ASSOCIATION FRANÇAISE
POUR L'AVANCEMENT DES SCIENCES
Fusionnée avec
L'ASSOCIATION SCIENTIFIQUE DE FRANCE
(Fondée par Le Verrier en 1864)

CONGRÈS DE PARIS — 1889

M. H. DELANNOY
Sous-Intendant militaire en retraite, à Guéret.

EMPLOI DE L'ÉCHIQUIER POUR LA RÉSOLUTION DE DIVERS PROBLÈMES DE PROBABILITÉ

— Séance du 9 août 1889 —

C'est à M. Édouard Lucas qu'est due l'idée ingénieuse d'employer l'échiquier dans un grand nombre de recherches arithmétiques. Il a d'abord appliqué cette idée à l'étude de la théorie des *permutations* et des *arrangements* (*). L'échiquier employé avait la forme *carrée* habituelle.

En nous servant d'un échiquier *triangulaire*, nous avons donné la solution du problème suivant (**) :

De combien de manières peut-on disposer 2n *nombres sur deux rangées de* n *nombres, de telle sorte que les nombres aillent en croissant de gauche à droite et de haut en bas?*

On peut dire, d'une manière générale, que la forme de l'échiquier à employer doit être appropriée à la nature du problème posé. Il importe donc de connaître le nombre de marches d'une tour sur des échiquiers de diverses formes.

Il nous suffira de considérer :

L'échiquier *carré* OXAY;

(*) Sur l'arithmétique figurative. — Les permutations (*Association française pour l'avancement des Sciences,* — Congrès de Rouen, 1883).

(**) Sur l'emploi de l'échiquier pour la résolution de problèmes arithmétiques (*Id.* — Congrès de Nancy, 1886).

L'échiquier *triangulaire* OAY;

L'échiquier *pentagonal* OBDAY, déterminé en prenant OB égal à $(n-1)$ pas et menant par le point B une parallèle à la diagonale OA;

L'échiquier *hexagonal,* obtenu en prenant OC égal à $(a-1)$ pas, OG égal à $(b-1)$ pas, et en menant par les points C et G des parallèles à la diagonale du carré.

En désignant respectivement par $Q_{x,y}$, $T_{x,y}$, $P_{x,y}$, $H_{x,y}$ le nombre de manières dont une tour, marchant seulement dans les sens ↓ et →, peut

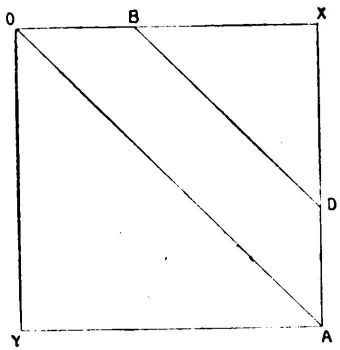

Fig. 1.

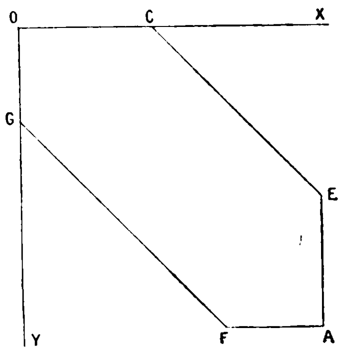

Fig. 2.

aller de l'origine O sur une case (x,y) de l'échiquier carré, de l'échiquier triangulaire, de l'échiquier pentagonal et de l'échiquier hexagonal, on a :

$$(1) \quad Q_{x,y} = C_{x+y}^{x}$$

$$(2) \quad T_{x,y} = C_{x+y}^{x} - C_{x+y}^{x-1} = \frac{y-x+1}{y+1} C_{x+y}^{x}$$

$$(3) \quad P_{x,y} = C_{x+y}^{x} - C_{x+y}^{x-n}$$

$$(4) \quad H_{x,y} = C_{x+y}^{y} - C_{x+y}^{x-a} - C_{x+y}^{y-b} + C_{x+y}^{x-a-b} + C_{x+y}^{y-b-a} - \dots$$
$$\dots + C_{x+y}^{y-ka-kb} - C_{x+y}^{x-(k+1)a-kb}$$

h désignant le plus grand nombre qui ne rend pas les indices négatifs.

Pour les cases dont les coordonnées satisfont à l'équation :

$$x = y + n - 1,$$

on a :

$$C_{x+y}^{x-(k+1)n} = C_{x+y}^{y-hn-1}$$

On peut donc écrire, pour les cases du côté BD de l'échiquier pentagonal et pour celles du côté CE de l'échiquier hexagonal :

$$P_{x,y} = C_{x+y}^{y} - C_{x+y}^{y-1} = \frac{x-y+1}{x+1} C_{x+y}^{y}$$

ou :

$$\text{(5)} \qquad P_{x,y} = \frac{n}{x+1} C_{x+y}^{y}$$

$$H_{x,y} = C_{x+y}^{y} - C_{x+y}^{y-1} - C_{x+y}^{y-b} + C_{x+y}^{y-b-1} + \dots$$
$$+ C_{x+y}^{y-ka-kb} - C_{x+y}^{y-ka-kb-1}$$

ou :

$$\text{(6)} \qquad H_{x,y} = \frac{a}{x+1} C_{x+y}^{y} - \frac{a+2b}{x+1+b} C_{x+y}^{y-b} + \frac{3a+2b}{x+1+b+a} C_{x+y}^{y-b-a}$$
$$- \dots - \frac{(2k-1)a+2kb}{x+1+(k-1)a+kb} C_{x+y}^{y-(k-1)a-kb} + \frac{(2k+1)a+2kb}{x+1+ka+kb} C_{x+y}^{y-ka-kb}$$

Pour les cases du côté CG il suffira de permuter, dans (6), x et y, ainsi que a et b.

Ces formules permettent de résoudre *immédiatement* un grand nombre de problèmes de probabilité. Nous allons en donner quelques exemples :

PROBLÈME I

Une urne renferme b *boules blanches et* n *boules noires* (b > n)*; on tire ces boules une à une. On demande la probabilité que, à aucun moment du tirage, le nombre des boules noires sorties n'aura pas dépassé celui des boules blanches.*

Si l'on représente les boules blanches par des pas verticaux sur un échiquier et les boules noires par des pas horizontaux, la probabilité cherchée sera :

$$\frac{T_{n,b}}{Q_{n,b}} = \frac{b-n+1}{b+1}.$$

PROBLÈME II

Un joueur a gagné n *parties et en a perdu* n; *on demande la probabilité que ses pertes n'ont jamais dépassé ses gains.*

Cette probabilité est :

$$\frac{T_{n,n}}{Q_{n,n}} = \frac{1}{n+1}.$$

PROBLÈME III

On suppose que deux candidats A *et* B *soient soumis à un scrutin de ballottage;* A *obtient* m *suffrages et est élu,* B *en obtient* n. *On demande la probabilité pour que, pendant le dépouillement du scrutin, le nombre des voix de* A *ne cesse pas une seule fois de dépasser celles de son concurrent.*

La solution de ce problème a été donnée, dans les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, par M. Joseph Bertrand (*) et par M. Désiré André (**).

Représentons les voix de A par des pas verticaux sur un échiquier OXCY de $(m+1)$ cases de côté et celles de B par des pas horizontaux.

Le nombre total des manières dont peuvent se combiner les voix de A et de B est égal au nombre des marches de la tour pour se rendre de O sur la case D dont les coordonnées sont n, m, c'est-à-dire qu'il est égal à $Q_{n,m}$.

Le nombre des dispositions, dans lesquelles les voix de A surpassent toujours celles de B, est égal au nombre de manières dont la tour peut se ren-

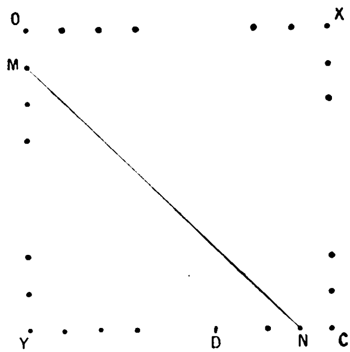

Fig. 3.

dre de O en D sans sortir de l'échiquier triangulaire MNY, de m cases de côté, c'est-à-dire qu'il est égal à $T_{n,m-1}$.

La probabilité cherchée est donc :

$$\frac{T_{n,m-1}}{Q_{n,m}} = \frac{m-n}{m} \times \frac{C^n_{n+m-1}}{C^n_{n+m}} = \frac{m-n}{m+n}.$$

Pour varier le problème, on peut demander *quelle est la probabilité que l'écart entre les voix de* A *et de* B *restera toujours au moins égal à* m — n.

Elle est : $$\frac{T_{n,n}}{Q_{n,m}} = \frac{1}{n+1} \frac{C^n_{2n}}{C^n_{m+n}} = \frac{m\,!\,(2n)!}{(m+n)!\,(n+1)!}.$$

Ou bien encore, d'une manière plus générale : *Quelle est la probabilité que l'écart ne sera jamais inférieur à un nombre donné* p.

(*) Séance du 22 août 1887 (t. CV, p. 369).

(**) Séance du 5 septembre 1887 (t. CV, p. 436).

La probabilité est alors :

$$\frac{T_{n,m-p}}{Q_{n,m}} = \frac{m-p-n+1}{m-p+1} \times \frac{C^n_{n+m-p}}{C^n_{n+m}} = (m-p-n+1)\,\frac{m!\,(m+n-p)!}{(m+n)!\,(m-p+1)!}.$$

PROBLÈME IV

Un joueur expose à un jeu de hasard la $n^{\text{ième}}$ *partie de sa fortune et renouvelle l'épreuve indéfiniment. Quelle est la probabilité pour qu'il se ruine et que la* $(2\mu + n)^{\text{ième}}$ *partie jouée lui enlève son dernier écu.*

Cette question de la durée du jeu a été traitée par Huyghens, Moivre, Laplace, Lagrange, Ampère et, tout récemment, par M. Joseph Bertrand (*).

Désignons par x le nombre des pertes du joueur et par y le nombre de ses gains, x et y devant, d'après les données du problème, satisfaire aux deux égalités :

$$\text{(a)} \qquad \begin{cases} x + y = 2\mu + n, \\ x - y = n. \end{cases}$$

Pour que le joueur soit ruiné après la $(2\mu + n)^{\text{ième}}$ partie et pas avant, il faut et il suffit :

1° Que, pendant le cours des $(2\mu + n - 1)$ premières parties, ses pertes n'aient jamais dépassé ses gains de plus de $n - 1$.

La probabilité pour que cela ait lieu est $\varpi_1 = \dfrac{P_{x-1,y}}{Q_{x-1,y}}$;

2° Que, après les $(2\mu + n - 1)$ premières parties, l'excès de ses pertes sur ses gains soit égal à $n - 1$. La probabilité pour qu'il en soit ainsi, est

$$\varpi_2 = \frac{Q_{x-1,y}}{2^{2\mu+n-1}};$$

3° Qu'il perde la dernière partie. La probabilité correspondante est $\varpi_3 = \dfrac{1}{2}$.

La probabilité cherchée Π est égale à $\varpi_1\,\varpi_2\,\varpi_3$ on a donc :

$$\Pi = \left(\frac{1}{2}\right)^{2\mu+n} P_{x-1,y}$$

Changeant x en $x - 1$ dans la formule (5) et remplaçant x et y par leurs valeurs tirées des relations (a), il vient :

$$\Pi = \left(\frac{1}{2}\right)^{2\mu+n} \frac{n}{\mu+n}\, C^{\mu}_{2\mu+n-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{2\mu+n} \frac{n}{\mu+n}\, \frac{(2\mu+n-1)!}{\mu!\,(\mu+n-1)!}$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^{2\mu+n} \frac{n}{2\mu+n}\, \frac{(2\mu+n)!}{\mu!\,(\mu+n)!}.$$

(*) *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, séance du 5 septembre 1887 (t. CV, p. 437).

PROBLÈME V

A *et* B *jouent l'un contre l'autre avec des probabilités* p *et* q. *Ils possèdent respectivement* a *et* b *francs avant d'entrer au jeu; à chaque partie, le perdant donne un franc au gagnant et le jeu ne cesse que lorsque l'un des deux joueurs est ruiné. On demande la probabilité* Π *pour que le jeu se termine juste à la fin d'une partie de rang assigné.*

Soit μ le rang assigné à la partie finale. En désignant par Π_A et Π_B les probabilités respectives que A ou B seront ruinés après la $\mu^{\text{ième}}$ partie et pas avant, on aura :

$$\Pi = \Pi_A + \Pi_B.$$

En raisonnant comme nous l'avons fait dans le problème précédent, nous trouvons que :

$$\Pi_A = \frac{H_{x-1,y}}{Q_{x-1,y}} \times p^{x-1} q^y\, Q_{x-1,y} \times p = p^x q^y\, H_{x-1,y}.$$

Changeant x en $x-1$ dans (6) et remplaçant x et y par leurs valeurs tirées des égalités :

$$x + y = \mu,$$
$$x - y = a.$$

il vient :

$$\Pi_A = p^{\frac{\mu+a}{2}} q^{\frac{\mu-a}{2}} \left[\frac{a}{\frac{\mu+a}{2}} C_{\mu-1}^{\frac{\mu-a}{2}} - \frac{a+2b}{\frac{\mu+a+2b}{2}} C_{\mu-1}^{\frac{\mu-a-2b}{2}} + \dots \right.$$
$$\left. \pm \frac{(2k\pm 1)a + 2kb}{\frac{\mu+(2k\pm 1)a+2kb}{2}} C_{\mu-1}^{\frac{\mu-(2k\pm 1)a-2kb}{2}} \right],$$

ou :

$$(7)\left\{\begin{aligned} \Pi_A = p^{\frac{\mu+a}{2}} q^{\frac{\mu-a}{2}} (\mu-1)! \Bigg[& \frac{a}{\left(\frac{\mu-a}{2}\right)!\left(\frac{\mu+a}{2}\right)!} - \frac{a+2b}{\left(\frac{\mu-a-2b}{2}\right)!\left(\frac{\mu+a+2b}{2}\right)!} \\ & + \dots \pm \frac{(2k\pm 1)\,a + 2kb}{\left(\frac{\mu-(2k\pm 1)a-2kb}{2}\right)!\left(\frac{\mu+(2k\pm 1)a+2kb}{2}\right)!} \Bigg] \end{aligned}\right.$$

Pour avoir Π_B, il suffit de permuter, dans (7), p et q, a et b.

On a donc :

$$(8)\quad \Pi = \left\{\begin{aligned} & p^{\frac{\mu+a}{2}} q^{\frac{\mu-a}{2}} (\mu-1)! \left[\frac{a}{\left(\frac{\mu-a}{2}\right)!\left(\frac{\mu+a}{2}\right)!} - \frac{a+2b}{\left(\frac{\mu-a-2b}{2}\right)!\left(\frac{\mu+a+2b}{2}\right)!} + \dots\right] \\ & + p^{\frac{\mu-b}{2}} q^{\frac{\mu+b}{2}} (\mu-1)! \left[\frac{b}{\left(\frac{\mu-b}{2}\right)!\left(\frac{\mu+b}{2}\right)!} - \frac{b+2a}{\left(\frac{\mu-b-2a}{2}\right)!\left(\frac{\mu+b+2a}{2}\right)!} + \dots\right] \end{aligned}\right.$$

Pour que le problème soit possible, il faut que μ, a et b soient de même parité.

Avec les données du problème le jeu n'est pas équitable, puisque nous avons admis que le perdant donne un franc au gagnant, bien que les probabilités de gain soient différentes pour les deux joueurs.

Si l'on voulait que le jeu fût équitable, les mises respectives de A et de B, à chaque partie, devraient être m et n, avec la condition :

$$pn = qm.$$

Dans ce cas, on aurait encore :

$$\Pi_A = p^x q^y \Pi_{x-1,y}$$

seulement il faudrait remplacer x et y par leurs valeurs tirées des égalités :

$$\begin{aligned} x + y &= \mu, \\ mx - ny &= a. \end{aligned}$$

Si a et b ne sont pas respectivement multiples de m et de n, le jeu devra cesser quand un des joueurs ne possédera plus qu'une somme inférieure à la mise exigée.

Si, dans l'énoncé de ce problème, on faisait $p = q = \frac{1}{2}$ et $a = b = n$, on retrouverait le problème traité par M. Rouché, dans les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* (*).

L'égalité (8) deviendrait, avec ces hypothèses :

$$1 = \frac{a(\mu-1)!}{2^{\mu-1}} \left\{ \frac{1}{\left(\frac{\mu-n}{2}\right)!\left(\frac{\mu+n}{2}\right)!} - \frac{3}{\left(\frac{\mu-3n}{2}\right)!\left(\frac{\mu+3n}{2}\right)!} + \dots \pm \frac{4k\pm1}{\left[\frac{\mu-(4k\pm1)n}{2}\right]!\left[\frac{\mu+(4k\pm1)n}{2}\right]!} \right\}$$

C'est la valeur de Π que nous avons donnée dans le *Bulletin de la Société mathématique* (tome XVI, page 124).

(*) Séance du 23 janvier 1888 (t. CVI, p. 253).

PROBLÈME VI

A *joue avec* B; *à chaque partie, les probabilités qu'ils ont respectivement de gagner sont* p *et* q, *en sorte que* p + q = 1, *et le perdant donne un franc au gagnant; ils possèdent en entrant au jeu* a *francs et* b *francs; on demande la probabilité* Π *que* A *ruinera* B *avant le coup de rang* μ.

M. Laurent a traité ce problème dans son *Traité du calcul des probabilités* (*). Il a trouvé pour la probabilité cherchée :

$$f(b,\mu) = p^b \left[1 + bpq + \frac{b(b+3)}{1.2}\, p^2q^2 + \frac{b(b+3)(b+5)}{1.2.3}\, p^3q^3 + \dots\right],$$

le développement devant être poussé jusqu'à ce que $\mu - b$ soit égal ou supérieur au double de l'exposant de q.

Mais, pour obtenir cette valeur, il a fallu admettre que a et b sont liés par la relation :

$$b = qa + pa^{-1}.$$

La formule précédente ne s'applique donc qu'à un cas tout particulier. Dans le cas général, où a et b sont quelconques, on a :

$$\Pi = p^b \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\frac{\mu-b}{2}-1} p^\lambda\, q^\lambda\, \mathrm{H}_{\lambda,b-1+\lambda}$$

On voit facilement que :

λ variant de	0	à	$a-1$	H n'a que	1	terme,
»	a	»	$a-1+b$	»	2	termes,
»	$a+b$	»	$2a-1+b$	»	3	—
»	$2a+b$	»	$2a-1+2b$	»	4	—

. . . .

En développant $\sum$ d'après la formule (7), on a donc :

$$= \left\{ \begin{aligned} & bp^b \left[\frac{1}{b} + pq + \frac{(b+3)!}{2!(b+2)!}(pq)^2 + \frac{(b+5)!}{3!(b+3)!}(pq)^3 + \dots + \frac{(\mu-3)!}{\left(\frac{\mu-b}{2}-1\right)!\left(\frac{\mu+b}{2}-1\right)!}(pq)^{\frac{\mu-b}{2}-1}\right] \\ & -(b+2a)\, p^{b+a} q^a \left[\frac{1}{b+2a} + pq + \frac{(b+2a+3)!}{2!(b+2a+2)!}(pq)^2 + \dots\right] \\ & +(3b+2a)\, p^{2b+a} q^{b+a} \left[\frac{1}{3b+2a} + pq + \frac{(3b+2a+3)!}{2!(3b+2a+2)!}(pq)^2 + \dots\right] \\ & - \dots \\ & +[(2k+1)b+2ka]\, p^{(k+1)b+ka} q^{kb+ka} \left[\frac{1}{(2k+1)b+2ka} + pq + \dots\right] \end{aligned} \right.$$

(*) Édition de 1873, p. 81.

k désignant le plus grand nombre qui ne rend pas négatif $\mu - (2k \pm 1)b - 2ka$.

Ces derniers exemples montrent, de la manière la plus évidente, combien l'emploi de l'échiquier facilite la résolution des problèmes. Ce procédé nous a donné *immédiatement* la solution que les méthodes ordinaires ne fourniraient qu'à l'aide de calculs aussi longs que compliqués.

Dans tout ce qui précède nous n'avons considéré que la marche de la tour. Pour certains problèmes, il peut y avoir intérêt à employer une autre pièce du jeu d'échecs, la reine, par exemple.

Ainsi, dans notre première Note sur l'emploi de l'échiquier (Congrès de Nancy, 1886), nous avons fait remarquer que le triangle arithmétique de Pascal représente le nombre des marches d'une reine, qui ne peut se mouvoir que dans les deux sens $\downarrow$ et $\searrow$.

En astreignant la reine à faire p pas verticaux dans la colonne de rang p, nous avons donné un nouveau triangle arithmétique, qui fournit la solution pratique du problème suivant :

De combien de manières peut-on former un nombre N *avec des nombres non croissants?*

Dans certains cas on peut être amené à faire mouvoir la reine dans les trois sens $\rightarrow$, $\downarrow$ et $\searrow$. Cette idée nous a été suggérée par M. Laisant, qui nous a engagé à chercher quel est alors le nombre des marches de la reine pour se rendre de l'origine O sur une case (x, y) de l'échiquier carré.

Voici le résultat que nous avons obtenu.

Chaque pas oblique e équivaut à un pas vertical a et à un pas horizontal b. Si, pour aller de O sur la case (x, y), on a fait z pas e, le nombre des solutions correspondant à cette marche sera égal au nombre des permutations que l'on peut faire avec $(x - z)$ lettres a, $(y - z)$ lettres b et z lettres e, c'est-à-dire :

$$\frac{(y + x - z)!}{(y - z)!\,(x - z)!\,z!} = C_{x+y-2z}^{x-z} \cdot C_{x+y-z}^{z} = C_{x+y-z}^{x} \cdot C_{x}^{z}.$$

Le nombre cherché sera donc :

$$\sum_{z=0}^{z=x} C_x^z\, C_{x+y-z}^{x}$$

en supposant $x < y$. Dans le cas contraire, on permuterait x et y dans cette expression, qui peut aussi se mettre sous la forme :

$$(\alpha) \qquad \sum_{z=0}^{z=x} 2^z\, C_y^z\, C_x^z$$

Si l'on désigne respectivement par $Q'_{x,y}$, $T'_{x,y}$, $P'_{x,y}$, $H'_{x,y}$ le nombre de manières dont la reine, marchant dans les trois sens indiqués ci-dessus, peut se rendre sur une case (x, y) de l'échiquier carré, de l'échiquier triangulaire, de l'échiquier pentagonal et de l'échiquier hexagonal (*fig. 1 et 2*), on a des formules analogues à celles que nous avons données pour la tour :

$$(1)' \quad Q'_{x,y} = \sum_{z=0}^{z=x} C_x^z \, C_{x+y-z}^x$$

$$(2)' \quad T'_{x,y} = Q'_{x,y} - Q'_{x-1,y+1} = \sum_{z=0}^{z=x} \frac{y-x+1}{y-z+1} C_x^z \, C_{x+y-z}^x$$

$$(3)' \quad P'_{x,y} = Q'_{x,y} - Q'_{x-n,y+n}$$

$$(4)' \quad H'_{x,y} = Q'_{x,y} - Q'_{x-a,y+a} - Q'_{y-b,x+b} + Q'_{x-a-b,y+a+b} + \cdots$$

Pour les cases des côtés BD et CE, satisfaisant à l'égalité $x = y + n - 1$, on a aussi :

$$(5)' \quad P'_{x,y} = \frac{n}{x+1-z} Q'_{x,y}$$

$$(6)' \quad H'_{x,y} = \frac{a}{x+1-z} Q'_{x,y} - \frac{a+2b}{x+1-z+b} Q'_{y-b,x+b} + \frac{3a+2b}{x+1-z+b+a} Q'_{y-b-a,x+b+a} - \cdots$$

Ces formules faciliteront, comme les précédentes, la résolution de certains problèmes. Nous nous contenterons d'en donner un seul exemple.

PROBLÈME VII

Deux joueurs d'échecs marquent, au fur et à mesure, les parties qu'ils gagnent et celles qu'ils perdent et, de plus, à chaque partie nulle, chacun d'eux marque une partie gagnée et une partie perdue. Après avoir ainsi marqué chacun 2n *parties, ils se trouvent n'avoir ni gagné, ni perdu. On demande la probabilité qu'ils auront joué* 2n *parties effectives, c'est-à-dire qu'il n'y aura pas eu de partie nulle.*

Cette probabilité est :

$$\frac{C_{2n}^n}{\sum_{z=0}^{z=n} C_n^z \, C_{2n-z}^n} = \frac{(2n)!}{(n\,!)^2\left[\frac{(2n)!}{(n\,!)^2} + \frac{(2n-1)!}{1![(n-1)!]^2} + \frac{(2n-2)!}{2![(n-2)!]^2} + \dots + \frac{(n+1)!}{(n-1)!(1!)^2} + 1\right]}$$

ou bien encore, si l'on préfère se servir de la forme (α) :

$$\frac{(2n)!}{(n!)^2\left[1+2n^2+2^2\frac{n^2(n-1)^2}{(2!)^2}+2^3\frac{n^2(n-1)^2(n-2)^2}{(3!)^2}+\ldots+2^{n-1}n^2+2\right]}$$

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — IMPRIMERIE CHAIX.
PARIS, 20, RUE BERGÈRE. — 3410-3-90.