M. H. DELANNOY

Sous-Intendant militaire en retraite, à Guéret.

FORMULES RELATIVES AUX COEFFICIENTS DU BINOME

— *Séance du 8 août 1890* —

On sait que la somme alternée des q premiers coefficients du binôme est:

$$1 - C_p^1 + C_p^2 - C_p^3 + \dots + (-1)^{q-1} C_p^{q-1} = (-1)^{q-1} C_{p-1}^{q-1}$$

mais on ne connaît pas de formule simple donnant la somme des q premiers coefficients.

La formule, que nous avons obtenue en cherchant la limite de l'écart moyen entre les gains et les pertes, nous semble présenter un certain intérêt, car elle donne la somme des q premiers coefficients multipliés respectivement par les q premiers termes de la progression arithmétique :

$$p,\ p - 2,\ p - 4,\ \dots$$

Nous avons démontré, en effet, que l'on a :

$$p.1 + (p-2) C_p^1 + (p-4) C_p^2 + \dots + (p - 2q + 2) C_p^{q-1} = q C_p^q$$

Dans les mêmes conditions, la somme alternée est :

$$p.1-(p-2)C_p^1+(p-4)C_p^2-\ldots+(-1)^{q-1}(p-2q+2)\ C_p^{q-1}$$
$$=(-1)^{q-1}\cdot\frac{q(p-2q+1)}{p-1}\,C_p^q\,.$$

Plus généralement, si l'on multiplie respectivement les q premiers coefficients de $(1-x)^p$, par les q premiers termes d'une progression arithmétique ayant pour premier terme a et pour raison r, on trouve pour somme :

$$(-1)^{q-1}\quad\frac{q}{p\,(p-1)}\Big[pr\,(q-1)+a\,(p-1)\Big]\,C_p^q\,.$$

En cherchant la moyenne des carrés des écarts entre les gains et les pertes d'un joueur, j'ai aussi trouvé que :

$$\sum_{k=0}^{k=p}(p-2k)^2\,C_p^k=p2^p,$$

Comme on a : $$\sum_{k=0}^{k=p}(p-2k)\,C_p^k=0,$$

il en résulte encore :

$$\sum_{k=0}^{k=p}(p-2k)\,(p-2k\pm1)\,C_p^k=p2^p\,.$$

On trouve dans le calcul des différences l'égalité :

$$\frac{1}{m}C_p^0-\frac{1}{m-1}C_p^1+\frac{1}{m-2}C_p^2-\ldots\pm\frac{1}{m-p}C_p^p=\pm\frac{p\,!}{m\,(m-1)\ldots(m-p)}$$

Combinant cette formule avec :

$$aC_p^0-(a+r)\,C_p^1+(a+2r)\,C_p^2-\ldots+(-1)^p(a+pr)\,C_p^p=0,$$

on trouve en faisant $a=m$, $r=-1$ et retranchant terme à terme :

$$\frac{(m+1)\,(m-1)}{m}C_p^0-\frac{m\,(m-2)}{m-1}C_p^1+\frac{(m-1)\,(m-3)}{m-2}C_p^2-\ldots$$
$$=\mp\frac{p\,!}{m\,(m-1)\ldots(m-p)}\,.$$

Faisant $a = m$, $r = 1$ et ajoutant terme à terme, on obtient

$$\frac{m \times m+1}{m} C_p^0 - \frac{(m+1)(m-1)+1}{m-1} C_p^1 + \frac{(m+2)(m-2)+1}{m-2} C_p^2 - \ldots$$
$$= \pm \frac{p\,!}{m(m-1)\ldots(m-p)}$$

Ces diverses formules sont nouvelles ou, du moins, je ne les ai vues mentionnées nulle part.

J'ai vainement cherché une expression simple pour la somme des q premiers coefficients du binôme, je crois qu'il n'en existe pas.

J'ai trouvé les formules :

$$\sum_{k=0}^{k=q} C_p^k = C_{p-1}^q + 2(C_{p-1}^{q-1} + C_{p-1}^{q-2} + \ldots + C_{p-1}^1 + 1)$$

$$= C_{p+1}^q + C_{p+1}^{q-2} + \ldots + C_{p+1}^{q-2\lambda} \quad (\lambda \text{ étant le plus grand nombre qui ne rend pas } q - 2\lambda \text{ négatif})$$

$$= C_p^q \left[\frac{2^{q-1}}{p-q+1} C_q^1 - \frac{2^{q-2}}{p-q+2} 2C_q^2 + \frac{2^{q-3}}{p-q+3} 3C_q^3 - \ldots + (-1)^{q+1} \frac{2^{q-q}}{p-q+q} qC_q^q \right]$$

$$= C_{p-1}^q + 2C_{p-2}^{q-1} + 2^2 C_{p-3}^{q-2} + \ldots + 2^q C_{p-(q+1)}^0$$

$$= C_{p-1}^q \left[1 + 2\frac{C_q^1}{C_{p-1}^1} + 2^2 \frac{C_q^2}{C_{p-1}^2} + \ldots + 2^q \frac{C_q^q}{C_{p-1}^q} \right],$$

$$= 1 + C_{p+q-1}^q - C_{q-2}^1 C_{p+q-2}^{q-1} + C_{q-3}^2 C_{p+q-3}^{q-2} - \ldots + (-1)^\lambda C_{q-(\lambda+1)}^\lambda C_{p+q-(2\lambda+1)}^{q-\lambda}$$

λ étant le plus grand nombre qui ne rend pas négatif $q - (2\lambda + 1)$.

Ces diverses formules sont, il est vrai, plus compliquées que celle qui résulte de la définition même :

$$\sum_{k=0}^{k=q} C_p^k = 1 + C_p^1 + C_p^2 + \ldots + C_p^q ;$$

mais, en les égalant entre elles et en y remplaçant les combinaisons par leur valeur en fonction de p et de q, on obtient des identités qu'il serait plus long et plus difficile d'établir directement.