95)^{17}$,

$\mathbf{P(E_1) \approx 0,060.}$ **(ou 0,059).**

b) $P(E_2) = 1 - P(\overline{E_2})$.

$\overline{E_2} = A_0 \cup A_1 \cup A_2$

A_0 : il n'y a pas d'absent,

A_1 : il y a exactement un absent,

A_2 : il y a exactement deux absents.

$P(\overline{E_2}) \approx 0,925$,

$\mathbf{P(E_2) \approx 0,075.}$

c) $P(E_3) = P(X=3) + P(X=4) + P(X=5) + P(X=6)$.

$\mathbf{P(E_3) \approx 0,076.}$

3° $E(X) = 20 \times 0,05$

$\mathbf{E(X) = 1.}$

E(X) , représente le nombre moyen d'absents par jour , (si on relève les absences sur un très grand nombre de jours).

4°On approche la loi binomiale $\mathcal{B}$ (20 ; 0,05) par la loi de Poisson $\mathcal{P}$ (1).

A l'aide de la table du formulaire on obtient :

a) $P(E_1) \approx 0,061$;

b) $P(E_2) \approx 0,080$;

c) $P(E_3) \approx 0,080$.

EXERCICE 2 :

A. 1° L'équation caractéristique est : $r^2 + 2r + 1 = 0$

c'est à dire $(r+1)^2 = 0$;

l'équation caractéristique admet -1 comme solution double.

Toutes les solutions de l'équation différentielle sont donc définies sur $\mathbb{R}$ par :

$f(x) = (C_1 x + C_2)\, e^{-x}$, où C_1 et C_2 sont des constantes réelles quelconques.

2° De (1) on déduit que $f(0) = -2$, d'où $C_2 = -2$.

Pour tout nombre réel x ,

$f'(x) = C_1 e^{-x} - (C_1 x - 2)\, e^{-x}$.

De (2) on déduit que $f'(0) = 1$, d'où $C_1 + 2 = 1$, $C_1 = -1$.

La solution cherchée est donc définie sur $\mathbb{R}$ par

$f(x) = (-x-2)\, e^{-x}$.

B. 1° a) De $\lim\limits_{x \to -\infty} (x-2) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{-x} = +\infty$

on déduit $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$.

Pour tout nombre réel x , $f(x) = -x\,e^{-x} - 2\,e^{-x}$.

De $\lim\limits_{x \to +\infty} -x\,e^{-x} = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-x} = 0$,

on déduit $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

C admet l'axe des abscisses comme asymptote en $+\infty$.

b) f est un produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ donc dérivable sur $\mathbb{R}$.

Pour tout nombre réel x , $f'(x) = (x+1)\, e^{-x}$.

Pour tout nombre réel x , $e^{-x} > 0$ donc $f'(x)$ a même signe que $x + 1$.

Le signe de $f'(x)$ est donné par :

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
x+1		$-$	0	$+$	

f admet un extremum pour $x = -1$ $f(-1) = -e$.

D'où le tableau de variation :

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-e$	$\nearrow$	0

2° Du développement limité :

$$e^t = 1 + \frac{t}{1!} + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + t^3 \varepsilon(t),$$

avec $\lim\limits_{t \to 0} \varepsilon(t) = 0$,

On déduit le développement limité :

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + x^3 \varepsilon(x),$$

avec $\lim\limits_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$.

En le multipliant par $(-x-2)$ et en ne conservant que les termes de degré inférieur ou égal à 3 on obtient le développement limité :

$$f(x) = -2 + x - \frac{x^3}{6} + x^3 \varepsilon(x),$$

avec $\lim\limits_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$.

Une équation de la tangente T à C au point d'abscisse 0 est donc $y = x - 2$.

La position relative de T et C au voisinage du point d'abscisse 0 est donnée par le signe de

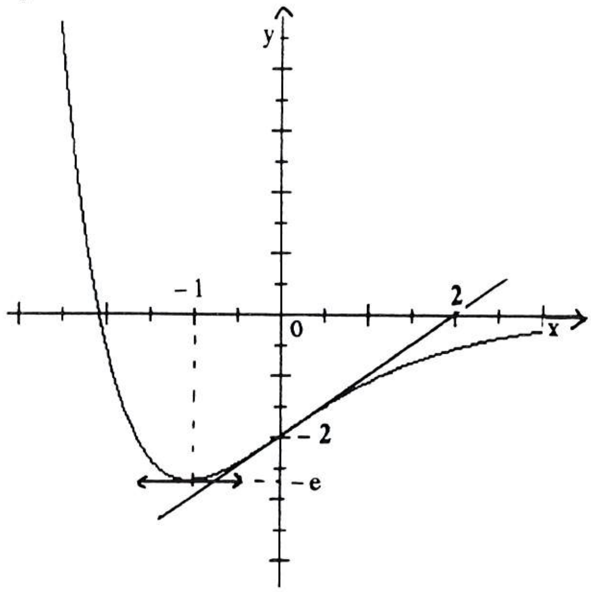
$$f(x) - (x-2) = -\frac{x^3}{6} + x^3 \varepsilon(x),$$

avec $\lim\limits_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$.

Pour $x < 0$ $f(x) - (x-2) > 0$ donc C est au dessus de T.

Pour $x > 0$ $f(x) - (x-2) < 0$ donc C est au dessous de T.

3°



C 1° a) Pour tout nombre réel x de $[-2, 0]$ on pose

$u(x) = -x - 2$ donc $u'(x) = -1$,

$v'(x) = e^{-x}$ donc $v(x) = -e^{-x}$.

$$J = [\,u(x)\,v(x)\,]_{-2}^{0} - \int_{-2}^{0} u'(x)v(x)dx,$$

$$J = [\,-(x+2)\,e^{-x}\,]_{-2}^{0} - \int_{-2}^{0} e^{-x}\,dx,$$

$$J = [\,(x+2)\,e^{-x}\,]_{-2}^{0} - [\,-e^{-x}\,]_{-2}^{0},$$

$$J = [\,(x+3)\,e^{-x}\,]_{-2}^{0}, \quad \mathbf{J = 3 - e^2.}$$

b) **J = – 4,39.**

2° $(-J)$ est l'aire, en unités d'aire, de la partie de plan limitée par la courbe C et les axes de coordonnées.

BÂTIMENT Nouvelle Calédonie

Session 1993

EXERCICE 1 (6 points)

Un fabricant de produits manufacturés en béton utilise un jeu de moules à agglomérés, qui permet de fabriquer 10 000 pièces par jour.

Avec un jeu de moules neuf on obtient des pièces dont la masse est 18 kilogrammes. Cette masse augmente avec l'usure des moules.

On considère toutefois que la production reste acceptable tant que la masse moyenne des agglomérés d'une palette choisie au hasard dans la production se situe dans l'intervalle [16,5 ; 20].

Pour évaluer l'usure d'un jeu de moules au cours de la production, on prélève chaque quinzaine, au hasard, une palette d'agglomérés que l'on pèse. (La mesure de la masse est le seul contrôle de qualité que l'on fait subir à la production d'agglomérés).

En commençant avec un moule neuf à la date 0, on obtient ainsi la série de mesures suivante :

x : N° de quinzaine	0	1	2	3	4	5	6
y : Masse moyenne	18	18,1	18,2	18,4	18,5	18,7	18,9

1° Représenter le nuage de points (N) associé à cette série statistique double, en adoptant pour unités : 2 cm pour une quinzaine et 4 cm pour 1 kg.
On pourra prendre l'origine du repère au point de coordonnées (0 ; 18).

2° Déterminer la valeur approchée à 10^{-3} près du coefficient de corrélation linéaire de la série statistique double.

3° Déterminer par la méthode des moindres carrés une équation de la droite D de régression de y en x de la forme $y = m x + p$. On déterminera les valeurs approchées à 10^{-2} près des coefficients m et p.

4° A l'aide de cet ajustement, au bout de combient de temps le remplacement des moules est-il prévisible ?

EXERCICE 2 (14 points)

Un réservoir a la forme d'un demi cylindre de rayon 0,35 mètre et de longueur deux mètres (figure 1).

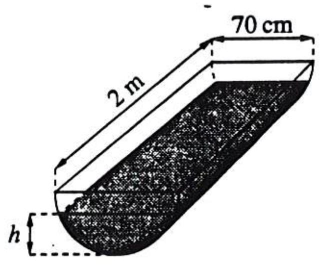


figure 1

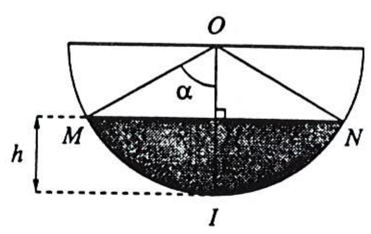


figure 2

1° Calculer le volume du réservoir en litres.

Donner une valeur approchée à 10^{-2}près du résultat.

2° On se propose de déterminer les valeurs de la hauteur h du liquide contenu dans le réservoir (voir les figures 1 et 2) correspondant à un volume de liquide de 50 litres, 100 litres, 150 litres,. ....., 350 litres, ce qui permettra, ensuite, de réaliser une jauge graduée.

a) α étant une mesure en radiansde l'angle MOI (voir la figure 2) , montrer que le volume $V(\alpha)$ de liquide, en litres, contenu dans le réservoir, correspondant à la valeur α, est
$V(\alpha) = 245\,\alpha - 122{,}5 \sin 2\,\alpha$.

b) Montrer que la hauteur $h(\alpha)$ de liquide, en centimètres, correspondant à la mesure α de l'angle MOI est
$h(\alpha) = 35 - 35 \cos \alpha$.

3° Le plan est muni d'un repère orthogonal $(O\,;\vec{i}, \vec{j})$, unités : 2 cm pour 5 cm sur l'axe des abscisses et 2 cm pour 50 litres sur l'axe des ordonnées. On considère la courbe (C) d'équations paramétriques définies pour tout nombre réel α de $[0, \frac{\pi}{2}]$ par

$$\begin{cases} ax = h(\alpha) = 35 - \cos\alpha \\ y = V(\alpha) = 245\,\alpha - 122{,}5 \sin 2\,\alpha. \end{cases}$$

a) Etudier les variations des fonctions h et V pour tout nombre réel α de $[0, \frac{\pi}{2}]$ et regrouper les résultats dans un même tableau de variation.

b) Remplir à l'aide de la calculatrice le tableau suivant dans lequel on fera figurer des valeurs approchées à une unité près.

α	0	$\frac{\pi}{16}$	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{3\pi}{16}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{16}$	$\frac{3\pi}{8}$	$\frac{7\pi}{16}$	$\frac{\pi}{2}$
h (en cm)									
V (en litres)									

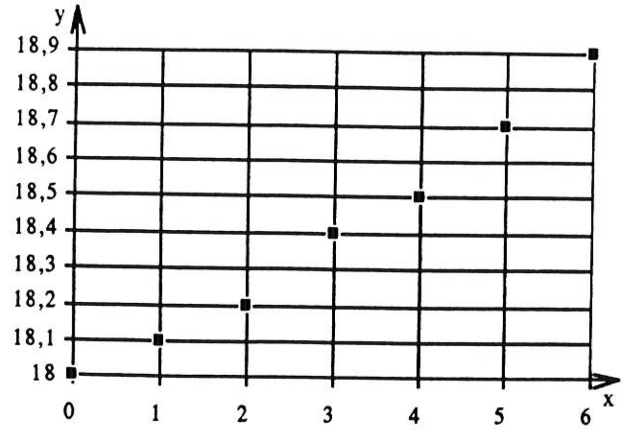
c) Construire la courbe (C).

4° Utiliser la courbe (C) pour déterminer graphiquement les valeurs de h en centimètres correspondant respectivement à V = 50, V = 100,......, V = 350. (Ce qui permet, ensuite, de réaliser une jauge). On complètera le tableau suivant dans lequel on fera figurer des valeurs approchées de h à un centimètre près.

h (en cm)	0							
V (en l)	0	50	100	150	200	250	300	350

EXERCICE 1

1° Les axes portant les graduations se coupent au point de coordonnées (0, 18).



2° Avec une calculatrice on obtient pour valeur approchée à 10^{-3} près du coefficient de corrélation linéaire r de la série double : $r \approx 0{,}992$.
r est proche de 1 ; il existe une forte corrélation entre x et y .

3° Avec une calculatrice on obtient pour équation de la droite de régression D de y en x, avec la précision demandée : $y = 0{,}15\,x + 17{,}95$.
Pour $x = 1$, on a $y = 18{,}1$ et pour $x = 3$, on a $y = 18{,}4$. La droite D *passe donc par les points d'abscisses 1 et 3 du nuage* (N).

4° Le remplacement des moules est nécessaire dès que la masse moyenne y des agglomérés n'est plus dans l'intervalle [16,5 ; 20], c'est à dire d'après la question 3° dès que
$0{,}15 + 17{,}95 > 20$. Cette inéquation est équivalente à $x > \dfrac{20 - 17{,}95}{0{,}15}$, $x > 13{,}7$.
L'unité étant la quinzaine, le rempladement des moules est nécessaire tous les 6 mois environ.

EXERCICE 2

1° Le volume en m^3 du cylindre à base circulaire de rayon 0,35 m de hauteur 2 m est $2\pi(0{,}35)^2$ donc $V = \pi(0{,}35)^2$ m^3 , soit $V = 122{,}5\pi$ litres,
$V = 384{,}85$ litres, à 10^{-2} près.

2° a) L'aire du secteur circulaire OMN (voir figure 2) est $(0{,}35)^2\ \alpha\ m^2$.

L'aire du triangle OMN est $\frac{1}{2}$ OH.MN.

OH = OM cos α et MH = OM sinα.

Donc OH.MN = 2 OM^2 cosα sin α.

OM = 0,35 et 2cosα sin α = sin 2α donc

$\frac{1}{2}$ OH.MN = $\frac{1}{2}(0{,}35)^2 \sin 2\alpha\ m^2$.

L'aire de la partie coloriée sur la figure est donc

$(0{,}35)^2\,\alpha - \frac{1}{2}(0{,}35)^2 \sin 2\alpha$,

$(0{,}35)^2\ (\alpha - \frac{1}{2}\sin 2\alpha)\ m^2$,

D'où le volume en m^3 : $2\ (0{,}1225\ (\alpha - \frac{1}{2}\sin 2\alpha))$,

et le volume en liquide en L

$V(\alpha) = 245\ (\alpha - \frac{1}{2}\sin 2\alpha)$.

b) La hauteur de liquide en centimètres est
h(α) = OI – OH, h(α) = 35 – 35 cos α.

3° a) Pour tout α de $[0, \frac{\pi}{2}]$ h et V sont dérivables et
$h'(\alpha) = 35 \sin \alpha$, $V'(\alpha) = 245(1 - \cos 2\alpha)$.

Pour tout α de $[0, \frac{\pi}{2}]$, sin α ≥ 0 donc h '(α) ≥ 0.

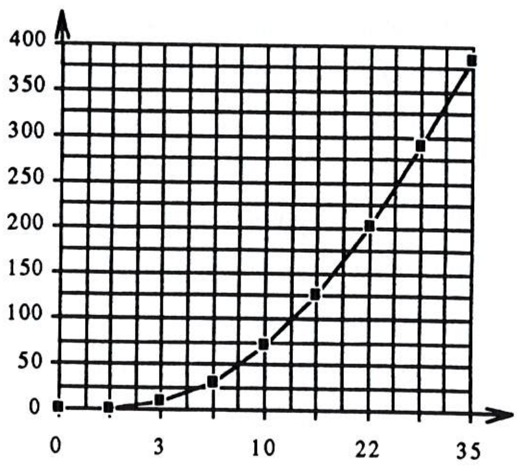
Pour tout α cos 2α ≤ 1 donc 1 – cos 2α ≥ 0,
V' (α) ≥ 0 . D'où le tableau :

α	0		$\frac{\pi}{2}$
h'(α)	0	+	
V'(α)	0	+	
h(α)	0	↗	35
V(α)	0	↗	122,5π

b)

α	0	$\frac{\pi}{16}$	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{3\pi}{16}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{16}$	$\frac{3\pi}{8}$	$\frac{7\pi}{16}$	$\frac{\pi}{2}$
h (α)	0	1	3	6	10	16	22	28	35
V (α)	0	1	10	31	70	127	202	290	385

c)



4° Graphiquement on obtient :

h (cm)	0	7	13	17	22	25	29	32
V (litres)	0	50	100	150	200	250	300	350

BÂTIMENT

Session 1994

EXERCICE 1 (8 points)

Dans cet exercice chaque probabilité demandée sera calculée à 10^{-3} près.

Une enquête réalisée par la Sofres en 1991 permet d'estimer que la probabilité qu'une lettre, choisie au hasard dans le courrier d'une entreprise, parvienne à son destinataire en France, le lendemain, est 0,7.

Dans la suite on ne considère que les lettres à destination de la France.

A l'agence de Marne-la-Vallée d'une grande entreprise de Bâtiment on admet que l'on expédie 100 lettres par jour. On note X la variable aléatoire qui, à un jour choisi au hasard, associe le nombre de lettres qui parviendront à leur destinataire le lendemain. On suppose que les acheminements de ces lettres se font en toute indépendance.

1° a) Expliquer pourquoi X suit une loi binomiale et préciser les paramètres de cette loi.

b) Calculer l'espérance mathématique de X puis la valeur arrondie à l'entier le plus proche de l'écart type de X.

c) Calculer la probabilité que 60 lettres exactement, sur les 100 expédiées un jour choisi au hasard, parviennent à leur destinataire le lendemain. Pour ce calcul, on prendra $C_{100}^{60} = 1,375.\ 10^{28}$.

2° On décide d'approcher la loi de la variable discrète X par la loi normale de paramètres $m = 70$ et $\sigma = 5$. On note Y une variable aléatoire suivant la loi normale $\mathcal{N}(70, 5)$. En utilisant cette approximation calculer :

a) la probabilité qu'au moins 80 des 100 lettres, expédiées un jour choisi au hasard parviennent à leur destinataire le lendemain, c'est à dire $P(Y \geq 79,5)$;

b) la probabilité que le nombre de lettres, sur les 100 expédiées un jour choisi au hasard, parvenant à leur destinataire le lendemain, soit strictement compris entre 55 et 85, c'est à dire :
$P(55,5 \leq Y \leq 84,5)$.

EXERCICE 2 (12 points)

A Résolution d'une équation différentielle.

Soit (E) l'équation différentielle $(x + 1)\, y' + (x - 1)\, y = -x + 1$ où l'inconnue y est une fonction de la variable réelle x, définie et dérivable sur $]-1, +\infty[$, et où y' est la fonction dérivée de y.

1° a) Soit g la fonction définie sur $]-1, +\infty[$ par $g(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$. Déterminer deux nombres réels a et b tels que, pour tout nombre réel de $]-1, +\infty[$, $g(x) = a + \dfrac{b}{x+1}$.

En déduire la primitive G de g sur $]-1, +\infty[$ telle que $G(0) = 0$.

b) Résoudre l'équation différentielle (E_1) : $(x + 1)\, y' + (x - 1)\, y = 0$.

2° Déterminer le nombre réel m pour que la fonction constante h définie sur $]-1, +\infty[$ par $h(x) = m$ soit solution de l'équation (E).

3° Déduire du 1° b) et du 2° l'ensemble des solutions de l'équation (E).

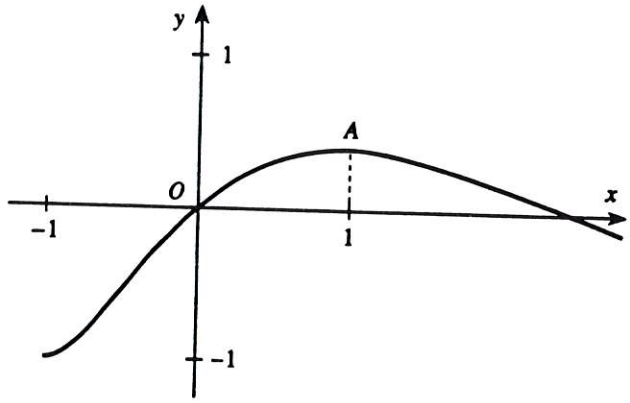
4° Déterminer la solution particulière f de l'équation (E) qui vérifie la condition initiale $f(0) = 0$.

<u>B Etude de quelques propriétés de la courbe représentative d'une fonction.</u>

Soit f la fonction définie sur $]-1, +\infty[$, par $f(x) = e^{-x}(x+1)^2 - 1$.

On désigne par C la courbe représentative de f dans le plan muni du repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$; l'unité graphique est 2 cm.

A l'aide d'une calculatrice graphique on a obtenu le dessin reproduit ci-dessous.



1° Déterminer la fonction dérivée f' de f.
Soit A le point de C d'abscisse 1. Donner la valeur exacte de l'ordonnée de A.
Préciser la tangente en A à C.

2° La courbe C admet-elle une asymptote en $+\infty$? Justifier la réponse.

3° a) A l'aide du développement limité de la fonction : $t \longmapsto e^t$ au voisinage de 0, écrire le développement limité d'ordre 2 de la fonction ; $x \longmapsto e^{-x}$ au voisinage de 0.
En déduire le développement limité d'ordre 2 de la fonction f au voisinage de 0.
b) Déduire du a) une équation de la tangente T à la courbe C au point d'abscisse 0 et la position relative de C et T au voisinage de ce point.

EXERCICE 1

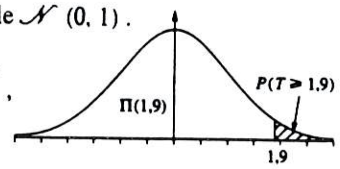
1° a) Pour chaque lettre on a deux possibilités et deux seulement ou elle parvient à son destinataire le lendemain (avec la probabilité 0,7 ou elle ne parvient pas à son destinataire le lendemain (avec la probabilité 0,3. On recommence 100 fois cette expérience aléatoire et les résultats sont supposés indépendants puisque les acheminements de ces lettres se font en toute indépendance. La variable aléatoire X suit donc la loi binomiale $\mathscr{B}$ (100 ; 0,7) .

b) $E(X) = np = 70$; $\sigma(X) = \sqrt{npq} = \sqrt{21}$, $\sigma(X) \approx 5$.

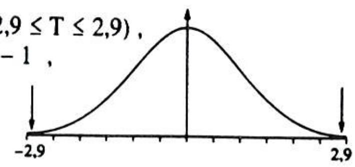
c) $P(X = 60) = C_{100}^{60}\ (0{,}7)^{60}\ (0{,}3)^{40}$, en prenant $C_{100}^{60} = 1{,}375.10^{28}$ on obtient $P(X = 60) \approx 0{,}008$.

2° On décide d'approcher la loi de la variable discrète X par la loi normale de paramètres m = 70 et $\sigma = 5$. On note Y une variable aléatoire suivant la loi normale $\mathscr{N}$ (70 , 5) , alors l a variable aléatoire $T = \dfrac{X - 70}{5}$ suit la loi normale $\mathscr{N}$ (0, 1) .

a) $P(Y \geq 79{,}5) = P(T \geq 1{,}9)$,
$P(Y \geq 79{,}5) = 1 - P(T < 1{,}9)$,
$P(Y \geq 79{,}5) = 1 - \pi(1{,}9)$,
$P(Y \geq 79{,}5) \approx 0{,}029$.



b) $P(55{,}5 \leq Y \leq 84{,}5) = P(-2{,}9 \leq T \leq 2{,}9)$,
$P(55{,}5 \leq Y \leq 84{,}5) = 2\pi(2{,}9) - 1$,
$P(55{,}5 \leq Y \leq 84{,}5) \approx 0{,}996$.



EXERCICE 2

A 1° a) Pour tout x de $]-1, +\infty[$,

$\dfrac{x-1}{x+1} = a + \dfrac{b}{x+1}$,

$\dfrac{x-1}{x+1} = \dfrac{a(x+1)+b}{x+1}$, $x - 1 = ax + (a + b)$.

D'où a = 1 et a + b = − 1 , b = − 2.

Pour tout nombre réel x de $]-1, +\infty[$,

$g(x) = 1 - \dfrac{2}{x+1}$. Une primitive de g est définie sur $]-1, +\infty[$ par $G(x) = x - 2\ (\ln(x + 1) + C$ où C est une constante réelle. G(0) = 0 se traduit par C = 0 .

Pour tout nombre réel x de $]-1, +\infty[$,
$G(x) = x - 2\ln(x + 1)$.

b) L'équation (E_1) est de la forme $a(x)\, y' + b(x)\, y = 0$. Toutes les solutions de sont donc définies sur $]-1, +\infty[$ par $f(x) = K\, e^{-G(x)}$ où K est une constante réelle.

$f(x) = K\, e^{-[x - 2\ln(x+1)]}$,

$f(x) = K\, e^{[-x + \ln(x+1)^2]}$,

$f(x) = K\, e^{-x} \times e^{\ln(x+1)^2}$,

$f(x) = K\,(x + 1)^2\, e^{-x}$.

2° h(x) = m , h'(x) = 0 , h est solution de (E) si et seulement si pour tout nombre réel x de $]-1, +\infty[$,
$(x + 1)\, h'(x) + (x - 1)h(x) = -x + 1$,
$(x - 1)\, m = -x + 1$ d'où pour m = − 1.

3° L'ensemble des solutions de (E) est la somme des fonctions obtenues au 1° et 2°, c'est à dire l'ensemble des fonctions définies sur $]-1, +\infty[$ par $f(x) = K\,(x + 1)^2\, e^{-x} - 1$ où K est une constante réelle.

4° f(0) = 0 se traduit par K − 1 = 0, K = 1.
La solution cherchée est définie sur $]-1, +\infty[$ par
$f(x) = (x + 1)^2\, e^{-x} - 1$.

B 1° Pour x de $]-1, +\infty[$, f est dérivable et
$f'(x) = 2(x + 1)\, e^{-x} + (1 + x)^2 (-e^{-x})$.
$f'(x) = (1 - x^2)\, e^{-x}$.
L'ordonnée de A est $f(1) = 4\, e^{-1} - 1$. $f'(1) = 0$, la tangente en ce point est donc parallèle à l'axe des abscisses .

2° Cherchons $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$. Les théorèmes sur la limite d'un produit ne permettent pas de conclure directement pour $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-x}(x + 1)^2$.

$e^{-x}(x + 1)^2 = e^{-x}(x^2 + 2x + 1)$,

$e^{-x}(x + 1)^2 = x^2 e^{-x} + 2x\, e^{-x} + e^{-x}$,

$\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-x}(x + 1)^2 = 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -1$.

La droite d'équation y = − 1 est donc asymptote à C en $+\infty$.

3° a) On lit dans le formulaire que

$$e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2} + t^2\,\varepsilon(t) \quad \text{avec} \quad \lim_{t \to 0} \varepsilon(t) = 0 .$$

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2} + x^2\,\varepsilon(x) \quad \text{avec} \quad \lim_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0 .$$

En effectuant la multiplication de ce développement par $(x^2 + 2x + 1)$ et en ne conservant que les termes de degré inférieur ou égal à deux on obtient :

$$f(x) = x - \frac{x^2}{2} + x^2\,\varepsilon(x) \quad \text{avec} \quad \lim_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0 .$$

b) Une équation de la tangente à C en O est y = x.

$$f(x) - x = -\frac{x^2}{2} + x^2\,\varepsilon(x) \quad \text{avec} \quad \lim_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0 .$$

$f(x) - x \leq 0$ la courbe C est au dessous de la tangente au voisinage de l'origine.

BÂTIMENT Nouvelle Calédonie

Session 1994

EXERCICE 1 (9 points)

Une usine fabrique des " robinets - vannes " pour le bâtiment.
Deux défauts de fabrication seulement sont possibles, un défaut noté « a » et un défaut noté « b ».

1° Une étude statistique a montré que, pour un robinet tiré au hasard dans la production d'une journée, la probabilité de l'événement
A : « le robinet présente le défaut " a " » est $P(A) = 0{,}01$ et la probabilité de l'événement
B : « le robinet présente le défaut " b " » est $P(B) = 0{,}05$.
Dans cette question on donnera la valeur exacte de chaque probabilité.
On admet que les événements A et B sont indépendants.

Calculer la probabilité des événements suivants.

a) C : « le robinet présente les deux défauts » ;

b) D : « le robinet présente au moins un défaut (et peut être les deux) » ;

c) E : « le robinet ne présente aucun des deux défauts » ;

d) F : « le robinet présente un et un seul des deux défauts ».

2° Dans la production d'une journée on prélève un robinet au hasard en supposant que chaque robinet a la même probabilité d'être choisi. On admet que la probabilité que le robinet ne présente aucun des deux défauts « a » et « b » est 0,9405. On prélève ainsi cinq robinets avec remise, de telle façon que les cinq tirages d'un robinet soient indépendants.
Soit X la variable aléatoire qui, à un tel prélèvement de cinq robinets, associe le nombre de robinets ne présentant aucun des deux défauts « a » et « b ».

a) Expliquer pourquoi X suit une loi binomiale. Donner les paramètres de cette loi.

b) Déterminer la probabilité de l'événement
G : « quatre robinets au moins n'ont aucun des deux défauts ».
On donnera une valeur approchée à 10^{-4} près du résultat.

EXERCICE 2 (11 points)

A Soit (E) l'équation différentielle :

$y'' - 3y' + 2y = 8x^2 - 24x$ où l'inconnue y est une fonction de la variable réelle x, définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

1° Résoudre l'équation différentielle (E_1) : $y'' - 3y' + 2y = 0$.

2° Déterminer les nombres réels a, b, c pour que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = ax^2 + bx + c$ soit solution de l'équation (E).

3° Déduire du 1° et du 2° l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E).

4° Déterminer la solution particulière f de l'équation (E) qui vérifie les conditions initiales : $f(0) = 0$ et $f'(0) = 0$.

B Soit f la fonction définie sur $I = [-1, 1]$ par

$f(x) = -4e^{2x} + 8e^{x} + 4x^2 - 4$ et C sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$ unité 2 cm.

1° a) Pour tout nombre réel x de I calculer $f'(x)$ et $f''(x)$.

b) Vérifier que, pour tout nombre réel x de I ,

$f''(x) = -8(2e^{x} + 1)(e^{x} - 1)$.

En déduire les variations de la fonction f'.

c) Déduire du b) le signe de $f'(x)$ sur I et le sens de variation de la fonction f.

2° a) Déterminer la tangente T à la courbe représentative C de f au point d'abscisse 0.

b) Construire la courbe C.

EXERCICE 1 :

1° a) $C = A \cap B$.
Les deux événements A et B sont indépendants.
$P(C) = P(A) \times P(B)$ avec $P(A) = 0{,}01$ et $P(B) = 0{,}05$.
$P(C) = 0{,}0005$.

b) $D = A \cup B$. Pour tous événements A et B on a :
$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.
$P(A) = 0{,}01$, $P(B) = 0{,}05$, $P(A \cap B) = 0{,}0005$.
$P(D) = 0{,}0595$.

c) $E = \overline{D}$, $P(E) = 1 - P(D)$, **$P(E) = 0{,}9405$.**

d) $\overline{F} = C \cup E$, le contraire de F est « le robinet présente les deux défauts ou le robinet ne présente aucun défaut ». $P(\overline{F}) = P(C \cup E)$.
C et E sont deux événements incompatibles d'où
$P(\overline{F}) = P(C) + P(E)$, $P(\overline{F}) = 0{,}941$.
$P(F) = 1 - 0{,}941$, **$P(F) = 0{,}059$.**

2° a) On a une épreuve aléatoire élémentaire pouvant déboucher sur deux résultats et deux seulement, de probabilités respectives $p = 0{,}9405$ et $q = 0{,}0595$.
On réalise 5 fois cette épreuve aléatoire. Les 5 épreuves aléatoires élémentaires sont indépendantes, X suit la loi binomiale $\mathscr{B}$ **(5 ; 0,9405).**

b) On note G_4 et G_5 les deux événements suivants :
G_4 : « quatre robinets exactement n'ont aucun défaut »,
G_5 : « les cinq robinets n'ont aucun défaut ».
$G = G_4 \cup G_5$. G_4 et G_5 sont incompatibles donc
$P(G) = P(G_4) + P(G_5)$.
$P(G_4) = C_5^4\ (0{,}9405)^4(0{,}0595)$, $P(G_5) = C_5^5\ (0{,}9405)^5$.
$P(G) = 5\ (0{,}9405)^4\ (0{,}0595) + (0{,}9405)^5$.
$P(G) \approx 0{,}9686$.

EXERCICE 2 :

A 1° L'équation caractéristique de (E_1) est
$r^2 - 3r + 2 = 0$.
Les solutions de cette équation sont $r_1 = 1$ et $r_2 = 2$.
Les solutions de (E_1) sont donc définies sur $\mathbb{R}$ par
$$y(x) = C_1\, e^{x} + C_2\, e^{2x}$$
où C_1 et C_2 sont deux constantes réelles quelconques.

2° g est solution de (E) si et seulement si pour tout nombre réel x de $\mathbb{R}$,
$2a - 3(2ax + b) + 2(ax^2 + bx + c) = 8x^2 - 24x$,
$2ax^2 - 6ax + 2bx + 2a - 3b + 2c = 8x^2 - 24x$,
$2ax^2 + (2b - 6a)x + (2a - 3b + 2c) = 8x^2 - 24x$.

d'où $\begin{cases} 2a = 8 \\ -6a + 2b = -24 \\ 2a - 3b + 2c = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} a = 4 \\ b = 0 \\ c = -4 \end{cases}$

Pour tout nombre réel x, **$g(x) = 4x^2 - 4$.**

3° Toutes les solutions de l'équation (E) sont obtenues en faisant la somme des fonctions solutions de l'équation (E_1) et d'une solution particulière de l'équation (E).
Toutes les solutions de l'équation (E) sont donc définies sur $\mathbb{R}$ par : **$y(x) = C_1\, e^{x} + C_2\, e^{2x} + 4x^2 - 4$.**

4° $f(0) = 0$ est équivalent à $C_1 + C_2 - 4 = 0$.
Pour tout nombre réel x
$f'(x) = C_1\, e^{x} + 2C_2\, e^{2x} + 8x$.
$f'(0) = 0$ est équivalent à $C_1 + 2C_2 = 0$
C_1 et C_2 sont solutions du système
$\begin{cases} C_1 + C_2 = 4 \\ C_1 + 2C_2 = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} C_1 + C_2 = 4 \\ C_2 = -4 \end{cases}$
d'où $C_1 = 8$ et $C_2 = -4$.
D'où, pour tout nombre réel x,
$f(x) = 8e^{x} - 4e^{2x} + 4x^2 - 4$.

B 1° a) Pour tout nombre réel x de I
$f'(x) = -8e^{2x} + 8e^{x} + 8x$,
$f''(x) = -16e^{2x} + 8e^{x} + 8$.

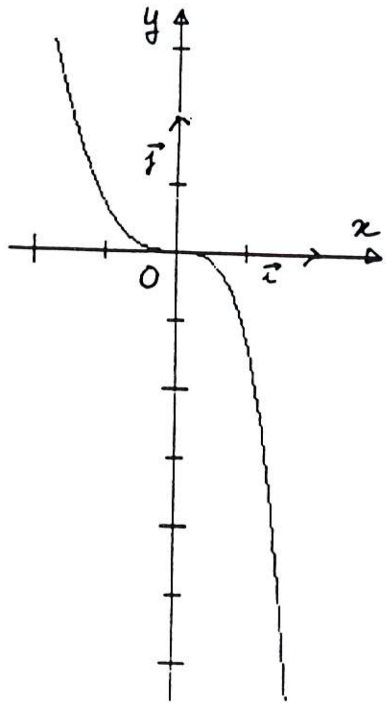
b) Pour tout nombre réel x de I
$-8(2e^{x} + 1)(e^{x} - 1) = -8[(2e^{x} \times e^{x} - 2e^{x} + e^{x} - 1]$,
$= -8(2e^{2x} - e^{x} - 1)$,
$= -16e^{2x} + 8e^{x} + 8 = f''(x)$.
Pour tout nombre réel x de I $2e^{x} + 1 > 0$,
donc $f''(x) \geq 0$ est équivalent à $-8(e^{x} - 1) \geq 0$,
donc à $e^{x} - 1 \leq 0$, à $e^{x} \leq 1$, à $x \leq 0$.
D'où le tableau de variation de f' :

x	− 1		0		1
f''(x)		+	0	—	
f'(x)		↗	0	↘	

c) Du tableau de variation précédent on déduit que pour tout nombre réel x de I $f'(x) \leq 0$.
D'où le tableau de variation de f :

x	− 1		0		1
f '(x)		—	0	—	
f(x)		↘	0	↘	

2° a) $f'(0) = 0$. T est confondue avec l'axe des abscisses
b)



BÂTIMENT

Session 1995

EXERCICE 1 (8 points)

Une machine produit des pièces cylindriques destinées à faire des axes de moteurs. On étudie le diamètre, exprimé en millimètres, des pièces issues de cette fabrication.

Les deux questions 1° et 2° sont indépendantes.

Toutes les probabilités seront calculées à 10^{-3} près.

1° On admet que la variable aléatoire X qui, à toute pièce choisie au hasard dans la production d'une journée, associe son diamètre suit la loi normale de moyenne $m = 16{,}5$ et d'écart type $\sigma = 0{,}1$.

a) Déterminer la probabilité que X prenne une valeur dans l'intervalle $[16{,}4 ; 16{,}6]$.

b) Déterminer le nombre réel positif h, tel que la probabilité que la variable aléatoire X prenne une valeur dans l'intervalle $[16{,}5 - h ; 16{,}5 + h]$ soit égale à $0{,}95$.

2° On suppose maintenant que la probabilité qu'une pièce choisie au hasard dans la production d'une journée soit défectueuse est $p = 0{,}05$. On prélève au hasard 60 pièces. La production est assez importante pour qu'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise de 60 pièces. On appelle Y la variable aléatoire qui, à tout prélèvement de 60 pièces, associe le nombre de pièces défectueuses.

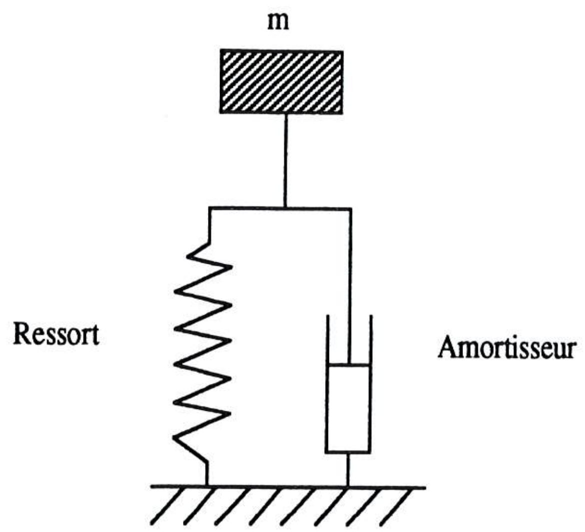
a) Expliquer pourquoi Y suit une loi binomiale dont on déterminera les paramètres.

b) Calculer $P(Y \leq 2)$.

c) On approche la loi binomiale de la question précédente par la loi de Poisson de même espérance mathématique. Préciser le paramètre de cette loi. En utilisant cette loi de Poisson, déterminer la probabilité qu'un échantillon de 60 pièces contienne au plus deux pièces défectueuses.

EXERCICE 2 (12 points)

Une masse M est posée sur le sol à l'aide d'une suspension amortie comme le montre le schéma suivant.



Pour tout t de $[0, +\infty[$, on désigne par x(t) la longueur du ressort.
On établit en mécanique que la fonction de la variable t définie sur $[0, +\infty[$ par $t \longmapsto x(t)$ est solution de l'équation différentielle : $x'' + k x' + 25 x = 20$
où k désigne une constante réelle positive qui dépend des caractéristiques de l'amortisseur.

A Les questions 1° et 2° sont, dans une large mesure, indépendantes.

1° Résolution de l'équation différentielle (1) : $x'' + k x' + 25 x = 0$
où l'inconnue x est une fonction de la variable réelle t définie et deux fois dérivable sur $[0, +\infty[$ et k une constante positive.

a) Ecrire l'équation caractéristique de l'équation (1).
b) Donner suivant les valeurs de k les différentes formes des solutions.
c) Déterminer l'intervalle dans lequel il faut choisir le nombre k pour que l'équation (1) n'admette pas de solutions faisant intervenir des fonctions trigonométriques, donc que le système ne soit pas soumis à des oscillations.

2° Dans la suite on prend k = 10.

On note (2) l'équation différentielle : $x'' + 10 x' + 25 x = 20$ où l'inconnue x est une fonction de la variable réelle t définie et deux fois dérivable sur $[0, +\infty[$.

a) Résoudre l'équation différentielle (3) : $x'' + 10x' + 25x = 0$.

b) Déterminer le nombre réel m pour que la fonction constante h définie sur $[0, +\infty[$ par $h(t) = m$ soit solution de l'équation (2).

c) Déduire de ce qui précède l'ensemble des solutions de l'équation (2).

d) Déterminer la solution particulière x de l'équation (2) qui vérifie les conditions initiales $x(0) = 0{,}4$ et $x'(0) = 0$.

B Soit x la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par $x(t) = (-2t - 0{,}4)\,e^{-5t} + 0{,}8$ et C sa courbe représentative dans le plan muni du repère orthonormal $(O\,;\vec{i}, \vec{j})$, unité graphique : 10 cm.

1° a) Déterminer $\lim\limits_{t \to +\infty} x(t)$. En déduire l'existence d'une asymptote D dont on donnera une équation.

b) En admettant que la fonction x que l'on étudie soit solution du problème mécanique décrit au début de cet exercice, donner une interprétation du résultat obtenu au B 1° a).

2° a) Déterminer la dérivée x' de x.

b) Etablir le tableau de variation de x.

3° a) Déterminer la tangente T à la courbe C au point d'abscisse 0.

b) Compléter, après l'avoir reproduit le tableau de valeurs suivant dans lequel on fera figurer éventuellement des valeurs décimales approchées à 10^{-2} près.

t	0	0,25	0,5	0,75	1	1,5	2
x(t)							

c) Construire D, T et C.

EXERCICE 1

La variable aléatoire X qui, associe à chaque pièce son diamètre, suit la loi normale $\mathcal{N}$ (16,5 ; 0,1), la variable aléatoire $T = \dfrac{X - 16,5}{0,1}$ suit la loi normale $\mathcal{N}$ (0, 1).

1° a) $P(16,4 \leq X \leq 16,6) = P(-1 \leq T \leq 1)$,
$P(16,4 \leq X \leq 16,6) = 2\pi(1) - 1$,
$P(16,4 \leq X \leq 16,6) \approx 2(0,8413) - 1$,
$\mathbf{P(16,4 \leq X \leq 16,6) \approx 0,683.}$

b) On cherche h tel que $P(16,5 - h \leq T \leq 16,5 + h) = 0,95$

$P(-\dfrac{h}{0,1} \leq T \leq \dfrac{h}{0,1}) = 0,95$, d'où $2\pi(\dfrac{h}{0,1}) - 1 = 0,95$ et $\pi(10\,h) = 0,975$.

On trouve dans la table du formulaire : $10\,h = 1,96$ donc
$\mathbf{h \approx 0,196.}$

2° a) On est en présence de 60 tirages indépendants avec deux issues de probabilités respectives : $p = 0,05$ et $q = 0,95$. Y suit la loi binomiale $\mathcal{B}$ (60 ; 0,05).

b) $P(Y \leq 2) = P(Y = 0) + P(Y = 1) + P(Y = 2)$,

$P(Y \leq 2) = C_{60}^{0}(0,05)^0(0,95)^{60} + C_{60}^{1}(0,05)^1(0,95)^{59} + C_{60}^{2}(0,05)^2(0,95)^{58}$, $\mathbf{P(Y \leq 2) \approx 0,4174}$.

c) Le paramètre est $\lambda = np$, $\lambda = 3$
$P(Y \leq 2) = 0,050 + 0,149 + 0,224 = 0,423$,
$\mathbf{P(Y \leq 2) = 0,423.}$

EXERCICE 2

A 1° Résolution de l'équation différentielle (1)
$x'' + k\,x' + 25\,x = 0.$

a) L'équation caractéristique de (1) est
$r^2 + kr + 25 = 0.$

Le discriminant de l'équation caractéristique est
$\Delta = k^2 - 100.$

b) <u>Si $0 \leq k < 10$ alors $\Delta < 0$</u> les solutions de l'équation caractéristique sont les nombres complexes conjugués :

$r_1 = \dfrac{-k + i\sqrt{100-k^2}}{2}$ et $r_2 = \dfrac{-k - i\sqrt{100-k^2}}{2}$

donc si $0 \leq k < 10$ les solutions de l'équation différentielle (1) sont les fonctions x définies sur $[0, +\infty[$ par :

$x(t) = e^{-kt/2}(A \cos\dfrac{\sqrt{100-k^2}}{2}\,t + B \sin\dfrac{\sqrt{100-k^2}}{2}\,t)$

où A et B sont des constantes réelles quelconques.

<u>Si $k = 10$ alors $\Delta = 0$</u> les solutions de l'équation différentielle (1) sont les fonctions x définies sur $[0, +\infty[$ par : $x(t) = e^{-5t}(A\,t + B)$ où A et B sont des constantes réelles quelconques.

<u>Si $k > 10$ alors $\Delta > 0$</u>

$r_1 = \dfrac{-k + \sqrt{k^2-100}}{2}$ et $r_2 = \dfrac{-k - \sqrt{k^2-100}}{2}$,

les solutions de l'équation différentielle (1) sont les fonctions x définies sur $[0, +\infty[$ par :

$x(t) = A\,e^{r_1 t} + B\,e^{r_2 t}$ où A et B sont des constantes réelles quelconques.

c) Pour que le système n'ait pas d'oscillations il faut donc que $\mathbf{k \geq 10}$.

2° $k = 10$.

a) L'équation (3) est $x'' + 10\,x' + 25\,x = 0$.

Les solutions de l'équation différentielle (3) sont les fonctions x définies sur $[0, +\infty[$ par :

$x(t) = e^{-5t}(A\,t + B)$, où A et B sont des constantes réelles quelconques.

b) Pour tout t de $[0, +\infty[$ $h(t) = m$, $h'(t) = 0$, $h''(t) = 0$ donc h est solution de (2) si et seulement si $25\,m = 20$ c'est à dire $\mathbf{m = 0,8}$.

c) Les solutions de l'équation (2) sont les fonctions x définies sur $[0, +\infty[$ par : $x(t) = e^{-5t}(A\,t + B) + 0,8$ où A et B sont des constantes réelles quelconques.

d) Pour tout $t \geq 0$, $x(0) = 0,4$ d'où $B + 0,8 = 0,4$, $B = -0,4$, $x'(t) = e^{-5t}(-5\,A\,t - 5\,B + A)$ et $x'(0) = 0$ d'où $-5\,B + A = 0$ et $A = -2$.

$\mathbf{x(t) = e^{-5t}(-2\,t - 0,4) + 0,8}$ pour tout $t \geq 0$.

B $x(t) = (-2t - 0,4)\,e^{-5t} + 0,8$,

1° a) Recherche de $\lim\limits_{t \to +\infty} x(t)$, pour tout $t \geq 0$, x(t) peut s'écrire $x(t) = -\dfrac{2}{5}\dfrac{5t}{e^{5t}} - 0,4\dfrac{1}{e^{5t}} + 0,8.$

$\lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{1}{e^{5t}} = 0$, $\lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{5t}{e^{5t}} = 0$ d'où

$\lim\limits_{t \to +\infty} x(t) = 0,8$. **La courbe C admet donc pour asymptote la droite D d'équation $y = 0,8$.**

b) Au bout d'un certain temps **la longueur du ressort est très proche de 0,8** unité de longueur.

2° a) $x'(t) = -2\,e^{-5t} + (-2t - 0,4)(-5\,e^{-5t})$,
Pour tout $t \geq 0$, $x'(t) = 10\,t\,e^{-5t}$.

b) pour tout $t \geq 0$ $e^{-5t} > 0$.

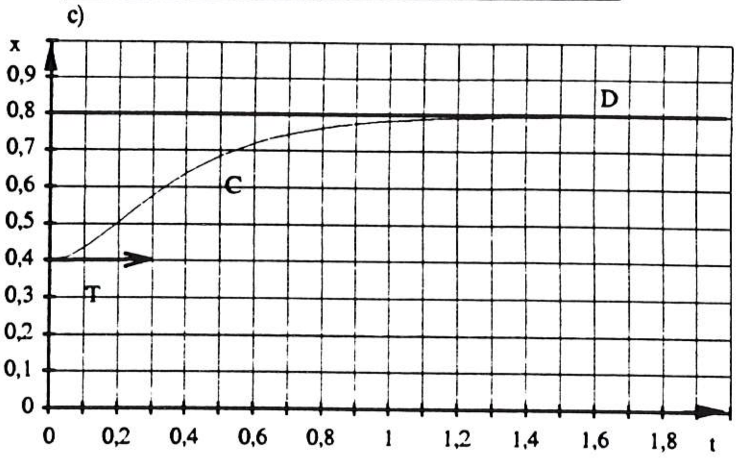
t	0	$+\infty$
x '(t)	+	
x(t)	0,4 ↗	0,8

3° a) $x'(0) = 0$, donc la tangente T à la courbe C en A est parallèle à l'axe des abscisses .

b)

t	0	0,25	0,5	0,75	1	1,5	2
x(t)	0,4	0,542	0,685	0,755	0,78	0,798	0,799

c)



BÂTIMENT Nouvelle Calédonie

Session 1995

EXERCICE 1 (8 points)

Dans cet exercice chaque probabilité demandée sera calculée à 10^{-3} près.

Une usine sidérurgique fabrique en très grande série des armatures "HA" pour béton armé.

<u>Les parties A et B sont indépendantes.</u>

A - On admet que la variable aléatoire X qui, à toute armature choisie au hasard dans la production d'une journée, associe sa longueur exprimée en centimètres, suit la loi normale de moyenne $m = 600$ et d'écart type $\sigma = 8$.

1° Déterminer la probabilité que la longueur en centimètres d'une armature prise au hasard dans la production d'une journée soit comprise entre 590 et 620.

2° Déterminer le nombre réel positif a, tel que la probabilité que la variable aléatoire X prenne une valeur dans l'intervalle $[600 - a, 600 + a]$ soit égale à 0,9.

B - On refuse les armatures dont la longueur est extérieure à l'intervalle [590, 620] et on admet que la probabilité qu'une armature soit refusée est 0,1. On prélève au hasard un échantillon de N armatures dans l'entrepôt. Le stock de l'entrepôt est assez important pour qu'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise de N armatures. On appelle Y la variable aléatoire qui, à tout prélèvement de N armatures, associe le nombre d'armatures refusées.

1° Expliquer pourquoi la variable aléatoire Y suit une loi binomiale ; préciser les paramètres de cette loi.

2° Dans cette question on prend $N = 4$.
Calculer la probabilité p_1 qu'un échantillon de quatre armatures contienne au plus deux armatures refusées.

3° Dans cette question on prend $N = 50$.

a) Donner les paramètres de la loi binomiale que suit la variable aléatoire Y.

b) On approche la loi binomiale que suit Y par une loi de Poisson, en préciser le paramètre.

c) En utilisant cette loi de Poisson, déterminer la probabilité p_2 qu'un échantillon de 50 armatures contienne au plus deux armatures refusées.

C - Pour estimer la longueur moyenne des armatures on prélève régulièrement des échantillons de 100 armatures. On assimile ces échantillons à des échantillons prélevés avec remise.

On désigne par $\overline{X}$ la variable aléatoire qui, à tout échantillon de 100 armatures, associe la moyenne des longueurs des armatures de cet échantillon. On admet que $\overline{X}$ suit la loi normale de moyenne m inconnue et d'écart type 0,8. On constate que la moyenne des longueurs des 100 armatures d'un échantillon est 602 cm. En déduire un intervalle de confiance, centré en 602, au seuil de confiance 95 % pour la moyenne m inconnue.

EXERCICE 2 (12 points)

Partie A

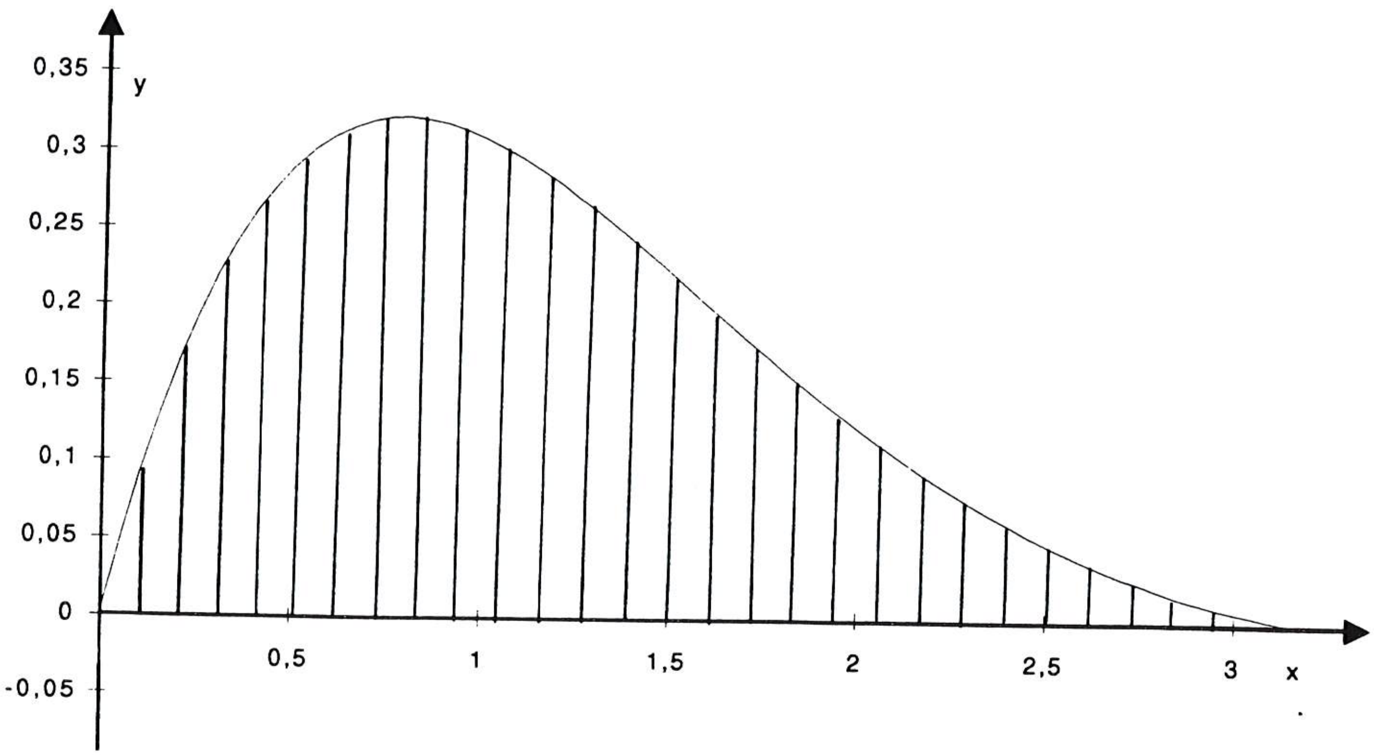
1° Résoudre l'équation différentielle (E) : $y'' + 4y' + 8y = 0$ où l'inconnue y est une fonction de la variable x définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

2° Déterminer la solution g de (E) qui vérifie les conditions initiales $g(\frac{\pi}{4}) = 0$ et $g'(0) = -2$.

Partie B

Soit f la fonction définie sur $[0, \pi]$ par $f(x) = e^{-x} \sin x$.

On désigne par C la courbe représentative de f dans le plan muni du repère orthogonal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$. La courbe C est donnée sur le dessin suivant sur lequel on a pris comme unités graphiques 5 cm pour 1 sur l'axe des abscisses et 1 cm pour 0,05 sur l'axe des ordonnées. On se propose, dans cette partie, de calculer le volume, en unités de volume, du solide engendré par la rotation autour de l'axe des abscisses de la partie du plan hachurée sur la figure.



Ce volume est donné par la formule $V = \pi \int_0^{\pi} [f(x)]^2 \, dx$.

1° Démontrer que $V = \pi \displaystyle\int_0^{\pi} e^{-2x} \left(\frac{1 - \cos 2x}{2}\right) dx$.

2° Calculer la valeur exacte de l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^{\pi} e^{-2x}\, dx$.

3° Soit g la fonction définie sur $[\,0, \pi\,]$ par $g(x) = e^{-2x} \cos 2x$.

a) En utilisant la partie A, démontrer que, pour tout x de $[\,0, \pi\,]$, $g(x) = -\frac{1}{8} g''(x) - \frac{1}{2} g'(x)$.

b) En déduire que la fonction G définie sur $[\,0, \pi\,]$ par $G(x) = \frac{1}{4} e^{-2x} (\sin 2x - \cos 2x)$ est une primitive de g sur $[\,0, \pi\,]$.

c) Déduire du b) la valeur exacte de l'intégrale $J = \displaystyle\int_0^{\pi} e^{-2x} \cos 2x\, dx$.

4° a) Déduire du 2° et du 3° c) la valeur exacte de V.

b) Donner, en unités de volume, la valeur décimale approchée arrondie à 10^{-3} près de V.

EXERCICE 1

A - 1° La variable aléatoire X suit la loi normale $\mathcal{N}(600, 8)$, la variable aléatoire $T = \dfrac{X - 600}{8}$ suit la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0, 1)$.

$P(590 \leq X \leq 620) = P(-\frac{10}{8} \leq T \leq \frac{20}{8})$,

$P(590 \leq X \leq 620) = \pi(2{,}5) + \pi(1{,}25) - 1$,

$P(590 \leq X \leq 620) \approx 0{,}9938 + 0{,}8944 - 1$,

$P(590 \leq X \leq 620) = 0{,}888$ à 10^{-3} près.

2° $P(400 - a \leq X \leq 400 + a) = 0{,}9$ équivaut à

$P(-\frac{a}{8} \leq T \leq \frac{a}{8}) = 0{,}8$, $2\pi(\frac{a}{8}) - 1 = 0{,}9$,

$\pi(\frac{a}{8}) = 0{,}95$, $\frac{a}{8} \approx 1{,}645$, $a \approx$ **13,16**.

B 1° a) Le prélèvement des N armatures est assimilé à un prélèvement avec remise, les N tirages successifs sont donc indépendants. Pour chaque armature tirée il y a deux éventualités : être refusée avec la probabilité 0,1 ou être acceptée avec la probabilité 0,9, donc la variable aléatoire Y qui, à chaque lot de N armatures, associe le nombre d'armatures défectueuses suit la loi binomiale $\mathcal{B}(N ; 0{,}1)$.

2° Y suit la loi $\mathcal{B}(4 ; 0{,}1)$.

$p_1 = P(Y \leq 2) = P(Y = 0) + P(Y = 1) + P(Y = 2)$,

$p_1 = C_4^0(0{,}1)^0(0{,}9)^4 + C_4^1(0{,}1)(0{,}9)^3 + C_4^2(0{,}1)^2(0{,}9)^2$,

$p_1 = 0{,}997$ à 10^{-3} près.

3° a) Y suit la loi $\mathcal{B}(50 ; 0{,}1)$.

b) Le paramètre est $\lambda = N \times p = 50 \times 0{,}1$, $\lambda = 5$.

c) $p_2 = P(Y \leq 2) = P(Y = 0) + P(Y = 1) + P(Y = 2)$,

A l'aide de la table du formulaire on trouve

$p_2 = 0{,}007 + 0{,}034 + 0{,}084$, **$p_2 = 0{,}125$ à 10^{-3} près.**

C - Un intervalle de confiance à 95 % de la moyenne m inconnue centré en $\overline{x}$ pour le paramètre inconnu m est : $[\,\overline{x} - t\sigma , \overline{x} + t\sigma\,]$

Avec $\overline{x} = 602$, $\sigma = 0{,}8$ et $t = 1{,}96$ on obtient :

$[602 - 1{,}96 \times 0{,}8 ; 602 + 1{,}96 \times 0{,}8]$

Avec la précision demandée au a) un intervalle de confiance à 95 % de la moyenne m inconnue centré en 602 est **[600,432 ; 603,568]** .

EXERCICE 2

A - On considère l'équation (E) : $y'' + 4y' + 8y = 0$, dans laquelle y , désigne une fonction numérique de la variable x définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

1° L'équation caractéristique est $r^2 + 4r + 8 = 0$;
$\Delta = -16 = (4i)^2$. Il y a deux solutions $r_1 = -2 - 2i$ et $r_2 = -2 + 2i$. Les solutions de l'équation différentielle sont définies sur $\mathbb{R}$ par :
$f(x) = e^{-2x}(A \cos 2x + B \sin 2x)$, où A et B sont deux constantes réelles.

2° Si une solution particulière g de l'équation (E) vérifie $g(\frac{\pi}{4}) = 0$ alors $e^{-\pi/2} B = 0$ donc $\mathbf{B = 0}$.

Pour tout x de $\mathbb{R}$, $g(x) = A e^{-2x} \cos 2x$,
$g'(x) = -2A e^{-2x} \cos 2x + A e^{-2x}(-\sin 2x)$,
$g'(x) = -2A e^{-2x}(\cos 2x + \sin 2x)$;
si $g'(0) = -2$ alors $-2A = -2$ donc $A = 1$,
pour tout x de $\mathbb{R}$, $\mathbf{g(x) = e^{-2x} \cos 2x}$.

B - 1° $V = \pi \displaystyle\int_0^{\pi} (e^{-x} \sin x)^2 \, dx$,

$$V = \pi \int_0^{\pi} e^{-2x} \sin^2 x \, dx = \pi \int_0^{\pi} e^{-2x} \left(\frac{1 - \cos 2x}{2}\right) dx$$

2° $I = \displaystyle\int_0^{\pi} e^{-2x} \, dx = \left[-\frac{1}{2} e^{-2x}\right]_0^{\pi}$

$\mathbf{I = \frac{1}{2}(1 - e^{-2\pi})}$.

3° a) g est solution de (E) donc elle vérifie pour tout x de $[0, \pi]$: $g''(x) + 4g'(x) + 8g(x) = 0$ qui équivaut à
$g(x) = -\frac{1}{8} g''(x) - \frac{1}{2} g'(x)$.

b) Une primitive G de g est définie sur $[0, \pi]$ par
$G(x) = -\frac{1}{8} g'(x) - \frac{1}{2} g(x)$ d'où
$G(x) = -\frac{1}{8}[-2e^{-2x}(\cos 2x + \sin 2x)] - \frac{1}{2} e^{-2x} \cos 2x$

$\mathbf{G(x) = \frac{1}{4} e^{-2x}(\sin 2x - \cos 2x)}$.

c) D'après b) $J = \left[\frac{1}{4} e^{-2x}(\sin 2x - \cos 2x)\right]_0^{\pi}$

$\mathbf{J = \frac{1}{4}(1 - e^{-2\pi})}$.

4° a) $V = \frac{1}{2}\pi(I - J)$ donc $\mathbf{V = \frac{\pi}{8}(1 - e^{-2\pi})}$.

b) $V \approx$ **0,392** unité de volume.

BÂTIMENT

Session 1996

EXERCICE 1

Les parties A et B sont indépendantes

Une entreprise fabrique des rivets de différents types pour la construction : des "C 8.25", des "R 8.25".

Partie A

Pour les rivets de type "C 8.25" deux défauts de fabrication seulement sont possibles : un défaut de diamètre et un défaut de longueur.

Une étude statistique permet d'admettre que, pour un rivet choisi au hasard dans la production d'une journée, la probabilité de l'événement A : « le rivet possède un défaut de diamètre » est $P(A) = 0{,}02$ et la probabilité de l'événement B : « le rivet possède un défaut de longueur » est $P(B) = 0{,}03$.

On admet que les événements A et B sont indépendants.

Calculer, à 10^{-4} près, la probabilité de chacun des événements suivants :

E_1 : « le rivet possède les deux défauts » ;

E_2 : « le rivet possède au moins un défaut » ;

E_3 : « le rivet ne possède aucun des deux défauts ».

Partie B

Les rivets de type "R 8.25" sont expédiés par deux succursales S_1 et S_2.

On désigne par Y_1 la variable aléatoire qui, à un jour choisi au hasard parmi les jours ouvrables de 1995, associe la quantité de rivets, exprimée en kilogrammes, expédiée par la succursale S_1.

On désigne par Y_2 la variable aléatoire qui, à ce même jour, associe la quantité de rivets, exprimée en kilogrammes, expédiée par la succursale S_2.

Une étude statistique antérieure permet d'admettre que la variable Y_1 suit la loi normale de moyenne 50 et d'écart type 3 et que la variable Y_2 suit la loi normale de moyenne 55 et d'écart type 4.

On suppose que Y_1 et Y_2 sont deux variables aléatoires indépendantes.

1° Calculer, à 10^{-3} près, la probabilité de chacun des deux événements suivants :

A : « $50 \leq Y_1 \leq 55$ » ;

B : « Un jour ouvrable de 1995 choisi au hasard, on a expédié entre 50 kg et 55 kg de rivets de type "R 8.25" à partir de la succursale S_2 ».

2° On désigne par Y la variable aléatoire qui, à un jour choisi au hasard parmi les jours ouvrables de 1995, associe la somme des quantités expédiées par les deux succursales S_1 et S_2.

On a $Y = Y_1 + Y_2$ et on admet que Y suit une loi normale.

a) Vérifier que la loi normale suivie par Y a pour moyenne 105 et pour écart type 5.

b) Calculer, à 10^{-3} près, la probabilité de l'événement C : « $100 \leq Y \leq 110$ ».

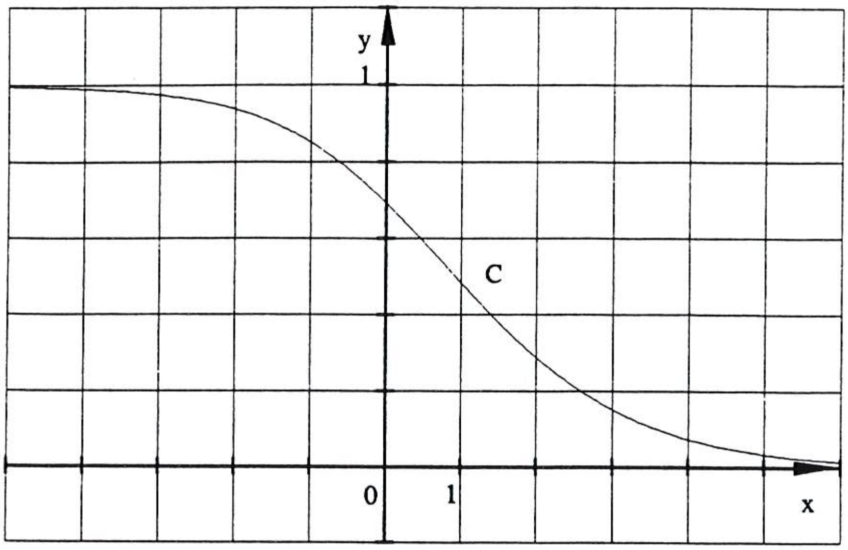
EXERCICE 2

(12 points)

Soit f la fonction définie sur |R par $f(x) = \dfrac{\ln(1 + e^x)}{e^x}$.

On désigne par C la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthogonal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$; les unités graphiques étant 1 cm sur l'axe des abscisses et 5 cm sur l'axe des ordonnées.

La courbe C est donnée sur le dessin suivant :



Le tableau de variation de f est le suivant :

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
f '(x)	−
f(x)	1 ↘ 0

<u>Les parties A, B, C sont indépendantes</u>

Partie A

1° Déduire du tableau de variation de la fonction f l'existence d'asymptotes à la courbe C ; donner les équations de ces asymptotes.

2° a) Démontrer que l'équation $f(x) = \dfrac{1}{2}$ admet une seule solution dans [0, 2], que l'on notera α.

b) Déterminer avec une calculatrice la valeur décimale arrondie à 10^{-3} près de α.

Partie B

1° a) Calculer la dérivée de la fonction h définie sur |R par $h(x) = \ln(1 + e^x)$.

b) Vérifier que pour tout nombre réel x, $\dfrac{1}{1 + e^x} = 1 - \dfrac{e^x}{1 + e^x}$.

c) Déduire du a) et du b) la valeur exacte de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+e^x}\,dx$.

2° a) Calculer la valeur exacte de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$ à l'aide d'une intégration par parties et du résultat obtenu au c) du 1°.

b) En déduire l'aire en cm^2 de la partie du plan limitée par les droites d'équation $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$ et la courbe C .

On donnera la valeur exacte du résultat puis une valeur approchée au mm^2 près.

Partie C

Soit (E) l'équation différentielle $y' + y = \dfrac{1}{1+e^x}$ où l'inconnue y est une fonction de la variable réelle x, définie et dérivable sur |R, et où y' est la fonction dérivée de y .

1° Résoudre dans |R l'équation différentielle (E_1) : $y' + y = 0$.

2° Vérifier que la fonction f définie au début de l'exercice est solution de l'équation (E) .

3° Déduire du 1° et du 2° l'ensemble des solutions de l'équation (E).

EXERCICE 1

Partie A

L'événement E_1 s'écrit $E_1 = A \cap B$.

Les deux événements A et B sont indépendants d'où $P(E_1) = P(A) \times P(B)$, $P(A) = 0{,}02$ et $P(B) = 0{,}03$ c'est à dire $P(E_1) = 0{,}0006$.

L'événement E_2 s'écrit $E_2 = A \cup B$.

Pour tous événements A et B on a :
$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.
$P(A) = 0{,}02$, $P(B) = 0{,}03$, $P(A \cap B) = 0{,}0006$, d'où $P(A \cup B) = 0{,}02 + 0{,}03 - 0{,}006$, c'est à dire
$P(E_2) = 0{,}0494$.

L'événement E_3 est le contraire de l'événement E_2 , $P(E_3) = 1 - P(E_2)$, $P(E_3) = 1 - 0{,}0494$,
$P(E_3) = 0{,}9506$.

Partie B

1° On cherche $P(B) = P(50 \le Y_1 \le 55)$.
La variable aléatoire Y_1 suit la loi normale $\mathcal{N}(50, 3)$; donc la variable aléatoire $T_1 = \dfrac{Y_1 - 50}{3}$ suit la loi normale centrée, réduite $\mathcal{N}(0, 1)$.

$P(50 \le Y_1 \le 55) = P(0 \le T_1 \le \frac{5}{3})$, $P(A) = \pi(\frac{5}{3}) - \pi(0)$.

Dans la table du formulaire on trouve $\pi(1{,}67) = 0{,}9526$
$P(A) = 0{,}453$ à 10^{-3} près.

On cherche $P(B) = P(50 \le Y_2 \le 55)$.
La variable aléatoire Y_2 suit la loi normale $\mathcal{N}(55, 4)$; donc la variable aléatoire $T_2 = \dfrac{Y_2 - 55}{4}$ suit la loi normale centrée, réduite $\mathcal{N}(0, 1)$.

$P(B) = P(-\frac{5}{4} \le T_2 \le 0)$,

$P(B) = \pi(0) + \pi(1{,}25) - 1$, $P(B) = 0{,}394$ à 10^{-3} près.

2° a) On sait que pour deux variables aléatoires indépendantes Y_1 et Y_2, suivant les lois normales $\mathcal{N}(m_1, \sigma_1)$ et $\mathcal{N}(m_2, \sigma_2)$ alors la variable aléatoire $Y_1 + Y_2$ suit la loi normale de moyenne $m_1 + m_2$ et d'écart type $\sqrt{\sigma_1{}^2 + \sigma_2{}^2}$
donc Y a pour moyenne $m = 50+55 = 105$ et pour écart type $\sigma = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$. La variable aléatoire $Y_1 + Y_2$ suit la loi normale $\mathcal{N}(105, 5)$.

b) La variable aléatoire Y suit la loi normale $\mathcal{N}(105, 5)$, donc la variable aléatoire $T = \dfrac{Y - 105}{5}$ suit la loi normale centrée, réduite $\mathcal{N}(0, 1)$.
$P(C) = P(100 \le Y \le 110)$,
$P(C) = P(-1 \le T \le 1)$, $P(C) = 2\pi(1) - 1$, avec la table du formulaire on obtient $P(C) = 0{,}683$ à 10^{-3} près.

EXERCICE 2

Partie A

1° D'après le tableau de variation $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 1$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$ donc les droites d'équations $y = 1$ et $y = 0$ sont asymptotes à la courbe C .

2° a) f est continue et strictement décroissante sur [0, 2] , $f(0) \approx 0{,}693$, $f(1) \approx 0{,}483$, 0,5 appartient à l'intervalle $[f(0), f(1)]$ donc il existe un unique réel α appartenant à l'intervalle [0, 1] tel que $f(\alpha) = 0{,}5$.

b) A l'aide de la calculatrice on obtient, à 10^{-3} près, $\alpha = 0{,}924$.

Partie B

1° a) $(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$. Pour tout nombre réel x, $h'(x) = \dfrac{e^x}{1 + e^x}$.

b) En réduisant au même dénominateur on trouve :

Pour tout nombre réel x, $1 - \dfrac{e^x}{1 + e^x} = \dfrac{1}{1 + e^x}$.

c) $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1 + e^x}\,dx = \int_0^1 \left(1 - \frac{e^x}{1 + e^x}\right) dx$,

$I = \Big[x - \ln(1 + e^x)\Big]_0^1$,

$I = 1 - \ln(1 + e) + \ln 2$.

2° a) Pour tout nombre réel x de [0, 1] on pose

$u(x) = \ln(1 + e^x)$ donc $u'(x) = \dfrac{e^x}{1 + e^x}$,

$v'(x) = e^{-x}$ donc $v(x) = -e^{-x}$.

$J = [\,u(x)\,v(x)\,]_0^1 - \displaystyle\int_0^1 u'(x)v(x)dx$,

On obtient

$J = \Big[-e^{-x}\ln(1 + e^x)\Big]_0^1 + \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1 + e^x}\,dx$,

$J = 1 + 2\ln 2 - \ln(1 + e) - \dfrac{\ln(1 + e)}{e}$,

L'unité d'aire est 5 cm^2 donc l'aire $\mathcal{A} = 2{,}95$ cm^2 ,
$\mathcal{A} = 295$ mm^2 à 1mm^2 près.

Partie C

1° Toutes les solutions de (E_1) : $y' + y = 0$ sont définies sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = C\,e^{-x}$ où C est une constante réelle quelconque .

2° Pour tout x de $\mathbb{R}$, $y = f(x) = e^{-x}.\ln(1 + e^x)$,
$(u.v)' = u'.v + u.v'$ donc

$y' = f'(x) = -e^{-x}.\ln(1 + e^x) + e^{-x}.\dfrac{e^x}{1 + e^x}$,

$y' = -e^{-x}.\ln(1 + e^x) + \dfrac{1}{1 + e^x}$,

$y' + y = e^{-x}.\ln(1 + e^x) - e^{-x}.\ln(1 + e^x) + \dfrac{1}{1 + e^x}$,

$y' + y = \dfrac{1}{1 + e^x}$, donc f est solution de l'équation (E).

3° L'ensemble des solutions de (E) est la somme des fonctions obtenues au 1° et au 2° ; c'est à dire l'ensemble des fonctions g définies sur $\mathbb{R}$ par

$g(x) = C\,e^{-x} + \dfrac{\ln(1 + e^x)}{e^x}$ où C est une constante réelle quelconque .

BÂTIMENT Nouvelle Calédonie

Session 1996

EXERCICE 1 (8 points)

Les parties A et B sont indépendantes.

La fabrication de pièces entrant dans la composition d'un moteur se fait en grande série à l'aide d'une machine dont on peut modifier le réglage.

A Probabilités

Les questions 1° et 2° sont indépendantes.

Dans ce qui suit tous les résultats numériques seront donnés à 10^{-3} près.

1° Une pièce est jugée acceptable si sa longueur en centimètres appartient à l'intervalle $[18,81 ; 19,14]$. On admet que la variable aléatoire X qui, à toute pièce choisie au hasard dans la production d'une journée, associe sa longueur, suit une loi normale de moyenne m et d'écart type σ.

a) Un jour ouvrable de 1995 on effectue un réglage. On admet alors que $m = 19$ et $\sigma = 0,12$. Déterminer la probabilité qu'une pièce choisie au hasard dans la production de cette journée soit acceptable.

b) Le lendemain, afin d'améliorer la qualité de la production, on effectue un deuxième réglage. On admet alors que $m = 18,975$. Déterminer σ, pour que $P(18,81 \leq X \leq 19,14) = 0,9$.

2° On suppose maintenant que la probabilité qu'une pièce choisie au hasard dans la production d'un jour ouvrable soit défectueuse est $p = 0,10$. On prélève au hasard 50 pièces. La production est assez importante pour qu'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise de 50 pièces. On appelle Y la variable aléatoire qui, à tout prélèvement de 50 pièces, associe le nombre de pièces défectueuses.

a) Expliquer pourquoi Y suit une loi binomiale ; déterminera les paramètres de cette loi.

b) Calculer la probabilité d'obtenir parmi 50 pièces, prélevées au hasard, exactement 3 pièces défectueuses.

B Statistique

Dans un autre atelier de la même entreprise, fabriquant le même type de pièces, on a observé que la machine se déréglait au cours du temps. On prélève donc chaque vendredi, pendant cinq semaines consécutives, cent pièces dont on mesure la longueur.

On obtient les résultats suivants :

Numéro de la semaine : x_i	1	2	3	4	5
Longueur moyenne des cent pièces : y_i	18,97	18,95	18,92	18,90	18,89

1° Déterminer, par la méthode des moindes carrés, une équation de la droite de régression de y en x, de la forme $y = m\,x + p$.

On déterminera les valeurs approchées à 10^{-3} près des coefficients m et p.

2° On effectue un réglage lorsque la moyenne des longueurs est strictement inférieure à 18,81. En admettant que l'évolution de la moyenne constatée pendant cinq semaines se poursuive les semaines suivantes et en utilisant l'équation obtenue à la question précédente, estimer le numéro de la semaine pour laquelle un réglage est prévisible.

EXERCICE 2 (12 points)

A) Soit (E) l'équation différentielle : $\frac{1}{2}y'' - 2y' + 2y = 2$

où l'inconnue y est une fonction de la variable réelle x, définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

1° Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation différentielle (E_1) : $\frac{1}{2}y'' - 2y' + 2y = 0$.

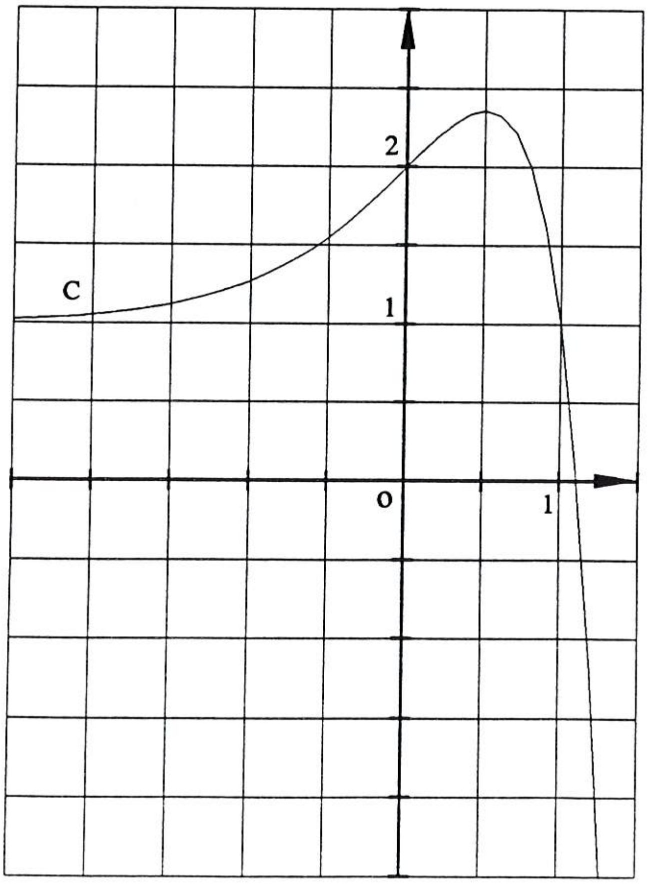
2° Déterminer le nombre réel m pour que la fonction constante h définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x) = m$ soit solution de l'équation (E).

3° Déduire du 1° et du 2° l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E).

4° Déterminer la solution particulière f de l'équation (E) qui vérifie les conditions initiales $f(0) = 2$ et $f(1) = 1$.

B) Soient f la fonction de la variable réelle x définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = e^{2x}(-x + 1) + 1$

On désigne par C la courbe représentative de f dans le plan muni du repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j})$ (unité graphique 2 cm). La courbe C est donnée sur le dessin suivant :



1° a) Démontrer que le développement limité d'ordre 3 de la fonction f au voisinage de 0 est $f(x) = 2 + x - \frac{2}{3}x^3 + x^3\,\varepsilon(x)$, avec $\lim\limits_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$.

b) En déduire une équation de la tangente T à C au point d'abscisse 0.

c) Etudier la position de T par rapport à C au voisinage de ce point.

2° a) Calculer, à l'aide d'une intégration par parties, la valeur exacte de l'intégrale

$$I = \int_0^{\frac{1}{2}} e^{2x}(-x+1)\,dx.$$

b) Déduire du a) la valeur exacte de l'intégrale $J = \displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} f(x)\,dx$.

c) Calculer la valeur exacte de l'intégrale $K = \displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \left(2 + x - \frac{2}{3}x^3\right) dx$.

d) Vérifier que $0 < K - J < 6 \,.\, 10^{-3}$.

EXERCICE 1 :

Partie A

1°a) La variable aléatoire X suit la loi normale $\mathcal{N}(19\,;0{,}12)$, la variable aléatoire $T=\frac{X-19}{0{,}12}$ suit la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0,1)$.

$P(18{,}81 \le X \le 19{,}14) = P(-\frac{0{,}19}{0{,}12} \le T \le \frac{0{,}19}{0{,}12})$,

$P(18{,}81 \le X \le 19{,}14) = \pi(1{,}58) + \pi(1{,}17) - 1$,

$P(18{,}81 \le X \le 19{,}14) \approx 0{,}8790 + 0{,}9429 - 1$,

$P(18{,}81 \le X \le 19{,}14) \approx 0{,}823$.

b) X suit la loi $\mathcal{N}(19\,;\sigma)$, $T=\frac{X-19}{\sigma}$ suit la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0\,;1)$.

$P(18{,}81 \le X \le 19{,}14) = 0{,}90$ équivaut à

$P(-\frac{0{,}165}{\sigma} \le T \le \frac{0{,}165}{\sigma}) = 0{,}90$ et à

$2\,\pi(\frac{0{,}165}{\sigma}) - 1 = 0{,}90$, $\pi(\frac{0{,}165}{\sigma}) = 0{,}95$

$\frac{0{,}165}{\sigma} = 1{,}645$, $\sigma \approx 0{,}1$.

2° a) On est en présence d'une épreuve aléatoire élémentaire pouvant déboucher sur deux résultats et deux seulement : la pièce choisie est défectueuse, événement de probabilité $p = 0{,}1$ et la pièce choisie est acceptable, événement de probabilité $q = 0{,}9$. On réalise 50 fois cette épreuve aléatoire. Les 50 épreuves aléatoires élémentaires sont indépendantes. Donc Y suit la loi binomiale $\mathcal{B}(50\,;0{,}1)$.

b) $P(Y=3) = C_{50}^{3}(0{,}1)^3(0{,}9)^{47}$, $P(Y=3) \approx 0{,}138$.

Partie B

A l'aide de la calculatrice on trouve :

1° $y = -0{,}021\,x + 18{,}989$.

2° Avec $y = 18{,}81$, $x \approx 8{,}52$, on peut travailler 8 semaines avant d'effectuer un réglage.

EXERCICE 2

Partie A

1° L'équation caractéristique est : $\frac{1}{2}r^2 - 2r + 2 = 0$

c'est à dire $\frac{1}{2}(r-2)^2 = 0$; l'équation caractéristique admet 2 comme solution double. Les solutions de (E_1) sont définies sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = (C_1\,x + C_2)\,e^{2x}$ où C_1 et C_2 sont deux constantes réelles quelconques.

2° Pour tout x de $\mathbb{R}$, $h(x) = m$,
$h'(x) = 0$ et $h''(x) = 0$. Si h est une solution de (E) alors pour tout x de $\mathbb{R}$, $\frac{1}{2}h''(x)^2 - 2\,h'(x) + 2\,h(x) = 2$,

$2\,m = 2$, $m = 1$ donc la fonction h telle que $h(x) = 1$ est solution particulière de (E).

3° La solution générale de l'équation différentielle linéaire du second ordre (E) est la somme d'une solution particulière de (E) et de la solution générale de l'équation E_1, toutes les solutions de (E) sont définies sur $\mathbb{R}$ par :

$f(x) = (C_1\,x + C_2)\,e^{2x} + 1$ où C_1 et C_2 sont deux constantes réelles quelconques.

4° La solution f de (E) vérifie les conditions :

$f(0) = 2$ qui équivaut à $C_2 + 1 = 2$ et à $C_2 = 1$.

$f(1) = 1$ qui équivaut à $(C_1 + C_2)\,e^2 + 1 = 1$ et à $C_1 + C_2 = 0$ $C_1 = -1$.

La solution particulière cherchée est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (-x+1)\,e^{2x} + 1$ où C_1 et C_2 sont deux nombres réels quelconques.

Partie B

1°a)Du développement limité :

$e^t = 1 + \frac{t}{1!} + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + t^3\,\varepsilon(t)$ avec $\lim\limits_{t\to 0}\varepsilon(t) = 0$,

on déduit le développement limité :

$e^{2x} = 1 + 2x + \frac{4x^2}{2} + \frac{8x^3}{6} + x^3\,\varepsilon(x)$, avec $\lim\limits_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0$, (puisque $\lim\limits_{x\to 0}(2x) = 0$).

De $(1 + 2\,x + 2\,x^2 + \frac{4}{3}x^3)(1-x) = 1 + x - \frac{2}{3}x^3 - \frac{4}{3}x^4$ on déduit que

$f(x) = 2 + x - \frac{2}{3}x^3 + x^3\,\varepsilon(x)$, avec $\lim\limits_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0$.

b) Une équation de T est $y = 2 + x$.

c)La position relative de (T) et (C) au voisinage du point d'abscisse 0 est donnée par le signe de :
$f(x) - (2 + x)$.

$f(x) - (2 + x)$ est du signe de $-\frac{2}{3}x^3$ donc

Lorsque $x < 0$ la courbe est au dessus de la tangente.
Lorsque $x > 0$ la courbe est au dessous de la tangente.

2°a) Pour tout nombre réel x de $[0, \frac{1}{2}]$ on pose

$u(x) = -x + 1$ donc $u'(x) = -1$,

$v'(x) = e^{2x}$ donc $v(x) = \frac{1}{2}e^{2x}$.

$$I = [\frac{1}{2}(-x+1)\,e^{2x}]_0^{0{,}5} + 0{,}5\int_0^{0{,}5} e^{2x}\,dx\ ,$$

$$I = \frac{1}{2}[\frac{1}{2}e^{-1} - 1] + \frac{1}{2}\,[\frac{1}{2}\,e^{2x}]_0^{0{,}5}\ ,\ I = \frac{1}{2}e - \frac{3}{4}.$$

b) $I = J + [x]_0^{0{,}5}$, $J = \frac{1}{2}e - \frac{1}{4}$, $J \approx 1{,}10914$

c) $K = \frac{107}{96}$, $K \approx 1{,}11458$.

d) $K - J \approx 0{,}00544$ donc $0 < K - J < 0{,}006$.

L'aire de la partie du plan limitée par la courbe C, les axes de coordonnées et la droite d'équation $x = \frac{1}{2}$ est très voisine de l'aire de la partie du plan limitée par la courbe représentative de la fonction polynôme de degré 3, définie à l'aide du développement limité de f, les axes de coordonnées et la droite d'équation $x = \frac{1}{2}$.

BÂTIMENT

Session 1997

EXERCICE 1 (8 points)

Les deux parties A et B sont indépendantes.

Un machine fabrique en grande série des tuyaux de diamètre nominal 100 mm.

On désigne par X la variable aléatoire qui, à chaque tuyau tiré au hasard dans la production, associe son diamètre, exprimé en millimètres.

On admet que X suit la loi normale de moyenne m et d'écart type $\sigma = 0{,}8$.

A. Dans les questions A 1° et A 2° on suppose m = 100.

Un tuyau est jugé conforme si son diamètre appartient à l'intervalle [98,5 ; 101,5].

1° On prélève au hasard un tuyau dans la production d'une journée. Déterminer à 10^{-3} près, la probabilité que le tuyau soit jugé non conforme.

2° On suppose maintenant que la probabilité qu'un tuyau prélevé au hasard dans la production d'une journée soit non conforme est 0,06.

On prélève au hasard n tuyaux. La production est assez importante pour qu'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage de n tuyaux avec remise. On appelle Y la variable aléatoire qui, à tout prélèvement de n tuyaux, associe le nombre de tuyaux non conformes.

a) Expliquer pourquoi Y suit une loi binomiale. En déterminer les paramètres.

b) Dans cette question on prend n = 9. Déterminer une valeur décimale approchée, à 10^{-3} près, de la probabilité de l'événement suivant :

E : " Obtenir exactement un tuyau non conforme".

c) Dans cette question on prend n = 50. On considère que la loi suivie par Y peut être approchée par une loi de Poisson. Quel est le paramètre de cette loi ? A l'aide de cette loi de Poisson déterminer une valeur approchée, à 10^{-2} près, de la probabilité d'avoir au moins quatre tuyaux non conformes.

B. Afin de contrôler que la moyenne m des diamètres de l'ensemble des tuyaux fabriqués est 100, on se propose de construire un test d'hypothèse.

On désigne par $\overline{X}$ la variable aléatoire qui, à chaque échantillon aléatoire de 100 tuyaux, associe la moyenne des diamètres des 100 tuyaux (la production est assez importante pour qu'on puisse assimiler ces prélèvements à des tirages de 100 tuyaux avec remise).

L'hypothèse nulle est H_0 : m = 100 ; l'hypothèse alternative est H_1 : m ≠ 100.

Le seuil de signification du test est fixé à 0,05.

1° Justifier que, sous l'hypothèse nulle H_0, la variable aléatoire $\overline{X}$ suit la loi normale de moyenne 100 et d'écart type 0,08.

Déterminer, à 10^{-4} près, le réel positif h tel que $P(100 - h \leq \overline{X} \leq 100 + h) = 0{,}95$.

2° Enoncer la règle de décision permettant d'utiliser ce test.

3° La moyenne observée sur un échantillon de 100 tuyaux est $\overline{x} = 99{,}73$ mm.
Cet échantillon est assimilé à un échantillon de 100 tuyaux prélevés au hasard et avec remise.
Accepte-t-on, au seuil de risque de 5%, l'hypothèse d'une moyenne de 100 mm ?

EXERCICE 2 (12 points)

Les deux parties A et B sont indépendantes.

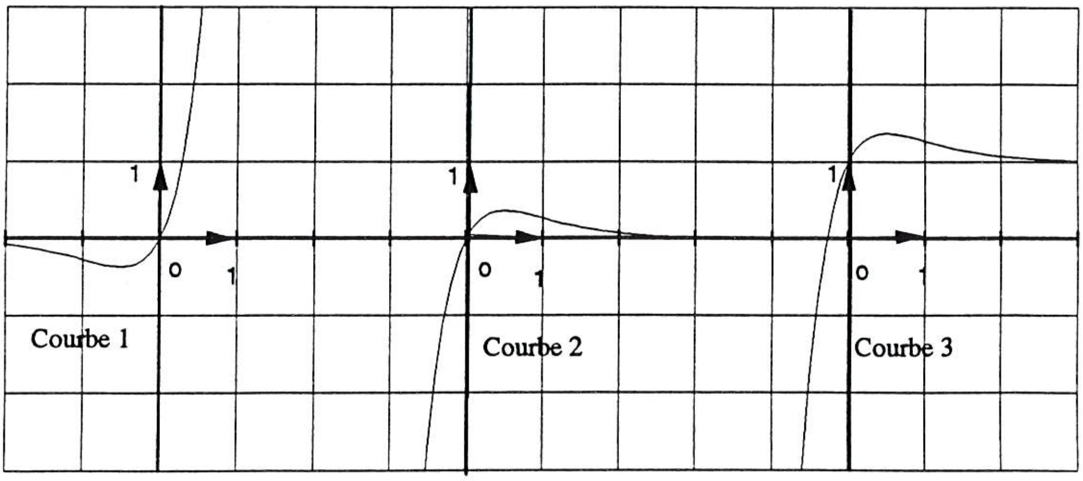
A. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 2\,x\,e^{-2x}$.

On désigne par C la courbe représentative de f dans le plan muni du repère orthonormal $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j}\,)$, unité graphique 1 cm.

1° a) Déterminer f(0) ;

b) Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.

c) On donne sur le dessin suivant les courbes représentatives respectives C_1, C_2, C_3 de trois fonctions f_1, f_2, f_3 définies sur $\mathbb{R}$. On précise que C_1 admet l'axe des abscisses comme asymptote en $-\infty$, que C_2 admet l'axe des abscisses comme asymptote en $+\infty$ et que C_3 admet la droite d'équation y = 1 comme asymptote en $+\infty$.



On admet que f est l'une des trois fonctions f_1, f_2 ou f_3. Laquelle de ces trois fonctions est la fonction f ? Justifier votre choix.

2° Déterminer par le calcul l'abscisse du point où la courbe C admet une tangente parallèle à l'axe des abscisses.

3° a) Ecrire le développement limité à l'ordre 2 de la fonction f au voisinage de 0.

b) En déduire une équation de la tangente T à la courbe C au point d'abscisse 0, et la position relative de C et T au voisinage de ce point.

4° a) Déterminer à l'aide d'une intégration par parties la valeur exacte de l'intégrale $I = \int_0^2 f(x)\,dx$.

b) Déterminer l'aire en cm^2, à 10^{-3} près par défaut, de la partie du plan limitée par la courbe C, l'axes des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 2$.

B. Soit E_1 l'équation différentielle : $4y'' + 5y' + y = 0$, où y désigne une fonction de la variable réelle x, définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, y' et y'' les fonctions dérivée première et dérivée seconde de y.

1° Résoudre l'équation différentielle E_1.

2° Montrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x\,e^{-2x}$ est une solution particulière de l'équation différentielle $E_2 : 4y'' + 5y' + y = 2e^{-2x}(7x - 11)$.

3° Déduire du 1° et du 2° l'ensemble des solutions de l'équation différentielle E_2.

EXERCICE 1

A.1° X suit la loi normale $\mathcal{N}$ (100 ; 0,8),

la variable aléatoire $T = \dfrac{X - 100}{0,8}$ suit la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0, 1)$.

$P(98,5 \leq X \leq 101,5) = P(-1,875 \leq T \leq 1,875)$,

La probabilité cherchée est $p = 1 - P(98,5 \leq X \leq 101,5)$

$p = 2\,[1 - \pi(1,875)]$, $p \approx 0,0608$,

$p = 0,061$ à 10^{-3} près.

2° a) On est en présence d'une succession de n épreuves indépendantes (tirage avec remise), chacune ayant deux issues : le tuyau est non conforme avec la probabilité 0,06 ; le tuyau est conforme avec la probabilité 0,94. La variable aléatoire Y qui, à tout prélèvement de n tuyaux, associe le nombre de tuyaux non conformes suit donc la loi binomiale $\mathcal{B}$ (n ; 0,06).

b) n = 9 donc Y suit la loi binomiale $\mathcal{B}$ (9 ; 0,06),

$P(E) = P(Y = 1)$, $P(E) = C_9^1\,(0,06)(0,94)^8$

$P(E) = 0,329$ à 10^{-3} près.

c) $\lambda = np = 50 \times 0,06 = 3$. La probabilité d'avoir au moins 4 tuyaux non conformes est :

$P(Y \geq 4) = 1 - [P(Y = 0)+P(Y = 1)+P(Y = 2)+P(Y = 3)]$,

A l'aide du formulaire on trouve :

$P(Y \geq 4) = 0,35$ à 10^{-2} près.

B.1° Sous H_0, X suit la loi normale $\mathcal{N}$ (100 ; 0,8),

$\overline{X}$ suit la loi normale $\mathcal{N}\left(100 ; \dfrac{0,8}{\sqrt{100}}\right)$.

$T = \dfrac{\overline{X} - 100}{0,08}$ suit la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0, 1)$

$P(100 - h \leq \overline{X} \leq 100 + h) = 0,95$ équivaut à

$2\pi\left(\dfrac{h}{0,08}\right) - 1 = 0,95$ et à $\pi\left(\dfrac{h}{0,08}\right) = 0,975$,

$\dfrac{h}{0,08} = 1,96$, **$h = 0,1568$ à 10^{-4} près.**

Si H_0 est vrai on a 95% de chances de prélever un échantillon aléatoire dont la moyenne appartient à l'intervalle I = [99,8432 ; 100,1568] soit 5% de chance que cette moyenne soit à l'extérieur de I.

2° La région critique est l'extérieur de l'intervalle I = [99,8432 ; 100,1568].

On prélève un échantillon aléatoire, non exhaustif, de taille 100. On calcule sa moyenne $\overline{x}$.

si $\overline{x} \in I$ on accepte H_0 et on rejette H_1 ;

si $\overline{x} \notin I$ on accepte H_1 et on rejette H_0.

3° Utilisation du test :

$\overline{x} \approx 99,73 \notin [99,8432 ; 100,1568]$ on rejette H_0.

On conclut, au seuil de risque 5%, que la moyenne des diamètres des tuyaux de la production n'est pas 100 mm.

EXERCICE 2

A.

1° a) **$f(0) = 0$.**

b) . De $\lim\limits_{x \to +\infty} 2x = +\infty$ et de $\lim\limits_{x \to +\infty} x\,e^{-x} = 0$ on déduit

$\lim\limits_{x \to +\infty} 2x\,e^{-2x} = 0$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

. De $\lim\limits_{x \to -\infty} (-2x) = +\infty$ on déduit $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{-2x} = +\infty$

De $\lim\limits_{x \to -\infty} 2x = -\infty$ et de $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{-2x} = +\infty$ on déduit

$\lim\limits_{x \to -\infty} 2x\,e^{-2x} = -\infty$ donc $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.

c) . $f(0) = 0$ et $f_3(0) = 1$ donc **la fonction f n'est pas la fonction f_3.**

. C_1 admet l'axe des abscisses comme asymptote en $-\infty$ donc $\lim\limits_{x \to -\infty} f_1(x) = 0$.

On a établi au b) que $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.

Donc la fonction f n'est pas la fonction f_1 .
La fonction f est donc la fonction f_2.

2° L'abscisse du point cherché est solution de l'équation $f'(x) = 0$.

Pour tout x de $\mathbb{R}$, $f'(x) = 2\,e^{-2x} - 4x\,e^{-2x}$,

$f'(x) = 2\,e^{-2x}(1 - 2x)$,

pour tout x de $\mathbb{R}$, $e^{-2x} > 0$,

$f'(x) = 0$ pour $x = \dfrac{1}{2}$.

La courbe C admet une tangente parallèle à l'axe des abscisses au point d'abscisse $\dfrac{1}{2}$.

3° a) On lit dans le formulaire que

$e^t = 1 + \dfrac{t}{1!} + \dfrac{t^2}{2!} + t^2\,\varepsilon(t)$, avec $\lim\limits_{t \to 0} \varepsilon(t) = 0$,

Puisque $\lim\limits_{x \to 0}(-2x) = 0$ on peut utiliser le développement précédent pour $t = -2x$

$e^{-2x} = 1 - 2x + \dfrac{(-2x)^2}{2} + x^2\,\varepsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$,

$e^{-2x} = 1 - 2x + 2x^2 + x^2\,\varepsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$.

En le multipliant par 2x et en ne conservant que les termes de degré inférieur ou égal à 2 on obtient le développement limité :

$f(x) = 2x - 4x^2 + x^2\varepsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$.

b) Une équation de la tangente T à C au point d'abscisse 0 est donc $y = 2x$.

La position relative de T et C au voisinage du point d'abscisse 0 est donnée par le signe de

$f(x) - 2x = -4x^2 + x^2\varepsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$.

Au voisinage de 0, $f(x) - 2x \leq 0$ donc C est au dessous de T au voisinage de l'origine.

4° a) Pour tout nombre réel x de [0, 2] on pose

$u(x) = 2x$ donc $u'(x) = 2$,

$v'(x) = e^{-2x}$ donc $v(x) = -\frac{1}{2}e^{-2x}$.

$$I = [\,u(x)\,v(x)\,]_0^2 - \int_0^2 u'(x)v(x)dx\ ,$$

$$I = [\,-x\ e^{-2x}\,]_0^2 - \int_0^2 -e^{-2x}\,dx\ ,$$

$$I = [\,-x\ e^{-2x}\,]_0^2 + \int_0^2 e^{-2x}\,dx\ ,$$

$$I = [\,-x\ e^{-2x}\,]_0^2 + [\,-\frac{1}{2}e^{-2x}\,]_0^2\ ,$$

$$I = [\,-x\ e^{-2x} - \frac{1}{2}e^{-2x}\,]_0^2\ ,$$

$$I = -\frac{5}{2}e^{-4} - (-\frac{1}{2})$$

$$\mathbf{I = \frac{1}{2}\ (1 - 5\ e^{-4}\ ).}$$

b) Pour tout x de [0, 2], $f(x) \geq 0$ donc l'aire cherchée est en unités d'aire, $\int_0^2 f(x)\,dx = \mathbf{I}$.

L'unité d'aire vaut $1\ cm^2$ donc l'aire cherchée est $\mathscr{A} = 0{,}454\ cm^2$ à 10^{-3} près.

B.

1° L'équation caractéristique de E_1 est :

$4r^2 + 5r + 1 = 0$

Les solutions de cette équation sont $r_1 = -\frac{1}{4}$ et $r_2 = -1$.

Toutes les solutions de l'équation différentielle E_1 sont donc définies sur $\mathbb{R}$ par :

$h(x) = C_1\ e^{-1/4\ x} + C_2\ e^{-x}$, où C_1 et C_2 sont deux constantes réelles quelconques.

2° La fonction f est solution particulière de E_2 si et seulement si, pour tout x de $\mathbb{R}$,

$4f''(x) + 5f'(x) + f(x) = 2e^{-2x}(7x - 11)$.

Pour tout x de $\mathbb{R}$, $f(x) = 2x\ e^{-2x}$,

$f'(x) = 2(1 - 2x)\ e^{-2x}$,

$f''(x) = -4\ e^{-2x} - 4\ (1 - 2x)\ e^{-2x}$,

$f''(x) = (-8 + 8x)\ e^{-2x}$.

Donc, pour tout x de $\mathbb{R}$,

$4f''(x) + 5f'(x) + f(x) =$

$(-8 + 8x)\ e^{-2x} + 10\ (1 - 2x)\ e^{-2x} + 2x\ e^{-2x}$,

$4f''(x) + 5f'(x) + f(x) = (14x - 22)\ e^{-2x}$,

$4f''(x) + 5f'(x) + f(x) = 2\ (7x - 11)\ e^{-2x}$.

f est une solution particulière de E_2.

3° L'ensemble des solutions de E_2 est la somme des fonctions obtenues au 1° et de la solution particulière f, c'est à dire l'ensemble des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par

$g(x) = C_1\ e^{-1/4\ x} + C_2\ e^{-x} + 2x\ e^{-2x}$, où C_1 et C_2 sont deux constantes réelles quelconques.

ÉQUIPEMENT TECHNIQUE-ÉNERGIE

Session 1990

EXERCICE 1

La charge d'un condensateur dans un circuit électrique est une fonction Q du temps t, définie sur l'intervalle $[0,+\infty[$. Dans certaines conditions, le système d'unités étant bien choisi, cette fonction vérifie l'équation différentielle:

(E) : $Q''(t) + 2Q'(t) + 2Q(t) = 0$ pour $t \geq 0$,

dans laquelle Q' et Q" sont les fonctions dérivées première et seconde de la fonction Q.

1. a) Déterminer toutes les solutions de l'équation (E).

b) A l'instant $t = 0$, instant où l'on ferme l'interrupteur, la charge du condensateur vérifie les conditions: $Q(0) = 1$ et $Q'(0) = 0$.

En déduire que l'expression de la charge Q du condensateur en fonction du temps t est :

$$Q(t) = \sqrt{2}\, e^{-t} \cos\left(t - \frac{\pi}{4}\right)$$

2. a) Quelle est la limite de Q(t) lorsque t tend vers $+\infty$?

b) Etudier les variations de la charge Q sur l'intervalle $[0,2\pi]$.

Déterminer les instants pour lesquels la charge est nulle.

c) Soit Γ la courbe représentative de la fonction Q. Construire l'arc de Γ, correspondant à l'intervalle $[0,2\pi]$, dans le plan rapporté à un repère orthogonal $(O\,;\vec{i}, \vec{j})$.

Unités graphiques: 8 cm représentent π unités en abscisse et 20 cm représentent une unité en ordonnée.

3. a) Déterminer, en utilisant l'équation différentielle (E), les primitives de la fonction Q.

b) En déduire que la primitive F de Q, qui s'annule pour $t = 0$ est définie par :

$F(t) = 1 - e^{-t}\cos t$, pour $t \geq 0$.

c) Calculer une valeur approchée à 0,01 près de la charge moyenne sur l'intervalle $\left[0, \frac{3\pi}{4}\right]$.

EXERCICE 2

Les questions 1°, 2° a) et 2° b) peuvent être traitées de façon indépendante. Les résultats seront donnés à 0,001 près.

Un outil est constitué de l'assemblage d'une bille fabriquée par une machine A et d'une pièce produite par une machine B.

1° Les deux machines fonctionnent de façons indépendantes.

Le pourcentage de billes défectueuses dans la production de de la machine A est de 6% ; le pourcentage de pièces défectueuses dans la production de la machine B est de 4%.

On choisit, au hasard, un outil ainsi fabriqué.

Calculer les probabilités des événements suivants :

a) Les deux pièces constituant l'outil sont bonnes.

b) Seule la bille est défectueuse.

c) Au moins une des deux pièces est bonne.

2° On suppose que la variable aléatoire X qui, à chaque bille fabriquée par la machine A associe son diamètre, exprimé en mm, suit une loi normale de moyenne M d'écart-type $\sigma = 0{,}16$

a) On note $\overline{X}$ la variable aléatoire qui, à tout échantillon aléatoire de 400 billes, associe la moyenne des diamètres des billes qu'il contient.

La production étant importante on assimile tout échantillon à un échantillon non exhaustif.

On admet que $\overline{X}$ suit la loi normale de moyenne M et d'écart-type $\frac{\sigma}{\sqrt{400}} = 0{,}008$ donc que la variable $T = \frac{\overline{X} - M}{0{,}008}$ suit la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0;1)$.

On a constaté que le diamètre moyen des billes d'un échantillon de taille 400 est 99,99 mm.

Déterminer h tel que $P(-h \leq T \leq h) = 0{,}95$ en déduire un intervalle de confiance, centré en 99,99, au seuil de confiance 95% de la moyenne M inconnue de la variable aléatoire X.

b) On suppose dans cette question que M = 100.

Calculer la probabilité qu'une bille, prise au hasard dans la production, ait un diamètre compris entre 99,7 et 100,3.

EXERCICE 1

1.

a) L'équation caractéristique est $r^2 + 2r + 2 = 0$.
Ses solutions sont $r_1 = -1 - i$ et $r_2 = -1 + i$.

Toutes les solutions de l'équation différentielle sont donc définies sur $[0,+\infty[$ par

$Q(t) = e^{-t}(C_1\cos t + C_2\sin t)$, où C_1 et C_2 sont deux nombres réels quelconques.

b) • Pour tout nombre réel t de $[0,+\infty[$,

$Q'(t) = -e^{-t}(C_1\cos t + C_2\sin t) + e^{-t}(-C_1\sin t + C_2\cos t)$

$Q'(t) = e^{-t}[(-C_1 + C_2)\cos t - (C_1 + C_2)\sin t]$.

$Q(0) = 1$ équivaut à $e^0(C_1\cos 0 + C_2\sin 0) = 1$

d'où $C_1 = 1$.

$Q'(0) = 0$ équivaut à

$e^0[(-C_1 + C_2)\cos 0 - (C_1 + C_2)\sin 0] = 0$,

soit encore à $-C_1 + C_2 = 0$, d'où $C_2 = 1$.

Pour tout nombre réel t de $[0,+\infty[$,

$Q(t) = e^{-t}(\cos t + \sin t)$.

Pour tout nombre réel t de $[0,+\infty[$,

$\sqrt{2}\cos(t - \frac{\pi}{4}) = \sqrt{2}\,[\cos\frac{\pi}{4}\cos t + \sin\frac{\pi}{4}\sin t]$;

On utilise la formule du formulaire $\cos(a + b) = \ldots$

$\cos\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ et $\sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ d'où

$\sqrt{2}\cos(t - \frac{\pi}{4}) = \sqrt{2}\,[\frac{1}{\sqrt{2}}\cos t + \frac{1}{\sqrt{2}}\sin t]$,

$\sqrt{2}\cos(t - \frac{\pi}{4}) = [\cos t + \sin t]$.

On en déduit que pour tout nombre réel t de $[0,+\infty[$ on a :

$Q(t) = \sqrt{2}\,e^{-t}\cos(t - \frac{\pi}{4})$.

2.

a) Pour tout nombre réel t de $[0,+\infty[$, on a

$-1 \le \cos(t - \frac{\pi}{4}) \le 1$ et $\sqrt{2}\,e^{-t} \ge 0$,

donc $-\sqrt{2}\,e^{-t} \le \sqrt{2}\,e^{-t}\cos(t - \frac{\pi}{4}) \le \sqrt{2}\,e^{-t}$.

Or, $\lim_{t\to+\infty} e^{-t} = 0$ implique

$\lim_{t\to+\infty}[-\sqrt{2}\,e^{-t}] = \lim_{t\to+\infty}[\sqrt{2}\,e^{-t}] = 0$

et par suite, $\lim_{t\to+\infty}[\sqrt{2}\,e^{-t}\cos(t - \frac{\pi}{4})] = 0$.

b) • Pour tout nombre réel t de $[0,2\pi]$, on a

$Q'(t) = -e^{-t}(\cos t + \sin t) + e^{-t}(-\sin t + \cos t)$

$Q'(t) = -2\,e^{-t}\sin t$.

On en déduit que Q'(t) a le signe de -sint, d'où le tableau de variation de Q :

t	0		π		2π
Q'(t)	0	−	0	+	0
Q(t)	1	↘	$-e^{-\pi}$	↗	$e^{-2\pi}$

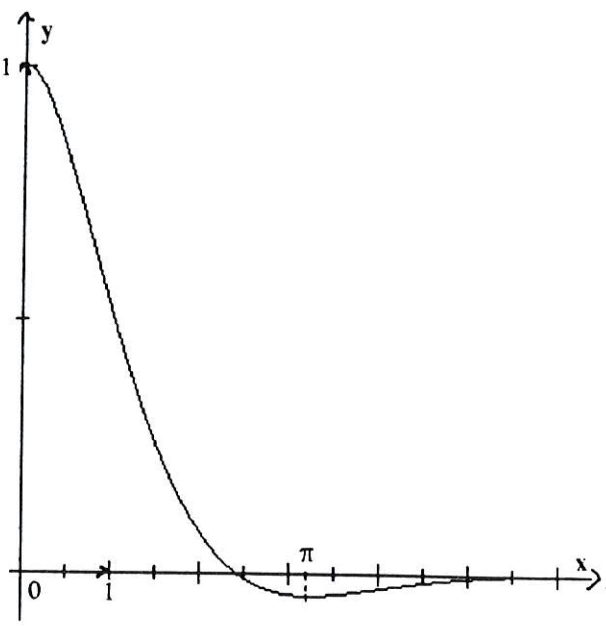
• L'équation $Q(t) = 0$ est définie sur $[0,2\pi]$ et successivement équivalente à :

$\cos(t - \frac{\pi}{4}) = 0$, $t - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$,

$t = \frac{3\pi}{4} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

Puisque t appartient à l'intervalle $[0,2\pi]$ il existe deux solutions: $\frac{3\pi}{4}$ et $\frac{7\pi}{4}$.

c) Tracé de la courbe Γ.



3

a) L'équation différentielle: (E) est équivalente à

$2Q(t) = -Q''(t) - 2Q'(t)$

donc à $Q(t) = -0{,}5\,Q''(t) - Q'(t)$.

On en déduit que les primitives de Q sont définies sur l'intervalle $[0,+\infty[$ par:

$F(t) = -0{,}5\,Q'(t) - Q(t) + K$, où K est une constante réelle quelconque, soit encore:

$F(t) = -0{,}5 \times (-2e^{-t}\sin t) - e^{-t}(\cos t + \sin t) + K$

$F(t) = -e^{-t}\cos t + K$.

b) $F(0) = 0$, donc $-e^{0}\cos 0 + K = 0$, et par suite $K = 1$.

La primitive de Q nulle en 0 est définie pour tout $t \geq 0$ par: $F(t) = 1 - e^{-t}\cos t$.

c) La charge moyenne est :

$$C_m = \frac{1}{\frac{3\pi}{4}} \int_0^{\frac{3\pi}{4}} Q(t)\,dt$$

$$C_m = \frac{4}{3\pi}\Big[F(t)\Big]_0^{\frac{3\pi}{4}}$$

$$C_m = \frac{4}{3\pi}\,[1 - e^{-\frac{3\pi}{4}}].$$

$C_m \approx 0{,}38$.

EXERCICE 2

1° Notons EA l'événement : " la bille produite par la machine A est bonne" et $\overline{EA}$ l'événement : "la bille produite par la machine A est défctueuse", de même EB l'événement : "la pièce fabriquée par la machine B est bonne" , $\overline{EB}$ l'événement : "la pièce fabriquée par la machine B est défectueuse.

D'après l'énoncé $P(\overline{EA}) = 0{,}06$; $P(EA) = 0{,}94$; $P(\overline{EB}) = 0{,}04$; $P(EB) = 0{,}96$.

a) On demande P(EA et EB), les machines fonctionnent de façon indépendante, donc

$P(EA \cap EB) = P(EA) \times P(EB)$

$P(EA \cap EB) = 0{,}94 \times 0{,}96$ soit 0,902 à 10^{-3} près.

b) Seule la bille est défectueuse, donc la bille est défectueuse et la pièce issue de B est bonne, on cherche donc $P(\overline{EA} \cap EB) = P(\overline{EA}) \times P(EB)$ les événements $\overline{EA}$ et EB étant indépendants :

$P(\overline{EA} \cap EB) = 0{,}06 \times 0{,}96$ soit 0,058 à 10^{-3} près.

c) Au moins une des deux pièces est bonne, donc nous sommes en présence de l'événement :

"EA ou EB", on cherche donc $P(EA \cup EB)$ en utilisant le théorème des probabilités totales :

$P(EA \cup EB) = P(EA) + P(EB) - P(EA \cap EB)$

$P(EA \cup EB) = 0{,}94 + 0{,}96 - 0{,}902$

$P(EA \cup EB) = 0{,}998$ à 10^{-3} près.

2°

a) T est la variable aléatoire centrée réduite,

$P(-h \leq T < h) = 0{,}95$ équivaut à :

$2[\pi(h) - 0{,}5] = 0{,}95$ et la table donne $h = 1{,}96$.

On peut écrire $-1{,}96 \leq \dfrac{\overline{X} - M}{0{,}008} \leq 1{,}96$, on en déduit un intervalle de confiance de M, centré en 99,99, au seuil de confiance 95% sous la forme :

$[99{,}99 - 1{,}96 \times 0{,}08 \; ; \; 99{,}99 + 1{,}96 \times 0{,}08] = [99{,}833 \; ; \; 100{,}147]$

b) $M = 100$ donc la variable aléatoire X suit la loi normale $\mathcal{N}(100 \; ; 0{,}16)$ et la variable centrée réduite associée $T = \dfrac{X - 100}{0{,}16}$ suit la loi normale $\mathcal{N}(0 \; ; 1)$

d'où :

$P(99{,}7 \leq X \leq 100{,}3) = P(-\frac{0{,}3}{0{,}16} \leq T \leq \frac{0{,}3}{0{,}16})$

$P(99{,}7 \leq X \leq 100{,}3) = P(-1{,}875 \leq T \leq 1{,}875)$

$P(99{,}7 \leq X \leq 100{,}3) = 2[\pi(1{,}875) - 0{,}5]$ en utilisant la table on trouve :

$P(99{,}7 \leq X \leq 100{,}3) = 0{,}994$ à 10^{-3} près.

ÉQUIPEMENT TECHNIQUE-ÉNERGIE

Session 1991

EXERCICE 1

On se propose d'étudier l'échauffement d'un conducteur par un courant électrique d'intensité constante. Par effet Joule, le conducteur s'échauffe et sa température, exprimée en degrés Celsius, est fonction du temps t, exprimé en secondes. On note $\theta(t)$ la température du conducteur à l'instant t. À l'instant de la mise sous tension, choisi comme instant origine ($t = 0$), la température du conducteur est celle du milieu ambiant: $\theta(0) = 0°$ C.

Dans les conditions de l'expérience, le bilan énergétique se traduit par l'équation différentielle :
$\theta'(t) + 20\,k\theta(t) = 2$, $t \geq 0$ avec $\theta(0) = 0$
dans laquelle k est une constante qui dépend du conducteur et du milieu ambiant.

1. On suppose dans cette question que le conducteur est parfaitement isolé, c'est-à-dire que k = 0.
a) Déterminer l'expression de $\theta(t)$ en fonction de t.

b) Représenter graphiquement les variations de θ, dans le plan muni d'un repère orthogonal.
Unités : 1 cm en abscisse représente 2 secondes,
1 cm en ordonnée représente 2 degrés Celsius.
À quel instant la température du conducteur atteint-elle 20° C ?

Dans toute la suite du problème, le conducteur n'est pas thermiquement isolé et $k = 5.10^{-3}$.

2. Montrer que la température du conducteur s'exprime par: $\theta(t) = 20(1 - e^{-0,1t})$.

3. a) Calculer la température stationnaire du conducteur, c'est-à-dire $\lim\limits_{t \to +\infty} \theta(t)$.
Donner l'interprétation graphique de ce résultat.

b) Déterminer le développement limité à l'ordre 2 au voisinage de $t = 0$ de θ.
En déduire la tangente à l'origine de la courbe représentative de θ et préciser la position relative de la courbe par rapport à cette tangente au voisinage de $t = 0$.

4. a) Étudier les variations de θ en fonction de t.

b) Construire la courbe représentative de θ sur le même graphique que dans la première question.

c) Quelle est la température du conducteur à l'instant $t = 10$?

d) Quel est le temps nécessaire pour que cette température atteigne 19° C ?

EXERCICE 2

Une machine fabrique des résistances chauffantes en grandes séries. Parmi la production, on prélève un certain nombre de pièces au hasard. A chacune d'entre elles, on associe sa longueur ℓ exprimée en millimètres. On définit ainsi une variable aléatoire L. On suppose que L suit une loi normale et on désigne par **m** sa moyenne et par σ son écart type.

1. Dans cette question, une pièce produite est déclarée acceptable si $392,5 \leq \ell \leq 407,5$ et défectueuse dans le cas contraire. La moyenne des longueurs des pièces de la fabrication est $m = 400$.

a) Sachant que $\sigma = 5,2$, calculer le pourcentage de pièces défectueuses de la production.

b) Un réglage de la machine permet de modifier l'écart type sans changer la moyenne. Quel doit être le nouvel écart type σ' pour que le pourcentage de pièces défectueuses soit de 10 %.

c) Le taux de pièces défectueuses étant de 10 %, on effectue des contrôles de longueur des résistances de la fabrication. Pour cela, on extrait un échantillon de 6 pièces. Comme l'effectif est négligeable devant le nombre de pièces produites, les tirages successifs sont considérés comme indépendants. On sait que la variable aléatoire X, prenant pour valeurs le nombre de pièces défectueuses tirées, suit une loi binomiale.
Calculer la probabilité de l'évènement : "$X > 1$".

2. La machine est réglée, lors de sa mise en marche, de telle sorte que la moyenne des longueurs est $m = 400$. Mais cette moyenne varie en cours de fabrication et on décide de procéder à un nouveau réglage dès que $m < 398$. Des contrôles sont effectués après 1,2,3 et 4 heures de fonctionnement et donnent les estimations des moyennes suivantes :

h (heure)	0	1	2	3	4
$\overline{m}$ (moyenne estimée)	400	399,81	399,62	399,46	399,20

a) En utilisant la calculatrice, déterminer par la méthode des moindres carrés, l'équation de la droite d'ajustement des valeurs de $\overline{m}$ à celles de h : $\overline{m} = \alpha h + \beta$

b) La moyenne vraie m peut s'écrire $m = ah + b$. On prend comme estimation de a la valeur de α et comme estimation de b la valeur β. Déduire de a), à une heure près, une estimation du nombre d'heures séparant l'instant du prochain réglage de l'instant de la mise en marche de la machine.

EXERCICE 1

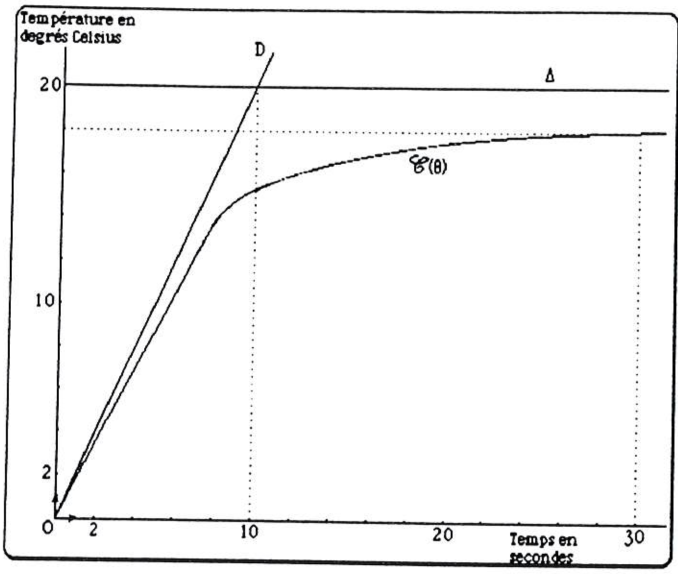
1. Avec k = 0, l'équation différentielle s'écrit $\theta'(t) = 2$, $t \geq 0$ avec $\theta(0) = 0°$ C.

a) La solution générale est définie par $\theta(t) = 2t + A$, où A est une constante réelle.

La condition initiale $\theta(0) = 0$ donne alors $A = 0$.

La solution cherchée est définie pour tout nombre réel positif t par : $\theta(t) = 2t$.

b) La représentation graphique de θ est la demi-droite D définie par : $y = 2t$, $t \geq 0$.



$\theta(t) = 20$ équivaut à $t = 10$.

La température du conducteur atteint 20° C au bout de 10 secondes.

2. Avec $k = 5 \cdot 10^{-3}$, l'équation différentielle s'écrit:

$\theta'(t) + 0,1\,\theta(t) = 2$, $t \geq 0$ avec $\theta(0)=0$.

Il s'agit d'une équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants.

• La solution de l'équation sans second membre $\theta'(t) + 0,1\,\theta(t) = 0$ est définie pour tout $t \geq 0$ par $\theta_1(t) = Ke^{-0,1t}$, où K est une constante réelle quelconque.

• Le second membre de l'équation donnée est constant, on est donc conduit à rechercher une fonction constante solution particulière de cette équation.

Il est alors immédiat que la fonction définie pour tout $t \geq 0$ par $\theta_0(t) = 20$ convient.

• La solution générale de l'équation différentielle donnée est la somme d'une solution particulière et de la solution de l'équation sans second membre, soit pour tout $t \geq 0$, $\theta(t) = \theta_0(t) + \theta_1(t)$, d'où :

pour tout $t \geq 0$, $\theta(t) = 20 + K\,e^{-0,1t}$, où K est une constante réelle quelconque.

• La condition initiale $\theta(0) = 0$ s'écrit $K + 20 = 0$, d'où $K = -20$.

La solution cherchée est définie pour tout nombre réel positif t par : $\theta(t) = 20(1 - e^{-0,1t})$.

3. a) On a $\lim\limits_{t\to+\infty} e^{-0,1t} = 0$, donc $\lim\limits_{t\to+\infty} \theta(t) = 20$.

La température stationnaire du conducteur est 20° C.

La courbe représentative de θ admet la droite d'équation $y = 20$ pour asymptote.

b) • Le formulaire donne $e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + x^2\varepsilon(x)$, avec $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$.

On observe que $\lim\limits_{t\to 0}(-0,1t) = 0$ d'où, en posant $x = -0,1t$ on obtient le développement limité à l'ordre 2 au voisinage de $t = 0$ de θ :

$\theta(t) = 20(1 - e^{-0,1t})$

$\theta(t) = 20[1 - (1 - 0,1t + \frac{1}{2}(0,1t)^2 + t^2\varepsilon(t))]$, avec $\lim\limits_{t\to 0} \varepsilon(t) = 0$

$\theta(t) = 2t - 0,1t^2 + t^2\varepsilon(t)$, avec $\lim\limits_{t\to 0} \varepsilon(t) = 0$.

• On en déduit que la tangente à la courbe représentative de θ en O a pour équation $y = 2t$, c'est la demi-droite D obtenue à la question 1.

On a $\theta(t) - 2t = -0,1t^2 + t^2\varepsilon(t)$, avec $\lim\limits_{t\to 0} \varepsilon(t) = 0$, donc $\theta(t) - 2t \leq 0$ au voisinage de 0.

On en déduit que la courbe représentative de θ est située au-dessous de sa tangente D au voisinage de l'origine O du repère.

4. a) Pour tout $t \geq 0$, $\theta(t) = 20(1 - e^{-0,1t})$, donc $\theta'(t) = 2\,e^{-0,1t}$, et $\theta'>0$ sur $\mathbb{R}_+$.

Tableau de variation:

t	0	+∞
θ'(t)	+	
θ(t)	0 ↗	2

b) Tracé de la courbe représentative de θ sur graphique de la question 1.

c) À l'instant $t = 10$ la température du conducteur est $\theta(10) = 20(1 - e^{-1})$,
soit environ 12,6° C.

d) On cherche t tel que $\theta(t) \geq 19$, ce qui équivaut successivement à

$$20(1 - e^{-0,1t}) \geq 19$$
$$1 - e^{-0,1t} \geq 0,95$$
$$e^{-0,1t} \leq 0,05$$
$$-0,1t \leq \ln 0,05$$
$$t \geq -10 \ln 0,05$$
$$t \geq 10 \ln 20.$$

La calculatrice donne $10\ln 20 = 29,95...$

On en déduit que le conducteur atteint la température de 19° C au bout de 30 secondes.

EXERCICE 2

1. a) Cherchons la probabilité de l'événement : "$392,5 \leq L \leq 407,5$".

Soit T la variable aléatoire centrée réduite associée à L.

$T = \dfrac{L - 400}{5,2}$, T suit la loi $\mathcal{N}(0,1)$.

$P(392,5 \leq L \leq 407,5) = P(-\frac{7,5}{5,2} \leq T \leq \frac{7,5}{5,2})$

$P(392,5 \leq L \leq 407,5) = 2\pi(\frac{7,5}{5,2}) - 1$

$P(392,5 \leq L \leq 407,5) \approx 2\pi(1,4423) - 1$

$P(392,5 \leq L \leq 407,5) \approx 2 \times 0,92545 - 1$

$P(392,5 \leq L \leq 407,5) \approx 0,8509.$

Le pourcentage de pièces défectueuses est donc $(100 - 85,09) \approx$ **14,91 %.**

b) On veut que $P(392,5 \leq L \leq 407,5) = 1 - 0,1 = 0,9$.

En utilisant la variable centrée réduite $T' = \dfrac{L - 400}{\sigma'}$,

on obtient :

$P(-\frac{7,5}{\sigma'} \leq T' \leq \frac{7,5}{\sigma'}) = 0,9$.

Comme précédemment $2\pi(\frac{7,5}{\sigma'}) - 1 = 0,9$

d'où $2\pi(\frac{7,5}{\sigma'}) = 0,95$.

Par lecture inverse de la table on trouve $\dfrac{7,5}{\sigma'} = 1,645$.

Une valeur approchée de l'écart type σ' pour que le pourcentage de pièces défectueuses soit de 10 % est **4,56.**

c) On sait que la variable aléatoire X suit une loi binomiale, on extrait des échantillons de taille 6 et la probabilité qu'une pièce soit défectueuse est 0,10 , donc X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(6 ; 0,10)$.

$P(X > 1) = 1 - P(X \leq 1)$

$P(X > 1) = 1 - [\,P(X = 0) + P(X = 1)\,]$

$= 1 - [\,C_6^0\ (0,1)^0 \times (0,9)^6 + C_6^1\ (0,1)^1 \times (0,9)^5\,]$

$P(X > 1) \approx 1 - (0,5314 + 0,3543)$

$P(X > 1) \approx 1 - 0,8857.$

Une valeur approchée de $P(X > 1)$ est **0,1143.**

2. a) A l'aide de la calculatrice on trouve :
$m = -0,195\,h + 400.$

b) On admet que $m = -0,195\,h + 400$

Le prochain réglage aura lieu lorsque $m < 398$

donc lorsque $-0,195\,h + 400 < 398$

$2 < 0,195\,h$ donc $h > \dfrac{2}{0,195}$

$h > 10,25$.

Une estimation du nombre d'heures séparant les instants de deux réglages successifs est **10.**

ÉQUIPEMENT TECHNIQUE-ÉNERGIE

Session 1992

EXERCICE 1 (10 points)

Un atelier d'usine produit des pièces utilisées dans la fabrication de compresseurs ; on se propose, dans cet exercice, d'estimer le nombre moyen de jours nécessaires pour que cet atelier, comportant 25 machines, produise 300 000 pièces acceptables.

1 - Soit X la variable aléatoire qui associe aux 25 machines de l'atelier le nombre de machines fonctionnant sans panne chaque jour.

Pour chaque machine la probabilité de l'événement " fonctionner sans panne un jour donné " est 0,96. Les machines fonctionnent indépendamment les unes des autres.

1-1 Les conditions précédentes impliquent que X suit une loi binomiale. Quels sont les paramètres de cette loi ?

1-2 Si l'on considère un très grand nombre de jours, quel est le nombre moyen de machines fonctionnant chaque jour ?

2 - Un échantillon de 100 pièces prélevées au hasard dans la production d'une machine donne les résultats suivants :

longueur en mm	[79,5 ; 79,6[	[79,6 ; 79,7[	[79,7 ; 79,8[	[79,8 ; 79,9[	[79,9 ; 80[
nombre de pièces	2	4	11	18	23
longueur en mm	[80 ; 80,1[	[80,1 ; 80,2[	[80,2 ; 80,3[	[80,3 ; 80,4[	[80,4 ; 80,5[
nombre de pièces	19	14	5	3	1

En faisant l'hypothèse que les valeurs observées sont celles du centre de la classe, calculer une valeur approchée à 10^{-2} de la moyenne et de l'écart type de cet échantillon.

3 - Soit Z la variable aléatoire qui associe à chaque pièce sa longueur exprimée en mm.

On suppose que la variable aléatoire Z suit une loi normale de moyenne M et d'écart type σ. On considère la variable aléatoire Y qui, à chaque échantillon de taille n = 100 associe la moyenne des longueurs des pièces de cet échantillon.

On rappelle que Y suit la loi normale de moyenne M et d'écart type $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

3.1 On suppose $\sigma = 0{,}18$, déterminer un intervalle de confiance à 95 % de la moyenne de la population.

3.2 Une pièce est acceptable si sa longueur est comprise entre 79,65 et 80,35.En prenant M = 80 et $\sigma = 0{,}18$ calculer le pourcentage de pièces acceptables dans la production.

4 - On suppose que chacune des 25 machines produit le même pourcentage de pièces acceptables et qu'une machine produit 600 pièces par jour (acceptables ou non).

A combien peut-on estimer le nombre de jours nécessaires pour que l'atelier produise 300 000 pièces acceptables. (On utilisera les questions 1-2 et 3-2).

EXERCICE 2 (10 points)

Etude d'une fonction et tracé précis de sa courbe représentative.

1) Recherche d'une primitive

a) Soit u la fonction définie sur $]-1, +\infty[$ par : $u(x) = \dfrac{x}{x+1}$.

En remarquant que : $\dfrac{x}{x+1} = 1 - \dfrac{1}{x+1}$ déterminer une primitive de u sur $]-1, +\infty[$.

b) En utilisant une intégration par parties, démontrer que les primitives de la fonction définie sur $]-1, +\infty[$ par : $v(x) = \ln(x+1)$ sont de la forme :

$F(x) = (x+1)\ln(x+1) - x + C$ où C est une constante arbitraire et $\ln x$ désigne le logarithme népérien de x.

2) Résolution d'une équation différentielle

On considère l'équation différentielle :

$$(E) : \quad y + (x+1)\,y' = 1 + \ln(x+1)$$

où y est une fonction de la variable x définie et dérivable sur $]-1, +\infty[$.

a) Déterminer la solution générale de (E).

b) Préciser la solution de E satisfaisant la condition initiale : $y(0) = 1$.

3) Etude d'une fonction

Soit la fonction g définie sur $]-1, +\infty[$ par :

$$g(x) = \ln(x+1) + \frac{1}{x+1}$$

et C sa courbe représentative dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unité graphique : 2cm).

a) Etudier les variations de g.

En déduire le signe de g(x) pour $x \in]-1, +\infty[$.

b) Etudier les limites de g lorsque x tend vers -1 et lorsque x tend vers $+\infty$.

c) Ecrire le développement limité de g au voisinage de 0, à l'ordre 2.

d) Tracer la courbe C.

EXERCICE 1

1 - 1 Nous sommes en présence de 25 événements indépendants, chaque événement ayant la probabilité 0,96 d'être réalisé. Les paramètres de la loi binomiale sont donc n = 25 et p = 0,96.

1 - 2 Si l'on considère un très grand nombre de jours, le nombre moyen de machines fonctionnant chaque jour est l'espérance mathématique de la variable aléatoire X c'est à dire

$E(X) = n \times p$ $E(X) = 25 \times 0,96 = 24$, il y a en moyenne 24 machines fonctionnant chaque jour.

2 - On trouve à l'aide de la calculatrice pour cet échantillon une moyenne $\overline{x} = 79,97$ à 10^{-2} près et un écart type $\sigma_e = 0,18$ à 10^{-2} près.

3 - 1 La variable aléatoire Z suit la loi normale $\mathcal{N}$ (M ; σ), la variable aléatoire Y suit la loi normale $\mathcal{N}(M ; \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$, un intervalle de confiance de M avec le coefficient de confiance 95 % est donc

$$[\overline{x} - 1,96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}} ; \overline{x} + 1,96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}]$$

$$= [79,97 - 1,96 \frac{0,18}{10} ; 79,97 + 1,96 \frac{0,18}{10}]$$

$$= [79,93 ; 80].$$

3 - 2 La variable aléatoire Z suit la loi normale $\mathcal{N}(80 ; 0,18)$, la variable aléatoire $T = \frac{Z - 80}{0,18}$ suit la loi normale $\mathcal{N}(0 ;1)$ la probabilité cherchée est :

$$P(79,65 \leq Z \leq 80,35) = P(-\frac{0,35}{0,18} \leq T \leq \frac{0,35}{0,18})$$

$$P(79,65 \leq Z \leq 80,35) = 2\,\pi(1,944) - 1$$

$$P(79,65 \leq Z \leq 80,35) = 2 \times 0,974 - 1$$

$P(79,65 \leq Z \leq 80,35) \approx 0,948$ soit en pourcentage ≈ 95 % de pièces acceptables.

4 - Nous sommes en présence de 600 variables aléatoires indépendantes de même moyenne E(X).

La somme des 600 variables aléatoires admet pour moyenne $600\, E(X) = 600 \times 24 = 14400$.

Cette moyenne représente si l'on considère un très grand nombre de jours, le nombre moyen de pièces (acceptables ou non) fabriquées par l'atelier. Le pourcentage de pièces acceptables est 94,8 %, l'atelier produit donc en moyenne :

$14400 \times 0,948 \approx 13651$ pièces acceptables par jour,

$300000/13651 \approx 21,976$, il faut donc en moyenne 22 jours pour produire 300000 pièces acceptables.

EXERCICE 2

1) <u>Recherche d'une primitive</u> :

a) En réduisant au même dénominateur on trouve :

$1 - \frac{1}{x+1} = \frac{x}{x+1}$, on peut prendre pour primitive de u sur]– 1, + ∞[la fonction U telle que

$U(x) = x - \ln(x + 1)$.

b) $v(x) = \ln(x + 1)$, $v'(x) = \frac{1}{x+1}$,

en posant $W'(x) = 1$, $W(x) = x$,

$v(x) W(x) = x \ln(x + 1)$, $v'(x) W(x) = \frac{x}{x+1}$,

l'intégration par parties donne :

$F(x) = x \ln(x + 1) - U(x) + C$,

$F(x) = x \ln(x + 1) - x + \ln(x + 1) + C$,

$F(x) = (x + 1) \ln(x + 1) - x + C$.

2) <u>Résolution d'une équation différentielle</u> :

a) Résolvons l'équation : $(x + 1) y' + y = 0$.

On sait que la solution générale de l'équation

$a(x)y'(x) + b(x)y(x) = 0$ est définie par :

$y(x) = Ke^{-F(x)}$, où F(x) est une primitive de la fonction $\frac{b(x)}{a(x)}$, et K est une constante réelle arbitraire.

Une primitive de $\frac{1}{x+1}$ sur]– 1, +∞[est ln (x + 1). On en déduit que la solution générale de (E') est définie sur]0,+∞[par : $y(x) = K e^{-\ln(x+1)}$,

$y(x) = \frac{K}{x+1}$ où C est une constante réelle quelconque.

Méthode de la variation de la constante :

Cherchons la solution générale f, de l'équation (E)

$(x + 1)\,y' + y = 1 + \ln(x + 1)$, telle que

$f(x) = \dfrac{K(x)}{x + 1}$, alors $f'(x) = \dfrac{K'(x)}{x + 1} - \dfrac{K(x)}{(x + 1)^2}$

en repportant ces expressions dans l'équation (E) on trouve :

$K'(x) - \dfrac{K(x)}{x + 1} + \dfrac{K(x)}{x + 1} = 1 + \ln(x + 1)$,

$K'(x) = 1 + \ln(x + 1)$, d'après la question 1) a),

$K(x) = x + F(x)$, $K(x) = x + (x + 1)\ln(x + 1) - x +$ C où C est une constante arbitraire.

$K(x) = (x + 1)\ln(x + 1) + C$

$f(x) = \dfrac{K(x)}{x + 1}$, $f(x) = \ln(x + 1) + \dfrac{C}{x + 1}$.

b) Si $f(0) = 1$ alors $C = 1$,

$f(x) = \ln(x + 1) + \dfrac{1}{x + 1}$.

3) Etude d'une fonction :

a) $g(x) = \ln(x + 1) + \dfrac{1}{x + 1}$,

$g'(x) = \dfrac{1}{x + 1} - \dfrac{1}{(x + 1)^2}$, $g'(x) = \dfrac{x}{(x + 1)^2}$,

$g'(x)$ est du signe de x sur $]-1, +\infty[$, donc elle admet un minimum en $x = 0$, $g(0) = 1$, le minimum étant positif $g(x)$ est positif pour $x \in\ ]-1, +\infty[$.

x	-1		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	↘	1	↗	$+\infty$

b) $\lim\limits_{x\to -1} g(x) = \lim\limits_{X\to 0} \ln X + \dfrac{1}{X} = \lim\limits_{X\to 0} \dfrac{X\ln X + 1}{X}$,

$\lim\limits_{x\to -1} g(x) = \lim\limits_{X\to 0} \dfrac{1}{X} = +\infty$.

$\lim\limits_{x\to +\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} \ln(x + 1) = +\infty$.

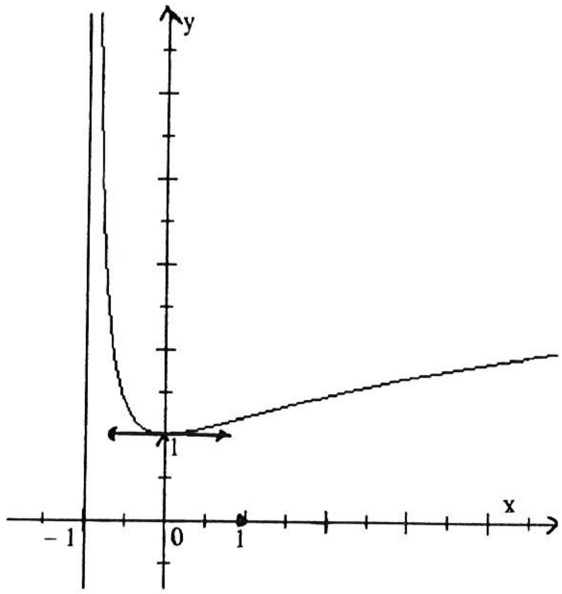
c) A l'aide du formulaire on touve les développements limités au voisinage de 0, à l'ordre 2 suivants:

$\ln(1 + x) = x - \dfrac{x^2}{2} + x^2\,\varepsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$.

$\dfrac{1}{1 + x} = 1 - x - x^2 + x^2\,\varepsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$.

$g(x) = 1 + \dfrac{x^2}{2} + x^2\,\varepsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$.

d)



ÉQUIPEMENT TECHNIQUE-ÉNERGIE

Session 1993

EXERCICE 1 (10 points)

Le plan est muni du repère orthogonal $(O\,;\,\vec{i}\,,\vec{j}\,)$ où les unités graphiques sont :

2 cm sur l'axe des abscisses

1 cm sur l'axe des ordonnées.

1) Soit l'équation différentielle du second ordre :

$$E : y'' - y' - 6y = -5\,e^{-2x}$$

dans laquelle y est une fonction de la variable réelle x, définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

1 . 1 Résoudre l'équation différentielle E .

1 . 2 Déterminer la solution particulière de l'équation E prenant la valeur 1 pour $x = 0$ et la valeur 0 pour $x = -1$.

2) Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie sur R par : $f(x) = (x + 1)\,e^{-2x}$.

On désigne par (C) sa courbe représentative dans le repère $(O\,;\,\vec{i}\,,\vec{j}\,)$.

2 . 1 Etudier les variations de la fonction f et préciser les limites en $+\infty$ et en $-\infty$, en les justifiant . Rassembler les résultats de l'étude dans un tableau de variations.

2 . 2 Déterminer le développement limité à l'ordre 3 de f au voisinage de 0.
En déduire une équation de la tangente à (C) au point d'abscisse 0, et préciser la position de la courbe par rapport à cette tangente, au voisinage de ce point.

2 . 3 Construire la courbe (C) et la tangente à (C) en son point d'abscisse 0.

EXERCICE 2 (10 points)

Une usine fabrique des plaques destinées à isoler les murs. Afin d'étudier la qualité de la production, un échantillon de 50 plaques est extrait, aléatoirement, de la production d'une journée. Le tableau ci-dessous présente les mesures, en mm, de l'épaisseur des plaques, mesures groupées en classes d'amplitude 0,1 mm.

classes	[0 ; 10,1[	[10,1 ; 10,2[	[10,2 ; 10,3[	[10,3 ; 10,4[	[10,4 ; 10,5[
effectifs	2	15	20	9	4

Les calculs seront effectués avec une précision de 10^{-3}.

1° Déterminer la moyenne m_0 et l'écart type σ_0 de cette série statistique, en admettant que les observations d'une classe sont toutes au centre de celle-ci. (En fait la convention précédente nous permet d'avoir non m_0 et σ_0 mais des valeurs approchées de ces quantités).

2° On admet que la variable aléatoire L, mesurant l'épaisseur des plaques produites suit une loi normale de moyenne m et d'écart type σ. On prend pour estimation ponctuelle de m la valeur m_0 et comme estimation ponctuelle de σ la valeur $\sqrt{\dfrac{n}{n-1}}\,\sigma_0$ ou n désigne la taille de l'échantillon.

Estimer m par un intervalle de confiance à 95 %.

3) On considère que m = 10,246 et que $\sigma = 0{,}1$.

Une plaque est jugée acceptable si son épaisseur appartient à l'intervalle [10,1 ; 10,4].

Quel pourcentage de la production est acceptable ?

4) Il est possible de modifier le réglage de la machine produisant les plaques. On souhaite que le pourcentage acceptable de plaques soit 95 %.

On appelle T la variable aléatoire centrée réduite associée à L ; cette variable aléatoire T suit la loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$. L'objectif est de déterminer la valeur de l'écart rype σ pour que :

$$P(10{,}1 \leq L \leq 10{,}4) = 0{,}95.$$

a) Démontrer que ceci est équivalent à déterminer σ pour que

$$P\left(T \leq \frac{0{,}146}{\sigma}\right) + P\left(T \leq \frac{0{,}154}{\sigma}\right) = 1{,}95.$$

b) Soit :

$$f(\sigma) = P\left(T \leq \frac{0{,}146}{\sigma}\right) + P\left(T \leq \frac{0{,}154}{\sigma}\right)$$

Calculer f(0,09) ; f(0,08) ; f(0,075) ; f(0,07) ; f(0,06).

c) En déduire une valeur de σ à 10^{-3} près pour que 95 % de la production soit acceptable.

EXERCICE 1

1) (E) $y'' - y' - 6y = -5e^{-2x}$.

1.1 L'équation caractéristique associée à cette équation différentielle est $r^2 - r - 6 = 0$.

Cette équation admet pour solution $r_1 = 3$ ou $r_1 = -2$.

On en déduit que la solution générale de l'équation différentielle $y'' - y' - 6y = = 0$ est définie sur $\mathbb{R}$ par $y(x) = C_1\, e^{3x} + C_2\, e^{-2x}$, où C_1 et C_2 sont deux nombres réels quelconques.

Pour tout x de $\mathbb{R}$, soit $g(x) = (ax + b)e^{-2x}$.

On a $g'(x) = a\, e^{-2x} - 2(ax + b)\, e^{-2x}$

et $g''(x) = -4\, a\, e^{-2x} + 4(ax + b)e^{-2x}$.

Si g est une solution de (E) alors

$-4\, a\, e^{-2x} + 4(a\,x + b) - a\, e^{-2x} + 2(ax + b)\, e^{-2x} -$

$6(ax + b)e^{-2x} = -5\, e^{-2x}$.

$-5\, a\, e^{-2x} = -5\, e^{-2x}$, $a = 1$

Donc la fonction g telle que $g(x) = x\, e^{-2x}$, est solution particulière de (E).

La solution générale de l'équation différentielle linéaire du second ordre (E) est la somme d'une solution particulière de (E) et de la solution générale de l'équation sans second membre associée, soit :

$y = x\, e^{-2x} + C_1\, e^{3x} + C_2\, e^{-2x}$, où C_1 et C_2 sont deux nombres réels quelconques.

1.2 La solution f de (E) vérifie les conditions :

$f(0) = 1$, $f(-1) = 0$.

$f(0) = 1$ équivaut à $C_1 + C_2 = 1$,

$f(-1) = 0$ équivaut à $-e^2 + C_1 e^{-3} + C_2\, e^2 = 0$,

$-e^5 + C_1 + C_2\, e^5 = 0$,

d'où $-e^5 + 1 - C_2 + C_2\, e^5 = 0$,

$1 - e^5 = C_2(1 - e^5)$,

$C_2 = 1$ donc $C_1 = 1 - C_2$, $C_1 = 0$.

La solution f cherchée est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$f(x) = (x + 1)\, e^{-2x}$.

2.1 Pour tout réel x de $\mathbb{R}$,

$f(x) = (x + 1)\, e^{-2x} = x\, e^{-2x} + e^{-2x}$.

$\lim_{x \to +\infty} e^{-2x} = 0$ et $\lim_{x \to +\infty} x\, e^{-2x} = 0$,

$\lim_{x \to +\infty} x\, e^{-2x} + e^{-2x} = 0$, $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$,

l'axe des abscisses est asymptote à (C).

de $\lim_{x \to -\infty} e^{-2x} = +\infty$ et $\lim_{x \to -\infty} (x + 1) = -\infty$,

on déduit que : $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.

Pour tout x de $\mathbb{R}$, $f'(x) = e^{-2x} - 2(x + 1)\, e^{-2x}$,

$f'(x) = (-1 - 2x)\, e^{-2x}$,

$f'(x)$ est du signe de $-1 - 2x$,

d'où le tableau de variation :

x	$-\infty$		$-0,5$		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$e/2$	↘	0

2.2 Du développement limité :

$e^t = 1 + \frac{t}{1!} + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + t^3\, \varepsilon(t)$,

avec $\lim_{t \to 0} \varepsilon(t) = 0$,

on en déduit les développements limités :

$e^{-2x} = 1 - 2x + \frac{4x^2}{2} - \frac{8x^3}{6} + x^3\, \varepsilon(x)$,

avec $\lim_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$, (puisque $\lim_{x \to 0}(-2x) = 0$).

$f(x) = (x + 1)(1 - 2x + 2x^2 - \frac{4}{3}x^3 + x^3\, \varepsilon(x))$,

avec $\lim_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$,

$f(x) = 1 - x + \frac{2}{3}x^3 + x^3\, \varepsilon(x)$, avec $\lim_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$.

Une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 0 est donc $y = 1 - x$.

La position relative de (T) et (C) au voisinage du point d'abscisse 0 est donnée par le signe de :

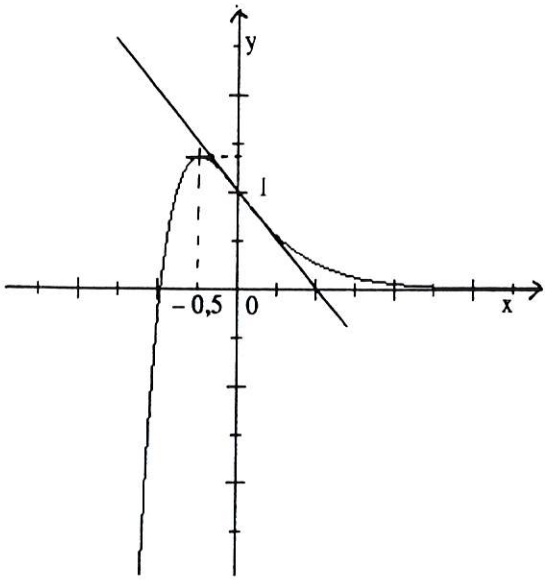
$f(x) - (1 - x) = \frac{2}{3}x^3 + x^3\, \varepsilon(x)$, avec $\lim_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$.

$f(x) - (1 - x)$ est du signe de $\frac{2}{3}x^3$ donc

pour $x < 0$ (C) est au dessous de (T).

pour $x > 0$ (C) est au dessus de (T).

2.3



EXERCICE 2

1° La calculatrice donne $m_0 = 10,046$ et $\sigma_0 \approx 1,0237$.

2° une estimation ponctuelle de σ est 1,034.

L suit la loi normale $\mathcal{N}(m, \frac{\sigma}{\sqrt{50}})$, donc un intervalle de confiance à 95 % de la moyenne m est l'intervalle $[\, m_0 - 1,96 \frac{\sigma}{\sqrt{50}} \;;\; m_0 + 1,96 \frac{\sigma}{\sqrt{50}}\,]$, en utilisant l'estimateur de σ obtenu au 2° on obtient :

$$[10,046 - 1,96 \frac{1,034}{\sqrt{50}} \;;\; 10,046 + 1,96 \frac{1,034}{\sqrt{50}}\,]$$

Donc un intervalle de confiance au coefficient de confiance 95 % de m est [9,76; 10,33]

3° L suit la loi normale $\mathcal{N}(10,246 \,;\, 0,1)$, la variable aléatoire $T = \frac{L - 10,246}{0,1}$ suit la loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$.

$P(10,1 \leq L \leq 10,4) = P(-\frac{0,146}{0,1} \leq T \leq \frac{0,154}{0,1})$,

$P(10,1 \leq L \leq 10,4) = P(-1,46 \leq T \leq 1,54)$,

$P(10,1 \leq L \leq 10,4) \approx \pi(1,54) + \pi(1,46) - 1$,

$P(10,1 \leq L \leq 10,4) \approx 0,9382 + 0,9279 - 1$,

$P(10,1 \leq L \leq 10,4) \approx 0,8661$.

Le pourcentage de la production acceptable est 86,6 %.

4° a) Comme précédemment avec σ inconnu au lieu de $\sigma = 0,1$ on trouve :

$P(10,1 \leq L \leq 10,4) = P(-\frac{0,146}{\sigma} \leq T \leq \frac{0,154}{\sigma})$,

$P(-\frac{0,146}{\sigma} \leq T \leq \frac{0,154}{\sigma})$

$= P(T \leq \frac{0,146}{\sigma}) - 0,5 + P(T \leq \frac{0,154}{\sigma}) - 0,5$,

$= P(T \leq \frac{0,146}{\sigma}) + P(T \leq \frac{0,154}{\sigma}) - 1$,

$P(10,1 \leq L \leq 10,4) = 0,95$, équivaut à

$P(T \leq \frac{0,146}{\sigma}) + P(T \leq \frac{0,154}{\sigma}) - 1 = 0,95$,

$P(T \leq \frac{0,146}{\sigma}) + P(T \leq \frac{0,154}{\sigma}) = 1,95.$

b) $f(\sigma) = P(T \leq \frac{0,146}{\sigma}) + P(T \leq \frac{0,154}{\sigma})$ donc

$f(\sigma) = \pi(\frac{1,54}{\sigma}) + \pi(\frac{1,46}{\sigma})$,

$f(0,09) \approx \pi(1,622) + \pi(1,711)$,

$f(0,09) \approx 0,9474 + 0,9564$, $f(0,09) \approx 1,9038$,

$f(0,08) \approx \pi(1,825) + \pi(1,925)$,

$f(0,08) \approx 0,966 + 0,9729$, $f(0,08) \approx 1,9389$,

$f(0,075) \approx \pi(1,9466) + \pi(2,053)$,

$f(0,075) \approx 0,9742 + 0,9775$, $f(0,075) \approx 1,9517$,

$f(0,07) \approx \pi(2,085) + \pi(2,2)$,

$f(0,07) \approx 0,9778 + 0,9783$, $f(0,07) \approx 1,9569$,

$f(0,06) \approx \pi(2,43) + \pi(2,566)$,

$f(0,06) \approx 0,9925 + 0,993$, $f(0,08) \approx 1,985$.

c) $f(0,076) \approx \pi(1,921) + \pi(2,026)$,

$f(0,076) \approx 0,9726 + 0,9772$, $f(0,076) \approx 1,9498$,

$f(0,075) \approx 1,9517$ et $f(0,076) \approx 1,9498$,

donc on peut prendre comme valeur approchée à 10^{-3} près : $\sigma = 0,075$ ou $\sigma = 0,076$.

ÉQUIPEMENT TECHNIQUE-ÉNERGIE

Session 1994

EXERCICE 1 (10 points)

Une machine fabrique en grande série des pièces de diamètre nominal 38 mm.

Soit X la variable aléatoire qui, à chaque pièce, associe son diamètre exprimé en mm.

On admet que, lorsque la machine est bien réglée, X suit la loi normale de moyenne $m = 38$ et d'écart type $\sigma = 0{,}49$.

L'intervalle de tolérance étant $[37 ; 39]$, une pièce est dite défectueuse, si son diamètre n'appartient pas à cet intervalle.

A - On suppose la machine bien réglée :

1° Déterminer la probabilité $P(37 \leq X \leq 39)$.

2° En déduire le pourcentage de pièces défectueuses.

3° On effectue des prélèvements de 100 pièces prises au hasard dans la production. Le tirage peut être assimilé à un tirage avec remise.

On désigne par Y la variable aléatoire qui associe à tout prélèvement de ce type le nombre de pièces défectueuses de l'échantillon.

Quelle est la loi suivie par Y ?

En utilisant l'approximation de cette loi par une loi de Poisson dont on déterminera le paramètre λ, calculer la probabilité qu'un tel échantillon contienne plus de 5 pièces défectueuses.

B - On effectue régulièrement des prélèvements d'échantillons de 100 pièces, les tirages pouvant être considérés comme faits avec remise.

On appelle $\overline{X}$ la variable aléatoire qui, à chaque échantillon, associe le diamètre moyen des pièces de cet échantillon.

1° Si la machine est bien réglée :

a) Quelle est la loi suivie par $\overline{X}$?

b) Déterminer le réel a tel que : $P(38 - a \leq \overline{X} \leq 38 + a) = 0{,}95$.

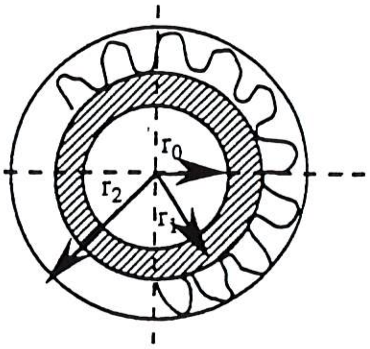
2° Sur un échantillon de 100 pièces, on a les résultats suivants :

Diamètre en mm	[36,6 : 37[	[37 ; 37,4[	[37,4 ; 37,8[	[37,8 ; 38,2[	[38,2 ; 38,6[	[38,6 ; 39[	[39 ; 39,4[
Nombre de pièces	3	15	20	28	22	8	4

a) En choisissant pour valeurs observées les centres de classes, calculer une valeur approchée de la moyenne x_e de cet échantillon.

b) En utilisant la question B 1°, construire un test bilatéral permettant au vu de ce résultat, accepter au seuil de rique 5 % l'hypothèse selon laquelle la machine est bien réglée ? (Quand la machine est bien réglée on sait que X suit la loi normale de moyenne $m = 38$ et d'écart type $\sigma = 0{,}49$).

EXERCICE 2 (10 points)



1° Considérons un tube en acier de rayon intérieur r_0 et de rayon extérieur r_1, exprimés en m, de conductivité thermique λ_a. La résistance thermique, par mètre linéaire du tube est donnée par la formule :

$$R_{ta} = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{1}{h_i r_0} + \frac{\ln\frac{r_1}{r_0}}{\lambda_a} + \frac{1}{h_e r_1}\right]$$

Calculer R_{ta} pour un tube de diamètre extérieur 48,3 mm et d'épaisseur 2,6 mm sachant que :

$h_i = 2754\ \mathrm{W/m^2K}$ $\qquad h_e = 12{,}52\ \mathrm{W/m^2K}$ $\qquad \lambda_a = 52\mathrm{W/mK}$

2° Ce tube est isolé à l'aide d'un matériau de conductivité $\lambda = 0{,}031\ \mathrm{W/mK}$ disposé en couche. Le nouveau rayon extérieur est r_2. On obtient une nouvelle résistance thermique R_t pour l'ensemble. La différence $R_t - R_{ta}$ est approchée par une fonction de r_2 définie par :

$$f(r_2) = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{0{,}0798}{r_2} + 32{,}25 \ln\frac{r_2}{0{,}0241} - 3{,}304\right] \qquad r_2 \text{ étant exprimé en m.}$$

a) Etudier les variations de f pour $r_2 \in [\, r_1 , +\infty [$.

b) Calculer une valeur approchée à 10^{-3} près de R_t pour $r_2 = 30$ mm.

3° Ce tube de longueur 100 m isolé par le calorifuge d'épaisseur 10 mm a une résistance thermique $R_t = 2{,}15$. Il traverse un local dont la température ambiante est $\theta_1 = 20°$ C.

La température de l'eau est une fonction θ de la distance x parcourue par l'eau dans le tube.

Elle vérifie : $\quad \dfrac{\theta(x) - \theta_1}{R_t}\, dx = -2300\, d\theta \quad$ (E)

a) Résoudre (E)? (On pourra remarquer que (E) est une équation différentielle linéaire).

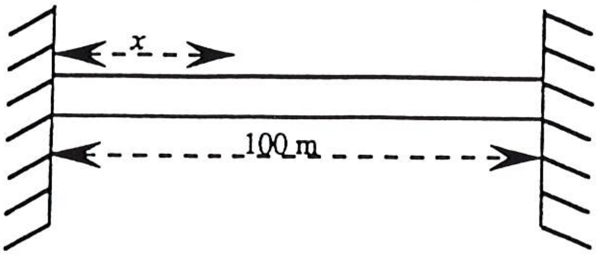
b) Sachant que la température de l'eau dans le tube au départ est $\theta_0 = 80°\mathrm{C}$, montrer que

$$\theta(x) = 60\, e^{\frac{-x}{4945}} + 20\,.$$

c) Déterminer la chute de température de l'eau au cours de la traversée du local.

d) Donner le développement limité de e^{-u} à l'ordre 1 pour u proche de 0. Justifier l'utilisation de ce développement limité pour donner une approximation $\omega(x)$ de $\theta(x)$. Calculer $\omega(100)$.

e) Déterminer le flux ϕ cédé par ce tube sachant que $\quad \phi = \displaystyle\int_0^{100} \frac{\theta(x) - \theta_1}{R_t}\, dx$.



EXERCICE 1

A - La variable aléatoire X suit la loi normale de paramètres m = 38 et $\sigma = 0{,}49$.

1° Soit T la variable aléatoire centrée réduite associée à X : $T = \frac{X - 38}{0{,}49}$, T suit la loi $\mathcal{N}(0, 1)$.

1° $P(37 \leq X \leq 39) = P(-\frac{1}{0{,}49} \leq T \leq \frac{1}{0{,}49})$

$P(37 \leq X \leq 39) \approx P(-2{,}04 \leq T \leq 2{,}04)$,

$P(37 \leq X \leq 39) \approx 2\,\pi(2{,}04) - 1$,

$P(37 \leq X \leq 39) \approx 2 \times 0{,}9793 - 1$,

$P(37 \leq X \leq 39) \approx 0{,}9586$.

2° La probabilité qu'une pièce ne soit pas défectueuse est 0,9586 .

La probabilité qu'une pièce soit défectueuse est donc :

1 - 0,9586 = **0,0414.**

3° Soit Y la variable aléatoire qui à tout lot de 100 pièces associe le nombre de pièces défectueuses.

Les tirages sont supposés indépendants et non exhaustifs, pour chaque tirage il y a deux éventualités: la pièce est défectueuse avec une probabilité p = 0,0414 ou la pièce est non défectueuse avec une probabilité 0,9586, donc la variable aléatoire Y suit la loi binomiale $\mathcal{B}(100 ; 0{,}0414)$.

On approche cette loi binomiale par une loi de Poisson de paramètre : $\lambda = np = 100 \times 0{,}0414 = 4{,}14$.

$P(X \leq 5) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5)$

$$= \frac{e^{-4,14} \times 4{,}14^0}{0!} + \frac{e^{-4,14} \times 4{,}14^1}{1!} + \frac{e^{-4,14} \times 4{,}14^2}{2!} + \frac{e^{-4,14} \times 4{,}14^3}{3!} + \frac{e^{-4,14} \times 4{,}14^4}{4!} + \frac{e^{-4,14} \times 4{,}14^5}{5!}$$

$$P(X \leq 5) = e^{-4,14}\left(\frac{4{,}14^0}{0!} + \frac{4{,}14^1}{1!} + \frac{4{,}14^2}{2!} + \frac{4{,}14^3}{3!} + \frac{4{,}14^4}{4!} + \frac{4{,}14^5}{5!}\right), \quad P(X \leq 5) \approx 0{,}7913.$$

$P(X > 5) \approx 20\ \%$

B - On suppose encore que la variable aléatoire X suit la loi normale $\mathcal{N}(38 ; 0{,}49)$.

1° a) $\overline{X}$ la variable aléatoire qui à chaque échantillon de 100 pièces associe la moyenne des diamètres des pièces de cet échantillon suit la loi normale $\mathcal{N}(38 ; \frac{0{,}49}{\sqrt{100}})$, soit $\mathcal{N}(38 ; 0{,}049)$.

b) $P(38 - a \leq \overline{X} \leq 38 + a) = 0{,}95$ équivaut en utilisant le changement de variable $T = \frac{\overline{X} - 38}{0{,}049}$ à $P(-\frac{a}{0{,}049} \leq T \leq \frac{a}{0{,}049}) = 0{,}95$ et à $2\pi(\frac{a}{0{,}049}) - 1 = 0{,}95$ et à $\frac{a}{0{,}049} = 1{,}96$, $a = 0{,}096$ à 10^{-3} près.

$\mathbf{P(37{,}904 \leq \overline{X} \leq 38{,}096) = 0{,}95.}$

2° a) En utilisant les centres classes comme valeurs du caractère on trouve avec la calculatrice la longueur moyenne approchée des pièces de cet échantillon $\overline{x} \approx 37{,}948$

b) Construction du test :

choix de H_0 : m = 38 *choix de H_1 :* $m \neq 38$

détermination de la région critique :

Sous l'hypothèse H_0, m = 38, $\overline{X}$ suit la loi normale $\mathcal{N}(38 ; 0{,}049)$ et d'après la question B - 2° :

$\mathbf{P(37{,}904 \leq \overline{X} \leq 38{,}096) = 0{,}95.}$

Si H_0 est vraie on a 95% de chances de prélever un échantillon aléatoire dont la moyenne appartient à l'intervalle I = [37,904 ; 38,096]

règle de décision :

si $\overline{x} \in [37{,}904 ; 38{,}096]$ on accepte H_0

si $\overline{x} \notin [37{,}904 ; 38{,}096]$ on rejette H_0 et on accepte H_1

Utilisation du test : $\overline{x} \approx 37{,}948$,

$\overline{x} \in [37{,}904 ; 38{,}096]$ on accepte H_0 et on rejette H_1. On accepte donc l'hypothèse $m_1 = 30$.

EXERCICE 2

1°

$$R_{ta}=\frac{1}{2\pi}\left[\frac{1}{h_i r_0}+\frac{\ln\frac{r_1}{r_0}}{\lambda_a}+\frac{1}{h_e r_1}\right]$$

$$R_{ta}=\frac{1}{2\pi}\left[\frac{1}{2754\times 0{,}02155}+\frac{\ln\frac{0{,}02415}{0{,}02155}}{52}+\frac{1}{12{,}52\times 0{,}02415}\right]$$

$R_{ta}=0{,}5294$ à 10^{-5} près , $R_{ta}=0{,}53$ à 10^{-2} près .

2° a)

$$f(r_2)=\frac{1}{2\pi}\left[\frac{0{,}0798}{r_2}+32{,}25\ln\frac{r_2}{0{,}0241}-3{,}304\right]$$

$f(r_1)=\frac{1}{2\pi}\left[\frac{0{,}0798}{0{,}02415}-3{,}304\right]$, $f(r_1)\approx 0{,}0000554$,

$f(r_1)\approx 0$.

$f'(r_2)=\frac{1}{2\pi}\left[-\frac{0{,}0798}{r_2^2}+\frac{32{,}25}{r_2}\right]$,

$f'(r_2)=\frac{1}{2\pi}\left[\frac{-0{,}0798+32{,}25\,r_2}{r_2^2}\right]$,

$f'(r_2)>0$ pour $r_2>\frac{0{,}0798}{32{,}25}$, pour $r_2>0{,}0024744$,

$r_1>0{,}0024744$ donc f est croissante sur $[r_1\,;+\infty[$.

b)

$f(0{,}03)=\frac{1}{2\pi}\left[\frac{0{,}03}{0{,}02415}+32{,}25\ln\frac{0{,}03}{0{,}0241}-3{,}304\right]$

$f(0{,}03)\approx 1{,}0215$, $R_t-R_{ta}\approx 1{,}1215$ or on a trouvé au 1° $R_{ta}\approx 0{,}5294$ donc $R_t\approx 1{,}0215+0{,}5294$,

$R_t\approx 1{,}5509$, $R_t=1{,}55$ à 10^{-2} près .

3° $R_t=2{,}15$, $\theta_1=20$.

L'équation (E) peut s'écrire pour $x>0$:

$(\theta(x)-20)\,dx=-2300\,(2{,}15)\,d\theta$ ou encore :

$4945\frac{d\theta}{dx}+\theta(x)=20$, c'est une équation linéaire du premier ordre à coefficients constants .

a) La solution générale de l'équation sans second membre est $\theta(x)=K\,e^{\frac{-x}{4945}}$

La fonction h telle que $h(x)=20$ est une solution particulière de (E) donc l'ensemble des solutions de (E) est la fonction g telle que $g(x)=20+K\,e^{\frac{-x}{4945}}$

b) pour $x=0$, $\theta_0=80$ donc $80=20+K$, $K=60$.

On a bien $\theta(x)=20+60\,e^{\frac{-x}{4945}}$.

c) la chute de température au bout de 100 m est :

$\theta(100)=20+60\,e^{-\frac{100}{4945}}$, $\theta(100)\approx 78{,}7988$

d) Du développement limité :

$e^t=1+\frac{t}{1!}+t\,\varepsilon(t)$, avec $\lim\limits_{t\to 0}\varepsilon(t)=0$,

On en déduit les développements limités :

$e^{-u}=1-u+u\,\varepsilon(u)$, avec $\lim\limits_{u\to 0}\varepsilon(u)=0$,

$\omega(x)=60\left(1-\frac{1}{4945}x\right)+20+x\,\varepsilon(x)$,

avec $\lim\limits_{x\to 0}\varepsilon(x)=0$,

$\omega(x)=80-\frac{60}{4945}x+x\,\varepsilon(x)$, avec $\lim\limits_{x\to 0}\varepsilon(x)=0$,

$\omega(100)\approx 80-\frac{6000}{4945}$, $\omega(100)\approx 78{,}786$.

e)

$$\phi=\int_0^{100}\frac{60\,e^{\frac{-x}{4945}}}{2{,}15}dx\approx 27{,}907\int_0^{100}e^{\frac{-x}{4945}}dx ,$$

$$\phi\approx 27{,}907\left[\,4945\,e^{\frac{-x}{4945}}\right]_0^{100} ,$$

$\phi\approx 13800\left[e^{-\frac{100}{4945}}-1\right]$, $\phi\approx -2762{,}67$.

ÉQUIPEMENT TECHNIQUE-ÉNERGIE

Session 1995

EXERCICE 1 (8 points)

Dans cet exercice, les calculs seront effectués à 10^{-3} près.

Les parties A et B sont indépendantes.

A - L'étude du coût de maintenance annuel d'une installation de chauffage dans un immeuble de bureaux, en fonction de l'âge de l'installation, a donné les résultats suivants :

Age x_i (en années)	1	2	3	4	5	6
Coût y_i (en KF)	7,55	9,24	10,74	12,84	15,66	18,45

1° Représenter le nuage de points $M_i(x_i,y_i)$ dans un repère orthogonal (unités graphiques : 2 cm en abscisse, 1 cm en ordonnée).
Peut-on envisager un ajustement affine de ce nuage ?

2° a) Déterminer le coefficient de corrélation linéaire de la série statistique double (x_i,y_i).
Le résultat obtenu confirme-t-il l'observation faite au 1° ?

b) Déterminer, par la méthode des moindres carrés, une équation de la droite de régression D de y en x. Tracer D dans le même repère qu'au 1°.

c) En admettant que l'évolution du coût constaté pendant 6 ans se poursuive les années suivantes, donner une estimation du coût de maintenance de l'installation lorsqu'elle aura 8 ans.

B -

Une étude statistique montre que la probabilité de l'événement "une intervention au moins est nécessaire sur l'installation au cours d'un mois donné" est 0,125. On admet que la nécessité d'intervenir au cours d'un mois ne dépend pas du mois considéré. On note X la variable aléatoire qui, à chaque année, associe le nombre de mois où il a fallu intervenir sur l'installation.

1° Expliquer pourquoi X suit une loi binomiale et donner les paramètres n et p de cette loi.

2° Calculer la probabilité des événements suivants :

a) on n'est pas intervenu dans l'année.

b) on est intervenu un seul mois dans l'année.

c) on est intervenu au moins deux mois dans l'année.

3° On se propose d'approcher la loi de X par une loi de Poisson de paramètre $\lambda = np$.
En utilisant cette loi de Poisson, déterminer les probabilités respectives des événements définis aux questions 2a, 2b et 2c. Les valeurs sont-elles bien compatibles avec les résultats du 2° ?

EXERCICE 2 (12 points)

L'écart à sa position d'équilibre d'une masse oscillant sur un fluide élastique est une fonction du temps. L'étude des oscillations conduit à l'équation différentielle (dite des oscillations) :

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt} + 2y = 0$$

où l'inconnue y est une fonction de la variable t définie et deux fois dérivable sur $[0, +\infty[$.
y(t) est exprimé en centimètres
t est exprimé en secondes.

A - 1° Résoudre cette équation différentielle.

2° Déterminer la solution particulière qui s'annule pour $t = 0$ et dont la dérivée prend la valeur 4 pour cette valeur $t = 0$.

B - Soit la fonction f définie sur $[0, +\infty[$ par $f(t) = 4\,e^{-t}\sin t$.

1° Montrer que l'on a, pour tout t de $[0, +\infty[$; $|f(t)| \leq 4\,e^{-t}$.

a) En déduire $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t)$.

b) Montrer que, pour $t \geq 2\pi$, $|f(t)| \leq 10^{-2}$.

On admet que les oscillations ne sont plus discernables lorsque la valeur absolue de l'écart à la position d'équilibre ne dépasse plus 10^{-2} cm.
Vérifier qu'il suffit d'étudier f sur l'intervalle $I = [0, 2\pi]$ pour avoir une représentation suffisante des oscillations.

2° On étudie f sur $I = [0, 2\pi]$.

a) Calculer la dérivée f ' de f.

b) Etudier le signe de f '(t) et dresser le tableau de variation de f.

(On pourra utiliser la relation : $\cos t - \sin t = \sqrt{2}\cos\left(t + \frac{\pi}{4}\right)$).

c) Tracer la courbe représentative C de f dans un repère orthogonal
(unités graphiques : 2 cm en abscisse, 10 cm en ordonnée).
On précisera les points d'intersection de C avec l'axe des abscisses, la tangente à C en l'origine du repère et les tangentes parallèles à l'axe des abscisses.

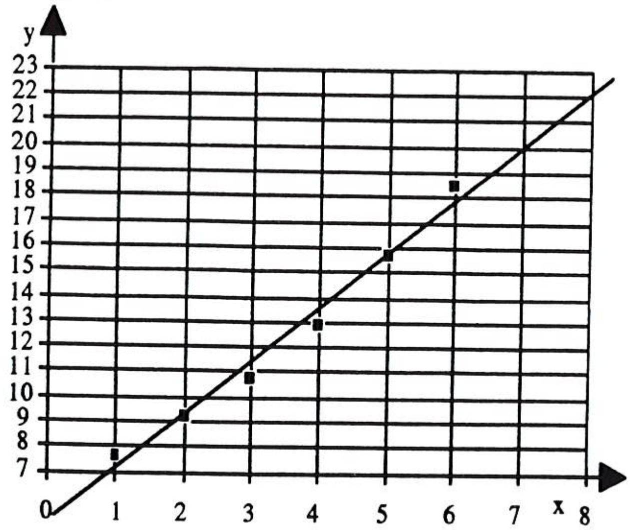
3° Calculer la valeur moyenne m de f pour t variant de 0 à π.
Donner une valeur approchée de m à 10^{-2} près par défaut.

(On donne $m = \frac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} f(t)\,dt$)

(N.B. Les différentes questions de cet exercice sont dans une large mesure indépendantes).

EXERCICE 1

A - 1°



Un ajustement affine de ce nuage peut être envisagé.

2° a) Avec une calculatrice, on obtient à 10^{-3} près : $r = 0,991$, le résultat obtenu voisin de 1 confirme l'observation faite au 1°.

b) Avec une calculatrice, on obtient à 10^{-3} près : $y = 2,167\,x + 4,827$.

c) Avec une calculatrice, pour $x = 8$ on obtient $y = 22,167$ à 10^{-3} près . Quand l'installation aura 8 ans on peut estimer le coût de maintenance à 22 167 F.

B -

1° Chaque mois, on a deux possibilités et deux seulement ou une intervention au moins est nécessaire de probabilité $p = 0,125$, ou aucune intervention est nécessaire avec la probabilité 0,875. Au cours d'une année, cette expérience est réalisée 12 fois et les résultats sont indépendants puisque la nécessité d'intervenir au cours d'un mois ne dépend pas du mois considéré.

X suit donc la loi binomiale $\mathscr{B}$ (12 ; 0,125) .

2° a) $p_1 = P(X = 0)$, $p_1 = C_{12}^{0}\,(0,125)^0(0,875)^{12}$

$$p_1 \approx 0,2014 .$$

b) $p_2 = P(X = 1)$, $\quad p_2 \approx 0,3453$.

c) $p_3 = 1 - (\,P(X = 0) + P(X = 1))$, puisque les événements $X = 0$, $X = 1$ sont incompatibles ,

$p_3 \approx 1 - (0,2014 + 0,3453\,)$ $\quad$ $p_3 \approx 0,4533.$

3° $\lambda = n\,p = 12 \times 0,125$, $\lambda = 1,5$ an.

La loi de X est approchée par la loi de Poisson $\mathscr{P}$ (1,5)

$p_1' \approx 0,2231$, $p_2' \approx 0,8088$, $p_3' \approx 1 - 0,558 \approx 0,442$.

L'écart relatif : $\left|\dfrac{p_1 - p_1'}{p_1}\right| \approx 0,109 > 10\%$

$\left|\dfrac{p_2 - p_2'}{p_2}\right| \approx 0,03 < 10\ \%$. L'approximation est justifiée pour le calcul de p_2 et p_3 mais pas celui de p_1.

EXERCICE 2

A - On considère l'équation (E) : $y'' + 2\,y' + 2\,y = 0$, dans laquelle y , désigne une fonction numérique de la variable t définie sur $[0, +\infty[$.

1° L'équation caractéristique est $r^2 + 2\,r + 2 = 0$;

$\Delta = -4 = 4\,i^2$. Il y a deux solutions $r_1 = -1 - i$ et $r_2 = -1 + i$. Les solutions de l'équations sont donc définies dans $\mathbb{R}$ par : $y(t) = e^{-t}\,(C_1 \cos t + C_2 \sin t)$

où C_1 et C_2 sont des nombres réels quelconques.

2° Si une solution particulière de cette équation est nulle pour $t = 0$ et si la dérivée vaut 4 pour $t = 0$,

alors (A) $\begin{cases} x(0) = 0 \\ x'(0) = 4 \end{cases}$. Pour tout réel t,

$x'(t) = -e^{-t}\,(C_1 \cos t + C_2 \sin t) + e^{-t}\,(-C_1 \sin t + C_2 \cos t)$

$x'(t) = e^{-t}\,((-C_1 + C_2) \cos t + (C_1 - C_2) \sin t)$

(A) s'écrit : $\begin{cases} C_1 = 0 \\ C_2 = 4 \end{cases}$

La solution particulière cherchée est donc définie sur $\mathbb{R}$ pour

$$\mathbf{x(t) = 4\,e^{-t} \sin t.}$$

B -

Soit f définie sur $[0, +\infty[$ par $f(t) = 4\,e^{-t} \sin t$.

1° Pour tout t de $[0, +\infty[$, $|\sin t| \le 1$ or

$|f(t)| = 4\,e^{-t}|\sin t|$, donc $|f(t)| \le 4\,e^{-t}$.

a) $0 \le |f(t)| \le 4\,e^{-t}$, $\lim\limits_{t \to +\infty} 4\,e^{-t} = 0$ donc $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = 0$.

b) Pour $t \ge 2\pi$, $-t \le -2\pi$, la fonction exponentielle est croissante dans $\mathbb{R}$ donc $4e^{-t} \le 4e^{-2\pi}$, $0 \le |f(t)| \le 4e^{-2\pi}$,

$4\,e^{-2\pi} \le 10^{-2}$ une majoration de $|f(t)|$ est donc 10^{-2} .

Les oscillations ne sont plus discernables lorsque la valeur absolue de l'écart à la position d'équilibre ne dépasse plus 10^{-2} cm ce qui est le cas pour $t \ge 2\pi$.

Il suffit donc d'étudier f sur l'intervalle $I = [0, 2\pi]$ pour avoir une représentation suffisante des oscillations.

2° On étudie f sur $I = [0, 2\pi]$.

a) Pour tout t de $[0, 2\pi]$, $f'(t) = 4e^{-t}(\cos t - \sin t)$.

$f'(t) = 4\sqrt{2}\, e^{-t} \cos\left(t + \frac{\pi}{4}\right)$

b) $f'(t) = 0$ équivaut à $\cos\left(t + \frac{\pi}{4}\right) = 0$ et à

$t + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, sur $[0, 2\pi]$ l'ensemble des solution est $\left\{ \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4} \right\}$.

Pour tout réel t, $e^{-t} > 0$ donc les inéquations suivantes sont équivalentes : $f'(t) \geq 0$, $\cos\left(t + \frac{\pi}{4}\right) \geq 0$.

Etudions le signe de $\cos\left(t + \frac{\pi}{4}\right)$ dans le tableau suivant:

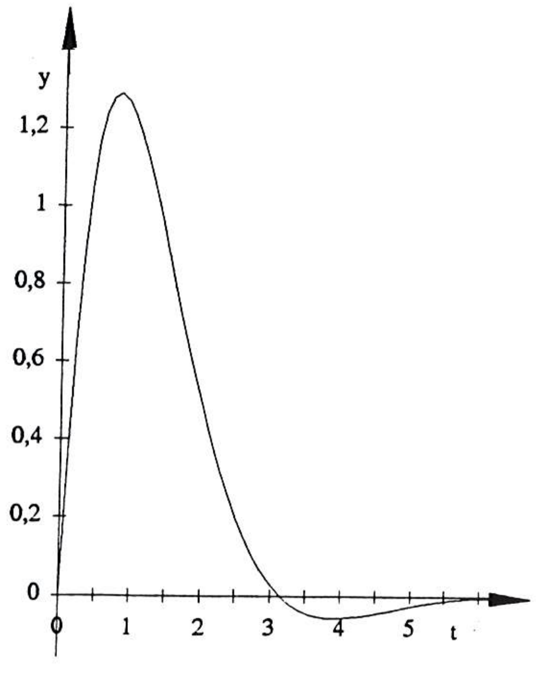
t	0		$\frac{\pi}{4}$		π		$\frac{5\pi}{4}$		2π
$t + \frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{5\pi}{4}$		$\frac{3\pi}{2}$		$\frac{7\pi}{4}$
$\cos(t + \frac{\pi}{4})$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	+	0	-	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-	0	+	$\frac{\sqrt{2}}{2}$

D'où le tableau de variation:

t	0		$\frac{\pi}{4}$		π		$\frac{5\pi}{4}$		2π
f '(t)		+	0		−		0	+	
f(t)	0	↗	$f(\frac{\pi}{4})$	↘		↘	$f(\frac{5\pi}{4})$	↗	0

$f(\frac{\pi}{4}) \approx 1{,}29$, $f(\frac{5\pi}{4}) \approx -0{,}056$.

c)



$f(t) = 0$ équivaut à $4e^{-t}\sin t = 0$ et à $\sin t = 0$ ($4e^{-t} \neq 0$), les abscisses des trois points d'intersection de C et de l'axe des abscisses sur $[0, 2\pi]$ sont $\{0, \pi, 2\pi\}$, les ordonnées de ces trois points sur $[0, 2\pi]$ sont nulles. Les coefficients directeurs des tangentes à C en ces points sont $f'(0) = 4$.

3° $m = \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi} e^{-t} \sin t \, dt$, $m = \frac{4}{\pi} I$

En posant $u(t) = \sin t$, $u'(t) = \cos t$
$v'(t) = e^{-t}$, $v(t) = -e^{-t}$,

d'où $I = \left[-e^{-t}\sin t\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} -e^{-t}\cos t \, dt$,

$I = \left[-e^{-t}\sin t\right]_0^{\pi} + I_2$,

On intègre par parties I_2 en posant :
$u(t) = \cos t$, $u'(t) = -\sin t$
$v'(t) = e^{-t}$, $v(t) = -e^{-t}$.

d'où $I_2 = \left[-e^{-t}\cos t\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} -e^{-t}\sin t \, dt$,

On en déduit que :

$I = \left[-e^{-t}\sin t\right]_0^{\pi} + \left[-e^{-t}\cos t\right]_0^{\pi} - I$

$2I = \left[-e^{-t}\sin t - e^{-t}\cos t\right]_0^{\pi}$, $2I = e^{-\pi} + 1$,

$I = \frac{1}{2}(e^{-\pi} + 1)$ d'où $\mathbf{m} = \frac{2}{\pi}(e^{-\pi} + 1)$.

autre méthode de calcul de I :

L'équation différentielle peut être écrite

$f(t) = \frac{1}{2}[f'(t) + 2f(t)]'$

Une primitive F de f est définie sur $[0,\pi]$ par

$F(t) = -\frac{1}{2}[f'(t) + 2f(t)]$

$F(t) = -\frac{1}{2}\left[e^{-t}(\cos t - \sin t) + 2e^{-t}\sin t\right]$,

$F(t) = -\frac{1}{2}e^{-t}(\cos t + \sin t)$.

Donc $\int_0^{\pi} f(t)\, dt = F(\pi) - F(0) = \frac{1}{2}(e^{-\pi} + 1)$.

ÉQUIPEMENT TECHNIQUE-ÉNERGIE

Session 1996

EXERCICE 1 (8 points)

Les questions 1) 2) et 3) sont, dans une large mesure, indépendantes.

Dans une usine, la fabrication en grande série des pièces fabriquées est assurée par une machine.

1) La probabilité que cette machine soit en panne un jour donné est $p = 0,03$.

Soit X la variable aléatoire qui, à toute période de 100 jours aléatoires, associe le nombre de jours de panne.

a) Les pannes étant indépendantes les unes des autres, quelle est la loi suivie par la variable aléatoire X ? Préciser ses paramètres.

b) Cette loi peut être approchée par une loi de Poisson de paramètre $\lambda = 3$.

En utilisant cette loi de Poisson, calculer les probabilités :

b_1) qu'il y ait exactement trois jours de panne au cours de cette période ;

b_2) qu'il y ait au moins trois jours de panne.

2) On s'intéresse au diamètre des pièces fabriquées.

Un client reçoit un échantillon de 100 pièces prélevées au hasard dans la fabrication de l'usine. On obtient les résultats suivants :

Intervalles dans lesquels on a les mesures des diamètres	Diamètres (centre de classes)	Effectifs Nombre de mesures
[60 , 65 [	62,5	1
[65 , 70 [	67,5	3
[70 , 75 [	72,5	15
[75 , 80 [	77,5	33
[80 , 85 [	82,5	32
[85 , 90 [	87,5	13
[90 , 95 [	92,5	2
[95 , 100 [	97,5	1

Calculer une valeur approchée de la moyenne et de l'écart type de cet échantillon. Compte tenu de l'erreur de méthode induite par le regroupement en classes, on se contentera de donner le résultat à l'unité près.

3) Soit Y la variable aléatoire qui, à chaque pièce prélevée au hasard dans la fabrication de l'usine, associe son diamètre exprimé en millimètres. On admet que Y suit la loi normale de moyenne $M = 80$ et d'écart type $\sigma = 5$.

Une pièce est conforme si son diamètre est compris entre 70 et 90 mm.

a) Quelle est la probabilité qu'une pièce, prélevée au hasard dans la fabrication de cette usine, soit non conforme ?

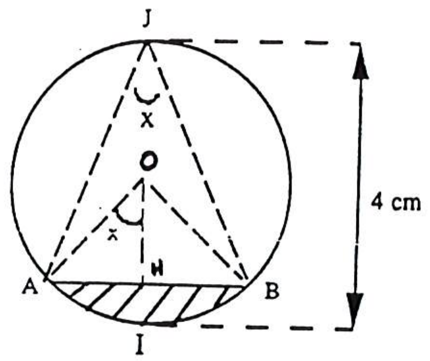
b) Sachant que l'écart type peut être réduit par un réglage de la machine, quelle valeur faudrait-il pouvoir lui donner pour que le pourcentage des pièces non conformes soit ramené à 1%.

EXERCICE 2 (12 points)

Une vanne contrôlant l'écoulement d'un liquide au bout d'un tube cylindrique, de diamètre IJ = 4 cm, est schématisée ci-contre : x est la mesure en radian de l'angle AJB qui varie entre 0 et π.

(pour x = 0, la vanne est fermée, pour x = π, elle est entièrement ouverte).

Le liquide passe par la partie hachurée, d'aire S(x).



On s'intéresse au volume V (en cm^3) du liquide qui s'écoulera pendant la phase d'ouverture de la vanne.

x est fonction du temps de telle sorte que V est donné par :

$$V = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} v_0(x)\, S(x)\, dx$$

(où v_0 est une vitesse d'écoulement).

Les parties A, B,C et D sont, dans une large mesure, indépendantes.

Partie A : Etude de l'aire S(x)

Justifier que $S(x) = 4x - 2 \sin 2x$.

Partie B : Etude de la vitesse v_0

Une comparaison à un modèle d'écoulement amène à considérer que v_0 est solution de l'équation différentielle :

$$\text{(E)} \quad 4 v' + v = 3 e^{x/2} - 1$$

où v est une fonction définie, dérivable sur |R avec la condition initiale $v_0 (0) = 0$.

1) Résoudre l'équation différentielle $4 v' + v = 0$.
2) Déterminer les constantes A et B pour que la fonction u telle que : $u(x) = A e^{x/2} + B$ soit une solution particulière de l'équation différentielle (E).
3) Résoudre l'équation différentielle (E).
4) Déterminer la solution particulière v_0 de l'équation (E) vérifiant $v_0 (0) = 0$.

Partie C : Etude de fonction

Soit f la fonction définie sur $[0, \pi]$ par : $f(x) = v_0(x).\ S(x)$

$$f(x) = 2(2x - \sin 2x)(e^{x/2} - 1)$$

1) Compléter le tableau suivant :

x	0	1	1,5	2	2,7	π
f(x)						

où les valeurs de f(x) seront données au centième près.

2) Montrer que les fonctions $x \longmapsto 2x - \sin 2x$ et $x \longmapsto e^{x/2} - 1$ sont croissantes et positives. Quel est le sens de variation de la fonction $x \longmapsto f(x)$ produit de deux fonctions positives et croissantes ?

Partie D : Calcul du volume V

1) Calculer les valeurs exactes des intégrales :

$$I_1 = \int_0^{\pi} x\,dx \quad \text{et} \quad I_2 = \int_0^{\pi} \sin 2x\,dx$$

2) Calculer la valeur exacte de $I_3 = \displaystyle\int_0^{\pi} x\,e^{x/2}\,dx$ en procédant par une intégration par parties.

3) On pose $M = \displaystyle\int_0^{\pi} e^{x/2} \cos 2x\,dx$ et $P = \displaystyle\int_0^{\pi} e^{x/2} \sin 2x\,dx$

a) Montrer que $M + i\,P = = \displaystyle\int_0^{\pi} e^{x\,(0,5\,+\,2i)}\,dx$, où i est le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$.

b) Calculer la valeur exacte de P comme partie imaginaire de $M + i\,P$.

4) Ecrire V en fonction de I_1, I_2, I_3 et P.
En déduire une valeur approchée, à un cm^3 près, de V.

EXERCICE 1

1) a) On est en présence d'une succession de 100 épreuves indépendantes, chacune ayant deux issues : il y a panne de probabilité constante 0,03 ou il n'y a pas panne de probabilité 0,97. La variable aléatoire X qui, à toute période de 100 jours associe le nombre de jours de panne, suit la loi binomiale $\mathscr{B}(100\,;0{,}03)$.

b) Cette loi peut être approchée par une loi de Poisson. Le paramètre est $\lambda = np$, $\lambda = 100 \times 0{,}03$, $\lambda = 3$.

On trouve dans le formulaire pour $\lambda = 3$:

b_1) La probabilité qu'il y ait exactement 3 jours de panne

$P(X = 3) = 0{,}224$.

b_2) La probabilité qu'il y ait au moins 3 jours de panne est $P(X \geq 3) = 1 - P(X < 3)$

$P(X \geq 3) = 1 - [P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)]$

$P(X \geq 3) = 1 - (0{,}050+0{,}149+0{,}224)$, $P(X \geq 3) = 0{,}577$.

2) La calculatrice donne $\overline{x} = 80$ et $\sigma = 6$ à une unité près.

3) La variable aléatoire Y qui, à chaque pièce prélevée au hasard dans la production associe son diamètre, suit la loi normale $\mathscr{N}(80, 5)$, la variable aléatoire $T = \frac{Y - 80}{5}$ suit la loi normale centrée, réduite $\mathscr{N}(0, 1)$.

a) La probabilité qu'une pièce, tirée au hasard dans la production ait sa masse comprise entre 70 et 90 est

$P(70 \leq Y \leq 90) = P(-2 \leq T \leq 2)$,

$P(70 \leq Y \leq 90) = 2\pi(2) - 1$,

$P(70 \leq Y \leq 90) \approx 2(0{,}9972) - 1$,

$P(70 \leq Y \leq 90) \approx$ **0,9544** à 10^{-4} près.

La probabilité qu'une pièce, tirée au hasard dans la production ne soit pas conforme est donc

$1 - 0{,}9544 = 0{,}0456$ à 10^{-4} près.

b) Si Y suit la loi normale $\mathscr{N}(80, \sigma)$, $T_1 = \frac{Y - 80}{\sigma}$ suit la loi normale centrée, réduite $\mathscr{N}(0, 1)$.

$P(70 \leq Y \leq 90) = 0{,}99$ équivaut à :

$P(-\frac{10}{\sigma} \leq T \leq \frac{10}{\sigma}) = 0{,}99$, et à $2\pi(\frac{10}{\sigma}) - 1 = 0{,}99$,

$\pi(\frac{10}{\sigma}) = 0{,}995$, $\frac{10}{\sigma} = 2{,}57$, $\sigma = 3{,}89$ à 10^{-2} près.

EXERCICE 2

A) L'aire hachurée apparaît comme la différence de l'aire d'un secteur angulaire et d'un triangle OAB.

L'aire du secteur angulaire est $(\alpha) \times \frac{R^2}{2} = (2x) \times \frac{2^2}{2}$, l'aire du triangle OAB est $2 \times$ aire du triangle rectangle OAH d'hypothénuse OA de longueur 2 cm :

$2 \times \frac{1}{2} \times 2 \sin x \times 2 \cos x$ d'où

$S(x) = (2x) \times \frac{2^2}{2} - 2 \sin x \times 2 \cos x$,

$S(x) = 4x - 2(2 \sin x \cos x)$, $S(x) = 4x - 2 \sin 2x$.

B) 1) L'équation (E) $4v' + v = 0$ est une équation linéaire du 1^er ordre à coefficients constants donc $v(x) = C e^{-x/4}$ où C est un nombre réel quelconque.

2) u telle que $u(x) = A e^{x/2} + B$ est solution de (E) si et seulement si pour tout x : $4u'(x) + u(x) = 3e^{x/2} - 1$ donc si et seulement si

$4(\frac{1}{2} A e^{x/2}) + A e^{x/2} + B = 3e^{x/2} - 1$, donc on obtient **$A = 1$ et $B = -1$** donc $u(x) = e^{x/2} - 1$.

3) On obtient l'ensemble des solutions de E en ajoutant aux solutions de $4v' + v = 0$ une solution particulière de (E). Alors $v(x) = C e^{-x/4} + e^{x/2} - 1$.

4) Si $v_0(0) = 0$ alors $C = 0$ donc $v_0(0) = e^{x/2} - 1$.

C) 1)

x	0	1	1,5	2	2,7	π
f(x)	0	1,42	6,39	16,35	35,28	47,88

2) $e^{x/2} - 1 \geq 0$ car $\frac{x}{2} \geq 0$ sur $[0, \pi]$,

$(e^{x/2} - 1)' = \frac{1}{2} e^{x/2} > 0$ donc la fonction i telle que $i(x) = e^{x/2} - 1$ est une fonction positive ou nulle et croissante sur $[0, \pi]$; $j'(x) = (2x - 2\sin 2x)'$,

$\cos 2x \leq 1$ donc $j'(x) = 2(1 - \cos 2x) \geq 0$, donc la fonction j est croissante sur $[0, \pi]$, elle croît de 0 à 2π elle est donc positive sur $[0, \pi]$.

On sait que le produit de deux fonctions positives et croissantes sur $[0, \pi]$ est une fonction positive et croissante sur $[0, \pi]$ f est donc une fonction positive et croissante sur $[0, \pi]$.

D) 1) $I_1 = \int_0^\pi x\,dx$, $I_1 = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^\pi$, $I_1 = \frac{\pi^2}{2}$.

$I_2 = \int_0^\pi \sin 2x\,dx$, $I_2 = \left[-\frac{\cos 2x}{2}\right]_0^\pi$, $I_2 = 0.$

2) $I_3 = \int_0^\pi x\,e^{x/2}\,dx$, on intègre par parties en posant :

$u(x) = x$, $u'(t) = 1$

$v'(t) = e^{x/2}$, $v(t) = 2\,e^{x/2}$,

d'où , $I_3 = \left[2\,x\,e^{x/2}\right]_0^\pi - \int_0^\pi 2\,e^{x/2}\,dx$,

$I_3 = 2\,\pi\,e^{\pi/2} - \left[4\,x\,e^{x/2}\right]_0^\pi$,

$I_3 = 2\,\pi\,e^{\pi/2} - 4\,e^{\pi/2} + 4.$

3) a) $e^{x(0,5+2i)} = e^{0,5x}\,e^{2ix} = e^{0,5x}(\cos 2x + i\sin 2x)$,

en utilisant la linéarité de l'intégrale on trouve bien :

$M + i\,P = \int_0^\pi e^{x(0,5+2i)}\,dx.$

b) $M + i\,P = \left[\frac{1}{0,5+2i}\,e^{x(0,5+2i)}\right]_0^\pi$,

$M + i\,P = \frac{1}{0,5+2i}\left[e^{\pi(0,5+2i)} - 1\right]$,

$M + i\,P = \frac{0,5-2i}{4,25}\left[e^{\pi(0,5)}(\cos 2\pi + i\sin 2\pi) - 1\right]$,

$P = \frac{-2}{4,25}\left[e^{\pi(0,5)} - 1\right]$, $P = -\frac{8}{17}\left[e^{\pi(0,5)} - 1\right]$.

4) $V = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi 2(2x - \sin 2x)(e^{x/2} - 1)\,dx$,

$V = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi (4x.e^{x/2} - 4x - 2\sin 2x.\,e^{x/2} + 2\sin 2x)\,dx$,

$V = \frac{1}{\pi}(4\,I_3 - 4\,I_1 - 2\,P + 2\,I_2)$ U.V ,

$V = \frac{1}{\pi}\left(4(2\,\pi\,e^{\pi/2} - 4\,e^{\pi/2} + 4) - 4\frac{\pi^2}{2} - 2\left(\frac{-2}{4,25}\left[e^{\pi/2} - 1\right]\right)\right).$

$V \approx 14\ \text{cm}^3.$

ÉQUIPEMENT TECHNIQUE-ÉNERGIE

Session 1997

EXERCICE 1 (10 points)

Un machine fabrique en grande série des tuyaux.

On désigne par L la variable aléatoire qui, à chaque tuyau tiré au hasard dans la production, associe sa longueur, exprimée en millimètres.

On admet que L suit une loi normale d'écart type constant, égal à 25, et dont la moyenne m peut être modifiée par un réglage de la machine. Un tuyau est défectueux si sa longueur est inférieure ou égale à 959.

Dans tout le problème, les probabilités demandées seront écrites avec au plus trois chiffres après la virgule.

I - On a réglé la machine pour que : $m = 1000$.

1° Quelle est *la probabilité qu'un* tuyau, pris au hasard, soit défectueux ?

2° Dans la suite de cette question, on prend 0,05 comme valeur de cette probabilité. On effectue un contrôle en prélevant périodiquement un lot de 100 tuyaux, extraits de la production au hasard. *La production est assez importante pour qu'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage de 100 tuyaux avec remise.* On appelle X la variable aléatoire qui, à chaque lot, associe le nombre de tuyaux défectueux *qu'il contient.*

a) Quelle est la loi de probabilité suivie par X ? *Justifier la réponse.* Préciser les paramètres

b) Calculer la probabilité *de l'événement suivant :* " $X = 4$ ".

II - On admet que l'on peut approcher la loi de X par une loi de Poisson.

1° Donner la valeur du paramètre de cette loi.

2° Déterminer selon cette loi :

a) *la probabilité que* quatre tuyaux, parmi les cent, soient défectueux.

b) *la probabilité que* six tuyaux au plus, parmi les cent, soient défectueux.

III - On décide de tester la réalité du réglage de la machine à $m = 1000$.

On désigne par $\overline{X}$ la variable aléatoire qui, à chaque échantillon de 100 tuyaux prélevés au hasard, associe la moyenne des longueurs des 100 tuyaux *(la production est assez importante pour qu'on puisse assimiler ces prélèvements à des tirages de 100 tuyaux avec remise).*

1° Quelle est la loi suivie par la variable aléatoire $\overline{X}$.

2° Construire un test bilatéral, au seuil de 5 % permettant de décider si le réglage est correct, (on donnera l'hypothèse nulle H_0, l'hypothèse alternative H_1 *et la règle de décision du test*).

3° Utiliser ce test, sachant qu'un échantillon, effectivement prélevé, a donné une longueur moyenne de 1006.

EXERCICE 2 (10 points)

L'enregistrement d'un phénomène, débuté avant l'instant $t = 0$, figure sur le graphique donné dans l'annexe à rendre avec la copie. On se propose de prolonger le tracé par l'arc de courbe décrit lorsque t varie de 0 à π.

Les trois parties de cette étude, sont dans une large mesure, indépendantes.

I - Soit (E_1) l'équation différentielle : $2\,x'(t) - x(t) = 0$, dans laquelle x désigne une fonction, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, de la variable réelle t et x' la fonction dérivée de x.

1° Résoudre l'équation différentielle (E_1).

2° Déterminer la solution de (E_1) vérifiant la condition initiale : $x(0) = 1$.

II - Soit (E_2) l'équation différentielle : $y''(t) - 2\,y''(t) + 2\,y(t) = \sin t - 2\cos t$, dans laquelle y désigne une fonction, définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, de la variable réelle t et y' et y" étant respectivement les dérivées premières et seconde de y.

1° Vérifier que la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(t) = \sin t$ est une solution particulière de l'équation différentielle (E_2)

2° Résoudre l'équation différentielle (E_2).

3° Déterminer la solution f de (E_2) vérifiant les conditions : $f(0) = 0$ et $f(\frac{\pi}{2}) = 1$.

III - Dans le plan rapporté à un repère orthonormal, d'unités graphiques : 5 cm, on considère la courbe (C) définie par les équations paramétriques $\begin{cases} x = f(t) = e^{t/2} \\ y = g(t) = \sin t \end{cases}$ où t est un paramètre réel.

1° Etudier les variations des fonctions f et g pour t variant de 0 à π et rassembler les résultats obtenus dans un même tableau.

2° On appelle A le point de (C) de paramètre 0. Ecrire une équation de la tangente à (C) au point A.

3° La courbe (C) est partiellement représentée sur l'annexe à rendre avec la copie.
Prolonger, sur cette feuille, cette représentation par l'arc (C_1) de (C) correspondant aux valeurs de t dans l'intervalle $[0, \pi]$. Tracer la tangente à (C) en A.

EXERCICE 1

I - 1° L suit la loi normale $\mathcal{N}$ (1000 ; 25),

la variable aléatoire $T = \dfrac{L - 1000}{25}$ suit la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0, 1)$.

$P(L \le 959) = P(T \le -1{,}64)$,
$P(L \le 959) = 1 - \pi(1{,}64)$,
$P(L \le 959) \approx 1 - 0{,}9495$,
$P(L \le 959) \approx 0{,}0505$

$P(L \le 959) \approx 0{,}051$ à 10^{-3} près.

2° a) On assimile le prélèvement de 100 tuyaux à une succession de 100 épreuves indépendantes (tirage avec remise), chacune ayant deux issues : le tuyau est non défectueux avec la probabilité 0,05 ; le tuyau est défectueux avec la probabilité 0,95. La variable aléatoire X qui, à tout prélèvement de 100 tuyaux, associe le nombre de tuyaux défectueux suit donc la loi binomiale $\mathcal{B}$ (100 ; 0,05).

b) $P(X = 4) = C_{100}^{4}(0{,}05)^4(0{,}95)^{96}$

$P(X = 4) = 0{,}178$ à 10^{-3} près.

II - 1° $\lambda = np = 100 \times 0{,}05 = 5$.

2° a) Dans la table du formulaire on trouve :
$P(X = 4) = 0{,}176$.

b) La probabilité d'avoir au plus 6 tuyaux défectueux est :
$P(X \le 6) = P(Y = 0)+P(Y = 1)+\dots\dots\dots\dots+P(Y = 6)$,
A l'aide du formulaire on trouve :

$P(X \le 6) = 0{,}763$ à 10^{-3} près.

B.1° Sous H_0, X suit la loi normale $\mathcal{N}$ (1000 ; 25),

$\overline{X}$ suit la loi normale $\mathcal{N}$ $(1000 ; \dfrac{25}{\sqrt{100}})$.

La variable aléatoire $T = \dfrac{\overline{X} - 1000}{2{,}5}$ suit la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0, 1)$

$P(1000 - h \le \overline{X} \le 1000 + h) = 0{,}95$ équivaut à $2\pi(\dfrac{h}{2{,}5}) - 1 = 0{,}95$ et à $\pi(\dfrac{h}{2{,}5}) = 0{,}975$,

$\dfrac{h}{2{,}5} = 1{,}96$, **$h = 4{,}9$.**

Si H_0 est vraie on a 95% de chances de prélever un échantillon aléatoire dont la moyenne appartient à l'intervalle I = [995,1 ; 1004,9] soit 5% de chance que cette moyenne soit à l'extérieur de I.

2° La région critique est l'extérieur de l'intervalle I = [995,1 ; 1004,9].
On prélève un échantillon aléatoire, non exhaustif, de taille 100. On calcule sa moyenne $\overline{x}$.

si $\overline{x} \in I$ on accepte H_0 et on rejette H_1 ;

si $\overline{x} \notin I$ on accepte H_1 et on rejette H_0.

3° Utilisation du test :
$\overline{x} = 1006 \notin [995{,}1 ; 1004{,}9]$ on rejette H_0. On conclut, au seuil de risque 5%, que le réglage n'est pas correct.

EXERCICE 2

I - 1° L'équation (E_1) : $2x' - x = 0$ peut s'écrire $x' - \dfrac{1}{2}x = 0$ qui est de la forme $x' + ax = 0$, toutes les solutions sont définies sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = C e^{-at}$ où C est une constante quelconque réelle. Toutes les solutions de (E_1) sont donc définies sur $\mathbb{R}$ par : $f(t) = C e^{1/2t}$.

2° La condition initiale $x(0) = 1$ donne $C = 1$. La solution particulière de (E) est alors $f(t) = e^{1/2t}$.

II - On considère l'équation (E_2) :
$y''(t) - 2y'(t) + 2y(t) = \sin t - 2\cos t$, dans laquelle y, désigne une fonction numérique de la variable t définie sur $[0, +\infty[$.

1° $y(t) = \sin t$, $y'(t) = \cos t$, $y''(t) = -\sin t$
$y''(t) - 2y'(t) + 2y(t) = -\sin t - 2\cos t + 2\sin t$
$y''(t) - 2y'(t) + 2y(t) = \sin t - 2\cos t$ donc $y(t) = \sin t$ est solution particulière de (E_2)

2° L'équation $y''(t) - 2y'(t) + 2y(t) = 0$ admet pour équation caractéristique est $r^2 - 2r + 2 = 0$;
$\Delta = -4 = 4i^2$. Il y a deux solutions $r_1 = 1 - i$ et $r_2 = 1 + i$. Les solutions de cette équation sont donc définies dans $\mathbb{R}$ par : $y(t) = e^t(C_1 \cos t + C_2 \sin t)$
où C_1 et C_2 sont des nombres réels quelconques.
L'ensemble des solutions de l'équation (E_2) est donc la somme de la solution particulière de (E_2) et de l'ensemble des solutions de l'équation précédente, elle est définie sur $\mathbb{R}$ par $y(t) = \sin t + e^t(C_1 \cos t + C_2 \sin t)$

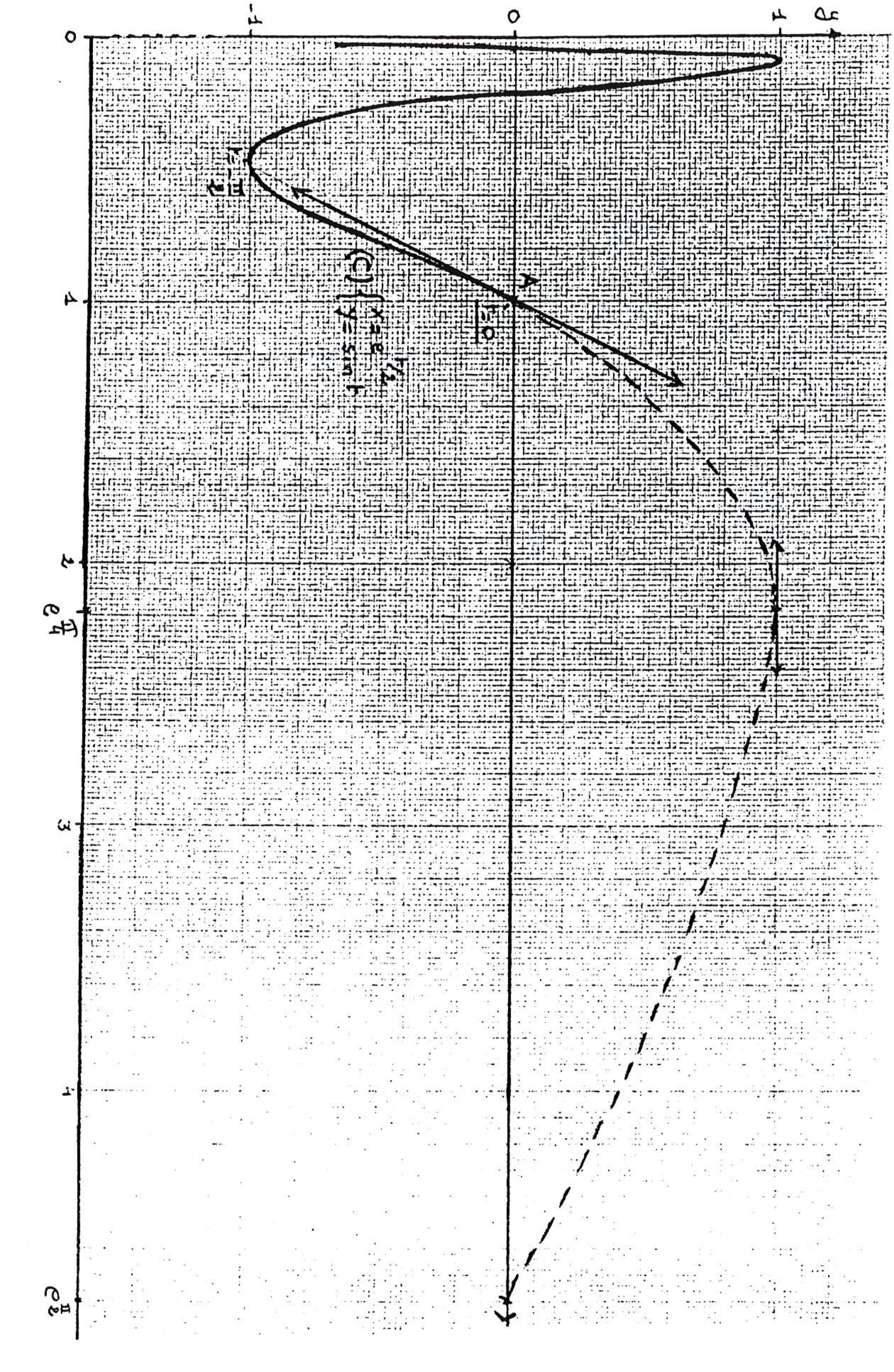
3° La condition $y(0) = 0$ permet d'écrire $C_1 = 0$,
La condition $y(\frac{\pi}{2}) = 1$ permet d'écrire $1 + C_2 e^{\pi/2} = 1$,
donc $C_2 = 0$, la solution particulière cherchée est g telle que **$g(t) = \sin t$.**

III - 1° $\begin{cases} x = e^{t/2} \\ y = \sin t \end{cases}$ $\begin{cases} f'(t) = \frac{1}{2} e^{t/2} \\ g'(t) = \cos\pi t \end{cases}$

t	0		π/2		π
f '(t)	0,5	+		+	
f(t)	1	↗			$e^{\pi/2}$
g(t)	0	↗	1	↘	0
g '(t)	1	+	0	-	

2° Le coefficient directeur de la tangente au point A de coordonnées (1, 0) est $a = \dfrac{g'(0)}{f'(0)}$, $a = 2$; une équation de cette tangente est donc $y = 2x - 2$.

3° L'arc C de C correspondant aux valeurs de l'intervalle $[0, \pi]$ ainsi que la tangente en A sont tracés en pointillé page 90.



À RENDRE AVEC LA COPIE

ÉTUDE ET ÉCONOMIE DE LA CONSTRUCTION

Session 1990

EXERCICE 1

Un chantier nécessite l'exécution de trois tâches consécutives : A, B, C.

Soit X_A, X_B, X_C les variables aléatoires qui à chaque type de tâche, associent le nombre de jours nécessaires pour les réaliser.

En relevant sur une longue période les durées nécessaires pour réaliser les tâches A, B, C , un gestionnaire a établi que les lois de probabilités étaient :

Pour X_A :

durée en jours x_i	3	4
$P(X_A = x_i)$	0,6	0,4

Pour X_B :

durée en jours x_i	8	9	10	11
$P(X_B = x_i)$	0,1	0,3	0,4	0,2

Pour X_C :

durée en jours x_i	4	5	6
$P(X_B = x_i)$	0,3	0,6	0,1

1. Calculer l'espérance mathématique de chacune des variables aléatoires X_A, X_B, X_C. Que représentent chacune de ces espérances ?

2. Calculer l'écart type de chacune des variables aléatoires X_A, X_B, X_C.

3. On définit alors une variable aléatoire X qui, à un chantier comportant la réalisation successive des tâches A, B, C, associe le nombre de jours nécessaires pour le réaliser.

On dit que $X = X_A + X_B + X_C$ et on admet que l'espérance mathématique de X est :

$$E(X) = E(X_A) + E(X_B) + E(X_C).$$

a) Déterminer $E(X)$. Que représente $E(X)$?

b) Déterminer la valeur minimale, la valeur maximale prise par X.

4. On suppose les trois tâches indépendantes entre elles.

Calculer les probabilités des événements suivants :

a) Le chantier dure 21 jours;

b) Le chantier dure 20 jours.

EXERCICE 2

I

A• Dans cette question, on se propose de résoudre l'équation différentielle

(E_1) : $t\,x'(t) - 2x(t) = 0$

dans laquelle x désigne une fonction de la variable réelle t, définie et dérivable sur $]0,+\infty[$, et x' la fonction dérivée de x.

1. Déterminer une primitive sur l'intervalle $]0,+\infty[$ de la fonction f définie pour $t > 0$ par :

$$f(t) = \frac{2}{t}$$

2. Résoudre l'équation différentielle (E_1).

3. Déterminer la solution de (E_1) vérifiant la condition initiale $x(1)=1$.

B• Dans cette question, on se propose de résoudre l'équation différentielle

(E_2) : $y''(t) - 2y'(t) + 5y(t) = 5\,e^{2t}$.

dans laquelle y désigne une fonction de la variable réelle t, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, y' et y" respectivement les fonctions dérivées première et seconde de y.

1. Montrer qu'il existe une solution particulière y_0 de l'équation différentielle (E_2) de la forme $y_0(t) = k\,e^{2t}$, où k désigne une constante réelle.

2. Résoudre l'équation différentielle (E_2).

3. Déterminer la solution particulière de (E_2) vérifiant les conditions initiales $y(0) = 1$ et $y\left(\frac{\pi}{4}\right) = e^{\frac{\pi}{2}}$.

II

Soient f et g les fonctions définies pour tout nombre réel t de l'intervalle $[0,1]$ par :

$$f(t) = t^2 \quad \text{et} \quad g(t) = e^{2t}.$$

Dans un plan muni d'un repère orthogonal $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j}\,)$, d'unités graphiques 5 cm sur l'axe $(O\,;\vec{i}\,)$ et 1 cm sur l'axe $(O\,;\vec{j}\,)$, soit $\mathscr{C}$ la courbe définie par les équations paramétriques :

$$\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \\ t \in [0,\ 1] \end{cases}$$

1. Étudier les variations des fonctions f et g et rassembler les résultats dans un même tableau.

2. Déterminer la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point A d'abscisse nulle.

3. Construire la courbe $\mathscr{C}$.

4. Donner une équation cartésienne de la courbe $\mathscr{C}$.

Exercice 1

1. L'espérance mathématique d'une variable aléatoire discrète prenant n valeurs x_i est $E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i P(X=x_i)$,

on obtient donc : $E(X_A) = 3 \times 0,6 + 4 \times 0,4$

$E(X_A) = 3,4.$

$E(X_B) = 8 \times 0,1 + 9 \times 0,3 + 10 \times 0,4 + 11 \times 0,2$

$E(X_B) = 9,7.$

$E(X_C) = 4 \times 0,3 + 5 \times 0,6 + 6 \times 0,1$

$E(X_C) = 4,8.$

$E(X_A)$, $E(X_B)$, $E(X_C)$ représentent les temps moyens respectifs de réalisation des tâches A, B, C sur un grand nombre de chantiers.

2. La variance d'une variable aléatoire discrète est $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$,

et l'écart type est $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.

$V(X_A) = 9 \times 0,6 + 16 \times 0,4 - (3,4)^2$

$V(X_A) = 0,24$, $\sigma(X_A) = 0,49.$

$V(X_B) = 64 \times 0,1 + 81 \times 0,3 + 100 \times 0,4 + 121 \times 0,2 - (9,7)^2$, $V(X_B) = 0,81$, $\sigma(X_B) = 0,9.$

$V(X_C) = 16 \times 0,3 + 25 \times 0,6 + 36 \times 0,1 - (4,8)^2$

$V(X_C) = 0,36,$ $\sigma(X_C) = 0,6.$

3 a) On admet que l'espérance mathématique de X est :

$E(X) = E(X_A) + E(X_B) + E(X_C)$ donc

$E(X) = 3,4 + 9,7 + 4,8$, $E(X) = 17,9.$

$E(X) = 17,9 \approx 18$ jours, représente le temps moyen de réalisation d'un chantier si l'on effectuait un grand nombre de chantiers.

b) Les valeurs prises par X sont :

3+8+4 =15; 3+8+5 =16; 3+8+6 =17; 3+9+4 =16; 3+9+5 = 17; 3+9+6 =18; etc........

La valeur maximale prise par X est la somme des valeurs maximales prises par X_A, X_B, X_C c'est à dire 4+11+6 = 21.

La valeur minimale prise par X est la somme des valeurs minimales prises par X_A, X_B, X_C c'est à dire 3+8+4 = 15.

4. a) Les variables aléatoires X_A, X_B et X_C sont indépendantes, X prend la valeur 21 uniquement dans le cas où X_A prend la valeur 4, X_B prend la valeur 11, X_C prend la valeur 6.

$P(X=21) = P(X_A=4 \text{ et } X_B=11 \text{ et } X_C=6)$

$P(X=21) = P(X_A=4) \times P(X_B=11) \times P(X_C=6)$

$P(X=21) = 0,4 \times 0,2 \times 0,1$, $P(X=21) = 0,008.$

b) La variable aléatoire X prend la valeur 20 lorsque :

$X_A=3$ et $X_B=11$ et $X_C=6$, ou $X_A=4$ et $X_B=10$ et $X_C=6$, ou $X_A=4$ et $X_B=11$ et $X_C=5$.

Ces trois événements étant incompatibles, on obtient :

$P(X = 20) = P[(X_A=3) \text{ et } (X_B=11) \text{ et } (X_C=6)] + P[(X_A=4) \text{ et } (X_B=10) \text{ et } (X_C=6)] + P[(X_A=4) \text{ et } (X_B=11) \text{ et } (X_C=5)]$

$P(X=20) = [P(X_A=3) \times P(X_B=11) \times P(X_C=6)] + [P(X=4) \times P(X_B=10) \times P(X_C=6)] + [P(X_A=4) \times P(X_B=11) \times P(X_C=5)].$

$P(X=20) = 0,6\times0,2\times0,1 + 0,4\times0,4\times0,1 + 0,4\times0,2\times0,6$

$P(X=20) = 0,012 + 0,016 + 0,048$; $P(X=20) = 0,076.$

Exercice 2

I A• 1. Une primitive sur l'intervalle $]0,+\infty[$ de la fonction f définie pour $t>0$ par : $f(t)= \frac{2}{t}$

est la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $F(t) = 2\ln t$.

2. L'équation (E_1), pour t appartenant à $]0,+\infty[$, est équivalente à : $x'(t) - \frac{2}{t}\, x(t) = 0.$

C'est une équation différentielle linéaire du premier ordre. On sait que la solution générale de l'équation $x'(t) + a(t)x(t) = 0$ est définie par $x(t) = Ce^{-A(t)}$, où A est une primitive de la fonction a, et C est une constante réelle arbitraire.

On en déduit que la solution générale de l'équation (E_1) est définie pour tout $t>0$ par : $x(t) = Ce^{2\ln(t)}$

$x(t) = Ce^{\ln(t^2)}$, $x(t) = Ct^2$, où C est une constante réelle quelconque.

3. La condition initiale $x(1) = 1$ implque C=1, la solution cherchée est donc définie sur $]0,+\infty[$ par: $x(t) = Ct^2$.

B· 1. Pour tout nombre réel t, on a $y_0(t) = k\,e^{2t}$. Les fonctions dérivées première et seconde de la fonction y_0 sont définies sur R respectivement par :

$y_0'(t) = 2k\,e^{2t}$ et $y_0''(t) = 4k\,e^{2t}$.

Le report dans l'équation différentielle (E_2) donne :

$4k\,e^{2t} - 2 \times 2k\,e^{2t} + 5k\,e^{2t} = 5\,e^{2t}$

soit $5k\,e^{2t} = 5\,e^{2t}$ et puisque quel que soit le nombre réel t, $e^{2t} \neq 0$, on obtient $k = 1$.

La fonction définie sur R par $y_0(t) = e^{2t}$ est solution de l'équation différentielle (E_2).

2. L'équation (E_2) est une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants.

L'équation sans second membre associée à (E_2), soit

$y''(t) - 2y'(t) + 5y(t) = 0$,

admet pour équation caractéristique $r^2 - 2r + 5 = 0$.

Le discriminant de cette équation est : $\Delta = (4i)^2$.

Les solutions de l'équation caractéristique sont les nombres complexes conjugués $r_1 = 1 - 2i$ et $r_2 = 1 + 2i$.

La solution générale de l'équation sans second membre associée à (E_2) est alors définie pour tout nombre réel t par : $y(t) = e^{t}(A\cos 2t + B\sin 2t)$, où A et B sont des constantes réelles arbitraires.

La solution générale de l'équation (E_2) est la somme d'une solution particulière de cette équation et de la solution générale de l'équation sans second membre associée. La solution générale de l'équation (E_2) est définie sur R par: $y(t) = e^{2t} + e^{t}(A\cos 2t + B\sin 2t)$ où A et B sont des constantes réelles arbitraires.

3. La condition $y(0)=1$ est équivalente à $1+A=1$, d'où $A = 0$. La condition $y(\frac{\pi}{4}) = e^{\frac{\pi}{2}}$ est équivalente à $e^{\frac{\pi}{2}} + e^{\frac{\pi}{4}} \times B = e^{\frac{\pi}{2}}$, d'où $B = e^{-\frac{\pi}{4}}$.

La solution particulière de (E_2) vérifiant les conditions initiales $y(0)=1$ et $y(\frac{\pi}{4}) = e^{\frac{\pi}{2}}$ est définie sur R par :

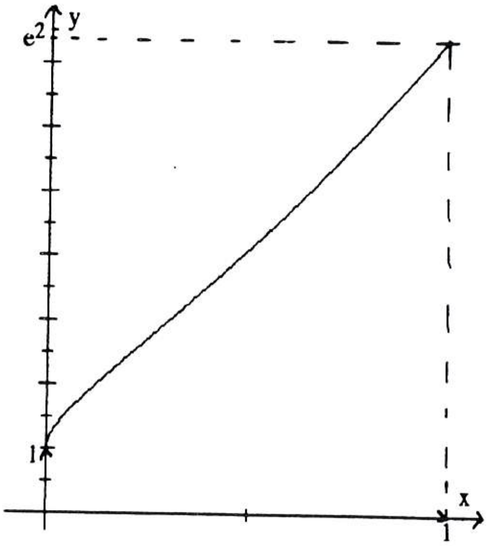
$y(t) = e^{2t} + e^{t-\frac{\pi}{4}}\sin 2t$.

II - 1. Pour tout nombre réel t de l'intervalle $[0,1]$ les fonctions définies par $f(t) = t^2$ et $g(t) = e^{2t}$ sont dérivables, $f'(t) = 2t$ et $g'(t) = 2e^{2t}$. Les dérivées de f et g sont positives sur l'intervalle $[0,1]$, d'où le tableau de variation :

t	0		1
f'	0	+	2
f	0	↗	1
g	1	↗	e^2
g'	2	+	$2e^2$

Le point A d'abscisse nulle de la courbe $\mathscr{C}$ a pour coordonnées $(0,1)$. Un vecteur directeur de la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ est $f'(0)\,\vec{i} + g'(0)\,\vec{j} = 2\,\vec{j}$. La courbe $\mathscr{C}$ admet une demi-tangente verticale en $A(0,1)$.

2. Construction de la courbe $\mathscr{C}$.



3. Recherche d'une équation cartésienne de la courbe $\mathscr{C}$. La fonction f est continue et strictement croissante sur l'intervalle $[0,1]$, elle réalise une bijection de cet intervalle sur lui-même. On en déduit que lorsque le paramètre t décrit l'intervalle $[0,1]$, x décrit ce même intervalle, et $t = \sqrt{x}$. On en déduit qu'une équation cartésienne de la courbe $\mathscr{C}$ est $y = e^{2\sqrt{x}}$, $x \in [0,1]$.

ÉTUDE ET ÉCONOMIE DE LA CONSTRUCTION

Session 1991

EXERCICE 1 (11 points)

Les contrôles de fabrication de parpaings effectués dans les parties I, II et III sont indépendants.

I - Contrôle usine :

Dans une usine de fabrication de parpaings, on veut contrôler la conformité des dimensions de ces parpaings. Pour cela, on mesure la longueur de 200 parpaings d'un échantillon pris au hasard et on reporte les résultats dans les tableaux suivants :

Longueur en cm	49,4	49,5	49,6	49,7	49,8	49,9	50,0
Effectif	2	1	6	14	23	34	39

Longueur en cm	50,1	50,2	50,3	50,4	50,5	50,6	50,7
Effectif	36	25	11	4	2	1	2

1° Déterminer à 10^{-2} près la moyenne et l'écart type de cette série statistique.

2° Pour que les dimensions soient conformes, la longueur de chaque parpaing doit appartenir à l'intervalle $[49,5 ; 50,5]$. Calculer le pourcentage de parpaings défectueux parmi les 200 éléments prélevés.

II - Contrôle livraison :

On admet que la probabilité qu'un parpaing soit défectueux à la livraison sur le chantier (cotes hors tolérances, casse en cours de manutention, etc...) est de 0,03.

Les parpaings sont livrés par palettes de 50, on se place dans le cas d'un tirage avec remise et on appelle X la variable aléatoire associant à chaque palette le nombre de parpaings défectueux.

Une de ces palettes est examinée, calculer à 10^{-2} près par excès la probabilité de chacun des événements E_1 et E_2 suivants :

E_1 : la palette ne comporte aucun parpaing défectueux,

E_2 : la palette contient au moins deux parpaings défectueux.

III - Contrôle selon la norme NF :

On appelle L la variable aléatoire qui à chaque parpaing associe sa longueur en centimètres. On précise de plus que :

- L suit en théorie une loi normale de moyenne 50 et d'écart type 0,22.
- Un parpaing sera déclaré de dimension incorrecte si sa longueur n'appartient pas à l'intervalle $[49,5 ; 50,5]$.

A) On prélève un parpaing au hasard. Calculer la probabilité de chacun des événements F_1 et F_2 suivants :

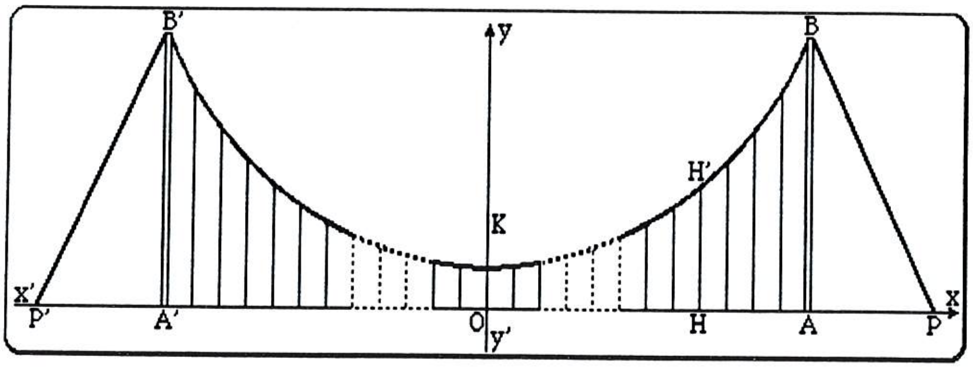
- F_1 : le parpaing est de dimension correcte
- F_2 : le parpaing est de dimension incorrecte.

B) La norme NF P 14-304 annexe 1 précise que le contrôle de la livraison d'une quantité importante de parpaings possédant le label NF peut-être effectué de la façon suivante : le contrôle portera sur 5000 parpaings au plus, provenant d'une même fabrication. L'acquéreur effectue un premier prélèvement, au hasard, de 8 parpaings (tirage avec remise). Si le nombre des défectueux parmi les 8 prélevés est au moins égal à 3, alors la livraison est déclarée non conforme et refusée par l'acheteur. On désigne par Z la variable aléatoire qui associe à tout prélèvement le nombre de parpaings défectueux.

On suppose que le contrôle ne concerne que la longueur des parpaings. (Il n'y a ni casse, ni défaut d'aspect, etc...). En utilisant les résultats trouvés au III A), montrer que Z suit une loi binomiale dont on déterminera les paramètres, quelle est alors la probabilité que la livraison soit refusée après ce premier prélèvement ?

EXERCICE 2 (9 points)

La figure ci-dessous schématise l'un des deux côtés verticaux d'un pont suspendu. Les filins verticaux tels que HH' sont régulièrement espacés les uns des autres. Il n'y a pas de filin en AB ni en A'B'. La longueur de AA' est de 360 mètres.



On se propose de représenter avec précision l'arc B'KB et d'exploiter cette représentation. On admet que, dans le repère orthonormal d'axes x'Ox et y'Oy dans lequel le point A a pour coordonnées (180, 0), l'arc B'KB est représenté par l'arc de courbe C d'équation $y = f(x)$, où f est la fonction définie sur l'intervalle $I = [-180, 180]$, par : $f(x) = 2\mathrm{ch}\frac{x}{41} = e^{\frac{x}{41}} + e^{-\frac{x}{41}}$.

I. 1. Étudier la parité de la fonction f, en déduire une conséquence graphique.

2. Étudier la fonction f et tracer l'arc de courbe C, (unité graphique : 1 m est représenté par 1/20 cm).

II. 1. Quelle est la hauteur de la tour AB ?

2. Résistance au vent : pour conserver une marge de sécurité, on considère que la surface exposée à l'action du vent est égale au dixième de la surface plane, pleine et fermée A'B'KBA. Calculer, en mètres carrés, l'aire de la surface exposée au vent.

EXERCICE 1

I - 1° On trouve à la calculatrice pour cette série statistique une moyenne de **50,00** cm et un écart type de **0,22** cm à 10^{-2} près.

2° Parmi les 200 éléments prélevés 5 ont leur longueur en dehors de l'intervalle [49,5 ; 50,5]. Le pourcentage d'éléments défectueux est donc $\frac{5}{200} \times 100$, soit **2,25 %** éléments sont défectueux parmi les 200.

II - Le nombre de parpaings sur une palette est négligeable par rapport à la production de l'usine donc le prélèvement d'une palette peut être assimilé à un tirage non exhaustif. À chaque tirage d'un parpaing il y a deux issues : le parpaing est défectueux avec une probabilité p = 0,03 ou le parpaing n'est pas défectueux avec une probabilité q = 0,97.

La variable aléatoire X suit donc une loi binomiale $\mathcal{B}$ (n,p) avec n = 50 et p = 0,03.

$P(E_1) = P(X = 0) = C_{50}^0 (0,03)^0(0,97)^{50}$,

$P(E_1) \approx 0,218$. $P(E_1) = 0,22$ à 10^{-2} près.

$P(E_2) = P(X \geq 2) = 1 - [\, P(X=0) + P(X=1)\,]$,

$P(E_2) = 1 - [\, 0,218 + C_{50}^0 (0,03)(0,97)^{49}\,]$,

$P(E_2) = 1 - 0,218 - 0,3377$,

$P(E_2) \approx 0,4447$. $P(E_2) = 0,44$ à 10^{-2} près.

III - A) La variable aléatoire L suit la loi normale de moyenne m = 50 et d'écart type 0,22 donc

$P(F_1) = P(\, 49,5 \leq X \leq 50,5\,)$ peut être calculé en utilisant la variable aléatoire $T = \frac{L - 50}{0,22}$ qui suit la loi normale $\mathcal{N}$ (0 , 1).

$P(F_1) = P(-\frac{0,5}{0,22} \leq T \leq \frac{0,5}{0,22})$,

$= P(\, -2,27 \leq T \leq 2,27\,)$,

$= 2\,\pi(2,27) - 1$.

À l'aide de la table de Gauss on obtient :

$P(F_1) = 2 \times 0,9885 - 1$ $\quad P(F_1) \approx 0,977$.

$P(F_2) = 1 - P(F_1)$ $\quad P(E_2) \approx 0,023$.

B) On suppose le prélèvement des parpaings avec remise, les prélèvements sont indépendants.

Pour chaque parpaing prélevé il y a deux éventualités : être défectueux avec la probabilité 0,023 ou ne pas être défectueux avec la probabilité 0,977.

La variable aléatoire Z qui, à chaque prélèvement de 8 parpaings, associe le nombre de parpaings défectueux suit donc la loi binomiale $\mathcal{B}$ (n,p) de paramètres n = 8 et p = 0,023.

La livraison est refusée si le nombre de parpaings défectueux est au moins égal à 3, la probabilté de cet événement est donc

$P(Z \geq 3) = 1 - [P(Z=0) + P(Z=1) + P(Z=2)]$,

$P(Z \geq 3) = 1 \quad [C_8^0(0,023)^0(0,977)^8 + C_8^1(0,023)(0,977)^7 + C_8^2(0,023)^2(0,977)^6]$,

$P(Z \geq 3) \approx 1 - 0,999375$. $\quad P(Z \geq 3) \approx 6,25 \cdot 10^{-4}$.

EXERCICE 2

I. **1.** Pour tout nombre réel x de [-180,180], - x appartient à [-180,180] et $f(-x) = e^{-\frac{x}{41}} + e^{-(-\frac{x}{41})}$

$f(-x) = e^{-\frac{x}{41}} + e^{\frac{x}{41}} = f(x)$.

La fonction f est paire, par suite, sa courbe représentative C est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées y'y.

2. La fonction f est paire, on étudie la restriction de f à l'intervalle [0,180].

Pour tout nombre réel x de [0,180], f est dérivable et

$f'(x) = \frac{1}{41}e^{\frac{x}{41}} - \frac{1}{41}e^{-\frac{x}{41}}$, $\quad f'(x) = \frac{1}{41}e^{-\frac{x}{41}}[e^{\frac{2x}{41}} - 1]$.

Pour tout nombre réel x de [0,180], $e^{-\frac{x}{41}} > 0$, donc $f'(x)$ a le signe de $e^{\frac{2x}{41}} - 1$.

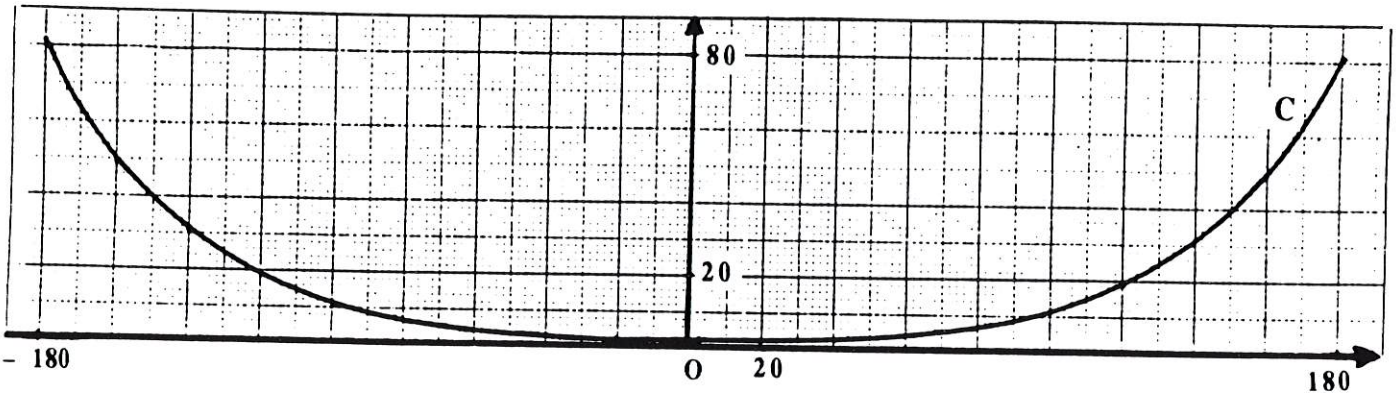
L'inéquation $f'(x) \geq 0$ équivaut successivement à :

$e^{\frac{2x}{41}} \geq 1$, $\quad \frac{2x}{41} \geq 0$, $\quad x \geq 0$.

Tableau de variation de f :

x	0	180
f '	0 +	
f	2 ↗	$2\text{ch}\frac{180}{41}$

Pour la construction de C, on a : f(180) ≈ 80,67.



II. 1. La hauteur de la tour AB est $f(180) = 2\text{ch}\,\frac{180}{41}$, AB ≈ 80,67 mètres.

2. La fonction f est positive, on en déduit que l'aire de la surface A'B'KBA est :

$\mathscr{A} = \int_{-180}^{180} f(x)\,dx$, et puisque la fonction f est paire, on a $\mathscr{A} = 2\int_{0}^{180} f(x)\,dx$.

$$\mathscr{A} = 2\int_{0}^{180} (e^{\frac{x}{41}} + e^{-\frac{x}{41}})\,dx \ ,$$

$$\mathscr{A} = 2\left[41\,e^{\frac{x}{41}} - 41\,e^{-\frac{x}{41}}\right]_0^{180} \ ,$$

$$\mathscr{A} = 82\,(e^{\frac{180}{41}} - e^{-\frac{180}{41}}) \ .$$

Puisque la surface exposée à l'action du vent est égale au dixième de la surface plane, pleine et fermée A'B'KBA, l'aire de la surface exposée au vent, en mètres carrés, est $\mathscr{S}$:

$$\mathscr{S} = 8{,}2\,(e^{\frac{180}{41}} - e^{-\frac{180}{41}}) \quad , \quad \mathscr{S} \approx 661{,}51 \text{ m}^2.$$

ÉTUDE ET ÉCONOMIE DE LA CONSTRUCTION

Session 1992

Exercice 1 (7 points)

1° Une entreprise de travaux publics a un parc total de 150 camions.
On désigne par X la variable aléatoire qui associe à chaque camion la distance qu'il a parcourue dans une journée. (Les distances sont mesurées en kilomètres).
Une étude statistique a montré que cette variable aléatoire X suit la loi normale de moyenne 120 et d'écart type 14.
Déterminer la probabilité qu'un camion parcourre un jour donné une distance comprise entre 110 et 130 kilomètres.

2° Après avoir parcouru un certain kilométrage, chaque camion est immobilisé pour une révision d'une journée. On a établi que la probabilité qu'un camion soit immobilisé une journée est $p = 0{,}015$. Les camions sont immobilisés indépendamment les uns des autres.
On désigne par Y la variable aléatoire qui associe à l'ensemble des 150 camions le nombre de camions immobilisés un jour donné.
La variable aléatoire Y suit une loi binomiale.

a) Déterminer les paramètres de la loi suivie par la variable aléatoire Y.

b) Calculer la probabilité d'avoir trois camions immobilisés le même jour.
En donner une valeur approchée à 10^{-3} près.

c) Si on considère un très grand nombre de journées, en moyenne combien y - a - t - il de camions immobilisés le même jour ?

Exercice 2 (13 points)

I

φ et ψ sont des fonctions numériques définies et deux fois dérivables sur |R, qui vérifient respectivement les équations différentielles :

$E_1 : \varphi'' = -\varphi'$ $\qquad$ $E_2 : \psi'' = -\psi' - 10$

1° Donner la solution générale de E_1. Déterminer une solution particulière de E_2, puis la solution générale de E_2.

2° Déterminer la solution de l'équation E_1 qui vérifie les conditions suivantes:

$$\begin{cases} \varphi(0) = 0 \\ \varphi'(0) = 10 \end{cases}$$

3° Déterminer la solution de l'équation E_2 qui vérifie les conditions suivantes:

$$\begin{cases} \psi(0) = 0 \\ \psi'(0) = 20 \end{cases}$$

II

Le plan est rapporté à un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unités graphiques : 2 cm sur l'axe des abscisses et 1 cm sur l'axe des ordonnées).

On considère la courbe (C) déterminée pour $t \in [0,+\infty[$ par les équations paramétriques :

$$\begin{cases} x(t) = 10 - 10\, e^{-t} \\ y(t) = 30 - 30\, e^{-t} - 10\, t \end{cases}$$

1° Déterminer les limites des fonctions x et y lorsque t tend vers $+\infty$ et donner l'asymptote à la courbe (C).

Calculer x(0) et y(0).

2° Etudier les variations de x en fonction de t, pour $t \in [0 ; +\infty[$.

3° Etudier les variations de y en fonction de t, pour $t \in [0 ; +\infty[$. Ecrire dans un même tableau les variations de x et de y lorsque $t \in [0 ; +\infty[$.

4° Construire la courbe (C) dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Préciser la tangente au point de coordonnées x(0), y(0).

5° Déterminer à 10^{-2} près les coordonnées du point de la courbe (C) où la tangente est parallèle à l'axe des abscisses.

EXERCICE 1

1° La variable aléatoire X suit la loi normale $\mathcal{N}(120, 14)$, la variable aléatoire $T = \frac{X - 120}{14}$ suit la loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$.

$P(110 \leq X \leq 130) = P(-\frac{10}{14} \leq T \leq \frac{10}{14})$,

$P(110 \leq X \leq 130) \approx 2\pi(0{,}714) - 1$,

$P(110 \leq X \leq 130) \approx 2 \times 0{,}763 - 1$ d'où

$P(110 \leq X \leq 130) \approx 0{,}53$.

2° Les camions sont immobilisés indépendamment les uns des autres. Soit Y la variable aléatoire qui associe à 150 camions le nombre de camions immobilisés un jour donné. La probabilité qu'un camion soit immobilisé un jour donné est $p = 0{,}015$. Par hypothèse Y suit une loi binomiale.

a) Les paramètres de cette loi sont $n = 150$ et $p = 0{,}015$.

b) $P(Y = 3) = C_{150}^{3}\ (0{,}015)^3 \times (0{,}985)^{147}$,

$C_{150}^{3} = \frac{150 \times 149 \times 148}{6}$,

$0{,}985^{147} = 0{,}98^3 \times (0{,}98^{36})^4$,

$P(Y = 3) = 0{,}202$ à 10^{-3} près.

Remarque :

Si on approche la loi binomiale $\mathcal{B}(150 ; 0{,}015)$ par la loi de Poisson de paramètre $\lambda = n \times p$, $\lambda = 2{,}25$, $P(Y = 3) = \frac{e^{-2,25} \times 2{,}25^3}{3!}$,

$P(Y = 3) = 0{,}200$ à 10^{-3} près

(résultat différent à 10^{-3} près).

c) E(Y) représente le nombre moyen de camions immobilisés, le même jour, si l'étude est faite sur un très grand nombre de jours, soit $E(Y) = 2{,}25$ jours.

EXERCICE 2

I - 1° $E_1 : \varphi'' = -\varphi'$ équivaut à $\varphi'' + \varphi' = 0$.

L'équation caractéristique est : $r^2 + r = 0$ c'est à dire $r(r + 1) = 0$.

L'équation caractéristique admet -1 et 0 comme solutions. Toutes les solutions de l'équation différentielle sont donc définies par :

$\varphi(x) = C_1 + C_2 e^{-x}$, où C_1 et C_2 sont des constantes réelles quelconques.

$E_2 : \psi'' = -\psi' - 10$ ou $\psi'' + \psi' = -10$, l'équation sans second membre $\psi'' + \psi' = 0$ est l'équation E_1 elle admet donc le même ensemble de solutions.

Cherchons une solution particulière définie sous la forme $h(x) = ax + b$, $h'(x) = a$, $h''(x) = 0$, si h est solution de E_2 alors $0 + a = -10$, $a = -10$.

Donc la fonction h telle que $h(x) = -10x$, est solution particulière de E_2.

La solution générale de l'équation différentielle linéaire du second ordre E_2 est la somme d'une solution particulière de E_2 et de la solution générale de l'équation sans second membre associée, soit :

$\psi(x) = -10x + C_1 + C_2 e^{-x}$, où C_1 et C_2 sont des constantes réelles quelconques.

2° $\varphi(x) = C_1 + C_2 e^{-x}$, $\varphi'(x) = -C_2 e^{-x}$,

$$\begin{cases} \varphi(0) = 0 \\ \varphi'(0) = 10 \end{cases} \text{ donc } \begin{cases} C_1 + C_2 = 0 \\ -C_2 = 10 \end{cases},$$

$C_1 = 10$, $C_2 = -10$, $\varphi(x) = 10 - 10e^{-x}$.

3° $\psi(x) = -10x + C_1 + C_2 e^{-x}$,

$\psi'(x) = -10 - C_2 e^{-x}$,

$$\begin{cases} \psi(0) = 0 \\ \psi'(0) = 20 \end{cases} \text{ donc } \begin{cases} C_1 + C_2 = 0 \\ -10 - C_2 = 20 \end{cases},$$

$C_1 = 30$, $C_2 = -30$, $\psi(x) = -10x + 30 - 30e^{-x}$.

II - 1° $\begin{cases} x(t) = 10 - 10\,e^{-t} \\ y(t) = 30 - 30\,e^{-t} - 10\,t \end{cases}$.

$\lim\limits_{t \to +\infty} e^{-t} = 0$, donc $\lim\limits_{t \to +\infty} x(t) = 10$, la droite d'équation $x = 10$ est asymptote à la courbe (C).

$\lim\limits_{t \to +\infty} y(t) = \lim\limits_{t \to +\infty} -10\,t = -\infty$.

$x(0) = 0$, $y(0) = 0$.

2° $\begin{cases} x'(t) = 10\,e - t \\ y'(t) = 30\,e - t - 10 \end{cases}$

$x'(t) > 0$, donc x est croissante sur $[0 ; +\infty[$

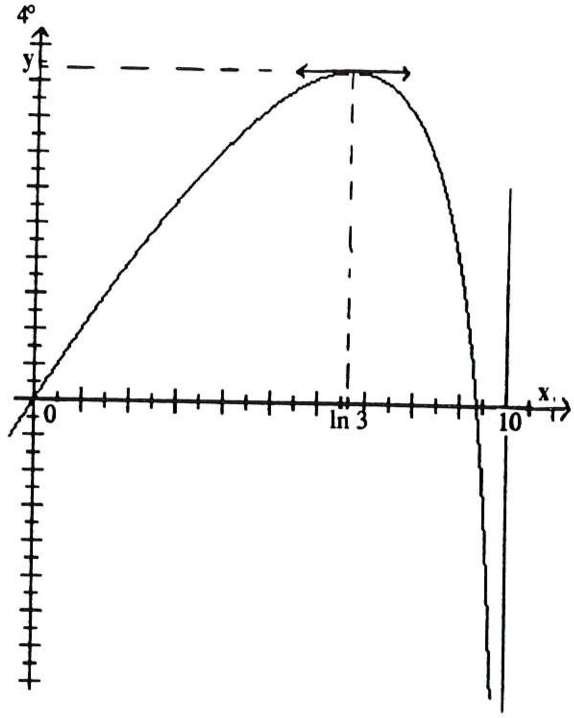
3° $y'(t) = 10(3\,e^{-t} - 1) > 0$ pour $e^{t} < 3$,

donc pour $t > \ln 3$, y est croissante sur $[3 ; +\infty[$ et

pour $t < l\ 3$ y est décroissante sur $[0 ; 3]$.

t	0	ln 3	$+\infty$
x '(t)	10	+	
y '(t)	20 −	0	+
x(t)	0 ↗		10
y(t)	0 ↗	20-10ln3	↘ $-\infty$

4°



Le coefficient directeur de la tangente à (C) au point de coordonnées $(x(t), y(t))$ est $m = \dfrac{y'(t)}{x'(t)}$

$m = \dfrac{-10 + 30\,e^{-t}}{10e^{-t}}$, $m = 3 - e^{t}$.

Le coefficient directeur de la tangente à (C) au point de coordonnées $(x(0), y(0))$ est $m = 2$, une équation de la tangente est alors : $y = 2\,x$.

5° Une tangente à (C) est parallèle à x 'Ox si et seulement si le coefficient directeur de cette tangente est nul, donc si et seulement si $m = 0$, $3 - e^{t} = 0$, $t = \ln 3$.

ÉTUDE ET ÉCONOMIE DE LA CONSTRUCTION

Session 1993

EXERCICE 1 *(6 points)*

L'objectif du problème est de comparer deux procédés de fabrication de pièces en série.
Une usine fabrique un très grand nombre de pièces en série. On note X la variable aléatoire qui, à chaque pièce tirée au hasard dans la production, associe sa longueur. Cette longueur est exprimée en centimètres. Une pièce est jugée acceptable si sa longueur est dans l'intervalle $[19{,}5\ ;\ 20{,}5]$.

1° Dans le premier procédé, cette variable aléatoire X suit la loi normale de moyenne $m = 20$ et d'écart type $\sigma = 0{,}30$.

a) Quelle est la probabilité p qu'une pièce soit acceptable ?

b) Si le coût de fabrication d'une pièce est noté f, montrer que le prix de revient d'une pièce acceptable est $\frac{f}{p}$. Quel est le prix de revient d'une pièce acceptable si le coût de fabrication d'une pièce est 2,90 Francs ? (On peut supposer, avec une bonne approximation, que sur N pièces fabriquées, le nombre de pièces acceptables est donné par pN pourvu que N soit suffisamment grand, ce qui est le cas dans le problème).

2° Dans le second procédé, la variable aléatoire Y qui, à chaque pièce tirée au hasard dans la production, associe sa longueur, suit la loi normale de moyenne $m = 20$ et d'écart type $\sigma = 0{,}25$.
Dans ce cas, le coût de fabrication d'une pièce est 3 Francs.

a) Quelle est la probabilité p' qu'une pièce soit acceptable ?

b) Ce deuxième procédé est-il plus rentable que le premier ?

EXERCICE 2 *(14 points)*

- I -

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ (unité graphique 4 cm).
Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0, +\infty[$ par $f(x) = 2\,e^{-x}\sqrt{x}$.

1° Calculer f(0).

2° a) Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

b) Etudier les variations de la fonction f.

3° Construire dans le repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ la représentation graphique C de la fonction f. Préciser la tangente à la courbe C au point d'abscisse 0.

- II -

On considère le solide de révolution engendré par la rotation autour de l'axe d'abscisses, de la courbe C, définie à la question 3 du paragraphe I.
On désigne par :
S(x) l'aire de la section de ce solide plan P perpendiculaire à l'axe des abscisses et passant par le point M de C d'abscisse x.
V(x) le volume de la partie du solide limitée par le plan P et le plan P_0 parallèle à P et passant par le point d'abscisse 0.
S(x) et V(x) sont exprimés en unités d'aire et en unités de volume.

1° Montrer que l'on a $S(x) = 4\pi x\,e^{-2x}$. Déterminer la valeur pour laquelle S(x) est maximale. Donner une valeur approchée de ce maximum à 10^{-2} près.

On rappelle que : $V(x) = \displaystyle\int_0^x S(t)\,dt$.

Montrer que $V(x) = \pi[\,1 - (2x + 1)\,e^{-2x}\,]$. *(On pourra utiliser une intégration par parties).*

2° Déterminer la limite de V(x) quand x tend vers $+\infty$.

EXERCICE 1

1° a) La variable aléatoire X suit la loi normale $\mathcal{N}(20\,;\,0{,}3)$.

On cherche $P(19{,}5 \leq X \leq 20{,}5)$, en utilisant la variable aléatoire $T = \dfrac{X - 20}{0{,}3}$ qui suit la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0\,;\,1)$ on obtient :

$P(19{,}5 \leq X \leq 20{,}5) = P(-\dfrac{0{,}5}{0{,}3} \leq T \leq \dfrac{0{,}5}{0{,}3})$,

$P(19{,}5 \leq X \leq 20{,}5) \approx P(-1{,}666\,6 \leq T \leq 1{,}6666)$,

$P(19{,}5 \leq X \leq 20{,}5) \approx 2\pi(1{,}6666) - 1$,

La table du formulaire donne $\pi(1{,}66) = 0{,}9515$ et $\pi(1{,}67) = 0{,}9525$, par interpolation linéaire on obtient

$P(19{,}5 \leq X \leq 20{,}5) \approx 2 \times 0{,}9522 - 1$,

$P(19{,}5 \leq X \leq 20{,}5) = 0{,}9044$ à 10^{-4} près .

b) Le coût de fabrication d'une pièce est noté f. Dans un lot de N pièces fabriquées dont le coût de fabrication est donc Nf, Np seulement d'entre-elles sont utilisables ; il en résulte que le prix de revient de fabrication est $\dfrac{Nf}{Np} = \dfrac{f}{p}$.

si f = 2,90 et p = 0,9044 alors le prix de revient de fabrication est : $\dfrac{f}{p} = \dfrac{2{,}90}{0{,}9044}$, $\dfrac{f}{p} \approx 3{,}20$.

2° a) La variable aléatoire Y suit la loi normale $\mathcal{N}(20\,;\,0{,}25)$. On cherche $P(19{,}5 \leq Y \leq 20{,}5)$, en utilisant la variable aléatoire $T = \dfrac{Y - 20}{0{,}25}$ qui suit la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0\,;\,1)$ on obtient :

$P(19{,}5 \leq Y \leq 20{,}5) = P(-\dfrac{0{,}5}{0{,}25} \leq T \leq \dfrac{0{,}5}{0{,}25})$,

$P(19{,}5 \leq Y \leq 20{,}5) \approx P(-2 \leq T \leq 2)$,

$P(19{,}5 \leq Y \leq 20{,}5) \approx 2\pi(2) - 1$,

$p' \approx 2 \times 0{,}9772 - 1$, $p' \approx 0{,}9544$.

$\dfrac{f}{p'} = \dfrac{3}{0{,}9544}$, $\dfrac{f}{p'} \approx 3{,}1433$.

b) $\dfrac{f}{p'} \approx 3{,}1433$, $\dfrac{f}{p} \approx 3{,}20$, $\dfrac{f}{p'} < \dfrac{f}{p}$

Le deuxième procédé est donc plus rentable que le premier .

EXERCICE 2

I - f est définie sur l'intervalle $[0\,,+\infty[$ par

$$f(x) = 2\,e^{-x}\sqrt{x}\,.$$

1° $f(0) = 0$.

2° , $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^{x}}{x^{\alpha}} = +\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^{\alpha}}{e^{x}} = 0$,

$\lim\limits_{x\to+\infty} x^{0,5} e^{-x} = 0$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

$f'(x) = -2\,e^{-x}\sqrt{x} + 2\,e^{-x}\,\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$,

$f'(x) = \dfrac{e^{-x}}{2\sqrt{x}}(-2x + 1)$, pour tout x de $]0\,,+\infty[$

$\dfrac{e^{-x}}{2\sqrt{x}} > 0$, $f'(x)$ est donc du signe de $(-2x + 1)$ d'où le tableau de variation :

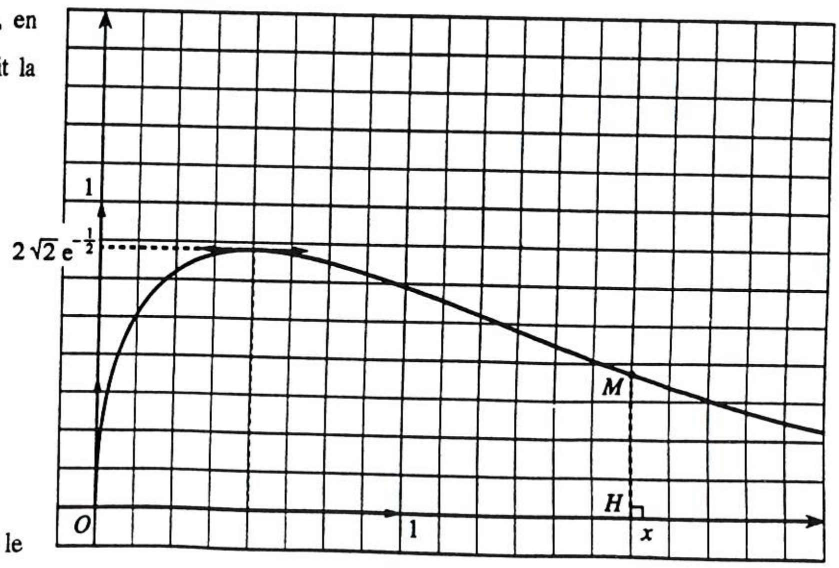
x	0		0,5		$+\infty$
f '(x)		–	0	+	
f(x)	0	↗	f(0,5)	↘	0

f admet un maximum pour x = 0,5 ,

$f(0{,}5) = 2\sqrt{2}\,e^{-0,5}$.

De $\lim\limits_{x\to 0} f'(x) = +\infty$ on déduit que la courbe C admet une demi-tangente verticale au point d'abscisse 0 .

3°



II -

1° $S(x)$ est l'aire d'un disque de rayon MH (voir figure).

$S(x) = \pi MH^2$, $S(x) = \pi\, y^2$, $S(x) = \pi\,(2\, e^{-x} \sqrt{x}\,)^2$,

$S(x) = 4\pi\, x\, e^{-2x}$,

$S'(x) = 4\pi\,(-\, 2x\, e^{-2x} + e^{-2x}\,)$,

$S'(x) = 4\pi\, e^{-2x}\,(\,1 - 2x\,)$.

$S'(x)$ a même signe que $1 - 2x$, $S(x)$ admet donc un maximum pour $x = \frac{1}{2}$,

il correspond au maximum de $f(x)$.

Le maximum de $S(x)$ est

$S(0{,}5) = 2\pi\, e^{-1}$.

$S(0{,}5) \approx 2{,}31$.

2°

On rappelle que : $V(x) = \displaystyle\int_0^x S(t)\,dt$.

$$V(x) = 4\pi \int_0^x t\, e^{-2t}\, dt \quad ,$$

Intégrons par parties.

Pour tout réel t de [0, x] on pose

$u(t) = t \quad , \quad v'(t) = e^{-2t}$,

donc $\quad u'(t) = 1 \quad , \quad v(t) = -\dfrac{e^{-2t}}{2}$,

$$V(x) = 4\pi\left(\left[-\frac{t\, e^{-2t}}{2}\right]_0^x + \frac{1}{2}\int_0^x e^{-2t}\, dt\ \right) \quad ,$$

$$V(x) = 2\pi\left(\,-\, x\, e^{-2x} + \left[-\frac{e^{-2t}}{2}\right]_0^x\right) \quad ,$$

$$V(x) = -\, 2\pi\, x\, e^{-2x} - \pi\, e^{-2x} + \pi \quad ,$$

$$V(x) = \pi\,(1 - (\,2x + 1)\, e^{-2x}\,)\ .$$

3° Pour tout nombre réel x ,

$$(\,2x + 1)\, e^{-2x} = \frac{2x + 1}{e^x \cdot e^x}$$

$$= \frac{1}{e^x}\,\left(\frac{2x}{e^x} + \frac{1}{e^x}\,\right)$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^{\,x}} = 0\ ,\quad \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{e^{\,x}} = 0\ ,$$

on en déduit :

$$\lim_{x\to+\infty} (\,2x + 1)\, e^{-2} = 0\ ,\quad \lim_{x\to+\infty} V(x) = \pi\ .$$

ÉTUDE ET ÉCONOMIE DE LA CONSTRUCTION

Session 1994

EXERCICE 1 *(8 points)*

On étudie une production de pièces en grande série.

I - On désigne par X une variable aléatoire qui suit la loi normale de moyenne $m = 400$, d'écart type $\sigma = 0{,}16$.

1° Calculer $P(399{,}90 \leq X \leq 400{,}20)$.

2° Determiner le nombre réel a tel que $P(400 - a \leq X \leq 400 + a) = 0{,}92$.

II - Une étude a montré que le pourcentage de pièces défectueuses dans la production était de 8 % ; on prendra 0,08 comme probabilité qu'une pièce prise au hasard dans la production soit défectueuse. On contrôle des échantillons de 50 pièces et on appelle Y la variable aléatoire qui, à tout échantillon de 50 pièces, associe le nombre de pièces défectueuses de cet échantillon.

1° On admet que la variable aléatoire Y suit une loi binomiale ; préciser les paramètres.
Calculer $P(Y = 4)$, $P(Y \leq 3)$.

2° On approche la loi binomiale suivie par Y par une loi de Poisson. Trouver son paramètre et calculer ensuite des approximations de $P(Y = 4)$ et $P(Y \leq 3)$.

III - On rappelle que le pourcentage de pièces défectueuses dans la production est de 8 %. On met en place un contrôle de fabrication pour les repérer. Si un défaut est détecté, la pièce est rejetée. Dans les autres cas, elle est acceptée.

Sachant que 10% des pièces défectueuses échappent au contrôle, calculer les probabilités des événements suivants :

A : "une pièce, tirée au hasard dans la production, est rejetée"
B : "une pièce, tirée au hasard dans la production, est acceptée"
C : "une pièce, tirée au hasard dans la production, est défectueuse et acceptée".

EXERCICE 2 *(12 points)*

I - Résolution d'une équation différentielle :

On considère l'équation différentielle $y'' + 2y' + 17y = 0$

où y est une fonction de la variable réelle x définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

1° Résoudre cette équation différentielle.

2° Déterminer la solution f qui vérifie les conditions initiales $f(0) = 1$ et $f'(0) = -1$.

II - Développement limité de f au voisinage de 0.

1° Donner les développements limités à l'ordre 2 au voisinage de zéro des fonctions :

a) $x \to e^{-x}$,

b) $x \to \cos(4x)$,

c) $x \to e^{-x}\cos(4x)$.

2° En utilisant le développement limité de f, calculer une valeur approchée de f(0,1). Comparer avec la valeur donnée par votre calculatrice. Quelle est la pécision obtenue avec le développement limité ?

3° Soit (C) la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.
Donner une équation de la tangente (D) à la courbe (C) au point d'abscisse zéro. Etudier, au voisinage de ce point, la position relative de la courbe (C) et de la droite (D).
On ne demande pas de tracer la courbe (C).

III - Calcul d'une intégrale

Déterminer les réels a et b pour que la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par

$$F(x) = e^{-x}[a\cos(4x) + b\sin(4x)]$$

soit une primitive de la fonction f définie par $f(x) = e^{-x}\cos(4x)$.

En déduire la valeur de l'intégrale $I = \int_0^{\pi} e^{-x}\cos(4x)\,dx$.

EXERCICE 1

I - 1° La variable aléatoire X suit la loi normale $\mathcal{N}$ (400 ; 0,16), la variable aléatoire $T = \dfrac{X - 400}{0,16}$ suit la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0 ; 1)$.

$P(399,90 \leq X \leq 400,20) = P(-\dfrac{0,10}{0,16} \leq T \leq \dfrac{0,20}{0,16})$,

$P(399,90 \leq X \leq 400,20) = \pi(1,25) + \pi(0,625) - 1$,

$P(399,90 \leq X \leq 400,20) \approx 0,8944 + 0,7340 - 1$,

$P(399,90 \leq X \leq 400,20) \approx 0,6284$.

2° $P(400 - a \leq X \leq 400 + a) = 0,92$ équivaut à $P(-\dfrac{a}{0,16} \leq T \leq \dfrac{a}{0,16}) = 0,92$, $2\pi(\dfrac{a}{0,16}) - 1 = 0,92$,

$\pi(\dfrac{a}{0,16}) = 0,96$, $\dfrac{a}{0,16} \approx 1,75$, $a \approx 0,28$.

II - 1° On est donc en présence d'une succession de 50 épreuves indépendantes, chacune ayant deux issues pièce défectueuse avec une probabilité constante 0,08 ou non défectueuse avec la probabilité 0,92.

Y suit la loi binomiale $\mathcal{B}$ (50 ; 0,08).

$P(Y = 4) = C_{50}^{4}(0,08)^4(0,92)^{46}$

$P(Y = 4) \approx 0,2036$ à 10^{-4} près.

$P(Y \leq 3) = P(Y = 0) + P(Y = 1) + P(Y = 2)]$,

$P(Y \leq 3) = C_{50}^{0}(0,08)^0(0,92)^{50} + C_{50}^{1}(0,08)(0,92)^{49} + C_{50}^{3}(0,08)^2(0,92)^{48} + C_{50}^{2}(0,08)^3(0,92)^{47}$,

$P(Y \leq 3) = 0,4253$ à 10^{-4} près.

2° $\lambda = np = 50 \times 0,08$, $\lambda = 4$, par lecture de la table du formulaire on trouve :

$P(Y = 4) = 0,195$ à 10^{-3} près.

$P(Y \leq 3) \approx 0,018 + 0,073 + 0,147 + 0,195$

$P(Y \leq 3) = 0,433$ à 10^{-3} près.

III - A : "une pièce, tirée au hasard dans la production, est rejetée" , B : "une pièce, tirée au hasard dans la production, est acceptée" , C : "une pièce, tirée au hasard dans la production, est défectueuse et acceptée", D : "une pièce, tirée au hasard dans la production, est défectueuse".

D'après l'énoncé $P(D) = 0,08$, $P(A/D) = 0,90$, $P(B/D) = 0,10$.

- $P(A) = P(D \cap A) = P(D) \times P(A/D) = 0,08 \times 0,9$, $P(A) = 0,072$.
- $P(B) = 1 - P(A)$, $P(B) = 0,928$.
- $P(C) = P(D \cap B) = P(D) \times P(B/D)$
  $P(C) = 0,08 \times 0,10$, $P(C) = 0,008$.

EXERCICE 2

1° L'équation caractéristique est $r^2 + 2r + 17 = 0$.
Ses solutions sont $r_1 = -1 - 4i$ et $r_2 = -1 + 4i$.
Toutes les solutions de l'équation différentielle sont donc définies sur $\mathbb{R}$ par

$f(x) = e^{-x}(C_1 \cos 4x + C_2 \sin 4x)$, où C_1 et C_2 sont deux nombres réels quelconques.

2° Pour tout nombre réel x ,

$f'(x) = -e^{-x}(C_1 \cos 4x + C_2 \sin 4x) + e^{-t}(-4C_1 \sin 4x + 4C_2 \cos 4x)$

$f'(x) = e^{-x}[(-C_1 + 4C_2)\cos 4x - (4C_1 + C_2)\sin 4x]$.

$f(0) = 1$ équivaut à $e^0(C_1 \cos 0 + C_2 \sin 0) = 1$ d'où $C_1 = 1$.

$f'(0) = -1$ équivaut à $e^0[(-C_1 + 4C_2)\cos 0 - (4C_1 + C_2)\sin 0] = -1$, soit encore à $-C_1 + 4C_2 = -1$, d'où $C_2 = 0$.

Pour tout nombre réel x, $f(x) = e^{-x} \cos 4x$.

II - 1° a) $e^{-x} = 1 - x + \dfrac{x^2}{2} + x^2 \varepsilon(x)$, avec $\lim\limits_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$,

b) $\cos 4x = 1 - \dfrac{16x^2}{2} + x^2 \varepsilon(x)$, avec $\lim\limits_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$,

a) $e^{-x} \cos 4x = 1 - x - \dfrac{15x^2}{2} + x^2 \varepsilon(x)$, avec $\lim\limits_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$,

2° La calculatrice donne : $f(0,1) \approx 0,83341$,

$f(0,1) \approx 1 - 0,1 - \dfrac{15(0,1)^2}{2}$, $f(0,1) \approx 0,825$ la différence entre ces deux valeurs est 0,0084.

$f(x) - (1 - x) = -\dfrac{15x^2}{2} + x^2 \varepsilon(x)$, avec $\lim\limits_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$,

3° Une équation de la tangente (D) à (C) au point d'abscisse 0 est donc $y = 1 - x$. La position relative de (D) et (C) au voisinage du point d'abscisse 0 est donnée par le signe de $-\dfrac{15x^2}{2} < 0$ donc (C) est au dessous de (D).

III - $F(x) = e^{-x}\,[a \cos(4x) + b \sin(4x)]$,

$F'(x) = -e^{-x}\,[a \cos(4x) + b \sin(4x)] +$

$e^{-x}\,[-4a \sin(4x) + 4b \cos(4x)]$,

$F'(x) = e^{-x}\,[(-a + 4b)\cos(4x) - (b + 4a)\sin(4x)]$

de $-a + 4b = 1$ et $b + 4a = 0$ on déduit : $b = -4a$,

$-17a = 1$, $a = -\dfrac{1}{17}$ et $b = \dfrac{4}{17}$ donc

$F(x) = e^{-x}\,[-\dfrac{1}{17} \cos(4x) + \dfrac{4}{17} \sin(4x)]$

$I = \displaystyle\int_0^{\pi} e^{-x} \cos(4x)\,dx = [\ F(x)\ ]_0^{\pi}$,

$I = [\ e^{-x}\,[-\dfrac{1}{17} \cos(4x) + \dfrac{4}{17} \sin(4x)]\ ]_0^{\pi}$,

$I = e^{-\pi}(-\dfrac{1}{17}) + e^{-0}(\dfrac{1}{17})$,

$$\mathbf{I = \frac{1}{17}(1 - e^{-\pi})}.$$

ÉTUDE ET ÉCONOMIE DE LA CONSTRUCTION

Session 1995

EXERCICE 1

Une machine est chargée de conditionner des paquets de poudre d'additif pour ciment.

La variable aléatoire M qui, à tout paquet prélevé au hasard dans la production, associe sa masse, exprimée en grammes, suit une loi normale d'écart type constant égal à 30 et dont la moyenne m peut être modifiée par un réglage de la machine.

Un paquet est refusé au contrôle final si sa masse est inférieure ou égale à 955 g.

Dans tout le problème, les probabilités demandées seront arrondies à 10^{-3} près.

On a réglé la machine pour que m = 1000 g.

1° Quelle est la probabilité qu'un paquet soit refusé au contrôle ?

2° On prendra 0,07 comme valeur approchée de cette probabilité. On effectue le contrôle en prélevant périodiquement un lot de 100 paquets, extraits de la production au hasard et avec remise.

On appelle X la variable aléatoire qui, à chaque lot, associe le nombre de paquets refusés.

a) Expliquer pourquoi X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.

b) Calculer la probabilité de l'événement " X = 3 ".

3° On admet que l'on peut approcher la loi de X par une loi de Poisson.

a) Quel doit être le paramètre de cette loi de Poisson ?

b) Déterminer la probabilité que, dans un lot, 5 paquets au plus soient refusés.

4° On décide de tester le réglage de la machine à m = 1000 g à l'aide d'un échantillon de 40 paquets.

On appelle $\overline{M}$ la variable aléatoire qui, à tout échantillon de 40 paquets prélevés au hasard et avec remise, associe la moyenne des masses des 40 paquets.

a) Quand le paramètre m est inconnu quelle est la loi de la variable $\overline{M}$?

b) Construire un test permettant de décider si, au seuil 5 %, le réglage est correct.

c) Utiliser ce test, sachant qu'un échantillon de 40 paquets effectivement prélevé a donné une masse moyenne de 1007 g.

EXERCICE 2

Les parties A et B sont indépendantes

- A -

On veut résoudre sur $]-1, +\infty[$ l'équation différentielle (E) : $(1 + x)\,y' - 2\,y = \ln(1 + x)$.
où y est une fonction de la variable x définie et dérivable sur $]-1, +\infty[$.

1° Résoudre sur $]-1, +\infty[$ l'équation différentielle $(1 + x)\,y' - 2\,y = 0$.

2° Vérifier que la fonction g définie sur $]-1, +\infty[$ par $g(x) = -\frac{1}{2}\ln(1 + x) - \frac{1}{4}$ est solution de (E).

3° Déduire des deux questions précédentes la solution générale de (E).

4° Déterminer la fonction f, définie et dérivable sur $]-1, +\infty[$ solution de (E) et vérifiant la condition $f(0) = 0$.

- B -

On considère la fonction h définie sur $]-1, +\infty[$ par : $h(x) = \frac{x^2}{4} + \frac{x}{2} - \frac{1}{2}\ln(1 + x)$ et sa courbe représentative C dans le plan rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unité graphique : 2cm).

1° a) Déterminer la limite de h lorsque x tend vers -1.

b) Etudier les variations de h.

2° Déterminer le développement limité de h au voisinage de 0, à l'ordre 3. En déduire la position de C par rapport à la parabole P d'équation $y = \frac{x^2}{2}$ au voisinage de l'origine.

3° Construire les arcs de la parabole P et de la courbe C dans le même repère, pour x variant dans $]-1,3]$

4° Dans le demi-plan défini par $x \geq 0$, soit D le domaine plan limité par C, P et la droite d'équation $x = 2$.

a) Déterminer les réels a et b tels que, pour tout x réel, $\frac{x}{x+1} = a + \frac{b}{x+1}$,

b) En déduire, à l'aide d'une intégration par parties, la valeur exacte de l'intégrale

$$\int_0^2 \ln(1 + x)\,dx .$$

c) Utiliser ce résultat pour donner une valeur approchée à 10^{-2} près en cm^2 de l'aire de D.

EXERCICE 1

1° La variable aléatoire M qui, à tout paquet prélevé au hasard dans la production, associe sa masse suit la loi normale de paramètres m = 1000 g et $\sigma = 30$ g.

La variable aléatoire $T = \frac{M - 1000}{30}$ suit la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0, 1)$. On cherche $P(M \leq 955)$:

$P(M \leq 955) = P(T \leq -\frac{45}{30})$, $P(M \leq 955) = P(T \leq -1{,}5)$,

$P(M \leq 955) = 1 - \pi(1{,}5) \approx 1 - 0{,}9332$,

$P(M \leq 955) = \mathbf{0{,}0668}$ à 10^{-4} près.

2° a) Pour chaque paquet on a deux possibilités et deux seulement ou il est refusé avec la probabilité 0,7 ou il est accepté avec la probabilité 0,3. On recommence 100 fois cette expérience aléatoire et les résultats sont supposés indépendants puisque les prélèvements sont effectués aléatoirement et avec remise. La variable aléatoire X qui, à chaque lot de 100 paquets associe le nombre de paquets refusés, suit donc la loi binomiale $\mathcal{B}$ (100 ; 0,07).

b) $P(X = 3) = C_{100}^{3}\ (0{,}07)^3 \times (0{,}93)^{97}$

$C_{100}^{3} = \frac{100 \times 99 \times 98}{6}$

$\mathbf{P(X = 3) = 0{,}049}$ **à** $\mathbf{10^{-3}}$ **près.**

3° a) On approche cette loi binomiale par une loi de Poisson. Le paramètre est $\lambda = np = 100 \times 0{,}07 = 7$.

b) Si on note Y la variable aléatoire qui suit la loi de Poisson $\mathcal{P}$ (7) la probabilité cherchée est :

$P(Y \leq 5) = P(Y = 0) + P(Y = 1) + P(Y = 2) + P(Y = 3) + P(Y = 4) + P(Y = 5)$.

A l'aide de la table du formulaire on trouve :

$P(Y \leq 5) = 0{,}001 + 0{,}006 + 0{,}022 + 0{,}052 + 0{,}091 + 0{,}128$, $\mathbf{P(Y \leq 5) = 0{,}3}$.

Il y a 30 % de chances que, dans un échantillon de 100 paquets 5, paquets au plus soient refusés.

4° a) On sait que M suit la loi normale $\mathcal{N}$(m, 30) où m est inconnue. La variable aléatoire $\overline{M}$ qui, à chaque échantillon de 40 paquets, associe la moyenne des masses des 40 paquets de cet échantillon suit la loi normale $\mathcal{N}(m ; \frac{30}{\sqrt{40}})$.

b) Construction du test :

choix de H_0 : m = 1000 *choix de H_1* : m ≠ 1000

détermination de la région critique :

Sous l'hypothèse H_0, m = 1000, $\overline{M}$ suit la loi normale $\mathcal{N}(1000, \frac{30}{\sqrt{40}})$, la variable aléatoire $T = \frac{\overline{M} - 1000}{30}\sqrt{40}$ suit la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0, 1)$.

$P(1000 - a \leq \overline{M} \leq 1000 + a) = 0{,}95$ équivaut à :

$P(-\frac{a}{30}\sqrt{40} \leq T \leq \frac{a}{30}\sqrt{40}) = 0{,}95$ et à

$2\pi(\frac{a}{30}\sqrt{40}) - 1 = 0{,}95$ et à $\frac{a}{30}\sqrt{40} = 1{,}96$,

a = 9,30 à 10^{-2} près. $\mathbf{P(990{,}7 \leq \overline{M} \leq 1009{,}3) = 0{,}95.}$

Si H_0 est vraie on a 95% de chances de prélever un échantillon aléatoire dont la moyenne appartient à l'intervalle I = [990,7 ; 1009,3]

règle de décision :

On prélève au hasard et avec remise un échantillon de 40 paquets dans la production et on calcule sa moyenne $\overline{x}$,

si $\overline{x} \in [\,990{,}7 ; 1009{,}3\,]$ on accepte H_0

si $\overline{x} \notin [\,990{,}7 ; 1009{,}3\,]$ on rejette H_0 et on accepte H_1

Utilisation du test : $\overline{x} \approx 1007$ g,

$\overline{x} \in [\,990{,}7; 1009{,}3\,]$ on accepte H_0 et on rejette H_1.

On accepte donc l'hypothèse m = 1000, au seuil de risque 5 % on considère que la machine est bien réglée à la masse moyenne 1000 g.

EXERCICE 2

A - 1° L'équation $(1 + x)\,y' - 2\,y = 0$ est de la forme $a(x)\,y' + b(x)\,y = 0$. Toutes les solutions de sont donc définies sur $]-1, +\infty[$ par $f(x) = K\,e^{-G(x)}$ où K est une constante réelle et G une primitive de $\frac{b}{a}$.

$\frac{b(x)}{a(x)} = -\frac{2}{1 + x}$ d'où $G(x) = -2\ln(x + 1)$.

$f(x) = K\,e^{2\ln(x+1)}$, $f(x) = K\,e^{\ln(x+1)^2}$,

$f(x) = K\,e^{\ln(x+1)^2}$, $\mathbf{f(x) = K\,(x + 1)^2}$.

2° Soit g telle que $g(x) = -\frac{1}{2}\ln(1 + x) - \frac{1}{4}$,

$g'(x) = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1 + x}\right)$, g est solution de (E) si et seulement si pour tout nombre réel x de $]-1, +\infty[$,

$(x + 1)\,g'(x) - 2\,g(x) = \ln(1 + x)$.

Pour tout réel x de $]-1, +\infty[$, $(x+1)g'(x) - 2g(x)$

$$= (x+1)\left(-\frac{1}{2}\,\frac{1}{1+x}\right) - 2\left(-\frac{1}{2}\ln(1+x) - \frac{1}{4}\right),$$

$$= -\frac{1}{2} + \ln(1+x) - \frac{1}{2} = \ln(1+x)$$

donc g est solution de l'équation (E).

3° L'ensemble des solutions de (E) est la somme des fonctions obtenues au 1° et 2°, c'est à dire l'ensemble des fonctions définies sur $]-1, +\infty[$ par $f(x) = K\,(x+1)^2 - \frac{1}{2}\ln(1+x) - \frac{1}{4}$ où K est une constante réelle quelconque.

4° $f(0) = 0$ se traduit par $K - \frac{1}{4} = 0$, $K = \frac{1}{4}$.

La solution cherchée est définie sur $]-1, +\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{4}\,(x+1)^2 - \frac{1}{2}\ln(1+x) - \frac{1}{4}$.

B - 1° a) Sur $]-1, +\infty[$ $h(x) = \frac{x^2}{4} + \frac{x}{2} - \frac{1}{2}\ln(1+x)$,

$\lim\limits_{x\to -1} \ln(1+x) = \lim\limits_{X\to 0} \ln X = -\infty$,

$\lim\limits_{x\to -1} h(x) = +\infty$, La droite d'équation $x = -1$ est donc asymptote à C.

$\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x\left(\frac{x}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\,\frac{\ln(1+x)}{x}\right) = +\infty.$

b) $h'(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+x}\right)$, $h'(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{x^2+2x}{1+x}\right)$ est du signe de x sur $]-1, +\infty[$.

x	-1	0	$+\infty$
h '(x)	$-$	0	+
h(x)	$+\infty$ ↘	0	↗ $+\infty$

c) A l'aide du formulaire on trouve les développements limités au voisinage de 0, à l'ordre 3 suivants :

$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + x^3\varepsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0$,

$h(x) = \frac{x^2}{4} + \frac{x}{2} - \frac{1}{2}\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}\right) + x^3\varepsilon(x)$ avec . .

$h(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + x^3\varepsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0$,

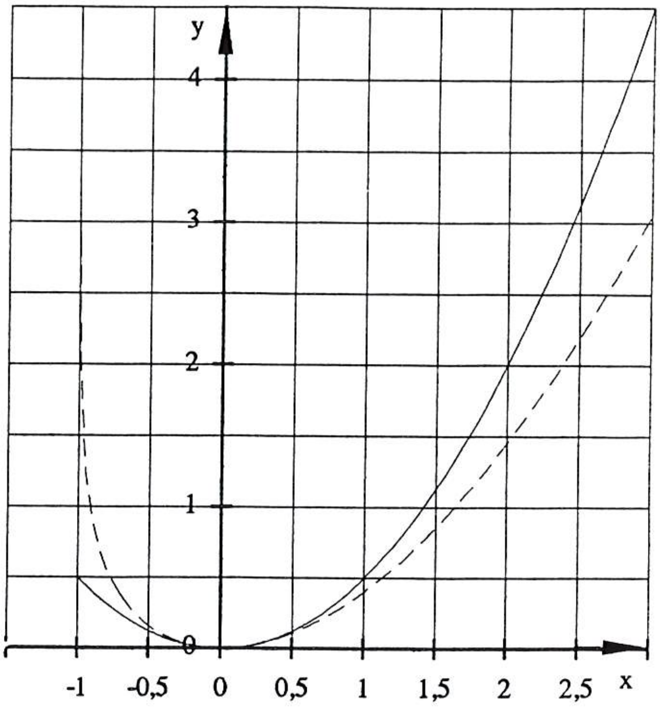
$h(x) - \frac{x^2}{2} = -\frac{x^3}{3} + x^3\varepsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0$,

La différence entre les ordonnées des points de même abscisse voisine de zéro : $y_C - y_P = -\frac{x^3}{3} + x^3\varepsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0$, $y_C - y_P$ est du signe de $-x$,

si $x > 0$ alors $y_C - y_P < 0$ alors P est au dessus de C,

si $x < 0$ alors $y_C - y_P > 0$ alors P est au dessous de C.

3°)



4° a) En réduisant au même dénominateur on trouve :

$$\frac{x}{x+1} = \frac{x+1-1}{x+1} = 1 - \frac{1}{x+1},$$

b) En posant $u'(x) = 1$, $v(x) = \ln(x+1)$,

$u(x) = x$, $v'(x) = \frac{1}{x+1}$,

$v(x)\,u(x) = x\ln(x+1)$, $v'(x)\,u(x) = \frac{x}{x+1}$,

$$I = \int_0^2 \ln(1+x)\,dx = [x\ln(1+x)]_0^2 - \int_0^2 \frac{x}{1+x}\,dx,$$

$$I = 2\ln 3 - \int_0^2 \left(1 - \frac{1}{1+x}\right)dx, \quad I = 2\ln 3 - [x - \ln(1+x)]_0^2,$$

$I = 2\ln 3 - 2 + \ln 3$, $\mathbf{I = 3\ln 3 - 2.}$

$$A = \int_0^2 (y_P - y_C)\,dx = \int_0^2 \left(\frac{x^2}{4} - \frac{x}{2} + \frac{1}{2}\ln(1+x)\right)dx,$$

$A = \left[\frac{x^3}{12} - \frac{x^2}{4}\right]_0^2 + \frac{1}{2}(3\ln 3 - 2)$, $A = \frac{2}{3} - 1 + \frac{3}{2}\ln 3 - 1$,

$A = \left(\frac{3}{2}\ln 3 - \frac{4}{3}\right)$ U.A, $A = 6\ln 3 - \frac{16}{3}$ cm².

c) $A = 1{,}26$ cm² à 10^{-2} près.

ÉTUDE ET ÉCONOMIE DE LA CONSTRUCTION

Session 1996

EXERCICE 1 (9 points)

(Les valeurs seront données avec trois chiffres après la virgule, par défaut, si nécessaire).

Une usine fabrique des tiges métalliques. La production est répartie dans trois ateliers A,B,C.

L'atelier A fabrique 24 % des tiges.

L'atelier B fabrique 32 % des tiges.

L'atelier C fabrique 44 % des tiges.

Une tige est acceptable si sa longueur est de 37 cm, avec une tolérance de plus ou moins 5 mm, donc si sa longueur en cm appartient à l'intervalle [36,5 ; 37,5] ; sinon elle est inacceptable.

1. On admet que la variable aléatoire qui, à toute tige prélevée au hasard dans la production associe sa longueur, suit une loi normale de moyenne $m = 37$.
   Quelle est la valeur de l'écart type, sachant que 95 % des tiges sont acceptables ?

2. On sait aussi que 4 % des tiges fabriquées dans l'atelier A sont inacceptables et que 5 % des tiges fabriquées dans l'atelier C sont inacceptables.
   On prélève une tige au hasard dans la production.
   On note A l'événement "la tige provient de l'atelier A", B l'événement "la tige provient de l'atelier B", C l'événement "la tige provient de l'atelier C" et D l'événement "la tige est inacceptable".
   a) Calculer $P(A \cap D)$, $P(C \cap D)$ et $P(D)$; en déduire $P(B \cap D)$.
   b) Quel est le pourcentage de tiges inacceptables fabriquées dans l'atelier B ?
   c) Sachant qu'une tige fabriquée dans l'usine est inacceptable, quelle est la probabilité qu'elle provienne de l'atelier A ?

3. Un client a acquis une grosse quantité de tiges de cette usine. Pour avoir une idée de la longueur moyenne des tiges achetées, il fait procéder à un tirage au hasard de 125 tiges.
   La production étant très importante, on assimile tout échantillon de 125 tiges à un échantillon prélevé avec remise.
   a) Si F est la variable aléatoire qui, à tout échantillon non exhaustif de 125 tiges associe le nombre de tiges inacceptables dans l'échantillon, quelle est la loi suivie par F ?
   b) Si la longueur moyenne d'un tel échantillon de 125 tiges est 36,9 cm avec un écart type de 0,25 cm, donner une estimation ponctuelle de l'écart type de l'ensemble des tiges achetées ; puis donner un intervalle de confiance à 95 %, centré en 36,9 de la moyenne des longueurs des tiges achetées.

EXERCICE 2 (11 points)

1 - g est la fonction de la variable réelle définie sur l'intervalle]0, 1[par $g(x) = \dfrac{2x^2 - 1}{x(x^2 - 1)}$

a) Déterminer les trois constantes réelless a, b, c telles que pour tout réel x de]0, 1[on ait :

$$g(x) = \frac{a}{x} + \frac{b}{x - 1} + \frac{c}{x + 1}.$$

b) Déterminer les primitives de g sur l'intervalle]0, 1[.

2 - On considère l'équation différentielle (E) : $x(x^2 - 1)y' - (2x^2 - 1)y = 0$ où y représente une fonction de la variable réelle dérivable sur l'intervalle]0, 1[.

a) En utilisant les résultats du 1°/, déterminer la solution générale de l'équation (E) sur]0,1[.

b) Vérifier que la solution particulière de (E) qui prend la valeur 0,48 pour x = 0,6 est définie sur [– 1, 1] par $x \longmapsto x\sqrt{1 - x^2}$.

3 - f est la fonction définie sur [– 1, 1] par $f(x) = x\sqrt{1 - x^2}$.

C est sa courbe représentative dans un repère orthogonal d'origine O, où 10 cm représentent une unité sur chaque axe.

a) Etudier sur [– 1, 1] les variations de f.

b) Tracer C ainsi que sa tangente en O et les demi-tangentes aux points d'abscisses – 1 et 1.

4 - a) Calculer $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{u}\, du$.

b) Calculer $\displaystyle\int_0^1 f(x)\, dx$. (On pourra procéder à un changement de variable tel que $u = 1 - x^2$).

c) En déduire l'aire, exprimée en cm^2, de la partie du plan comprise entre la courbe C et l'axe des abscisses.

EXERCICE 1

1. Si on désigne par X la variable aléatoire qui, a toute tige prélevée au hasard dans la production associe sa longueur, X suit la loi $\mathcal{N}(37\,;\,\sigma)$, $T = \dfrac{X - 37}{\sigma}$ suit la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0\,;\,1)$.

$P(36{,}5 \leq X \leq 37{,}5) = 0{,}95$ équivaut à

$P(-\dfrac{0{,}5}{\sigma} \leq T \leq \dfrac{0{,}5}{\sigma}) = 0{,}95$ et à $2\,\pi(\dfrac{0{,}5}{\sigma}) - 1 = 0{,}95$,

$\dfrac{0{,}5}{\sigma} = 1{,}96$, $\sigma = 0{,}255$ à 10^{-3} près.

2. On prélève une tige au hasard dans la production.
On note A l'événement "la tige provient de l'atelier A", B l'événement "la tige provient de l'atelier B", C l'événement "la tige provient de l'atelier C" et D l'événement "la tige est inacceptable".

D'après l'énoncé : $P(A) = 0{,}24$, $P(B) = 0{,}32$, $P(C) = 0{,}44$, il y a 95 % de tiges acceptables donc $P(D) = 0{,}05$, $P(D/A) = 0{,}04$ et $P(D/C) = 0{,}05$.

L'événement "la tige est inacceptable et provient de B", est $B \cap D$ on cherche donc le pourcentage x tel que :

a)$P(B \cap D) = P(B) \times P(D/B)$, $P(B \cap D) = 0{,}32 \times x$,

l'événement "la tige est inacceptable et provient de A", est $A \cap D$ donc : $P(A \cap D) = P(A) \times P(D/A)$,

$P(A \cap D) = 0{,}24 \times 0{,}04$, $P(A \cap D) = 0{,}0096$.

l'événement "la tige est inacceptable et provient de C", est $C \cap D$ donc : $P(C \cap D) = P(C) \times P(D/C)$,

$P(C \cap D) = 0{,}44 \times 0{,}05$, $P(C \cap D) = 0{,}022$.

Une tige est inacceptable signifie " la tige est inacceptable **et** provient de A **ou** la tige est inacceptable **et** provient de B **ou** la tige est inacceptable et provient de C".

Les événements $A \cap D$, $B \cap D$ et $C \cap D$ sont incompatibles donc

$P(D) = P[(A \cap D) \cup (B \cap D) \cup (C \cap D)]$

$P(D) = P(A \cap D) + P(B \cap D) + P(C \cap D)$

$0{,}05 = 0{,}0096 + 0{,}022 + 0{,}32 \times x$,

$x = \dfrac{0{,}0184}{0{,}32}$, $x = 0{,}0575$, $P(B / D) = 0{,}0575$.

b) L'événement "sachant la tige est défectueuse, elle provient de A" est A/D , la probabilité de cet événement est : $P(A/D) = \dfrac{P(A \cap D)}{P(D)}$,

$P(A/D) = \dfrac{0{,}0096}{0{,}05}$, $P(A/D) \approx 0{,}192$.

3. a) Les tirages sont assimilés à des tirages aléatoires non exhaustifs, on est donc en présence d'une succession de 125 épreuves indépendantes, chacune ayant deux issues une tige tirée au hasard est soit inacceptable de probabilité constante 0,05 soit acceptable de probabilité 0,95. La variable aléatoire F qui, à tout lot de 125 tiges prélevées au hasard et avec remise associe le nombre de pièces inacceptables, suit donc la loi binomiale $\mathcal{B}(125\,;\,0{,}05)$.

b) L'estimation ponctuelle de l'écart type σ est

$s = 0{,}25\sqrt{\dfrac{125}{124}}$, $s \approx 0{,}251$ à 0,001 près.

Un intervalle de confiance à 95 % de la moyenne m centré en $\overline{x}$ est : $[\,\overline{x} - t\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}, \ \overline{x} + t\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\,]$.

Avec $\overline{x} = 36{,}9$, σ est estimé par $s = 0{,}251$, $t = 1{,}96$ et $n = 125$, on obtient :

$I_c = [36{,}9 - 1{,}96\,\dfrac{0{,}251}{\sqrt{125}}\ ;\ 36{,}9 + 1{,}96\,\dfrac{0{,}251}{\sqrt{125}}]$

$I_c = [\,36{,}856\,;\,36{,}944]$.

EXERCICE 2

1 - a) Pour tout réel x de l'intervalle]0, 1[,

$\dfrac{2x^2 - 1}{x(x^2 - 1)} = \dfrac{a}{x} + \dfrac{b}{x - 1} + \dfrac{c}{x + 1}$ équivaut à

$\dfrac{2x^2 - 1}{x(x^2 - 1)} = \dfrac{(a + b + c)x^2 + (b - c)x - a}{x(x^2 - 1)}$

équivaut à $\begin{cases} a + b + c = 2 \\ b - c = 0 \\ a = 1 \end{cases}$, soit : $\begin{cases} a = 1 \\ b = c \\ 2b = 1 \end{cases}$,

Pour tout réel x de l'intervalle]0, 1[,

$\dfrac{2x^2 - 1}{x(x^2 - 1)} = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{x - 1} + \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{x + 1}$

b) Les primitives sur l'intervalle]0, 1[de la fonction g sont les fonctions :

$x \longmapsto \ln x + \dfrac{1}{2}(\ln(1 - x) + \ln(x + 1)) + K$,

$x \longmapsto \ln x\sqrt{1 - x^2} + K$.

(Une primitive de $\dfrac{u'}{u}$ avec $u < 0$ est $\ln(-u)$).

2 - a) L'équation (E) : $x(x^2 - 1)\,y' - (2x^2 - 1)\,y = 0$ est de la forme $a(x)y'(x) + b(x)y(x) = 0$.
On sait que l'ensemble des solutions de l'équation est définie par $y(x) = Ce^{-F(x)}$, où F est une primitive de la fonction $\dfrac{b}{a}$, et C est une constante réelle quelconque.

$\dfrac{b(x)}{a(x)} = -\dfrac{2x^2 - 1}{x(x^2 - 1)}$, une primitive de $\dfrac{b}{a}$ est F telle que

$x \longmapsto -\ln x\sqrt{1 - x^2}$ donc $y(x) = Ce^{\ln x\sqrt{1 - x^2}}$,

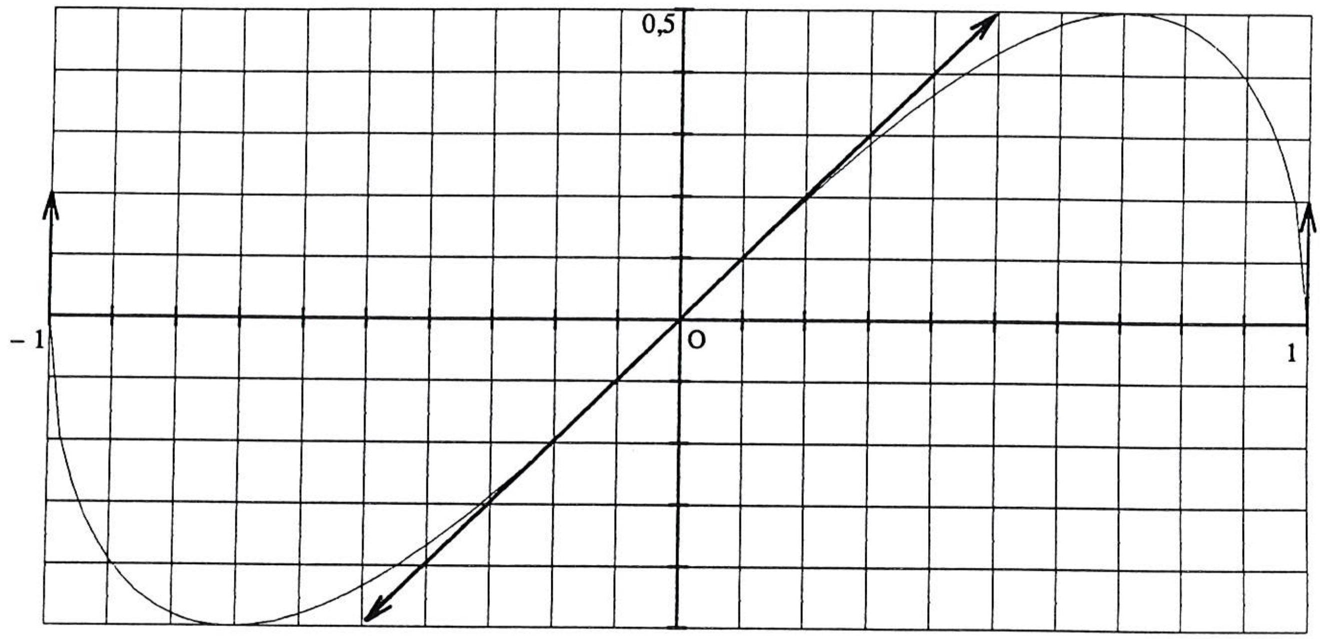
$y(x) = C\,x\sqrt{1 - x^2}$ où C est un réel quelconque.

b) La solution particulière f est telle que : $f(0{,}6) = 0{,}48$ donc telle que $0{,}48 = 0{,}6\sqrt{0{,}64}C$ donc $C = 1$ d'où $f(x) = x\sqrt{1 - x^2}$.

3 - f est définie sur [– 1, 1] par $f(x) = x\sqrt{1-x^2}$, $f'(x) = \sqrt{1-x^2} + x\dfrac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}$, $f'(x) = \dfrac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}}$.

x	-1		$-\frac{\sqrt{2}}{2}$		0		$-\frac{\sqrt{2}}{2}$		1
f '(x)	‖	$-$	0	$+$	1	$+$	0	$-$	‖
f(x)	0	↘	$-\frac{1}{2}$	↗		↗	$\frac{1}{2}$	↘	0

b)



4 - a) Soit $I = \int_0^1 \sqrt{u}\,du$, $I = \int_0^1 u^{1/2}\,du$, $I = [\frac{2}{3}u^{3/2}]_0^1$, $I = \frac{2}{3}$.

b) Soit $J = \int_0^1 x\sqrt{1-x^2}\,dx$, en utilisant le changement de variable défini par $u = 1 - x^2$, $du = -2x\,dx$,

lorsque $x = 0$, $u = 1$, lorsque $x = 1$, $u = 0$, $J = \int_1^0 -\frac{1}{2}\sqrt{u}\,du$ $J = \frac{1}{2}\int_0^1 \sqrt{u}\,du$, $J = \frac{1}{2}I$, $J = \frac{1}{3}$.

c) L'unité d'aire étant 100 cm^2 , l'aire de la partie de plan comprise entre la courbe C et l'axe des abscisses est :
200J soit $\frac{200}{3}$ cm^2 .

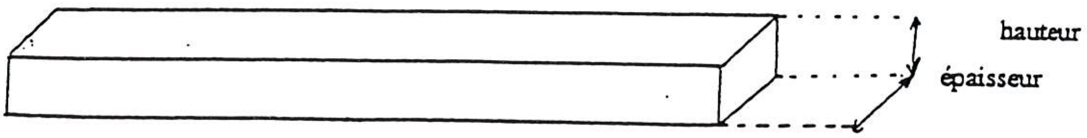
ÉTUDE ET ÉCONOMIE DE LA CONSTRUCTION

Session 1997

EXERCICE 1 (10 points)

Les 3 parties de cet exercice sont indépendantes. Les résultats seront arrondis à 10^{-3} près.

Une poutre de "lamellé-collé" est constituée d'éléments parallélépipédiques appelés "lamelles".



une lamelle

Ces lamelles sont produites par une chaîne constituée de deux raboteuses ; la première rabote la lamelle à l'épaisseur souhaitée, la seconde rabote la lamelle à la hauteur souhaitée.

On désigne par E la variable aléatoire qui, à toute lamelle tirée au hasard dans la production associe son épaisseur mesurée en millimètres et par H la variable aléatoire qui, à toute lamelle tirée au hasard dans la production associe sa hauteur mesurée en millimètres.

La variable aléatoire E suit la loi normale de moyenne 150 et d'écart type 0,23.

La variable aléatoire H suit la loi normale de moyenne 10 et d'écart type 0,1.

E et H sont deux variables aléatoires indépendantes.

1° Déterminer la probabilité $P(149{,}4 < E < 150{,}6)$.

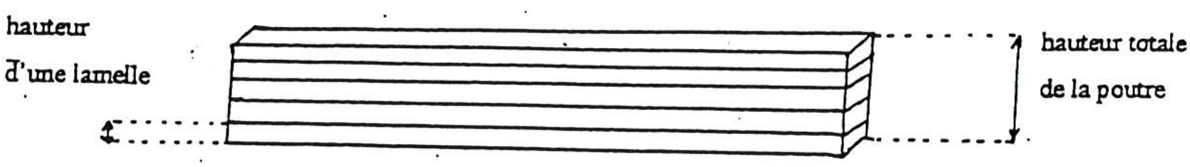
2° Déterminer la probabilité $P(9{,}8 < H < 10{,}2)$.

3° Un élément est acceptable si son épaisseur appartient à l'intervalle $[149{,}4 ; 150{,}6]$ et sa hauteur à l'intervalle $[9{,}8 ; 10{,}2]$.

a) Quelle est la probabilité qu'une lamelle soit acceptable ?

b) Quelle est la probabilité qu'une seule des deux dimensions convienne ?

B - Une poutre de lamellé-collé est constituée de la superposition de 5 lamelles prises au hasard dans la production.



On note Y la variable aléatoire qui, à toute poutre prise au hasard associe la hauteur totale de cette poutre. Y est la somme de cinq variables aléatoires indépendantes suivant la même loi normale que celle suivie par H.

Quelle est la loi de probabilité de Y ? Justifier la réponse et préciser les paramètres de cette loi.

C - On souhaite contrôler la hauteur des lamelles d'un lot de 5000 lamelles, avant leur assemblage en poutres. Pour cela, on prélève un échantillon aléatoire de 100 lamelles prises au hasard dans le lot. Le lot est suffisamment important pour que l'on puisse assimiler tout échantillon de 100 lamelles à un tirage de 100 lamelles avec remise.

On construit un test d'hypothèse :

On choisit pour hypothèse nulle "la moyenne de H vaut 10 mm" contre hypothèse alternative "la moyenne de H est différente de 10 mm". Le seuil de signification du test est fixé à 5 %.

On note $\overline{H}$ la variable aléatoire qui, à tout échantillon aléatoire de 100 lamelles associe la moyenne des hauteurs des éléments de l'échantillon.

1° Sous l'hypothèse nulle, quelle est la loi suivie par $\overline{H}$?

Déterminer le réel positif a tel que $P(10 - a < \overline{H} < 10 + a) = 0{,}95$

2° On note $\overline{h}$ la moyenne des hauteurs de l'échantillon prélevé.

A quelle condition sur $\overline{h}$ peut-on, au seuil de 5%, rejeter l'hypothèse nulle ?

EXERCICE 2 (10 points)

On considère sur $]\,0, +\infty\,[$ l'équation différentielle notée (E) : $y' - 2\dfrac{y}{x} = x$ où y désigne une fonction de la variable x, définie et dérivable.

1° a) Résoudre sur $]\,0, +\infty\,[$ l'équation différentielle (E') : $y' - 2\dfrac{y}{x} = 0$.

b) Déterminer le réel k tel que la fonction g définie par $g(x) = k\,x^2 \ln x$ soit solution de (E).

c) Donner la solution générale de (E).

d) Déterminer f solution de (E) dont la représentation graphique passe par le point A(1, 0).

2° On définit sur $]\,0, +\infty\,[$ la fonction f par $f(x) = x^2 \ln x$. La représentation graphique de f dans un plan muni d'un repère orthogonal (unités graphiques 5 cm sur l'axe des abscisses, 10 cm sur l'axe des ordonnées est donnée ci-après.

a) Calculer $f'(x)$.

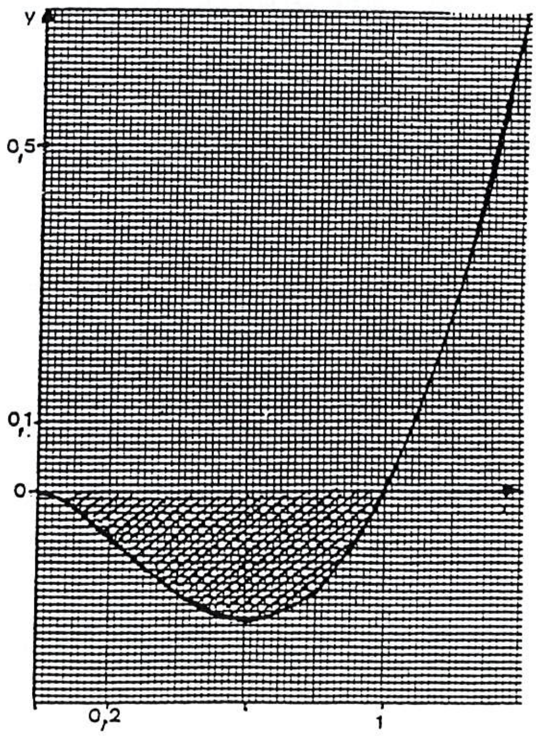
b) Etudier les limites de f en 0 et en $+\infty$.

c) Etudier les variations de la fonction f et résumer les conclusions dans un tableau.

3° a) En effectuant une intégration par parties, calculer $I(\lambda) = \displaystyle\int_{\lambda}^{1} x^2 \ln x \, dx$ où λ est un réel tel, que $0 < \lambda < 1$.

b) Déterminer $\displaystyle\lim_{\lambda \to +\infty} I(\lambda)$.

c) En déduire l'aire en cm de la partie du plan coloriée sur le shéma ci-dessous.



EXERCICE 1

1° La variable aléatoire E suit la loi $\mathcal{N}(150\,;\,0{,}23)$, la variable aléatoire $T_1 = \dfrac{X - 150}{0{,}23}$ suit la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0\,;\,1)$.

$P(149{,}4 \le E \le 150{,}6) = P(-\dfrac{0{,}6}{0{,}23} \le T_1 \le \dfrac{0{,}6}{0{,}23})$,

$P(149{,}4 \le E \le 150{,}6) = P(-2{,}61 \le T_1 \le 2{,}61)$,

$P(149{,}4 \le E \le 150{,}6) = 2\,\pi(2{,}61) - 1$,

$P(149{,}4 \le E \le 150{,}6) = 2(0{,}9955) - 1$,

$\mathbf{P(149{,}4 \le E \le 150{,}6) = 0{,}991}$ **à** 10^{-3} près.

2° La variable aléatoire F suit la loi $\mathcal{N}(10\,;\,0{,}1)$, la variable aléatoire $T_2 = \dfrac{X - 10}{0{,}1}$ suit la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0\,;\,1)$.

$P(9{,}8 \le F \le 10{,}2) = P(-\dfrac{0{,}2}{0{,}1} \le T_2 \le \dfrac{0{,}2}{0{,}1})$,

$P(9{,}8 \le F \le 10{,}2) = P(-2 \le T_2 \le 2)$,

$P(9{,}8 \le F \le 10{,}2) = 2\,\pi(2) - 1$,

$P((9{,}8 \le F \le 10{,}2) = 2(0{,}9772) - 1$,

$\mathbf{P(9{,}8 \le F \le 10{,}2) = 0{,}954}$ **à** 10^{-3} près.

3° Désignons par A l'événement "l'épaisseur appartient à l'intervalle [149,4 ; 150,6] " et B l'événement "la hauteur appartient à l'intervalle [9,8 ; 10,2] " les événements A et B sont indépendants donc P(A et B) = P(A) . P(B).

P(A et B) = 0,991 . 0,9544 ≈ 0,94541

P(A et B) = 0,945 à 10^{-3} près.

B - Chacune des 5 variables aléatoires H_1, H_2, H_3, H_4 et H_5 suivent la même loi normale $\mathcal{N}(10\,;\,0{,}1)$.

$H = H_1 + H_2 \,\ldots + H_5$, les 5 variables aléatoires H_1, H_2, H_3, H_4 et H_5 sont indépendantes.

$E[H] = E(H_1) + E(H_2) + \ldots\ldots + E(H_5)$, $\mathbf{E(H) = 50}$.

$V[H] = V(H_1) + V(H_2) + \ldots + V(H_5)$,

$V(H) = 5\,(0{,}01)^2$, $\mathbf{V[H] = 0{,}0005}$.

$\sigma(H) = \sqrt{V(H)}$, $\sigma(H) \approx 0{,}02236$ soit

$\mathbf{\sigma(H) = 0{,}022}$ **à** 10^{-3} près.

On sait que la somme de n variables indépendantes suivant une loi normale est une loi normale donc H suit la loi normale de paramètres m = 50 et σ = 0,022.

C - 1° Sous H_0, H suit la loi normale $\mathcal{N}(10\,;\,0{,}1)$, $\overline{H}$ suit la loi normale $\mathcal{N}(10\,;\,\dfrac{0{,}1}{\sqrt{100}})$ soit $\mathcal{N}(10\,;\,0{,}01)$.

$T = \dfrac{\overline{H} - 10}{0{,}01}$ suit la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0, 1)$

$P(100 - h \le \overline{H} \le 100 + h) = 0{,}95$ équivaut à

$2\,\pi(\dfrac{a}{0{,}01}) - 1 = 0{,}95$ et à $\pi(\dfrac{a}{0{,}01}) = 0{,}975$,

$\dfrac{a}{0{,}01} = 1{,}96$, $a \approx 0{,}0196$, $\mathbf{a = 0{,}02}$ à 10^{-3} près.

Si H_0 est vraie on a 95% de chances de prélever un échantillon aléatoire dont la moyenne appartient à l'intervalle I = [9,98 ; 10,02] soit 5% de chance que cette moyenne soit à l'extérieur de I.

2° La région critique est l'extérieur de l'intervalle **I = [9,98 ; 10,02]**.

Règle de décision : On prélève un échantillon aléatoire, non exhaustif, de taille 100. On calcule sa moyenne $\overline{h}$.

si $\overline{h} \in I$ on accepte H_0 et on rejette H_1 ;

si $\overline{h} \notin I$ on accepte H_1 et on rejette H_0.

On rejette donc l'hypothèse nulle lorsque $\overline{h} \notin I$.

EXERCICE 2

1° a) L'équation (E') : $y' - 2\dfrac{y}{x} = 0$ est de la forme $a(x)\,y' + b(x)\,y = 0$. Toutes les solutions de cette équation sont donc définies sur $]0, +\infty[$ par $y(x) = K\,e^{-G(x)}$ où K est une constante réelle et G une primitive de $\dfrac{b}{a}$.

Pour tout x de $]0, +\infty[$, $\dfrac{b(x)}{a(x)} = -\dfrac{2}{x}$ d'où $G(x) = -2\ln x$,

$G(x) = -\ln x^2$. $y(x) = K\,e^{\ln x^2}$, $y(x) = K\,e^{\ln x^2}$,

$y(x) = K\,x^2$ où K est une constante réelle quelconque.

b) $g(x) = k\,x^2 \ln x$, $g'(x) = k(2\,x \ln x + x^2 \dfrac{1}{x})$,

$g'(x) = 2\,k\,x \ln x + k\,x$, g est solution de (E) si et seulement si pour tout nombre réel x de $]0, +\infty[$,

$g'(x) - \dfrac{2}{x}\,g(x) = x$ qui est équivalent à

$2\,k\,x \ln x + k\,x - 2\,k\,x\,\ln x = x$ donc à $x\,(k - 1) = 0$, avec k = 1 l'égalité précédente est vérifiée pour tout x de $]0, +\infty[$, une solution particulière de (E) est donc définie sur $]0, +\infty[$ par $g(x) = x^2 \ln x$.

c) L'ensemble des solutions de (E) est l'ensemble des fonctions f définies sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = x^2 \ln x + K x^2$ où K est une constante réelle quelconque.

d) La courbe représentative de la solution f de (E) passe par le point A(1, 0) donc $f(1) = 0$, $1 \ln 1 + K = 0$, $K = 0$ d'où $f(x) = x^2 \ln x$.

2° a) Pour tout réel x de $]0, +\infty[$, $f'(x) = 2x \ln x + x$, $f'(x) = x(1 + 2\ln x)$.

b) On sait que $\lim\limits_{x\to 0} x^\alpha \ln x = 0$ avec $\alpha > 0$ donc $\lim\limits_{x\to 0} x^2 \ln x = 0$, c'est à dire $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$.

c) de $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$ on déduit que $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 \ln x = +\infty$, c'est à dire $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

Pour tout x de $]0, +\infty[$, $f'(x) = x(1 + 2\ln x)$.

Les inéquations suivantes sont équivalentes sur $]0, +\infty[$:

$f'(x) \geq 0$, $2\ln x + 1 \geq 0$, $\ln x \geq -\frac{1}{2}$, $x \geq e^{-1/2}$.

$f(e^{-1/2}) = (e^{-1/2})^2 \ln e^{-1/2}$, $f(e^{-1/2}) = -\frac{1}{2e}$.

x	0		$e^{-1/2}$		$+\infty$
f '(x)	||	−	0	+	
f(x)	|| 0	↘	$-\frac{1}{2e}$	↗	$+\infty$

3° a) Pour tout λ de $[0, 1]$, $I(\lambda) = \displaystyle\int_\lambda^1 x^2 \ln x \, dx$,

En posant $u'(x) = x^2$, $v(x) = \ln x$,

$u(x) = \frac{1}{3}x^3$, $v'(x) = \frac{1}{x}$,

$$I(\lambda) = \left[\frac{1}{3}x^3 \ln x\right]_\lambda^1 - \int_\lambda^1 \frac{1}{3}x^2 \, dx,$$

$$I(\lambda) = \left[\frac{1}{3}x^3 \ln x - \frac{1}{9}x^3\right]_\lambda^1,$$

$$I(\lambda) = -\frac{1}{9} - \frac{1}{3}\lambda^3 \ln \lambda + \frac{1}{9}\lambda^3.$$

b) Du résultat rappelé au 2° b) on déduit que

$\lim\limits_{\lambda\to 0} \lambda^3 \ln \lambda = 0$.

$\lim\limits_{\lambda\to 0} \frac{1}{9}\lambda^3 = 0$ d'où $\lim\limits_{\lambda\to 0} I(\lambda) = -\frac{1}{9}$.

c) Pour tout x de $[\lambda, 1]$, $\ln x \leq 0$ donc $f(x) \leq 0$.

L'aire de la partie du plan limitée par la courbe C, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = \lambda$ et $x = 1$ est donc $-I(\lambda)$.

L'aire de la partie du plan coloriée est donc en, unités d'aire, $\lim\limits_{\lambda\to 0} [-I(\lambda)] = \frac{1}{9}$, l'aire en cm^2 est $\frac{50}{9}$ cm^2.

TRAVAUX PUBLICS

Session 1989

EXERCICE 2 (10 points)

L'objectif de cet exercice est d'obtenir une valeur approchée d'une intégrale et de comparer à la valeur exacte de cette intégrale.

On considère la fonction définie sur $\left[-\frac{1}{2}, 0\right]$ par :

$$f(x) = \frac{2}{x^2 + x + 1}.$$

Soit $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni du repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$, unité 6 cm.

A - Détermination d'une valeur approchée de l'intégrale

$$J = \int_{-\frac{1}{2}}^{0} f(x)\,dx.$$

1° Etudier les variations de f sur I.

2° Construire $\mathscr{C}$. On placera en particulier sur la figure les points A, B, D, E, F de $\mathscr{C}$ d'abscisses respectives

$$-\frac{1}{2}, -\frac{3}{8}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, 0.$$

3° Soient A', B', D', E' les projections orthogonales respectives sur l'axe des abscisses des points A, B, D, E . Calculer, en unités d'aire, une valeur approchée à 10^{-3} près de la somme $\mathscr{S}$ des aires des trapèzes ABBA', BDD'B', DEE'D' , EFOE' . C'est ce nombre que l'on prend comme valeur approchée de J.

B - Détermination de la valeur exacte de l'intégrale

$$J = \int_{-\frac{1}{2}}^{0} f(x)\,dx.$$

1° Calculer l'intégrale J à l'aide du changement de variable $t = \frac{1}{\sqrt{3}}(2x + 1)$.

2° Donner la valeur décimale approchée de J arrondie à 10^{-3} près.

Vérifier que cette valeur approchée diffère de moins de 5.10^{-3} du résultat obtenu au A - 3°.

EXERCICE 2

A - 1° f est une fonction dérivable sur $\left[-\frac{1}{2}, 0\right]$.

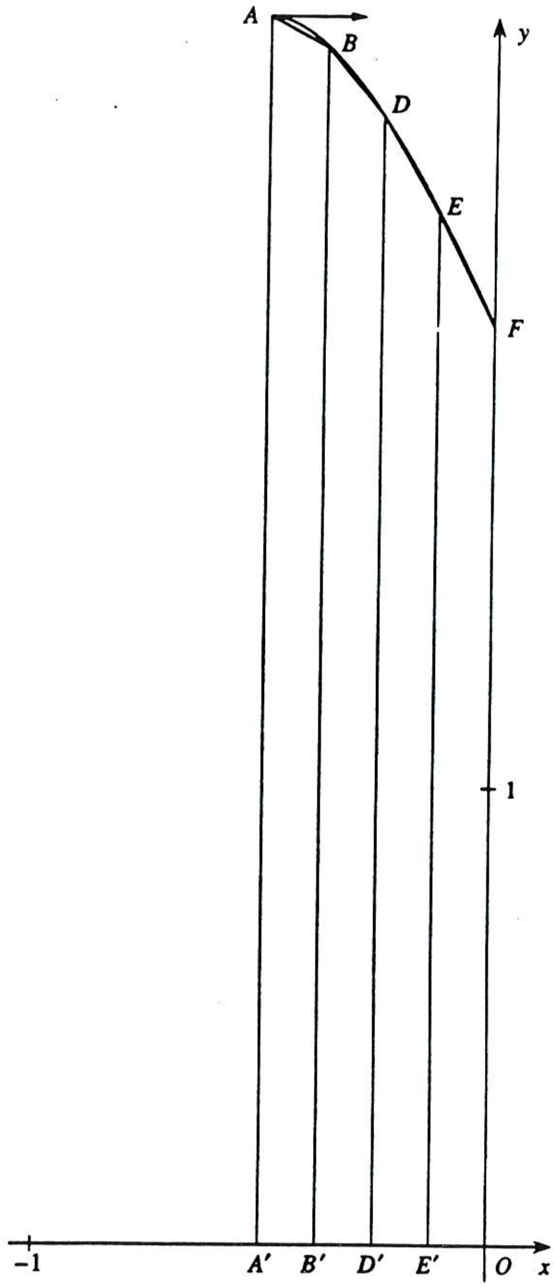
Pour tout réel x de $\left[-\frac{1}{2}, 0\right]$, $\qquad f'(x) = \dfrac{-2(2x+1)}{(x^2+x+1)}$.

Le signe de f '(x) est celui de $-2(2x+1)$, donné par :

x	$-\frac{1}{2}$		0
$-2(2x+1)$	0	−	−2

D'où le tableau de variation :

x	$-\frac{1}{2}$		0
f '(x)	0	−	−2
f(x)	$\frac{8}{3}$	↘	2



2° Voir figure.

3° Avec une calculatrice on obtient $\mathcal{S} \approx 1{,}207$.

B - 1° Lorsque $x = -\frac{1}{2}$, $t = \frac{1}{\sqrt{3}}\left[2\left(-\frac{1}{2}\right) + 1\right]$, $t = 0$.

Lorsque $x = 0$, $t = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

Pour tout x de $\left[-\frac{1}{2}, 0\right]$ $t = \frac{1}{\sqrt{3}}(2x+1)$ donc $\dfrac{dt}{dx} = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$,

donc $dt = \dfrac{2}{\sqrt{3}}\,dx$, $\quad dx = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\,dt$.

$t = \dfrac{1}{\sqrt{3}}(2x+1)$ donc $2x + 1 = \sqrt{3}\,t$,

$2x = \sqrt{3}\,t - 1$, $\quad x = \frac{1}{2}(\sqrt{3} - 1)$.

$$\text{Donc } \frac{2}{x^2+x+1} = \frac{2}{\frac{1}{4}(\sqrt{3}t-1)^2 + \frac{1}{2}(\sqrt{3}t-1) + 1},$$

$$= \frac{8}{(\sqrt{3}t-1)^2 + 2(\sqrt{3}t-1) + 1},$$

$$= \frac{8}{3t^2 - 2\sqrt{3}t + 1 + 2\sqrt{3}t - 2 + 4},$$

$$\frac{2}{x^2+x+1} = \frac{8}{3t^2+3}$$

$$\frac{2}{x^2+x+1} = \frac{8}{3}\left(\frac{1}{t^2+1}\right).$$

$$\text{Donc } J = \int_0^{1/\sqrt{3}} \frac{8}{3}\left(\frac{1}{t^2+1}\right)\frac{\sqrt{3}}{2}\,dt.$$

$$J = \frac{4\sqrt{3}}{3}\int_0^{1/\sqrt{3}} \frac{1}{t^2+1}\,dt.$$

$$J = \frac{4\sqrt{3}}{3}\left[\text{Arctan } t\right]_0,$$

$$J = \frac{4\sqrt{3}}{3}\left[\text{Arctan}\frac{1}{\sqrt{3}} - \text{Arctan } 0\right],$$

$$J = \frac{4\sqrt{3}}{3}\left[\frac{\pi}{6} - 0\right], \quad J = \frac{2\pi\sqrt{3}}{9}.$$

2° $J \approx 1{,}209$. On vérifie que

$1{,}209 - 1{,}207 = 2.\,10^{-3} < 5.10^{-3}$.

TRAVAUX PUBLICS

Session 1990

EXERCICE 1

Une machine fabrique des tiges.

On mesure la longueur de 100 tiges et on obtient les résultats suivants :

Intervalles en mm	centres de classes	effectifs
[16,17[	16,5	1
[17,18[	17,5	5
[18,19[	18,5	11
[19,20[	19,5	56
[20,21[	20,5	13
[21,22[	21,5	11
[22,23[	22,5	3

1. Déterminer la moyenne m, la médiane m' et l'écart-type σ de cette série statistique. On donnera, pour les résultats, une valeur approchée à 10^{-2} près. (Pour la détermination de m et σ, on ne demande aucun calcul intermédiaire).

2. On admet pour la suite que la variable aléatoire X mesurant la taille d'une tige produite par la machine suit une loi normale de paramètres $m = 19{,}7$ et $\sigma = 1{,}1$.

a) Calculer la probabilité de l'événement $X \geq 20{,}5$.

b) Donner l'intervalle [m-h ; m+h] tel que la variable aléatoire X prenne ses valeurs dans cet intervalle avec la probabilité 0,95.

c) Une tige est défectueuse lorsque sa taille n'est pas dans l'intervalle [17, 22]. Calculer la probabilité qu'une tige soit défectueuse.

d) On appelle Y la variable aléatoire qui associe à chaque lot de 100 tiges le nombre de pièces défectueuses de ce lot. (On assimilera le tirage des 100 tiges à un tirage non exhaustif).
Expliquer pourquoi Y suit une loi binomiale et donner les paramètres de cette loi binomiale.
On décide d'approcher cette loi par une loi de Poisson.
En déterminer le paramètre, puis calculer, en utilisant cette approximation, la probabilité de l'événement $Y \leq 2$.

EXERCICE 2

A• Soient les équations différentielles :

$$(E_0)\quad x^2y' + y = 0 \quad \text{et} \quad (E)\quad x^2y' + y = x^2e^{\frac{1}{x}},$$

dans lesquelles y désigne une fonction de la variable réelle x, définie et dérivable sur $]0,+\infty[$, et y' la fonction dérivée de y sur ce même intervalle.

1. Résoudre l'équation différentielle (E_0).

2. Vérifier que la fonction g définie sur $]0,+\infty[$ par $g(x) = xe^{\frac{1}{x}}$ est solution de (E).

3. Résoudre l'équation différentielle (E).

B• Soit f la fonction définie sur $I=\left[1\ ,\ \frac{3}{2}\right]$ par : $f(x) = (x-1)e^{\frac{1}{x}}$, et $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j})$ d'unité graphique 10 cm.

1. a) Montrer que pour tout x de l'intervalle I la fonction dérivée de f est définie par :
$f'(x) = \dfrac{x^2 - x + 1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}$. En déduire le sens de variation de f.

b) On note M_1, M_2, M_3, M_4 et M_5 les points de la courbe $\mathscr{C}$ d'abscisses respectives 1,1 ; 1,2 ; 1,3 ; 1,4 ; 1,5. Donner dans un tableau les approximations décimales d'ordre 4 par défaut, fournies par la calculatrice, des ordonnées de ces points.
On note P_1, P_2, P_3, P_4 et P_5 les points de la courbe $\mathscr{C}$ d'abscisses respectives 1,05 ; 1,15 ; 1,25 ; 1,35 ; 1,45. Donner dans un tableau les approximations décimales d'ordre 4 par excès, fournies par la calculatrice, des ordonnées de ces points.

c) Tracer la courbe $\mathscr{C}$.

2. Soit $\mathscr{D}$ la partie du plan comprise entre la courbe $\mathscr{C}$, l'axe $(O\,;\vec{i})$ et la droite d'équation $x=\frac{3}{2}$. On note A_0, A_1, A_2, A_3, A_4 et A_5 les point de l'axe $(O;\vec{i})$ d'abscisses respectives : 1 ; 1,1 ; 1,2 ; 1,3 ; 1,4 ; 1,5.
On admet que la courbe $\mathscr{C}$ est située au-dessus de la ligne polygonale $A_0M_1M_2M_3M_4M_5$ et au-dessous de ses tangentes en chacun des point P_1, P_2, P_3, P_4 et P_5.

a) En utilisant les résultats donnés dans la question B 1 b), calculer une valeur approchée par défaut de l'aire, en centimètres carrés, du polygone $A_0A_5M_5M_4M_3M_2M_1$.

b) Pour tout élément i de $\{1, 2, 3, 4, 5\}$, on considère le trapèze dont les côtés sont l'axe $(O\,;\vec{i})$, les deux droites de direction $\vec{j}$ passant respectivement par A_{i-1} et par A_i, et la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point P_i.
En utilisant les résultats donnés dans la question B 1 b), calculer une valeur approchée par excès de la somme des aires, en centimètres carrés, des cinq trapèzes ainsi obtenus.

c) Déduire des questions précédentes, un encadrement de l'aire, exprimée en centimètres carrés, de la surface $\mathscr{D}$.

EXERCICE 1

1. A l'aide de la calculatrice on trouve $m = 19{,}7$ et $\sigma = 1{,}09$ à 10^{-2} près.

Intervalles en mm	centres de classes	effectifs	effectifs cumulés croissants
[16,17[	16,5	1	1
[17,18[	17,5	5	6
[18,19[	18,5	11	17
[19,20[	19,5	56	73
[20,21[	20,5	13	86
[21,22[	21,5	11	97
[22,23[	22,5	3	100

L'effectif total est 100, le rang de la médiane est 50.

En observant les effectifs cumulés croissants on a :

$19 \leq Mé \leq 20$

$17 \leq 50 \leq 73$ d'où $\dfrac{Mé - 19}{20 - 19} = \dfrac{50 - 17}{73 - 17}$

$Mé = 19 + \dfrac{33}{56}$ $\mathbf{Mé = 19{,}59}$ à 10^{-2} près.

On observe qu'il y a autant de tiges qui mesurent moins de 19,59 mm que de tiges qui mesurent plus de 19,59 mm.

2. La variable aléatoire X suit la loi normale de paramètres $m = 19{,}7$ et $\sigma = 1{,}1$.

a) Soit T la variable aléatoire centrée réduite associée $T = \dfrac{X - 0{,}7}{1{,}1}$, T suit la loi $\mathcal{N}(0\ ,\ 1)$.

$P(X \geq 20{,}5) = P(T \geq \dfrac{20{,}5 - 19{,}7}{1{,}1})$,

$P(X \geq 20{,}5) = P(T \geq 0{,}727)$,

$P(X \geq 20{,}5) = 1 - \pi(0{,}727) = 1 - 0{,}766$,

$P(X \geq 20{,}5) = \mathbf{0{,}234}$ à 10^{-3} près.

b) $P(\ m - h \leq X \geq m + h\ ) = 0{,}95$ donne en utilisant la variable centrée réduite $T = \dfrac{X - m}{1{,}1}$:

$P(-\dfrac{h}{1{,}1} \leq T \leq \dfrac{h}{1{,}1}) = 0{,}95$, $2[\pi(\dfrac{h}{1{,}1}) - 0{,}5] = 0{,}95$

soit $\pi(\dfrac{h}{1{,}1}) = 0{,}975$. On trouve dans la table :

$\dfrac{h}{1{,}1} = 1{,}96$ et $\mathbf{h = 2{,}156}$.

L'intervalle cherché est **[17,54 ; 21,85]**.

c) La probabilité qu'une tige ne soit pas défectueuse est $P(\ 17 \leq X \leq 22\ ) = P(\dfrac{17-19{,}7}{1{,}1} \leq T \leq \dfrac{22-19{,}7}{1{,}1})$

$P(\ 17 \leq X \leq 22\ ) = P(-\ 2{,}45 \leq T \leq 2{,}09)$,

$P(\ 17 \leq X \leq 22\ ) \approx \pi(2{,}09) - 0{,}5 + \pi(2{,}45) - 0{,}5$

$P(\ 17 \leq X \leq 22\ ) \approx 0{,}4820 + 0{,}4930$,

$P(\ 17 \leq X \leq 22\ ) \approx \mathbf{0{,}975}$.

La probabilité qu'une tige soit défectueuse est donc :

$1 - 0{,}975 = \mathbf{0{,}025}$.

d) Soit Y la variable aléatoire qui à tout lot de 100 pièces associe le nombre de pièces défectueuses.

Les tirages sont supposés indépendants, pour chaque tirage il y a deux éventualités:

la tige est défectueuse avec une probabilité $p = 0{,}025$ ou la pièce est non défectueuse avec une probabilité 0,975, donc la variable aléatoire Y suit la loi binomiale $\mathcal{B}(100\ ;\ 0{,}025)$.

On approche cette loi binomiale par une loi de Poisson de paramètre : $\lambda = np = 100 \times 0{,}025 = 2{,}5$.

Remarque:
ce paramètre est inférieur à 15, p est faible et n est suffisamment grand, ce qui justifie l'approximation de cette loi binomiale par une loi de Poisson.

$P(X \leq 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)$

$= \dfrac{e^{-2,5} \times 2{,}5^0}{0!} + \dfrac{e^{-2,5} \times 2{,}5^1}{1!} + \dfrac{e^{-2,5} \times 2{,}5^2}{2!}$

$P(X \leq 2) = 0{,}082 + 0{,}205 + 0{,}256$

$P(X \leq 2) = \mathbf{0{,}544}$.

EXERCICE 2

A• 1. Puisque y désigne une fonction de la variable réelle x, définie et dérivable sur $]0,+\infty[$, et y' la fonction dérivée de y sur ce même intervalle, l'équation (E_0) est équivalente à $y' + \dfrac{1}{x^2}y = 0$.

C'est une équation différentielle linéaire du premier ordre. On sait que la solution générale de l'équation $y'(x) + a(x)y(x) = 0$ est définie par $y(x) = Ce^{-A(x)}$, où A est une primitive de la fonction a, et C est une constante réelle arbitraire. Une primitive de la fonction $(x \longmapsto \dfrac{1}{x^2})$ sur $]0,+\infty[$ est $(x \longmapsto -\dfrac{1}{x})$.

On en déduit que la solution générale de (E_0) est définie sur $]0,+\infty[$ par: $y(x) = Ce^{\frac{1}{x}}$, où C est une constante réelle quelconque.

2. Pour tout nombre réel $x>0$, on a $g(x) = x\,e^{\frac{1}{x}}$,

d'où $g'(x) = e^{\frac{1}{x}} + x(-\dfrac{1}{x^2})\,e^{\frac{1}{x}}$, $g'(x) = (1-\dfrac{1}{x})e^{\frac{1}{x}}$.

On en déduit : $x^2g'(x) + g(x) = x^2(1-\dfrac{1}{x})e^{\frac{1}{x}} + x\,e^{\frac{1}{x}}$

$x^2g'(x) + g(x) = x^2e^{\frac{1}{x}} - x\,e^{\frac{1}{x}} + x\,e^{\frac{1}{x}}$

$x^2g'(x) + g(x) = x^2e^{\frac{1}{x}}$. g est une solution de (E).

3. L'équation (E) est une équation différentielle linéaire du premier ordre.
La solution générale de l'équation (E) est la somme d'une solution particulière de cette équation et de la solution générale de l'équation sans second membre associée (E_0). La solution générale de l'équation (E) est donc définie sur]0,+∞[par : $y(x) = (x + C)e^{\frac{1}{x}}$, où C est une constante réelle quelconque.

B• 1. a) Pour tout x de $I = [1 , \frac{3}{2}]$ on a

$f(x) = (x-1)e^{\frac{1}{x}}$, d'où : $f'(x) = e^{\frac{1}{x}} + (x-1)(-\frac{1}{x^2})\, e^{\frac{1}{x}}$

$$f'(x) = \frac{x^2 - x + 1}{x^2} e^{\frac{1}{x}}.$$

Le discriminant du trinôme $x^2 - x + 1$ est $\Delta = -3$.
On en déduit que ce trinôme est strictement positif sur l'intervalle I.

Pour tout x de l'intervalle I, $x^2 > 0$ et $e^{\frac{1}{x}} > 0$.
Par suite la fonction dérivée de f est strictement positive sur l'intervalle I et f est donc strictement croissante sur I.

b) Tableau des coordonnées des points M_1, M_2, M_3, M_4 et M_5 de la courbe $\mathscr{C}$.

(approximations décimales d'ordre 4 par défaut des ordonnées).

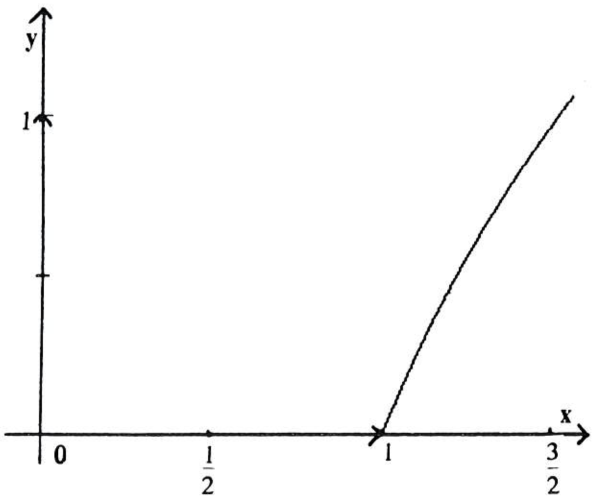
x	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5
f(x)	0,2482	0,4601	0,6474	0,8170	0,9738

Tableau des coordonnées des points P_1, P_2, P_3, P_4 et P_5 de la courbe $\mathscr{C}$.

(approximations décimales d'ordre 4 par excès des ordonnées).

x	1,05	1,15	1,25	1,35	1,45
f(x)	0,1296	0,3579	0,5564	0,7342	0,8969

c) Tracé de la courbe $\mathscr{C}$:



2 a) L'unité d'aire vaut 100 cm^2, donc l'aire du polygone $A_0A_5M_5M_4M_3M_2M_1$, exprimée en cm^2, est égale à :

$100 \times [aire(A_0A_1M_1) + aire(A_1A_2M_2M_1) + aire(A_2A_3M_3M_2) + aire(A_3A_4M_4M_3) + aire(A_4A_5M_5M_4)]$.

Une valeur approchée par défaut de chacune de ces aires est :

$aire(A_0A_1M_1) = 100 \times [\frac{1}{2} \times 0,1 \times 0,2482]$

$aire(A_1A_2M_2M_1) = 100[\frac{1}{2}(0,2482 + 0,4601) \times 0,1]$

$aire(A_2A_3M_3M_2) = 100\,[\frac{1}{2}(0,4601 + 0,6474) \times 0,1]$

$aire(A_3A_4M_4M_3) = 100\,[\frac{1}{2}(0,6474 + 0,8170) \times 0,1]$

$aire(A_4A_5M_5M_4) = 100\,[\frac{1}{2}(0,8170 + 0,9738) \times 0,1]$

Une valeur approchée par défaut de l'aire $\mathscr{A}_1$ du polygone $A_0A_5M_5M_4M_3M_2M_1$, exprimée en cm^2, est : $\mathscr{A}_1 = 56[0,2482 + (0,2482 + 0,4601) + (0,4601 + 0,6474) + (0,6474 + 0,8170) + (0,8170 + 0,9738)]$

$\mathscr{A}_1 = 26,596$.

b) On observe que pour chacun des trapèzes donnés, l'image par la projection orthogonale sur l'axe des abscisses du point P_i est le milieu du segment $[A_{i-1}A_i]$. L'aire de chacun de ces trapèzes, exprimée en cm^2, est donnée par $100 \times 0,16f(x_i)$.

La somme des aires des trapèzes donnés, exprimée en cm^2, est égale à :
$10 \times [f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + f(x_4) + f(x_5)]$.

Une valeur approchée par excès de cette aire est :
$\mathscr{A}_2 = 106[0,1296 + 0,3579 + 0,5564 + 0,7342 + 0,8969]$
$\mathscr{A}_2 = 26,75$.

c) Il résulte des positions relatives de la ligne polygonale $A_0M_1M_2M_3M_4M_5$,de la courbe C , et de ses tangentes en chacun des point P_1 , P_2 , P_3 , P_4 et P_5 , que $\mathscr{A}_1$ et $\mathscr{A}_2$ sont des valeurs approchées respectivement par défaut et par excès de l'aire $\mathscr{A}$ de la surface $\mathscr{D}$.

On en déduit: $26,596 < \mathscr{A} < 26,75$.

TRAVAUX PUBLICS

Session 1991

EXERCICE 1

Dans l'entrepôt de stockage des barres de ferraillage produites par une usine, on a effectué le prélèvement d'un échantillon de 100 barres dont on a mesuré les longueurs

Les résultats sont rassemblés dans le tableau ci-dessous (unité de mesure, le centimètre) :

classe	[346;347[	[347;348[	[348;349[	[349;350[	[350;351[	[351;352[	[352;353[	[353;354[	[354;355[
effectif	1	4	14	24	18	21	12	4	2

Pour tous les résultats on demande une valeur approchée à 10^{-2} près.

1) Statistique :

Calculer la moyenne m et l'écart type σ de cette série statistique ; on utilisera les centres de classes. (Aucun calcul intermédiaire n'est demandé).

2) Probabilités :

Soit X la variable aléatoire qui, à chaque barre quelconque stockée dans l'entrepôt, associe sa longueur exprimée en centimètres. On fait l'hypothèse que X suit une loi normale de moyenne m et d'écart type σ (m et σ calculés à partir de l'échantillon de la question précédente).

a) Déterminer la probabilité qu'une barre quelconque de l'entrepôt ait une longueur inférieure à 353 cm.

b) Soit d un nombre réel positif et (E) l'événement : "une barre prise au hasard dans l'entrepôt a une longueur comprise dans l'intervalle [m - d , m + d]".

Calculer d pour que la probabilité de (E) soit égale à 0,8.

Exercice 2

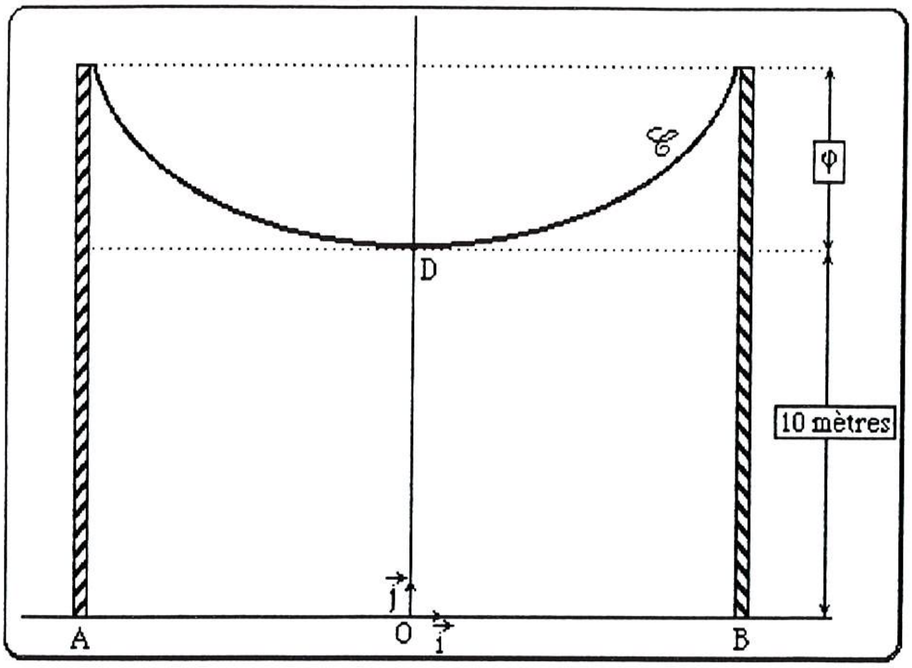
Cet exercice étudie la courbe $\mathscr{C}$ décrite par un câble souple, non élastique, suspendu par ses extrémités à deux piliers de même hauteur et situés à la même altitude.

Les parties A, B et C peuvent être traitées séparément.

Compte-tenu de la symétrie du problème, on choisit le repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ représenté sur la figure.

Unité de longueur: $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 0,5$ cm, échelle 1/200ème, c'est-à-dire que sur la figure 0,5 cm représente 1 m. On démontre, et on l'admet dans ce problème, que la représentation graphique dans le repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ d'une fonction numérique de la variable réelle x solution de l'équation différentielle suivante :

(I) $\quad y'' - \frac{1}{100} y = 0$ ($\frac{1}{100}$ est une constante liée au câble) vérifiant les conditions initiales $y(0) = 10$ et $y'(0) = 0$.



A• *Résolution d'une équation différentielle.*

1. Donner toutes les solutions de l'équation (I).

2. Déterminer la solution de (I) vérifiant les conditions initiales :
$y(0) = 10$ et $y'(0) = 0$.

B• *Étude et représentation graphique d'une fonction.*

Soit f la fonction numérique définie sur l'intervalle $J=[-10,10]$ par : $f(x) = 5\left(e^{\frac{x}{10}} + e^{-\frac{x}{10}}\right)$.

1. Étudier la parité de la fonction f.

2. Étudier les variations de f et dresser son tableau de variation.

3. Tracer la courbe représentative $\mathscr{C}$ de f dans le repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ d'unité graphique 0,5 cm.

C• *Calcul de la longueur* L *du câble et de la flèche* φ *de la courbe* $\mathscr{C}$.

On note L la longueur du câble exprimée en mètres, et d la distance OA = OB = 10 mètres. On admet que $L = 20 f'(d)$.
Déterminer la longueur du câble et calculer la valeur de la flèche φ.

Exercice 1

1) Statistique :

La calculatrice donne **m =350,47** et **σ = 1,64** à 10^{-2} près.

2) Probabilité :

On admet que X suit la loi normale $\mathcal{N}$ (m ; σ) avec m = 350,47 et σ = 1,64.

La variable centrée réduite $T = \dfrac{X-350,47}{1,64}$ associée à X suit la loi normale $\mathcal{N}$ (0;1).

a) On a donc : $P(X < 353) = P(T < \dfrac{353 - 350,47}{1,64})$

$P(X < 353) \approx P(T < 1,54)$, $P(X < 353) \approx \pi(1,54)$,

$P(X < 353) \approx 0,9382$. **P(X < 353) ≈ 0,94.**

b) On cherche le nombre réel positif d tel que $P(m - d < X < m + d) = 0,8$. En utilisant la variable centrée réduite T on obtient successivement:

$P(-\dfrac{d}{1,64} < T < \dfrac{d}{1,64}) = 0,8$, $2\pi(\dfrac{d}{1,64}) - 1 = 0,8$,

$2\pi(\dfrac{d}{1,64}) = 1,8$, $\pi(\dfrac{d}{1,64}) = 0,9$,

et par lecture inverse de la table on trouve :

$\dfrac{d}{1,64} \approx 1,28$ d'où $d \approx 2,099$.

Une valeur approchée de d à 10^{-2} près est **2,01.**

Exercice 2

A• **1.** L'équation (I) est une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants.

L'équation caractéristique associée à (I) est $r^2 - \dfrac{1}{100} = 0$,

équivalente à $(r + \dfrac{1}{10})(r - \dfrac{1}{10}) = 0$,

les solutions sont donc $r_1 = -\dfrac{1}{10}$ et $r_2 = \dfrac{1}{10}$.

On en déduit que toutes les solutions de (I) sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par

$y = C_1 e^{\frac{x}{10}} + C_2 e^{-\frac{x}{10}}$, où C_1 et C_2 sont des constantes réelles quelconques.

2. Pour tout nombre réel x on a

$y(x) = C_1 e^{\frac{x}{10}} + C_2 e^{-\frac{x}{10}}$,

donc $y'(x) = \dfrac{1}{10} C_1 e^{\frac{x}{10}} - \dfrac{1}{10} C_2 e^{-\frac{x}{10}}$.

La recherche de la solution particulière de (I) vérifiant les conditions initiales $y(0) = 10$ et $y'(0) = 0$ conduit à la résolution du système:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 0 \\ \dfrac{1}{10} C_1 - \dfrac{1}{10} C_2 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} C_1 + C_2 = 0 \\ C_1 - C_2 = 0 \end{cases}$$

La demi-somme, puis la demi-différence membres à membres de ces égalités donnent respectivement $C_1 = 5$ et $C_2 = 5$.

La solution cherchée est la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par:

$f(x) = 5(e^{\frac{x}{10}} + e^{-\frac{x}{10}})$.

B• **1.** Pour tout x de l'intervalle $J = [-10,10]$, $-x$ appartient à J et $f(-x) = 5(e^{-\frac{x}{10}} + e^{-(-\frac{x}{10})})$

$f(-x) = 5(e^{-\frac{x}{10}} + e^{\frac{x}{10}}) = f(x)$. La fonction f est paire.

2. La fonction f est paire, on étudie donc la restriction de f à l'intervalle [0,10], la courbe $\mathscr{C}$ est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées $(O ; \vec{j})$.

Pour tout x de [0,10], on a :

$f'(x) = \dfrac{1}{2} e^{\frac{x}{10}} - \dfrac{1}{2} e^{-\frac{x}{10}}$, $f'(x) = \dfrac{1}{2} e^{-\frac{x}{10}} (e^{2\frac{x}{10}} - 1)$

$f'(x) = \dfrac{1}{2} e^{-\frac{x}{10}} (e^{\frac{x}{5}} - 1)$.

Quel que soit $x \in [0,10]$, $\dfrac{1}{2} e^{-\frac{x}{10}} > 0$, donc le signe de $f'(x)$ est celui de $e^{\frac{x}{5}} - 1$.

Or, pour tout x de [0,10], on a $e^{\frac{x}{5}} \geq 1$.

On en déduit que la fonction dérivée f' de f est positive sur l'intervalle [0,10], et ne prend la valeur 0 que pour x = 0. Par suite, la fonction f est strictement croissante sur [0,10].

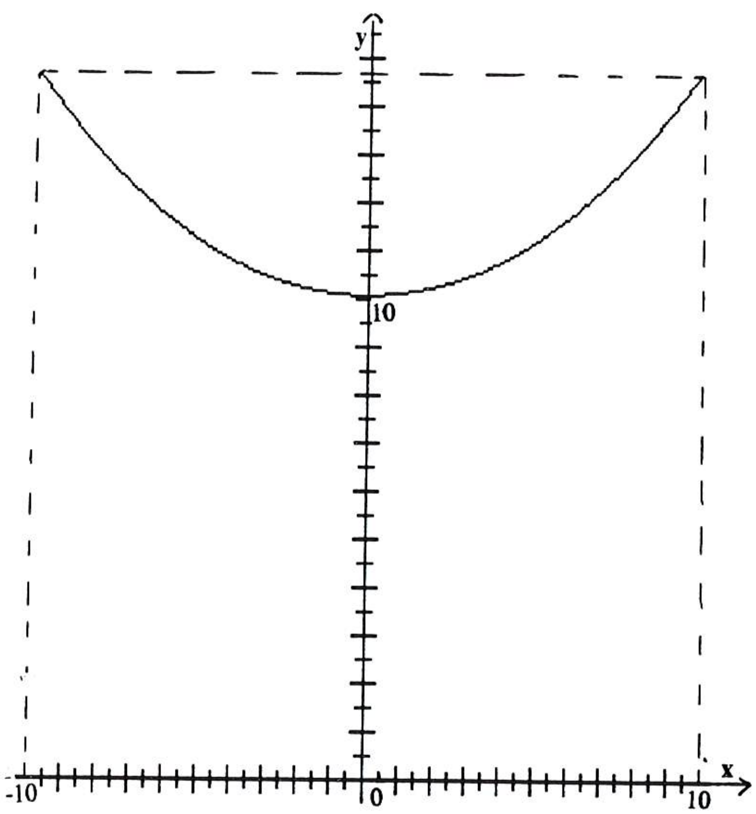
Tableau de variation de f :

x	0		10
f '	0	+	$\frac{1}{2}(e - \frac{1}{e})$
f	10	↗	$5(e+\frac{1}{e})$

Pour le tracé de la courbe $\mathscr{C}$, on a :

$\frac{1}{2}(e - \frac{1}{e}) \approx 1,175$ et $5(e + \frac{1}{e}) \approx 15,431.$

3. Tracé de la courbe $\mathscr{C}$.



C• Calcul de la longueur L du câble :

$L = 20f'(10)$, $L = 10(e - \frac{1}{e})$.

Une valeur approchée de L est 23,50 mètres.

• Calcul de la flèche φ du câble :

$\varphi = f(10) - 10$, $\varphi = 5(e + \frac{1}{e}) - 10$.

Une valeur approchée de φ est 5,43 mètres.

TRAVAUX PUBLICS

Session 1992

Exercice 1 (8 points)

A - 1ère partie :

Une machine fabrique des pièces cylindriques utilisées dans le secteur des Travaux Publics. A chaque pièce on associe sa longueur l et son rayon r exprimés en centimètres, on définit ainsi deux variables aléatoires X et Y. La variable aléatoire X suit la loi normale de moyenne $m_1 = 30$ et d'écart type $\sigma_1 = 0{,}8$, la variable aléatoire Y suit la loi normale de moyenne $m_2 = 4$ et d'écart type $\sigma_2 = 0{,}1$. Les variables aléatoires X et Y sont indépendantes.

Les résultats seront donnés à 10^{-2} près.

1° Calculer la probabilité : $P(X \leq 31{,}2)$.

2° Calculer la probabilité : $P(Y \geq 4{,}2)$

3° Une pièce est utilisable si sa longueur l est telle que $28{,}8 \leq l \leq 31{,}2$ et son rayon r tel que $3{,}8 \leq r \leq 4{,}2$. Quelle est le pourcentage de pièces utilisables produites par cette machine ?

B - 2ème partie :

On suppose encore que la variable aléatoire X suit la loi normale $\mathcal{N}(30\,;\,0{,}8)$. On désigne par $\overline{X}$ la variable aléatoire qui à chaque échantillon de 36 pièces associe la moyenne des longueurs de pièces de cet échantillon

1° Quelle est la loi suivie par $\overline{X}$?

2° Déterminer le réel h tel que $P(30 - h \leq \overline{X} \leq 30 + h) = 0{,}95$.

3° Un magasin reçoit une commande de 36 pièces fabriquées par la même machine. On mesure les longueurs de ces 36 pièces ; les résultats sont réunis dans le tableau suivant :

longueur	[28 ; 28,5[	[28,5 ; 29[	[29 ; 29,5[	[29,5 ; 30[	[30 ; 30,5[	30,5 ; 31[	[31 ; 31,5[	[31,5 ; 32[
effectif	1	4	6	9	8	5	2	1

En faisant l'hypothèse que les valeurs observées sont celles du centre de la classe, calculer la valeur approchée $\overline{x}$ de la longueur moyenne des pièces de cet échantillon.

4° a) En utilisant la question B - 2°, construire un test d'hypothèse permettant d'accepter ou de rejeter au seuil de signification 5% l'hypothèse selon laquelle la longueur moyenne des pièces de la fabrication est bien $m_1 = 30$ cm.

b) Utiliser ce test avec l'échantillon étudié à la question B - 3°, échantillon que l'on assimile à un échantillon prélevé de manière non exhaustive.

Exercice 2 (12 points)

I. Soit l'équation différentielle : (E) $(1 + x^2)\, y' + xy = 2x$

où y est une fonction de la variable réelle x, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

1° Déterminer les fonctions φ, définies sur $\mathbb{R}$, solutions de l'équation différentielle :

(E ') $(1 + x^2)\, y' + xy = 0$

2° a) Vérifier que l'équation (E) admet pour solution une fonction g telle que, pour tout x réel,

$g(x) = k$ k étant un nombre réel à déterminer.

b) En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E).

c) Déterminer la fonction h, solution de (E), qui vérifie la condition : $h(0) = 0$.

II. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 2 - \frac{2}{\sqrt{1 + x^2}}$$

1° a) Etudier la parité de la fonction f.

b) Déterminer la limite de la fonction f en plus l'infini ; interpréter géométriquement le résultat obtenu.

c) Etudier les variations de f sur $[0 ; +\infty[$

2° Tracer la courbe C représentative de la fonction f dans un repère orthogonal d'unités graphiques : en abscisses 2 cm, en ordonnées 5 cm.

3° On note D la portion du plan, ensemble des points M(x,y) vérifiant les deux conditions : $0 \leq x \leq \sqrt{3}$ et $0 \leq y \leq f(x)$. On se propose de déterminer une valeur approchée de l'aire A de D, exprimée en unités d'aire.

a) Reproduire sur la copie et compléter le tableau suivant :

x	0	$\frac{\sqrt{3}}{5}$	$2\frac{\sqrt{3}}{5}$	$3\frac{\sqrt{3}}{5}$	$4\frac{\sqrt{3}}{5}$	$\sqrt{3}$
valeur approchée de f(x) à 0,01 près par défaut						
valeur approchée de f(x) à 0,01 près par excès						

b) On considère les sommes

$$S_1 = \frac{\sqrt{3}}{5}\left[f(0) + f\left(\frac{\sqrt{3}}{5}\right) + f\left(2\frac{\sqrt{3}}{5}\right) + f\left(3\frac{\sqrt{3}}{5}\right) + f\left(4\frac{\sqrt{3}}{5}\right)\right]$$

$$S_2 = \frac{\sqrt{3}}{5}\left[f\left(\frac{\sqrt{3}}{5}\right) + f\left(2\frac{\sqrt{3}}{5}\right) + f\left(3\frac{\sqrt{3}}{5}\right) + f\left(4\frac{\sqrt{3}}{5}\right) + f(\sqrt{3})\right]$$

Interpréter les nombres S_1 et S_2 comme somme d'aires de rectangles que l'on représentera sur le graphique de la question II 2°. Justifier à l'aide de considérations géométriques l'encadrement suivant : $S_1 \leq \int_0^{\sqrt{3}} f(x)\, dx \leq S_2$

c) En utilisant les résultats notés dans le tableau de la question II. 3) a) déterminer un encadrement de A.

Exercice 1

A - 1ère partie :

1° X suit la loi normale $\mathcal{N}(30 ; 0,8)$, la variable $T = \dfrac{X - 30}{0,8}$ suit la loi normale $\mathcal{N}(0 ; 1)$,

$P(X \leq 31,2) = P(T \leq 1,5)$, $P(X \leq 31,2) = \pi(1,5)$

(on trouve dans la table du formulaire $\pi(1,5) = 0,9332$)

$P(X \leq 31,2) = 0,93$ à 10^{-2} près.

2° Y suit la loi normale $\mathcal{N}(4 ; 0,1)$, la variable $T' = \dfrac{Y - 4}{0,1}$ suit la loi normale $\mathcal{N}(0 ; 1)$,

$P(Y \geq 4,2) = P(T' \geq 2)$, $P(Y \geq 4,2) = 1 - \pi(2)$

(on trouve dans la table du formulaire $\pi(2) = 0,9772$)

$P(Y \geq 4,2) = 0,02$ à 10^{-2} près.

3° La probabilité qu'une pièce soit utilisable est : $P((28,8 \leq X \leq 31,2)$ et $(3,8 \leq Y \leq 4,2))$, les variables X et Y étant indépendantes ceci équivaut à $P(28,8 \leq X \leq 31,2) \times P(3,8 \leq Y \leq 4,2)$ et en utilisant les variables T et T' à : $P(-1,5 \leq T \leq 1,5) \times P(-2 < T' \leq 2) = (2\pi(1,5) - 1) \times (2\pi(2) - 1)$

$\approx 0,866 \times 0,9544 = 0,83$ à 10^{-2} près.

B - 2ème partie :

On suppose encore que la variable aléatoire X suit la loi normale $\mathcal{N}(30 ; 0,8)$.

1° $\overline{X}$ la variable aléatoire qui à chaque échantillon de 36 pièces associe la moyenne des longueurs de pièces de cet échantillon suit la loi normale $\mathcal{N}(30 ; \dfrac{0,8}{\sqrt{36}})$,

$\mathcal{N}(30 ; 0,13)$.

2° $P(30 - h \leq \overline{X} \leq 30 + h) = 0,95$ équivaut en utilisant le changement de variable $T = \dfrac{\overline{X} - 30}{0,13}$ à

$P(-\dfrac{h}{0,13} \leq T \leq \dfrac{h}{0,13}) = 0,95$ et à $2\pi(\dfrac{h}{0,13}) - 1 = 0,95$

et à $\dfrac{h}{0,13} = 1,96$, **$h = 0,26$ à 10^{-2} près.**

$P(29,74 \leq \overline{X} \leq 30,26) = 0,95$.

3° En utilisant les centres classes comme valeurs du caractère on trouve avec la calculatrice la longueur moyenne approchée des pièces de cet échantillon $\overline{x} \approx 29,903$

4° a) Construction du test :

choix de H_0 : $m = 30$ *choix de H_1* : $m \neq 30$

détermination de la région critique :

Sous l'hypothèse H_0, $m = 30$, $\overline{X}$ suit la loi normale

$\mathcal{N}(30 ; 0,13)$ et d'après la question B - 2° :

$(29,74 \leq \overline{X} \leq 30,26) = 0,95$.

Si H_0 est vraie on a 95% de chances de prélever un échantillon aléatoire dont la moyenne appartient à l'intervalle $I = [29,74 ; 30,26]$

règle de décision :

si $\overline{x} \in [29,74 ; 30,26]$ on accepte H_0

si $\overline{x} \notin [29,74 ; 30,26]$ on rejette H_0 et on accepte H_1

b) Utilisation du test : $\overline{x} \approx 29,90$, $\overline{x} \in [29,74 ; 30,26]$ on accepte H_0 et on rejette H_1

On accepte donc l'hypothèse $m_1 = 30$.

Exercice 2

I - (E) $(1 + x^2)y' + xy = 2x$

1. (E') $(x^2 + 1)y' + xy = 0$ est une équation différentielle linéaire du premier ordre.

On sait que la solution générale de l'équation $a(x)y'(x) + b(x)y(x) = 0$ est définie par $y(x) = Ce^{-F(x)}$, où F est une primitive de la fonction $\dfrac{b}{a}$, et C est une constante réelle arbitraire.

Une primitive de $x \longmapsto \dfrac{x}{x^2 + 1}$ sur $]0,+\infty[$ est

$x \longmapsto \dfrac{1}{2}\ln(x^2 + 1)$, $-\dfrac{1}{2}\ln(x^2 + 1) = \ln\dfrac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$

On en déduit que la fonction φ est définie sur $]0,+\infty[$ par : $x \longmapsto Ce^{-\frac{1}{2}\ln(x^2+1)}$ donc

$\varphi(x) = \dfrac{C}{\sqrt{1 + x^2}}$ où C est une constante réelle quelconque.

2. a) Si $g(x) = k$ alors $g'(x) = 0$, g est solution de (E) si pour tout réel x, $0 + k\,x = 2\,x$ donc g définie par $g(x) = 2$ est une solution particulière de (E)

b) La solution générale de l'équation (E) est la somme d'une solution particulière de cette équation et de la solution générale de l'équation sans second membre associée (E').

La solution générale de l'équation (E) est donc définie sur $\mathbb{R}$ par : $y(x) = 2 + \dfrac{C}{\sqrt{1 + x^2}}$, où C est une constante réelle quelconque.

c) h vérifie la condition $h(0) = 0$, $0 = 2 + C$, $C = -2$, $h(x) = 2 - \dfrac{2}{\sqrt{1 + x^2}}$

II - $f(x) = 2 - \dfrac{2}{\sqrt{1 + x^2}}$

1. a) L'ensemble de définition de f est l'intervalle $]-\infty ; +\infty[$ qui admet 0 pour centre et pour tout réel de $]-\infty ; +\infty[$ on a $f(-x) = 2 - \dfrac{2}{\sqrt{1 + (-x)^2}}$

$f(-x) = 2 - \dfrac{2}{\sqrt{1 + x^2}}$, $f(-x) = f(x)$, f est paire, sa courbe représentative admet l'axe des ordonnées comme axe de symétrie.

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 2$ la courbe représentative de f admet la droite d'équation $y = 2$ comme asymptote horizontale.

c) $f'(x) = \dfrac{2\,x}{\sqrt{1 + x^2}}$ cette expression est du signe de x d'où le tableau de variations :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f '(x)		−	0	+	
f(x)	2	↘	0	↗	2

d) courbe C : voir plus loin

2. a)

x	0	$\frac{\sqrt{3}}{5}$	$2\frac{\sqrt{3}}{5}$	$3\frac{\sqrt{3}}{5}$	$4\frac{\sqrt{3}}{5}$	$\sqrt{3}$
valeur approchée de f(x) à 0,01 près par défaut	0	0,11	0,35	0,61	0,82	1
valeur approchée de f(x) à 0,01 près par excès	0	0,12	0,36	0,62	0,83	1

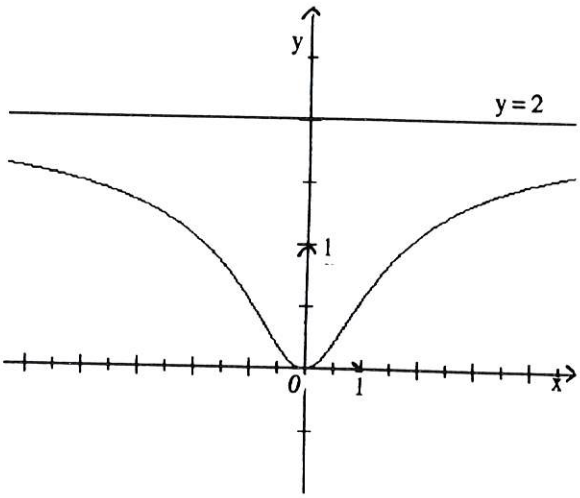
b) S_1 et S_2 sont les sommes des aires de rectangles de même base $\frac{\sqrt{3}}{5}$ et de hauteurs successivement f(0), $f(\frac{\sqrt{3}}{5})$, $f(2\frac{\sqrt{3}}{5})$, $f(3\frac{\sqrt{3}}{5})$, $f(4\frac{\sqrt{3}}{5})$ pour S_1 et $f(\frac{\sqrt{3}}{5})$, $f(2\frac{\sqrt{3}}{5})$, $f(3\frac{\sqrt{3}}{5})$, $f(4\frac{\sqrt{3}}{5})$, $f(\sqrt{3})$ pour S_2.

Les rectangles permettant de calculer l'aire S_1 sont tous situés au dessous de la courbe C, par contre la courbe C se situe au dessous des rectangles permettant de calculer l'aire S_2, $\int_0^{\sqrt{3}} f(x)\,dx$ représentant l'aire A de la portion de plan D, on peut écrire :

$$S_1 \le \int_0^{\sqrt{3}} f(x)\,dx \le S_2 .$$

c) On trouve à l'aide du tableau précédent S_1 : 0,65 à 10^{-2} près en utilisant la première ligne et 0,67 à 10^{-2} près avec la deuxième ligne de même pour S_2 : 1 à 10^{-2} près en utilisant la première ligne et 1,01 à 10^{-2} près avec la deuxième ligne.

Le meilleur encadrement pour A sera : $0,67 \le A \le 1$.



TRAVAUX PUBLICS

Session 1993

EXERCICE 1 (9 points)

Une entreprise industrielle de BTP fabrique des voussoirs en béton destinés à la construction d'ouvrages d'art autoroutiers. Chaque voussoir a une masse qui varie en fonction des dosages du béton ayant servi à les fabriquer.

On a relevé les masses des voussoirs produits au cours d'un mois, et on a obtenu les résultats suivants (les masses sont exprimées en quintaux (q)).

Masses	Effectifs
[49,0 ; 49,2[	1
[49,2 ; 49,4[	4
[49,4 ; 49,6[	32
[49,6 ; 49,8[	135
[49,8 ; 50,0[	347
[50,0 ; 50,2[	468
[50,2 ; 50,4[	344
[50,4 ; 50,6[	136
[50,6 ; 50,8[	27
[50,8 ; 51,0[	6

I ETUDE DE LA SERIE STATISTIQUE

Déterminer la moyenne m et l'écart type σ de cette série , à 10^{-3} près. On prendra pour valeurs des masses les centres de classes ; (on ne demande aucun calcul intermédiaire).

II APPROXIMATION PAR UNE LOI NORMALE

On désigne par X la variable aléatoire qui, à chaque voussoir, associe sa masse. On estime que X suit la loi normale de moyenne 50 et d'écart type 0,26.

1) Quelle est la probabilité de l'événement : " $X \geq 50{,}2$ " ?

2) On ne peut utiliser que les voussoirs dont la masse M est telle que $49{,}5 \leq M \leq 50{,}5$ les autres sont défectueux et doivent être détruits.

Quelle est la probabilité qu'un voussoir, pris au hasard dans la production, soit défectueux ?

III PRODUCTION JOURNALIERE

Dans cette question on admet que la production quotidienne de l'usine est de 80 voussoirs. On admet également que la probabilité qu'un voussoir pris au hasard dans la production quotidienne soit défectueux est p = 0,055.

On estime que le fait, qu'un voussoir soit défectueux, n'a pas d'influence sur l'état d'un autre voussoir.

Soit Z la variable aléatoire qui, à tout échantillon de 80 voussoirs produits un jour donné, associe le nombre de voussoirs défectueux.

1) Quelles sont les valeurs extrêmes prises par Z ?

2) Quelle est la loi suivie par Z ? Donner les paramètres de cette loi.

3) Quelle est l'espérance mathématique de Z ?

4) On admet que la loi de probabilité suivie par Z peut être approchée par une loi de Poisson dont on déterminera le paramètre.

5) L'usine perd de l'argent dans une journée dès lors que le nombre de voussoirs défectueux produits au cours de cette journée est supérieur ou égal à 7.
Quelle est la probabilité que, un jour choisi au hasard, l'usine perde de l'argent ?

EXERCICE 2 (12 points)

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ (unité : 2 cm).

I. Soit l'équation différentielle : (E) $\quad x\,y' + (x-2)\,y = x-2$

où y est une fonction de la variable réelle x, définie et dérivable sur $]0, +\infty[$.

1° Déterminer, sur $]0, +\infty[$, les solutions de l'équation différentielle (E ') :

$$(E') : \quad x\,y' + (x-2)\,y = 0$$

2° Déterminer une fonction constante, solution particulière de (E) sur $]0, +\infty[$

3° En déduire sur $]0, +\infty[$ l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E).

4° Déterminer la fonction solution de (E) sur $]0, +\infty[$, dont la représentation graphique dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ passe par $A(2 ; 1 + 4\,e^{-2})$.

II. Dans cette partie on considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 1 + x^2 e^{-x}$.

On note C la représentation graphique de f dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1° Etudier les variations de f et déterminer la limite de f en $-\infty$ et $+\infty$.
En déduire l'existence d'une asymptote Δ.

2° Tracer la courbe C et Δ dans $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

3° En intégrant deux fois par parties, calculer la valeur exacte, en cm^2, de l'aire A du domaine plan compris entre la courbe C, la droite d'équation $y = 1$ et les droites d'équation $x = 0$ et $x = 2$.
Donner une valeur approchée de A à 10^{-2} près.

EXERCICE 1

I A l'aide de la calculatrice on trouve $m = 50{,}098$ et $\sigma = 0{,}258$ à 10^{-3} près.

II La variable aléatoire X suit la loi normale de paramètres $m = 50$ et $\sigma = 0{,}26$.

1) Soit T la variable aléatoire centrée réduite associée à X : $T = \dfrac{X - 50}{0{,}26}$.

$P(X \geq 50{,}2) = P(T \geq \dfrac{0{,}2}{0{,}26})$,

$P(X \geq 50{,}2) = P(T \geq 0{,}77)$,

$P(X \geq 50{,}2) = 1 - \pi(0{,}77) = 1 - 0{,}7794$,

$P(X \geq 50{,}2) =$ **0,2206** à 10^{-4} près.

2) $P(49{,}5 \leq X \geq 50{,}5) = 0{,}95$ donne en utilisant la variable centrée réduite $T = \dfrac{X - m}{1{,}1}$:

$P(- \dfrac{0{,}5}{0{,}26} \leq T \leq \dfrac{0{,}5}{0{,}26}) = 0{,}95$,

$2[\pi(1{,}923) - 0{,}5] = 0{,}9452$

La probabilité qu'un voussoir soit défectueuse est donc $1 - 0{,}9453 =$ **0,0548.**

III 1) La variable aléatoire Z à tout lot de 80 voussoirs associe le nombre de voussoirs défectueux, les valeurs extrêmes de Z sont donc $Z = 0$ et $Z = 80$.

2) Les tirages sont supposés indépendants, pour chaque tirage il y a deux éventualités: le voussoirs est défectueux avec une probabilité $p = 0{,}055$ ou le voussoirs est non défectueux avec une probabilité 0,945, donc la variable aléatoire Z suit la loi binomiale $\mathcal{B}(80 ; 0{,}055)$.

3) $E(Z) = np = 80 \times 0{,}055 = 4{,}4$.

4) On approche cette loi binomiale par une loi de Poisson de paramètre : $\lambda = np = 4{,}4$.

$P(X \geq 7) = 1 - P(X \leq 6) =$

$P(X \geq 7) = 1 - (P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) +$
$P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5) + P(X = 6))$

$P(X \geq 7) = 1 - e^{-4{,}4}(\dfrac{4{,}4^0}{0!} + \dfrac{4{,}4^1}{1!} + \dfrac{4{,}4^2}{2!} + \dfrac{4{,}4^3}{3!} +$
$\dfrac{4{,}4^4}{4!} + \dfrac{4{,}4^5}{5!} + \dfrac{4{,}4^6}{6!})$, $P(X \geq 7) \approx 1 - 0{,}9214$,

$P(X \geq 7) \approx 0{,}0786$

EXERCICE 2

I - 1° $x y' + (x - 2) y = 0$. On sait que la solution générale de l'équation $a(x)y'(x) + b(x)y(x) = 0$ est définie par : $y(x) = Ce^{-F(x)}$, où F est une primitive de la fonction $x \rightarrow \dfrac{b(x)}{a(x)}$, et C est une constante réelle arbitraire.

Une primitive de $x \rightarrow \dfrac{x - 2}{x} = 1 - \dfrac{2}{x}$ sur $]0,+\infty[$ est $x \rightarrow x - 2 \ln x$.

On en déduit que la solution générale de (E') est définie sur $]0,+\infty[$ par :

$y(x) = C\, e^{-x + \ln x^2} = C\, x^2 e^{-x}$,

$y(x) = C\, x^2 e^{-x}$ où C est une constante réelle quelconque.

2° On cherche une solution particulière de (E) de la forme $y(x) = a$, $y'(x) = 0$, d'où $(x - 2)(a) = x - 2$ pour tout réel x. Par identification on trouve : $a = 1$, la solution particulière de (E) est donc définie par **$y_0(x) = 1$.**

3° La solution générale de l'équation (E) est la somme d'une solution particulière de cette équation et de la solution générale de l'équation sans second membre associée (E').

La solution générale de l'équation (E) est donc définie sur $]0,+\infty[$ par : $y(x) = 1 + C\, x^2 e^{-x}$ où C est une constante réelle quelconque.

4° $f(2) = 1 + 4 e^{-2}$, $1 + 4 e^{-2} = 1 + C\, 4 e^{-2}$,
$C = 1$, pour tout x de $]0,+\infty[$,
$f(x) = 1 + x^2 e^{-x}$.

II - 1°
de $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{-x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} x^2 = +\infty$

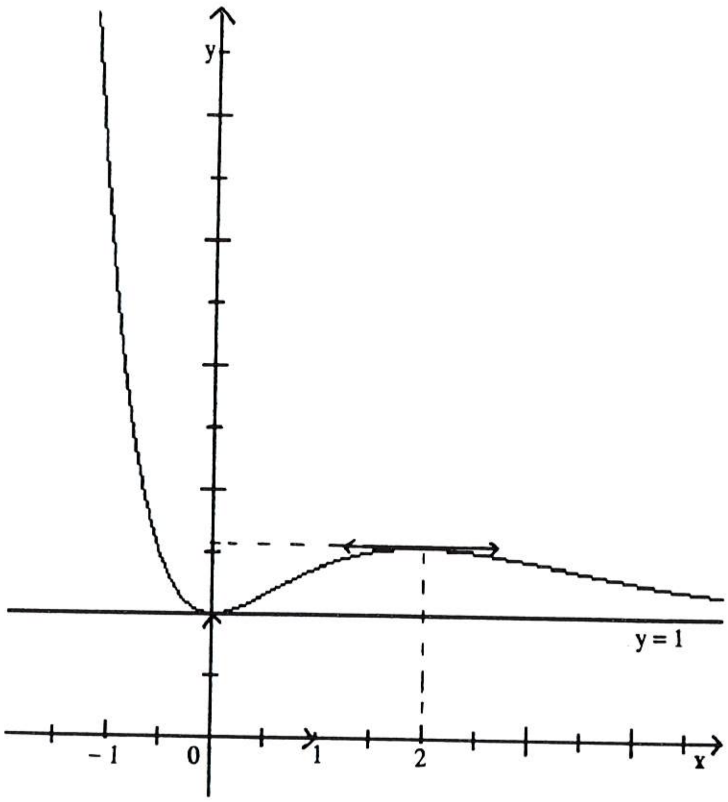
on déduit que $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$.

On sait que $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x / x^\alpha = +\infty$ (avec $\alpha > 0$)

donc $\lim\limits_{x \to +\infty} x^\alpha / e^x = 0$, c'est à dire

$\lim\limits_{x \to +\infty} x^\alpha e^{-x} = 0$ d'où $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$ donc la droite d'équation $y = 1$ est asymptote à la courbe C.

2°



a) $A = = \int_0^1 (f(x) - 1)\,dx$, $A = \int_0^1 x^2 e^{-x}\,dx$

en posant $u(x) = x^2$, $v'(x) = e^{-x}$,

on obtient : $u'(x) = 2x$, $v(x) = -e^{-x}$,

en intégrant par parties : $A = [-x^2 e^{-x}]_0^1 - \int_0^1 -2x\,e^{-x}\,dx$;

en posant $u(x) = 2x$, $v'(x) = e^{-x}$,

on obtient : $u'(x) = 2$, $v(x) = -e^{-x}$,

en intégrant par parties : $A = -e^{-1} + [-2x\,e^{-x}]_0^1 - \int_0^1 -2\,e^{-x}\,dx$;

$A = -3e^{-1} + 2\,[-e^{-x}]_0^1$;

$A = -3e^{-1} - 2e^{-1} + 2$ donc

$A = 4\,(-5e^{-1} + 2)$ cm ^{2}.

$A \approx 0{,}64$ cm ^{2}.

TRAVAUX PUBLICS

Session 1994

EXERCICE 1 (10 points)

Un atelier est constitué de 30 postes de travail identiques ; chaque poste est équipé d'une machine A et d'une machine B fonctionnant de façon indépendante. On considère les événements suivants :

A : "La machine A est défaillante pour une journée de fonctionnement."

B : "La machine B est défaillante pour une journée de fonctionnement."

On note $P(A) = 0{,}1$ et $P(B) = 0{,}03$.

N.B. : - Les trois questions sont indépendantes.

- Les probabilités seront données à 10^{-3} près par défaut.

1) Pour une journée de fonctionnement et pour un poste de travail aléatoires, déterminer :

a) la probabilité que les deux machines A et B tombent en panne.

b) la probabilité que l'une au moins des deux machines tombe en panne.

c) la probabilité qu'une machine et une seule tombe en panne.

2) On appelle X la variable aléatoire qui, un jour tiré au hasard, associe aux 30 postes, le nombre de postes de travail dans lesquels une machine et une seule est en panne .

Les 30 postes fonctionnent de manière indépendante.

On admet que la probabilité qu'une machine et une seule soit en panne est $0{,}124$.

a) Déterminer, en la justifiant la loi de probabilité de la variable aléatoire X.

b) Calculer la probabilité que, parmi 30 postes, il y en ait 4 exactement qui comportent une machine et une seule en panne.

c) Calculer la probabilité que, parmi 30 postes, il y en ait au moins 2 qui comportent une machine et une seule en panne.

d) On approche la loi de X par une loi de Poisson.

Préciser le paramètre de cette loi de Poisson.

e) Refaire les calculs des questions b) et c) à l'aide de la loi de Poisson.

3° A chaque pièce produite par un atelier on associe sa longueur. On admet que l'on définit ainsi une variable aléatoire Y qui suit la loi normale de moyenne $m_1 = 6{,}003$ et d'écart type $\sigma_1 = 0{,}005$.

Une pièce est jugée acceptable si sa longueur appartient à l'intervalle $[5{,}990 ; 6{,}010]$.

Déterminer la probabilité qu'une pièce prise au hasard dans la production d'une journée soit acceptée.

EXERCICE 2 (10 points)

I) On considère l'équation différentielle (E) :

$$\text{(E)}\quad y'' + 4y' + 4y = -4x$$

où y est une fonction de la variable x définie et deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$

1) Résoudre l'équation différentielle : $y'' + 4y' + 4y = 0$.

2) Déterminer les réels a et b tels que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = ax + b$ soit solution de (E).

3) Déterminer les fonctions définies sur $\mathbb{R}$, solutions de (E).

4) Déterminer la fonction f solution de (E) qui vérifie $f(0) = 2$ et $f'(0) = -2$.

II) Soit f la fonction numérique définie sur $I = [-\frac{1}{2} ; +\infty[$ par $f(x) = 1 - x + (x+1)\,e^{-2x}$.

On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ du plan (unité graphique 2 cm).

1) On pose $\varphi(x) = f(x) - (1 - x)$. Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} \varphi(x)$; en déduire $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.
Donner l'interprétation graphique de ces résultats.

2) Etudier le signe de $\varphi(x)$, sur I.

3) Donner l'interprétation graphique de ce résultat.

4) On donne le sens de variation de f ' sur I.

x	$-\frac{1}{2}$		0		$+\infty$
f '(x)	-1	↘	-2	↗	-1

En déduire, après justification, le sens de variation de f sur I. Dresser le tableau de variation de f.

5) Déterminer le développement limité de f au voisinage de $x = 0$ à l'ordre 3. En déduire une équation de la tangente (T) à (C) en son point d'abscisse 0 et préciser la position de (C) par rapport à cette tangente au voisinage de $x = 0$.

6) Construire sur le même graphique la droite d'équation $y = 1 - x$, la tangente (T), et la courbe (C).

EXERCICE 1

1) $P(A) = 0{,}1$; $P(\overline{A}) = 0{,}9$.

$P(B) = 0{,}03$; $P(\overline{B}) = 0{,}97$.

a) Les deux machines tombent en panne : $A \cap B$

On suppose les événements A et B indépendants donc :

$P(A \cap B) = P(A) \times P(B) = 0{,}1 \times 0{,}03$,

$P(A \cap B) = \mathbf{0{,}003}$.

b) L'une au moins des deux machines tombe en panne : $A \cup B$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$,

$P(A \cup B) = 0{,}1 + 0{,}03 - 0{,}003$,

$P(A \cup B) = \mathbf{0{,}127}$.

c) Une machine et une seule tombe en panne :

$P(A \cap \overline{B}) \cup P(\overline{A} \cap B) = P(A \cap \overline{B}) + P(\overline{A} \cap B)$

car les événements $A \cap \overline{B}$ et $\overline{A} \cap B$ sont incompatibles.

$P(A \cap \overline{B}) \cup P(\overline{A} \cap B) = 0{,}01 \times 0{,}97 + 0{,}99 \times 0{,}03$

car A et $\overline{B}$ sont indépendants ainsi que $\overline{A}$ et B.

$P(A \cap \overline{B}) \cup P(\overline{A} \cap B) = 0{,}027 + 0{,}097 = 0{,}124$.

2) a) On est en présence d'une épreuve aléatoire pouvant déboucher sur deux éventualités :" une seule machine est en panne " de probabilité $p = 0{,}124$ et l'événement contraire de probabilité $q = 0{,}876$.

Cette épreuve est réalisée 30 fois un jour donné, les 30 épreuves sont indépendantes, on est donc en présence d'une loi binomiale $\mathcal{B}(30 ; 0{,}124)$.

X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(30 ; 0{,}124)$.

b) $P(X = 4] = C_{30}^{4}(0{,}124)^4(0{,}876)^{26}$,

$P(X = 4) \approx \mathbf{0{,}207}$.

c) $P(X \geq 2) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1)$

$P(X \geq 2) = 1 - (0{,}876)^{30} - 30 \times 0{,}124 \times (0{,}876)^{29}$.

$P(X \geq 2) \approx \mathbf{0{,}901}$.

d) La loi suivie par X peut être approchée par la loi de Poisson de paramètre $\lambda = n\,p = 3{,}72$.

$P(X = 4) = \dfrac{e^{-\lambda} \times \lambda^4}{4!}$, $P(X = 4) \approx 0{,}193$.

$P(X \geq 2) = 1 - e^{-3{,}72} - \dfrac{3{,}72}{1!} e^{-3{,}72}$,

$P(X \geq 2) \approx \mathbf{0{,}885}$.

L'écart est important car dû à une mauvaise interprétation de la loi de Poisson $p = 0{,}124$ est trop important.

3) On admet que Y suit la loi normale de moyenne 6,003 et d'écart type 0,005.

$P(5{,}990 \leq Y \leq 6{,}010) = P(-\dfrac{0{,}007}{0{,}005} \leq T \leq \dfrac{0{,}013}{0{,}005})$

avec $T = \dfrac{Y - 6{,}003}{0{,}005}$ qui suit la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$

$P(5{,}990 \leq Y \leq 6{,}010) \approx P(-2{,}6 \leq T \leq 1{,}4)$

$\approx \pi(1{,}4) + \pi(2{,}6) - 1$

$\approx 0{,}9192 + 0{,}9953 - 1$

$\approx \mathbf{0{,}9145}$

EXERCICE 2

I. (E) $y'' + 4y' + 4y = -4x$.

1) L'équation caractéristique associée à l'équation différentielle $y'' + 4y' + 4y = 0$ est $r^2 + 4r + 4 = 0$, équivalente à $(r + 2)^2 = 0$. Cette équation admet une solution double $r = -2$. On en déduit que la solution générale de l'équation différentielle $y'' + 4y' + y = 0$ est définie sur $\mathbb{R}$ par : $y = (C_1 x + C_2)\, e^{-2x}$, où C_1 et C_2 sont deux nombres réels quelconques.

2) Pour tout x de $\mathbb{R}$, $g(x) = ax + b$ donc $g'(x) = a$, donc $g''(x) = 0$.

g est une solution de (E) si et seulement si, pour tout x de $\mathbb{R}$, $g''(x) + 4\,g'(x) + 4\,g(x) = -4\,x$,

$4\,a + 4(a\,x + b) = -4\,x$, $4\,ax + 4a + 4b = -4x$,

donc $4a = 4$, $4a + 4b = 0$, $a = -1$ et $b = 1$.

Pour tout x de $\mathbb{R}$ $\mathbf{g(x) = -x + 1}$.

3) La solution générale de l'équation différentielle linéaire du second ordre (E) est la somme d'une solution particulière de (E) et de la solution générale de l'équation sans second membre associée, soit :

$y = (C_1 x + C_2)\, e^{-2x} + (-x + 1)$, où C_1 et C_2 sont deux nombres réels quelconques.

4) La solution f de (E) vérifie les conditions initiales : $f(0) = 2$, $f'(0) = -2$

$(0 \times C_1 + C_2)\, e^{-0} + 1 = 2$, d'où $C_2 = 1$.

$f'(x) = C_1\, e^{-2x} - 2(C_1 x + C_2)\, e^{-2x} - 1$

$f'(x) = (C_1 - 2C_2 - 2C_1 x)\, e^{-2x} - 1$.

Donc $f'(0) = -2$ équivaut à $C_1 - 2C_2 - 1 = -2$.

On a donc $C_2 = 1$, d'où $C_1 = 1$.

La solution f cherchée est définie sur R par :

$f(x) = 1 - x + (x + 1)\, e^{-2x}$.

II 1) Pour tout réel x de $[-\frac{1}{2}, +\infty[$,

$f(x) = 1 - x + (x + 1)\, e^{-2x}$,

$\varphi(x) = f(x) - (1 - x) = x\, e^{-2x} + e^{-2x}$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-2x} = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} x\, e^{-2x} = 0$,

$\lim\limits_{x \to +\infty} x\, e^{-2x} + e^{-2x} = 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \varphi(x) = 0$,

$\lim\limits_{x \to +\infty} (1 - x) = +\infty$., on en déduit :

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

Pour tout réel x de $[-\frac{1}{2}, +\infty[$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \varphi(x) = 0$,

la droite d'équation $y = 1 - x$ est asymptote à (C).

2) Pour tout x de $[-\frac{1}{2}, +\infty[$, $\varphi(x) = (x+1)\,e^{-2x}$,

or $e^{-2x} > 0$, donc le signe de $\varphi(x)$ est celui de $x + 1$,

$\varphi(x)$ est positif sur $[-\frac{1}{2}, +\infty[$.

3) La courbe (C) est au dessus de son asymptote pour tout x de $[-\frac{1}{2}, +\infty[$ car $\varphi(x) > 0$ sur cet intervalle.

4) D'après le tableau de variation de f ' sur I, f'(x) varie entre − 1 et − 2 donc ne prend que des valeurs strictement négatives sur I, d'où le tableau :

x	$-\frac{1}{2}$	0	$+\infty$
f (x)	(3+e)/2	↘	$-\infty$

5) Du développement limité :

$$e^{t} = 1 + \frac{t}{1!} + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + t^3\,\varepsilon(t),$$

avec $\lim\limits_{t \to 0} \varepsilon(t) = 0$,

on en déduit les développements limités :

$$e^{-2x} = 1 - 2x + \frac{4x^2}{2} - \frac{8x^3}{6} + x^3\,\varepsilon(x),$$

avec $\lim\limits_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$, (puisque $\lim\limits_{x \to 0}(-2x) = 0$).

$$f(x) = 1 - x + (x+1)(1 - 2x + 2x^2 - \frac{4}{3}x^3 + x^3\varepsilon(x)),$$

avec $\lim\limits_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$,

$$f(x) = 2 - 2x + \frac{2}{3}x^3 + x^3\varepsilon(x), \text{ avec } \lim_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0.$$

Une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 0 est donc **y = 2 − 2x** .

La position relative de (T) et (C) au voisinage du point d'abscisse 0 est donnée par le signe de :

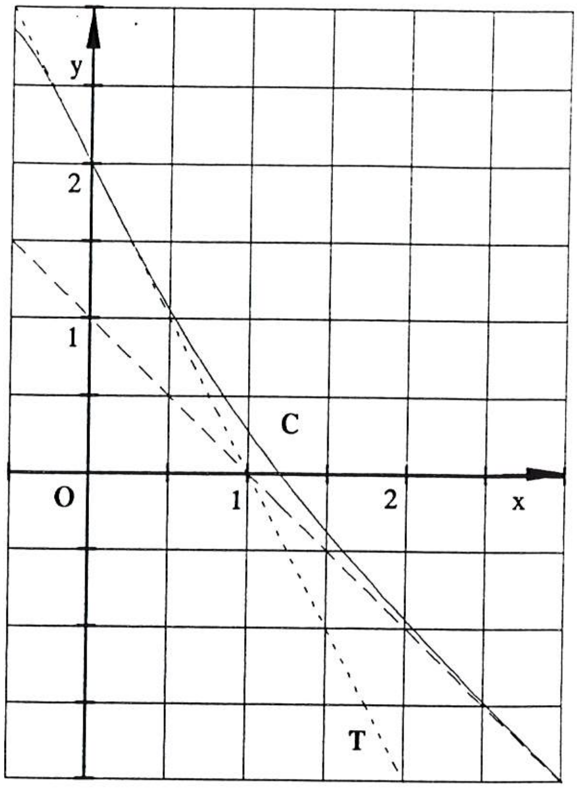
$$f(x) - (1 - 2x) = \frac{2}{3}x^3 + x^3\varepsilon(x), \text{ avec } \lim_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0.$$

$f(x) - (2 - 2x)$ est du signe de $\frac{2}{3}x^3$ donc

pour $x < 0$ (C) est au dessous de (T) .

pour $x > 0$ (C) est au dessus de (T) .

6)



TRAVAUX PUBLICS

Session 1995

EXERCICE 1 (10 points)

A) Une entreprise de Travaux publics commande en très grande quantité des bordures de trottoir en béton pour reconstituer son stock. Elle s'adresse à deux usines A et B qui lui fournissent respectivement $\frac{2}{3}$ et $\frac{1}{3}$ de ses commandes. Le pourcentage de bordures inutilisables livrées par l'usine A est 8 %, le pourcentage de bordures inutilisables livrées par l'usine B est 5 %.

1) Quel est le pourcentage de bordures inutilisables reçues par l'entreprise ?
2) On examine une bordure au hasard. Elle est inutilisable.
   Quelle est la probabilité qu' elle vienne de l'usine A ?

B) L'entreprise de travaux publics prélève au hasard 50 bordures dans le stock. On admet que la probabilité qu'une bordure ne soit pas utilisable est 0,07.
On note X la variable aléatoire qui, à chaque échantillon de 50 bordures prélevées au hasard, associe le nombre de bordures inutilisables de ce lot (prélèvement assimilé à un tirage avec remise).
On admet que X suit une loi binomiale.

1) En donner les paramètres.
2) Calculer la probabilité que les 50 bordures soient utilisables.
3) Calculer la probabilité qu'au plus 2 bordures soient inutilisables.

C) L'entreprise décide de s'équiper d'une table de coffrage pour fabriquer elle-même ses bordures.

1) On note L la variable aléatoire associant à chaque bordure tirée au hasard de la production sa longueur . On admet que L suit la loi normale de paramètres m = 100 cm et $\sigma = 0,5$ cm.
   On prélève une bordure au hasard.
   a) Calculer, à 10^{-3} près, la probabilité qu'elle mesure plus de 100,6 cm .
   b) Calculer, à 10^{-3} près, la probabilité que sa longueur soit comprise entre 99,2 cm et 100,8 cm .
2) Au bout d'un certain temps, on désire vérifier que la moyenne de la longueur des bordures est bien 100 cm. Pour cela, on prélève au hasard 50 bordures dans la production de l'entreprise, et on les mesure (prélèvement assimilé à un tirage avec remise).

Longueur en cm	[99 ; 99,4[	[99,4 ; 99,8[	[99,8 ; 100,2[	100,2 ; 100,6[	[100,6 ; 101[
Effectif	7	8	15	14	6

a) Calculer, à 10^{-3} près, la moyenne m_e de cet échantillon.

b) On considère que l'écart type de la population reste égal à 0,5 cm. Construire un test bilatéral permettant d'accepter ou de refuser l'hypothèse selon laquelle, au seuil de risque 5 %, la moyenne des longueurs de la production est bien 100 cm .

Pour répondre à cette question :

- Choisir une hypothèse nulle H_0 et une hypothèse alternative H_1,
- Déterminer la région critique au seuil de risque 5 % ,
- Enoncer la règle de décision ,
- Utiliser ce test avec l'échantillon de l'énoncé.

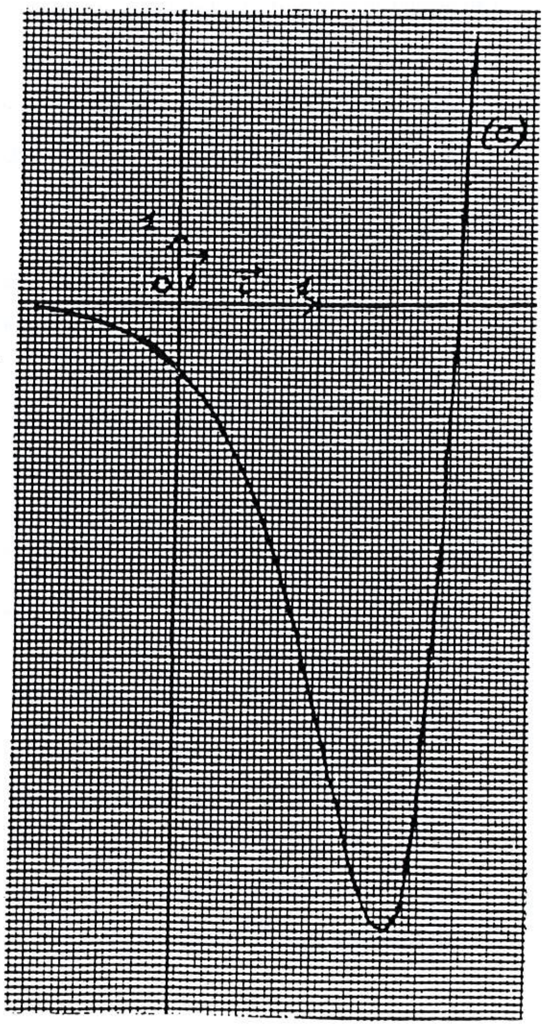
EXERCICE 2 (10 points)

A) On considère l'équation différentielle (E) : $x\,y' - 2(x+1)\,y = 2\,e^{2x}$ où y désigne une fonction de la variable x, définie et dérivable sur $]0, +\infty[$.

1) Résoudre sur $]0, +\infty[$ l'équation différentielle (E') : $x\,y' - 2(x+1)\,y = 0$.
2) Déterminer le réel α tel que la fonction g définie par $g(x) = \alpha\, e^{2x}$ soit solution de (E).
3) En déduire sur $]0, +\infty[$, la solution générale de (E).
4) Déterminer la fonction f solution de (E) vérifiant $f(1) = -\dfrac{3e^2}{4}$.

B) Le plan est muni d'un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ où les unités graphiques sont 2 cm sur l'axe des abscisses et 1 cm sur l'axe des ordonnées.

Soit f la fonction définie sur $[-1, +\infty[$ par $f(x) = \left(\dfrac{x^2}{4} - 1\right) e^{2x}$ et (C) sa courbe représentative dans $(O, \vec{i}, \vec{j})$, (C) est représentée ci-contre.



1) Déterminer le développement limité de f à l'ordre 2 au voisinage de 0.
2) En déduire une équation de la tangente T à (C) au point d'abscisse 0 ; puis étudier la position de (C) par rapport à t au voisinage du point A.

C) On se propose de calculer la valeur exacte en cm^2 de l'aire $\mathscr{A}$ de la partie du plan limitée par (C) l'axe des abscisses, les droites d'équation respective x = 0 et x = 2.

1) Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^2 \left(\frac{x^2}{4} - 1\right) e^{2x}\,dx$.

   On pourra déterminer les réels a, b c tels que la fonction F définie sur $[-1, +\infty[$ par $F(x) = (ax^2 + bx + c)\,e^{2x}$ soit primitive de f.
2) Donner la valeur exacte de $\mathscr{A}$.
3) Donner une valeur approchée de $\mathscr{A}$ à 0,1 près.

Les parties A, B et C sont indépendantes.

EXERCICE 1

A)

1) On note A l'événement "la bordure provient de l'usine A" et B l'événement "la bordure provient de l'usine B". $P(A) = \frac{2}{3}$, $P(B) = \frac{1}{3}$. On note R l'événement "la bordure est inutilisable" et $\overline{R}$ l'événement contraire d'après l'énoncé $P(R/A) = 0{,}08$ et $P(R/B) = 0{,}05$.

Une bordure est inutilisable signifie " la bordure est inutilisable **et** provient de A **ou** la bordure est inutilisable **et** provient de B ".

Les événements $A \cap R$ et $B \cap R$ sont incompatibles, donc

$P(R) = P[(A \cap R) \cup (B \cap R)] = P(A \cap R) + P(B \cap R)$

$P(A \cap R) = P(A) \times P(R/A)$, $P(A \cap R) = \frac{2}{3} \times 0{,}08$

$P(B \cap R) = P(B) \times P(R/B)$, $P(B \cap R) = \frac{1}{3} \times 0{,}05$

$P(R) = \frac{2}{3} \times 0{,}08 + \frac{1}{3} \times 0{,}05$

$P(R) = \frac{0{,}16 + 0{,}05}{3}$ **$P(R) \approx 0{,}07$.**

2) Sachant que la bordure est inutilisable, calculons la probabilité qu'elle provienne de A :

$P(A/R) = \frac{P(A \cap R)}{P(R)}$,

$P(A/R) = \frac{\frac{2}{3} \times 0{,}08}{0{,}07}$, **$P(A/R) \approx 0{,}762$.**

B)

1) On est donc en présence d'une succession de 50 épreuves indépendantes, chacune ayant deux issues : bordure inutilisable avec une probabilité constante 0,07 ou utilisable avec la probabilité 0,92.

X suit la loi binomiale $\mathcal{B}$ (50 ; 0,07).

$P(X = 0) = C_{50}^{0}(0{,}07)^{0}(0{,}93)^{50}$.

$P(X = 0) = 0{,}0265$ à 10^{-4} près.

2) $P(X \leq 2) = C_{50}^{0}(0{,}07)^{0}(0{,}93)^{50} + C_{50}^{1}(0{,}07)(0{,}93)^{49} + C_{50}^{2}(0{,}07)^{2}(0{,}93)^{48}$,

$P(X \leq 2) = 0{,}3107$ à 10^{-4} près.

C) - 1) La variable aléatoire L suit la loi normale $\mathcal{N}(100 ; 0{,}5)$, la variable aléatoire $T = \frac{L - 100}{0{,}5}$ suit la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0 ; 1)$.

a) $P(L \geq 100{,}6) = P(T \geq \frac{0{,}6}{0{,}5})$,

$P(L \geq 100{,}6) = P(T \geq 1{,}2)$, $P(L \geq 100{,}6) = 1 - \pi(1{,}2)$,

$P(L \geq 100{,}6) \approx 1 - 0{,}8849$,

$P(L \geq 100{,}6) \approx 0{,}115$ à 10^{-3} près.

b) $P(99{,}2 \leq L \leq 100{,}8) = P(-\frac{0{,}8}{0{,}5} \leq T \leq \frac{0{,}8}{0{,}5})$,

$P(99{,}2 \leq L \leq 100{,}8) = 2\,\pi(1{,}6) - 1$,

$P(99{,}2 \leq L \leq 100{,}8) \approx 2(0{,}9452) - 1$,

$P(99{,}2 \leq L \leq 100{,}8) \approx 0{,}890$ à 10^{-3} près.

2) a) la calculatrice donne $m_e = 100{,}032$ à 10^{-3} près.

b) **Construction du test :**

- *choix de H_0* : $m = 100$ *choix de H_1* : $m \neq 100$,

- *détermination de la région critique* :

Sous l'hypothèse H_0, $m = 100$, la variable aléatoire $\overline{X}$ qui, à tout échantillon de taille 50 associe sa moyenne, suit la loi normale $\mathcal{N}(100 ; \frac{0{,}5}{\sqrt{50}})$ soit $\mathcal{N}(100 ; \frac{0{,}1}{\sqrt{2}})$

La variable centrée réduite $T = 10(\overline{X} - 100)\sqrt{2}$ suit la loi normale $\mathcal{N}$ (0, 1), $P(m - h < \overline{X} < m + h) = 0{,}95$ équivaut à $P(-10\,h\sqrt{2} < T < 10\,h\sqrt{2}) = 0{,}95$,

$P(-1{,}96 \leq T \leq 1{,}96) = 0{,}95$, donc $10\,h\sqrt{2} = 1{,}96$,

$h \approx 0{,}1386$ d'où l'intervalle : $I = [99{,}86 ; 100{,}14]$,

Si H_0 est vraie on a 95% de chances de prélever un échantillon aléatoire dont la moyenne appartient à l'intervalle [99,86 ; 100,14],

- *règle de décision :*

On prélève un échantillon aléatoire non exhaustif de 40 bordures, on calcule sa moyenne $\overline{x}$

si $m_e \in [99{,}86 ; 100{,}14]$ on accepte H_0.

si $m_e \notin [99{,}86 ; 100{,}14]$ on rejette H_0 et on accepte H_1.

Utilisation du test :

$m_e = 100{,}032 \in [99{,}86 ; 100{,}14]$ on accepte H_0.

On accepte donc'hypothèse $m = 100$ au seuil de confiance 5%, on considère que, au seuil de risque 5%, la moyenne ds longueurs des bordures de la production est bien 100 cm.

EXERCICE 2

A)

1° $x\,y' - 2(x+1)\,y = 0$. On sait que la solution générale de l'équation $a(x)y'(x) + b(x)y(x) = 0$ est définie par :
$y(x) = Ce^{-F(x)}$, où F est une primitive de la fonction : $x \to \frac{b(x)}{a(x)}$, et C est une constante réelle arbitraire.

Une primitive de $x \to -2\frac{x+1}{x} = -2 - \frac{2}{x}$ sur $]0,+\infty[$ est $x \to -2x - 2\ln x$.

On en déduit que la solution générale de (E') est définie sur $]0,+\infty[$ par : $y(x) = C\,e^{2x + \ln x^2} = C\,x^2\,e^{2x}$,

$y(x) = C\,x^2\,e^{2x}$ où C est une constante réelle quelconque.

2° On cherche une solution particulière de (E) de la forme $g(x) = \alpha e^{2x}$, $g'(x) = 2\alpha e^{2x}$,

$x\,g'(x) - 2(x+1)g(x) = 2\alpha x e^{2x} - 2(x+1)\alpha e^{2x}$,

$x\,g'(x) - 2(x+1)g(x) = -2\alpha e^{2x}$, pour tout réel x. Par identification on trouve : $\alpha = -1$, la solution particulière de (E) est donc définie par $g(x) = -e^{2x}$.

3° La solution générale de l'équation (E) est la somme d'une solution particulière de cette équation et de la solution générale de l'équation sans second membre associée (E'). La solution générale de l'équation (E) est donc définie sur $]0,+\infty[$ par : $y(x) = -e^{2x} + C\,x^2\,e^{2x}$ où C est une constante réelle quelconque.

4° $f(1) = -\frac{3}{4}e^2$ équivaut à $-\frac{3}{4}e^2 = -e^2 + C\,e^2$, donc $1 - C = \frac{3}{4}$, $C = \frac{1}{4}$, pour tout x de $]0,+\infty[$,
$f(x) = -e^{2x} + \frac{1}{4}x^2 e^{2x} = (\frac{1}{4}x^2 - 1)e^{2x}$.

B)

1° Du développement limité :
$$e^t = 1 + \frac{t}{1!} + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + t^3\,\varepsilon(t), \text{ avec } \lim_{x\to 0}\varepsilon(t) = 0$$
on en déduit les développements limités :
$$e^{2x} = 1 + 2x + \frac{4x^2}{2} + \frac{8x^3}{6} + x^3\,\varepsilon(x),$$
avec $\lim_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0$, (puisque $\lim_{x\to 0}(2x) = 0$).
$$f(x) = (\frac{1}{4}x^2 - 1)(1 + 2x + 2x^2 + x^2\,\varepsilon(x)),$$
avec $\lim_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0$,
$$f(x) = -1 - 2x - \frac{7}{4}x^2 + x^2\,\varepsilon(x), \text{ avec } \lim_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0.$$
Une équation de la tangente (T) à (C) au point A d'abscisse 0 est donc $y = -1 - 2x$.

2° La position relative de (T) et (C) au voisinage du point d'abscisse 0 est donnée par le signe de :
$f(x) - (-1 - 2x) = -\frac{7}{4}x^2 + x^2\,\varepsilon(x)$, avec $\lim_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0$.
$f(x) - (-1 - 2x)$ est du signe de $-\frac{7}{4}x^2$ donc (C) est au dessous de (T) au voisinage du point A.

C)

1) $F(x) = (a\,x^2 + b\,x + c)\,e^{2x}$,
$F'(x) = (2a\,x + b)\,e^{2x} + 2\,(a\,x^2 + b\,x + c)\,e^{2x}$,
$F'(x) = f(x)$ équivaut à
$(2a\,x^2 + (2a + 2b)\,x + b + 2c)\,e^{2x} = (\frac{1}{4}x^2 - 1)e^{2x}$.

Egalité vérifiée pour tout x de $]-1, +\infty[$ pour :
$$\begin{cases} 2a = \frac{1}{4} \\ b = -\frac{1}{8} \\ b + 2c = -1 \end{cases}, \quad \begin{cases} a = \frac{1}{8} \\ 2a + 2b = 0 \\ c = -1\,\frac{7}{16} \end{cases}$$
$$F(x) = (\frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{8}x - \frac{7}{16})\,e^{2x}$$

$$\int_0^2 f(x)\,dx = [(\frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{8}x - \frac{7}{16})\,e^{2x}]_0^2$$

$$\int_0^2 f(x)\,dx = (\frac{4}{8} - \frac{2}{8} - \frac{7}{16})\,e^4 + \frac{7}{16}$$

$$\int_0^2 f(x)\,dx = -\frac{3}{16}e^4 + \frac{7}{16}.$$

2) La portion de courbe comprise entre les droites d'équations $x = 0$ et $x = 2$ est située au dessous de l'axe des abscisses donc l'aire A est l'opposée de l'intégrale précédente
$A = (-\frac{3}{16}e^4 + \frac{7}{16})$ U.A, en cm on obtient :
$A = 2\,(-\frac{3}{16}e^4 + \frac{7}{16})\ \text{cm}^2$, $A = -\frac{3}{8}e^4 + \frac{7}{8}\ \text{cm}^2$.

3) $A = 19{,}6\ \text{cm}^2$ à 0,1 près.

TRAVAUX PUBLICS

Session 1996

EXERCICE 1 (8 points)

Soit l'équation différentielle (E) : $y' + \frac{2}{x}\, y = \frac{1}{x^3}$ où y est une fonction de la variable réelle x définie et dérivable sur $]\, 0\,, +\infty[$.

1. a) Résoudre l'équation différentielle $y' + \frac{2}{x}\, y = 0$.

   b) Déterminer une fonction z de la variable réelle x, définie et dérivable sur l'intervalle $]\, 0\,, +\infty[$ telle que $y(x) = \frac{1}{x^2}\, z(x)$ soit solution de l'équation différentielle (E).

   En déduire une solution particulière de l'équation différentielle (E)

   c) Résoudre sur l'intervalle $]\, 0, +\infty[$ l'équation différentielle (E).

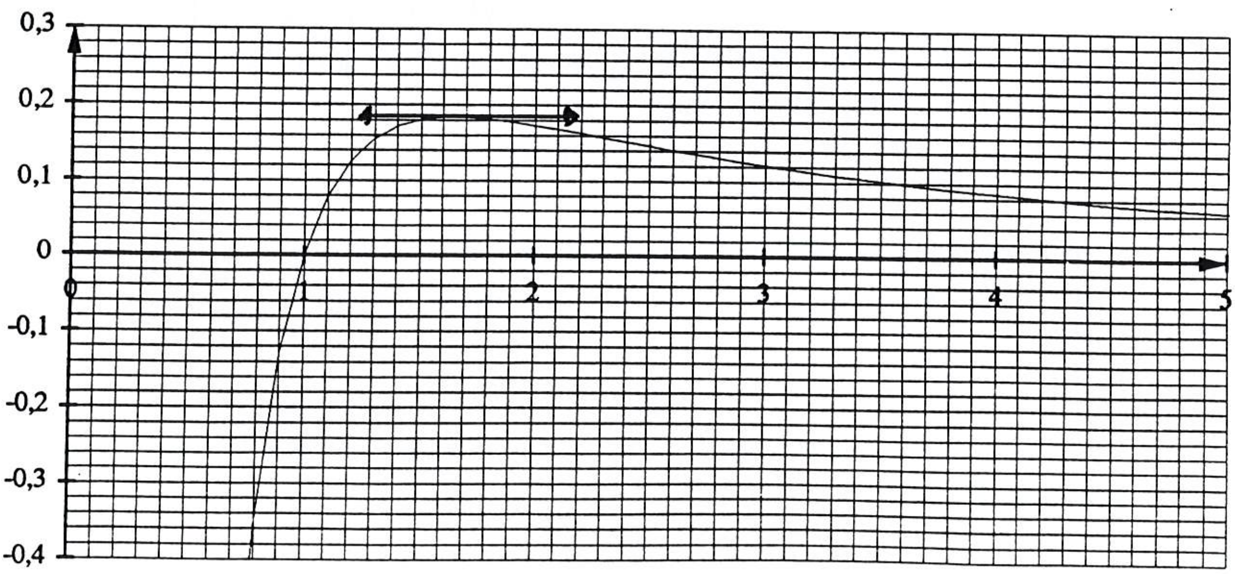
   d) Déterminer la solution f qui vérifie $f(1) = 0$.

2. Soit la fonction f de la variable réelle x définie sur $]\, 0\,, +\infty[$ par $f(x) = \frac{\ln x}{x^2}$.

   On désigne par C sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O; \vec{i}\,, \vec{j}\,)$ où les unités graphiques sont 3 cm sur l'axe des abscisses et 10 cm sur l'axe des ordonnées.
   C est représentée ci-après.

   a) En utilisant une intégration par parties, calculer la valeur exacte de l'intégrale $\int_1^e \frac{\ln x}{x^2}\, dx$

   b) Calculer la valeur exacte a en cm^2 de l'aire du domaine plan compris entre les droites d'équations $x = 1$, $x = e$, l'axe Ox et la courbe C.
   Donner une valeur décimale approchée à 10^{-3} près par défaut de a.



EXERCICE 2 (12 points)

La technique de la terre armée utilise des armatures métalliques. Afin d'éviter la corrosion des métaux enterrés dans les remblais, un laboratoire cherche à savoir si l'on peut utiliser sans danger des armatures à base de plastique. Dans cette optique, on décide de tester la résistance à la traction de câbles composés de polypropylène.

La traction maximale supportée par un câble est appelée traction limite.

Le fabricant annonce une traction limite moyenne de 14 tonnes.

Dans tout l'exercice, les résultats seront donnés à 10^{-3} près.

1) La résistance de cent câbles a été testée, les résultats obtenus sont les suivants :

Tractions limites en tonne	[7 , 9 [	[9 , 11[	[11 , 13[	[13 , 15[	[15 , 17[	[17 , 19[	[19 , 21[
Nombre de câbles	2	12	24	37	13	8	4

a) Calculer une valeur approchée de la moyenne $\overline{x_e}$ et de l'écart type σ_e de cette série statistique. Pour cela, on suppose que toutes les observations d'une classe sont regroupées au centre de la classe. (Aucun calcul intermédiaire n'est demandé).

b) Calculer avec quelle fréquence les câbles de l'échantillon ont leur traction limite strictement inférieure à 11 tonnes.

2) On note p la probabilité que la traction limite soit strictement inférieure à 11 tonnes. p est égale à 0,14.

On prélève au hasard et avec remise, dans un stock de câbles, cinq d'entre eux. Soit X la variable aléatoire qui, à tout prélèvement aléatoire non exhaustif de 5 câbles associe le nombre de câbles ayant une traction limite inférieure à 11 tonnes parmi les 5 câbles de cet échantillon.

a) Quelle est la loi suivie par la variable aléatoire X ? Justifier la réponse.

b) Calculer $P(X = 0)$, puis $P(X \geq 3)$.

3) Soit Y la variable aléatoire qui, à tout câble prélevé au hasard dans la production associe la traction limite (exprimée en tonne) de ce câble. On suppose que la variable aléatoire Y suit la loi normale de paramètres $m = 13{,}74$ et $\sigma = 2{,}6$.

Calculer $P(Y \geq 18{,}94)$ puis $P(11{,}14 \leq Y \leq 16{,}34)$.

4) Pour contrôler la moyenne des tractions limite, on prélève un échantillon de 225 pièces dont la traction limite moyenne est de 13,6 tonnes. On suppose que l'écart type de la population est encore 2,6 tonnes.

Construire un test permettant d'accepter ou de refuser avec pour seuil $\alpha = 0{,}05$ l'hypothèse selon laquelle la traction limite moyenne est de 14 tonnes. Utiliser ce test pour l'échantillon considéré.

Exercice 1

1. a) L'équation $y' + \frac{2}{x} y = 0$ est de la forme $a(x)\,y' + b(x)\,y = 0$.
Toutes les solutions de cette équation sont donc définies sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = K\,e^{-G(x)}$ où K est une constante réelle et G une primitive de $\frac{b}{a}$. Pour tout x de $]0, +\infty[$, $\frac{b(x)}{a(x)} = \frac{2}{x}$ d'où $G(x) = 2 \ln x$, $G(x) = \ln x^2$.
$f(x) = K\,e^{-\ln x^2}$, $f(x) = K\,e^{\ln 1/x^2}$, $f(x) = \frac{K}{x^2}$.

b) Soit z telle que $y(x) = \frac{1}{x^2} z(x)$ solution de (E),
$y'(x) = -\frac{2}{x^3} z(x) + \frac{1}{x^2} z'(x)$, y est solution de (E) si et seulement si pour tout nombre réel x de $]0, +\infty[$,
$y' + \frac{2}{x} y = \frac{1}{x^3}$. Pour tout réel x de $]0, +\infty[$,
$-\frac{2}{x^3} z(x) + \frac{1}{x^2} z'(x) + \frac{2}{x^3} z(x) = \frac{1}{x^3}$,
$\frac{1}{x^2} z'(x) = \frac{1}{x^3}$, $z'(x) = \frac{1}{x}$, $z(x) = \ln x + K_1$.
Donc $y(x) = \frac{1}{x^2}(\ln x + K_1)$

c) L'ensemble des solutions de (E) est l'ensemble des fonctions définies sur $]0, +\infty[$ par
$f(x) = \frac{1}{x^2}(\ln x + K_1)$ où K_1 est une constante réelle quelconque.

d) $f(1) = 0$ se traduit par $K_1 = 0$, $f(x) = \frac{\ln x}{x^2}$.

2. a) En posant $u(x) = \ln x$, $u'(x) = \frac{1}{x}$,
$v'(x) = \frac{1}{x^2}$, $v(x) = -\frac{1}{x}$.

$$A = \left[-\frac{1}{x} . \ln x\right]_1^e + \int_1^e -\frac{1}{x^2}\,dx,$$

$$A = -\frac{1}{e} + \left[-\frac{1}{x}\right]_1^e, \quad A = -\frac{1}{e} - \frac{1}{e} + 1, \quad A = 1 - \frac{2}{e}.$$

b) La valeur exacte $\mathcal{A}$ en cm^2 est $\mathcal{A} = 30(1 - \frac{2}{e})$ cm.
La valeur approchée à 10^{-3} près par défaut est
$\mathcal{A} = 7{,}927\ cm^2$.

Exercice 2

1) a. A l'aide de la calculatrice on trouve :
$\overline{x} = 13{,}74$ tonnes, $\sigma = 2{,}602$ tonnes à 10^{-3} près.
b) Parmi les 100 câbles il y en a 2 + 12 = 14 qui ont une traction limite strictement inférieure à 11 tonnes donc
$p = \frac{14}{100}$, $p = 0{,}14$ pour cet échantillon.

2) a) On est donc en présence d'une succession de 5 épreuves indépendantes, chacune ayant deux issues : le câble prélevé a une traction limite inférieure à 11 tonnes de probabilité constante 0,14 ou le câble prélevé n'a pas une traction limite inférieure à 11 tonnes de probabilité 0,86
X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(5 ; 0{,}14)$.
b) $P(X = 0) = C_5^0 (0{,}14)^0 (0{,}86)^5 = 0{,}470$ à 10^{-3} près.
$P(X \geq 3) = 1 - P(Y < 3)$
$P(X \geq 3) = 1 - [C_5^0(0{,}14)^0(0{,}86)^5 + C_5^1(0{,}14)(0{,}86)^4 + C_5^2(0{,}14)^2(0{,}86)^3]$, $P(X \geq 3) \approx 1 - 0{,}978$ à 10^{-3} près
$P(X \geq 3) = 0{,}022$ à 10^{-3} près.

3) La variable aléatoire Y suit la loi normale $\mathcal{N}(13{,}74 ; 2{,}6)$, la variable aléatoire $T = \frac{Y - 13{,}74}{2{,}6}$ suit la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0 ; 1)$.
a) $P(Y \geq 18{,}94) = P(T \geq \frac{5{,}2}{2{,}6})$,
$P(Y \geq 18{,}94) = P(T \geq 2)$, $P(Y \geq 18{,}94) = 1 - \pi(2)$,
$P(Y \geq 18{,}94) = \approx 1 - 0{,}9772$
$P(L \geq 18{,}94) \approx 0{,}023$ à 10^{-3} près.
b) $P(11{,}14 \leq Y \leq 16{,}34) = P(-\frac{2{,}6}{2{,}6} \leq T \leq \frac{2{,}6}{2{,}6})$,
$P(11{,}14 \leq Y \leq 16{,}34) = 2\,\pi(1) - 1$,
$P(11{,}14 \leq Y \leq 16{,}34) \approx 2(0{,}8413) - 1$,
$P(11{,}14 \leq Y \leq 16{,}34) \approx 0{,}683$ à 10^{-3} près.

4) Construction du test :
- *choix de H_0* : m = 14 *choix de H_1* : m ≠ 14,
- ***détermination de la région critique*** :

Sous l'hypothèse H_0, m = 14, la variable aléatoire $\overline{X}$ qui, à chaque échantillon de 225 pièces prélevé au hasard dans la production associe la moyenne des longueurs des pièces, suit la loi normale $\mathcal{N}(14 ; \frac{2{,}6}{15})$ la variable aléatoire $T = 15\frac{\overline{X} - 14}{2{,}6}$ suit la loi normale centrée, réduite $\mathcal{N}(0, 1)$. $P(14 - h < \overline{X} < 14 + h) = 0{,}95$ équivaut à $P(-\frac{15\,h}{2{,}6} < T < \frac{15\,h}{2{,}6}) = 0{,}95$,
$P(-1{,}96 \leq T \leq 1{,}96) = 0{,}95$, donc $\frac{15\,h}{2{,}6} = 1{,}96$,
$h = 0{,}34$ à 10^{-3} près d'où l'intervalle d'acceptation :
$I = [13{,}66 ; 14{,}34]$. Si H_0 est vraie on a 95% de chances de prélever un échantillon aléatoire dont la moyenne appartient à l'intervalle [13,66 ; 14,34],
- ***règle de décision*** :

On prélève un échantillon aléatoire non exhaustif de 225 pièces, on calcule sa moyenne $\overline{x}$
si $\overline{x} \in [13{,}66 ; 14{,}34]$ on accepte H_0.
si $\overline{x} \notin [13{,}66 ; 14{,}34]$ on rejette H_0 et on accepte H_1.

Utilisation du test : $\overline{x} = 13{,}6$

$\overline{x} \notin [13{,}66 ; 14{,}34]$ on rejette H_0 et on accepte H_1, au seuil de risque 5%, la traction limite moyenne des pièces de la production n'est pas 14 tonnes.

TRAVAUX PUBLICS

Session 1997

EXERCICE 1 (8 points)

Un matériau de remblai est l'objet d'une campagne d'essais. En fonction de sa masse volumique, on veut dimensionner un mur de soutènement à parement vertical que l'on se propose de construire, capable de soutenir un tel remblai.

On effectue avec un scraper, des emprunts horizontaux dans une zone argileuse. Les tests de masse volumique sont faits sur un assez grand nombre d'emprunts pour être supposés indépendants les uns des autres, répartis sur toute la zone où ces emprunts sont effectués.

Dans tout le problème, les résultats seront donnés au millième près.

1. Soit M, la variable aléatoire qui à tout emprunt pris au hasard associe la masse volumique (exprimée en tonnes par m^3) du matériau argileux, on suppose que M suit *la* loi normale de moyenne $m = 1{,}65$ et d'écart type $s = 0{,}065$.

   a) Quelle est la probabilité que la masse volumique d'un emprunt pris au hasard ne soit pas comprise entre 1,55 et 1,75 ?

   b) Déterminer le nombre positif a tel que *la* probabilité, qu'un emprunt pris au hasard ait une masse volumique comprise entre $1{,}65 - a$ et $1{,}65 + a$, soit égale à 0,80 ?

2. La probabilité qu'un emprunt, choisi au hasard, ait une masse volumique trop grande ou trop petite pour être jugé bon est 0,12.

Disposant d'un lot comprenant un grand nombre d'emprunts de matériau argileux, on choisit au hasard un échantillon de 50. Soit X la variable aléatoire qui associe à tout échantillon de ce type le nombre d'emprunts non conformes obtenus.

   a) On admet que la variable aléatoire X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres. Exprimer $P(X = k)$ en fonction de k.

   b) Déterminer la probabilité d'obtenir 3 emprunts non conformes.

3. Pour contrôler effectivement le matériau argileux dont on dispose, on choisit au hasard un échantillon de 50 emprunts et on mesure leur masse volumique respective.

Ce prélèvement est assimilé à un tirage avec remise.

Les résultats obtenus sont les suivants :

Masse volumique en tonnes par m^3	[1,51 ; 1,55[	[1,55 ; 1,59[	[1,59 ; 1,63[	[1,63 ; 1,67[	[1,67 ; 1,71[	[1,71 ; 1,75[	[1,75 ; 1,79[
Nombre d'emprunts	2	3	6	20	12	6	1

a) Calculer la moyenne et l'écart type des masses volumiques de cet échantillon (aucun calcul intermédiaire n'est demandé) ; on admet que l'on obtient une approximation acceptable de cette quantité en supposant que dans chaque classe, la masse volumique de tous les emprunts a pour valeur commune le centre de la classe et on prendra dans la suite l'écart type obtenu comme estimation de l'écart type de la population.

b) Construire un test bilatéral, au seuil de 5 %, permettant d'accepter ou de refuser l'hypothèse selon laquelle la moyenne des masses volumiques des emprunts de la production est 1,65 t /m^3.

Pour répondre à cette question :

- on choisira une hypothèse nulle H_0 et une hypothèse alternative H_1 ;
- on déterminera la région critique au seuil de 5 % ;
- on énoncera la règle de décision ;
- on utilisera ce test avecl'échantillon de l'énoncé.

EXERCICE 2 (12 points)

A. Résolution d'une équation différentielle

Soit (E) l'équation différentielle $x(x+1)\,y' + y = 1 + x + \ln x$ où y désigne une fonction de la variable x, définie et dérivable sur $]0, +\infty[$ de dérivée y ' et ln le logarithme népérien.

1. Sachant que pour tout réel de l'intervalle $]0, +\infty[$ on a : $\dfrac{-1}{x(x+1)} = -\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x+1}$

   Déterminer la solution générale de l'équation différentielle $x(x+1)\,y' + y = 0$.

2. Vérifier que la fonction g définie sur l'intervalle $]0, +\infty[$ par $g(x) = \ln x$ est solution de (E).

3. En déduire la solution générale de l'équation (E)sur $]0, +\infty[$, et la fonction f solution de (E) qui vérifie la condition $f(1) = 2$.

B. Etude d'une fonction

Soit f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{x+1}{x} + \ln x$ et C la courbe représentative de f dans un repère orthonormé d'unité graphique 2 cm.

1. Déterminer les limites de f quand x tend vers zéro et plus l'infini.

2. Etudier les variations de f et établir le tableau de variations de f.

3. Déterminer le point A de la courbe C où la tangente a pour coefficient directeur le nombre $\dfrac{1}{4}$.

   Déterminer une équation de la tangente à C, notée T, au point A.

4. Le but de cette question est d'étudier les positions relatives de C et T. Pour cela, on considère la fonction g définie sur $]0, +\infty[$ par $g(x) = \ln\frac{x}{2} + \frac{1}{x} - \frac{x}{4}$.

   a) Calculer $g'(x)$ sur l'intervalle $]0, +\infty[$.

   b) Tracer le tableau de variations de g (on ne demande pas les limites aux bornes du domaine de définition). Calculer $g(2)$.

   c) En déduire le signe de $g(x)$ sur $]0, +\infty[$.

   d) Préciser alors les positions relatives de C et T.

5. Tracer C et T dans le repère défini ci-dessus.

C. Calcul d'intégrale

1. Calculer l'intégrale $J = \int_1^2 \ln x \, dx$ en utilisant une intégration par parties.

2. En déduire la valeur de l'intégrale $I = \int_1^2 f(x) \, dx$.

   Donner une interprétation géométrique de la valeur de I.

EXERCICE 1

1° La variable aléatoire M qui, à chaque emprunt prélevé au hasard dans la production associe sa masse, suit la loi normale $\mathcal{N}(1,65 ; 0,065)$.

La variable aléatoire $T = \frac{X - 1,65}{0,065}$ suit la loi normale centrée, réduite $\mathcal{N}(0, 1)$.

a) La probabilité qu'un emprunt, tiré au hasard dans la production ait sa masse comprise entre 1,55 et 1,75 est

$P(1,55 \leq X \leq 1,75) = P(-\frac{0,1}{0,065} \leq T \leq \frac{0,1}{0,065})$,

$P(1,55 \leq X \leq 1,75) = 2\pi(1,54) - 1$,

$P(1,55 \leq X \leq 1,75) \approx 2(0,9382) - 1$,

$\mathbf{P(1,55 \leq X \leq 1,75) \approx 0,8764}$ à 10^{-4} près.

La probabilité qu'un emprunt, tiré au hasard dans la production ait sa masse comprise entre 1,18 et 1,22 est donc **0,994** à 10^{-3} près.

b) $P(1,65 - a \leq X \leq 1,65 + a) = 0,8$ équivaut à

$P(-\frac{a}{0,065} \leq T \leq \frac{a}{0,065}) = 0,64$, $2\pi(\frac{a}{0,065}) - 1 = 0,8$,

$\pi(\frac{a}{0,065}) = 0,9$, $\frac{a}{0,065} \approx 1,28$, $a \approx \mathbf{0,0832}$.

2) a) On admet que la variable aléatoire X suit une loi binomiale. On est en présence d'une succession de 50 épreuves indépendantes, chacune ayant deux issues : l'emprunt tiré au hasard est non conforme de probabilité constante 0,12 ou conforme de probabilité 0,88. X suit donc la loi binomiale $\mathcal{B}(50 ; 0,12)$.

$P(X = k) = C_{50}^{k}(0,12)^{k}(0,88)^{50-k}$.

b) $P(X = 3) = C_{50}^{3}(0,12)^{3}(0,88)^{47}$.

$\mathbf{P(X = 0) = 0,0833}$ à 10^{-4} près.

3) a) la calculatrice donne la moyenne de l'échantillon $\bar{x} = 1,6572$, l'écart type de l'échantillon $\sigma_e = 0,0504$ et une estimation de l'écart type de la population $\sigma_e = 0,0509$.

b) **Construction du test :**

- *choix de H_0* : $m = 1,65$ *choix de H_1* : $m \neq 1,65$,
- *détermination de la région critique* :

Sous l'hypothèse H_0, $m = 1,65$, une estimation de l'écart type de la population est $\sigma_e = 0,0509$, la variable aléatoire $\bar{X}$ qui, à tout échantillon de taille 50 associe sa moyenne, suit la loi normale $\mathcal{N}(1,65 ; \frac{0,0509}{\sqrt{50}})$.

La variable centrée réduite $T = \frac{\bar{X} - 1,65}{0,0509}\sqrt{50}$ suit la loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$, $P(1,65 - a < \bar{X} < 1,65 + a) = 0,95$

équivaut à $P(-\frac{a}{0,0509}\sqrt{50} < T < \frac{a}{0,0509}\sqrt{50}) = 0,95$,

$P(-1,96 \leq T \leq 1,96) = 0,95$, donc $\frac{a}{0,0509}\sqrt{50} = 1,96$,

$a \approx 0,014$ d'où l'intervalle : $I = [1,636 ; 1,664]$,

Si H_0 est vraie on a 95% de chances de prélever un échantillon aléatoire dont la moyenne appartient à l'intervalle [1,636 ; 1,664].

- *règle de décision :*

On prélève un échantillon aléatoire non exhaustif de 40 bordures, on calcule sa moyenne $\bar{x}$

si $m_e \in [1,636 ; 1,664]$ on accepte H_0 .

si $m_e \notin [1,636 ; 1,664]$ on rejette H_0 et on accepte H_1.

Utilisation du test :

$\bar{x} = 1,6572 \in [1,636 ; 1,664]$ on accepte H_0 .

On accepte donc l'hypothèse $m = 1,65$ au seuil de 5%, la moyenne des masses volumiques des emprunts de la production est 1,65 t /m^3.

EXERCICE 2

A. 1. Soit (E') l'équation différentielle $x(x + 1) y' + y = 0$.

On sait que la solution générale de l'équation $a(x)y'(x) + b(x)y(x) = 0$ est définie par : $y(x) = Ce^{-F(x)}$, où F est une primitive de la fonction : $x \rightarrow \frac{b(x)}{a(x)}$, et C est une constante réelle arbitraire.

Une primitive de $x \rightarrow \frac{1}{x(x + 1)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x + 1}$ sur $]0,+\infty[$ est F telle que $F(x) = \ln x - \ln (x + 1)$,

$F(x) = - \ln\frac{x + 1}{x}$.

On en déduit que la solution générale de (E') est définie sur $]0, +\infty[$ par : $y(x) = C\frac{x + 1}{x}$, **où C est une constante réelle quelconque.**

2. Sur $]0, +\infty[$, $g(x) = \ln x$, $g'(x) = \frac{1}{x}$,

$x(x + 1) g'(x) + g(x) = x(x + 1)\frac{1}{x} + \ln x$, pour tout réel x de $]0, +\infty[$ on a $(x + 1) g'(x) + g(x) = x + 1 + \ln x$ donc g est bien solution générale de (E').

3. La solution générale de l'équation (E) est la somme d'une solution particulière de cette équation et de la solution générale de l'équation sans second membre associée (E'). La solution générale de l'équation (E) est donc définie sur $]0,+\infty[$ par : $y(x) = C\frac{x + 1}{x} + \ln x$ où C est une constante réelle quelconque.

$f(1) = 2$ équivaut à $2 = 2 K$, donc $C = 1$, pour tout x de $]0,+\infty[$, $\mathbf{f(x) = \frac{x + 1}{x} + \ln x}$.

B. 1. De $\lim_{x\to+\infty} \frac{x + 1}{x} = 1$ et $\lim_{x\to+\infty} x = +\infty$ on déduit $\lim_{x\to+\infty} \mathbf{f(x)} = +\infty$.

$f(x) = \frac{1}{x} [x + 1 + x \ln x]$, de $\lim_{x\to0} x \ln x = 0$, on déduit

$\lim_{x\to0}[x + 1 + x \ln x] = 1$ et $\lim_{x\to0} f(x) = \lim_{x\to0} \frac{1}{x}$, $x > 0$

donc $\lim_{x\to0} \mathbf{f(x)} = +\infty$.

2. $f'(x) = \frac{x - x - 1}{x^2} + \frac{1}{x}$, $f'(x) = \frac{x-1}{x^2}$, $f(1) = 2$.

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$\Vert$ $+\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$

3. $f'(x) = \frac{1}{4}$ équivaut à $\frac{x-1}{x} = \frac{1}{4}$ et à $x^2 - 4x + 4 = 0$ et à $(x - 2)^2 = 0$, $f(2) = \frac{3}{2} + \ln 2$.

Le point A a pour coordonnées $(2, \frac{3}{2} + \ln 2)$, une équation de la tangente à C en A est $y_T = \frac{1}{4}(x-2) + \frac{3}{2} + \ln 2$,

$y_T = \frac{1}{4}x + 1 + \ln 2$.

4. a) Pour tout réel x de $]0, +\infty[$ on a $g(x) = \ln\frac{x}{2} + \frac{1}{x} - \frac{x}{4}$

pour x de $]0, +\infty[$, $g'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} - \frac{1}{4}$,

$g'(x) = \frac{-x^2 + x - 1}{x^2}$ est du signe de $-x^2 + x - 1$ dont le discriminant est négatif donc $g'(x) < 0$.

b) $g(2) = 0$

x	0		2		$+\infty$
$g'(x)$	$\Vert$		$-$		
$g(x)$			$\searrow$		
$g(x)$	$\Vert$	$+$	0	$-$	

c) La position relative de (T) et (C) est donnée par le signe de la différence entre les ordonnées sur la courbe C et la droite T : $y_C - y_T = \frac{x+1}{x} + \ln x - \frac{1}{4}x - 1 - \ln 2$

$y_C - y_T = \ln\frac{x}{2} + \frac{1}{x} - \frac{x}{4} = g(x)$ donc :

Pour tout réel x de $]0, 2[$, $g(x) > 0$, C est au dessus de T.
Pour tout réel x de $]2, +\infty[$, $g(x) < 0$, C est au dessous de T.

C. 1. En posant

$u'(x) = 1$, $v(x) = \ln x$,

$u(x) = x$, $v'(x) = \frac{1}{x}$,

$$J = \int_1^2 \ln x \, dx = \left[x \ln x \right]_1^2 - \int_1^2 1 . dx ,$$

$J = \left[x \ln x - x \right]_1^2$, **$I = 2 \ln 2 - 1$.**

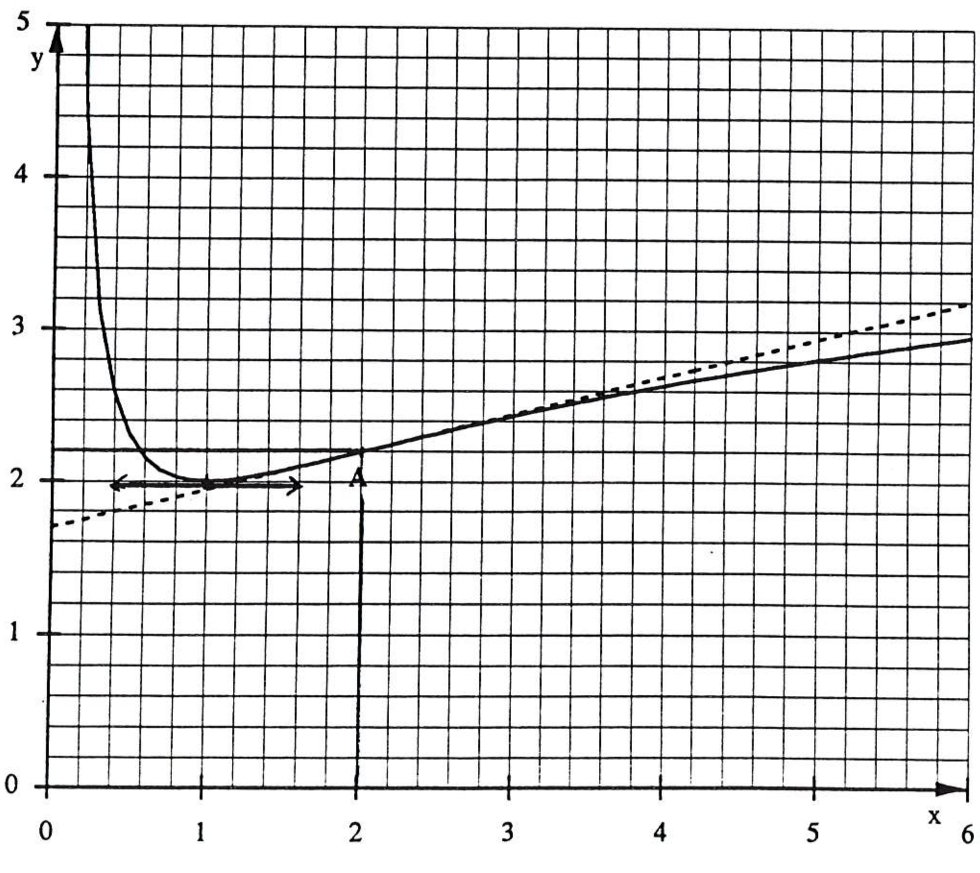
$$2.\ I = \int_1^2 \left(1 + \frac{1}{x} + \ln x\right) dx ,$$

$J = \left[x + \ln x \right]_1^2 + J$,

$J = 2 + \ln 2 - 1 + 2 \ln 2 - 1$,

$J = 3 \ln 2$.

J représente l'aire, en unités d'aire, du domaine plan compris entre la courbe C l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = 2$.



FORMULAIRE DE MATHEMATIQUE

1. RELATIONS FONCTIONNELLES :

$\ln(ab) = \ln a + \ln b$, où $a > 0$ et $b > 0$

$\exp(a+b) = \exp a \times \exp b$

$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$

$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$

$\cos 2t = 2\cos^2 t - 1 = 1 - 2\sin^2 t$

$\sin 2t = 2 \sin t \cos t$

$$\sin p + \sin q = 2 \sin \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$$

$$\sin p - \sin q = 2 \sin \frac{p-q}{2} \cos \frac{p+q}{2}$$

$$\cos p + \cos q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$$

$$\cos p - \cos q = -2 \sin \frac{p+q}{2} \sin \frac{p-q}{2}$$

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2}[\cos(a+b) + \cos(a-b)]$$

$$\sin a \sin b = \frac{1}{2}[\cos(a-b) - \cos(a+b)]$$

$$\sin a \cos b = \frac{1}{2}[\sin(a+b) + \sin(a-b)].$$

$e^{it} = \cos t + i \sin t$

$\cos t = \frac{1}{2}(e^{it} + e^{-it})$, $\operatorname{ch} t = \frac{1}{2}(e^{t} + e^{-t})$

$\sin t = \frac{1}{2i}(e^{it} - e^{-it})$, $\operatorname{sh} t = \frac{1}{2}(e^{t} - e^{-t})$

$e^{at} = e^{\alpha t}(\cos \beta t + i \sin \beta t)$ où $a = \alpha + i\beta$

2. DÉRIVÉES ET PRIMITIVES :

$f(t)$	$f'(t)$
$\ln t$	$\frac{1}{t}$
e^t	e^t
t^α ($\alpha \in \mathbb{R}^*$)	$\alpha t^{\alpha-1}$
$\sin t$	$\cos t$
$\cos t$	$-\sin t$
$\tan t$	$\frac{1}{\cos^2 t} = 1 + \tan^2 t$
$\operatorname{ch} t$	$\operatorname{sh} t$
$\operatorname{sh} t$	$\operatorname{ch} t$
$\operatorname{Arc\,sin} t$	$\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$
$\operatorname{Arc\,tan} t$	$\frac{1}{1+t^2}$
e^{at} $a \in \mathbb{C}$	$a e^{at}$

3. DÉVELOPPEMENTS LIMITES :

$$e^t = 1 + \frac{t}{1!} + \frac{t^2}{2!} + \ldots + \frac{t^n}{n!} + t^n \varepsilon(t)$$

$$\frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 + \ldots + (-1)^n t^n + t^n \varepsilon(t)$$

$$\ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + \ldots + (-1)^{n-1} \frac{t^n}{n} + t^n \varepsilon(t)$$

$$\sin t = t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} + \ldots + (-1)^p \frac{t^{2p+1}}{(2p+1)!} + t^{2p+1} \varepsilon(t)$$

$$\cos t = 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} + \ldots + (-1)^p \frac{t^{2p}}{(2p)!} + t^{2p} \varepsilon(t)$$

$$(1+t)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!} t + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} t^2 + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!} t^n + t^n \varepsilon(t).$$

4. STATISTIQUE DESCRIPTIVE :

a) Moyenne arithmétique : $\bar{x}=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{i=n} X_i,\qquad \bar{x}=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{i=n} n_i c_i.$

b) Variance et écart-type : $V=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{i=n}(x_i-\bar{x})^2=\dfrac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)-(\bar{x})^2,\qquad \sigma=\sqrt{V}.$

c) Ajustement affine par la méthode des moindres carrés :

Covariance : $\sigma_{xy}=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{i=n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})=\dfrac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)-\bar{x}\,\bar{y}$

$y=ax+b,\quad \text{où}\quad a=\dfrac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2};\qquad x=a'y+b',\quad \text{où}\quad a'=\dfrac{\sigma_{xy}}{\sigma_y^2}.$

d) Corrélation linéaire : $r=\dfrac{\sigma_{xy}}{\sigma_x\cdot\sigma_y}.$

5. PROBABILITÉS :

a) Loi binomiale : $P(X=k)=C_n^k p^k q^{n-k}$ où $C_n^k=\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ $E(X)=np,\quad \sigma(X)=\sqrt{npq}.$

b) Loi de Poisson : $P(X=k)=\dfrac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!},\quad E(X)=\lambda,\quad V(X)=\lambda.$

k \ λ	1	1,5	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0,368	0,223	0,135	0,0498	0,018	0,007	0,002	0,001	0,000	0,000	0,000
1	0,368	0,335	0,271	0,149	0,073	0,034	0,015	0,006	0,003	0,001	0,000
2	0,184	0,251	0,271	0,224	0,147	0,084	0,045	0,022	0,011	0,005	0,002
3	0,061	0,126	0,180	0,224	0,195	0,140	0,089	0,052	0,029	0,015	0,008
4	0,015	0,047	0,090	0,168	0,195	0,176	0,134	0,091	0,057	0,034	0,019
5	0,003	0,014	0,036	0,101	0,156	0,176	0,161	0,128	0,092	0,061	0,038
6	0,001	0,004	0,012	0,050	0,104	0,146	0,161	0,149	0,122	0,091	0,063
7	0,000	0,001	0,003	0,022	0,060	0,104	0,138	0,149	0,140	0,117	0,090
8		0,000	0,001	0,008	0,030	0,065	0,103	0,130	0,140	0,132	0,113
9			0,000	0,003	0,013	0,036	0,069	0,101	0,124	0,132	0,125
10				0,001	0,005	0,018	0,041	0,071	0,099	0,119	0,125
11				0,000	0,002	0,008	0,023	0,045	0,072	0,097	0,114
12					0,001	0,003	0,011	0,026	0,048	0,073	0,095
13					0,000	0,001	0,005	0,014	0,030	0,050	0,073
14						0,000	0,002	0,007	0,017	0,032	0,052
15							0,001	0,003	0,009	0,019	0,035
16							0,000	0,001	0,005	0,011	0,022
17								0,000	0,002	0,006	0,013
18									0,001	0,003	0,007
19									0,000	0,001	0,004
20										0,000	0,002
21											0,001
22											0,000

k \ λ	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6
0	0,8187	0,7408	0,6703	0,6065	0,5488
1	0,1637	0,2222	0,2681	0,3032	0,3293
2	0,0163	0,0333	0,0536	0,0758	0,0988
3	0,0011	0,0033	0,0071	0,0126	0,0198
4		0,0002	0,0007	0,0015	0,0030
5			0,0001	0,0001	0,0003

c) Loi normale :

La loi normale centrée réduite est caractérisée par la densité de probabilité : $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{x^2}{2}}$.

Extraits de la table de la fonction intégrale de la loi normale centrée, réduite $\mathcal{N}(0;\,1)$

$$\pi(t)=\mathrm{P}(\mathrm{X}\leqslant t)=\int_{-\infty}^{t} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

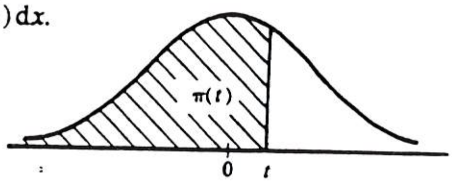


Table pour les grandes valeurs de t

t	3,0	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6	3,8	4,0	4,5
$\pi(t)$	0,998 65	0,999 04	0,999 31	0,999 52	0,999 66	0,999 76	0,999 841	0,999 928	0,999 968	0,999 997

Nota : La table donne les valeurs de $\pi(t)$ pour t positif. Lorsque t est négatif il faut prendre le complément à l'unité de la valeur lue dans la table.

Exemple : pour $t=1{,}37$ $\quad\pi(t=1{,}37)\ =0{,}9147$

pour $t=-1{,}37$ $\quad\pi(t=-1{,}37)=0{,}0853$.

t	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7290	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8254	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9779	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9981	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9898	0,9901	0,9904	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986

AUTEURS Commission Inter-IREM Lycées technologiques

Geneviève SAINT-PIERRE
Bernard VERLANT

EDITEUR IREM de PARIS-NORD

DATE Décembre 1997

NIVEAU BTS

MOTS CLES BTS 89-97 Matériaux-Energie

RESUME Cette brochure regroupe des textes modifiés tirés des exercices ou problèmes posés à des épreuves de BTS de la filière Matériaux-Energie des sessions 1989 à 1997.

Universite PARIS-NORD

I.R.E.M

Avenue Jean-Baptiste Clément
93430 VILLETANEUSE

Téléphone : 49 40 36 40
Télécopie : 49 40 36 36