Contribution de d'Henri Delannoy à l'intermédiaire des mathématiciens

Sylviane R. Schwer

14 septembre 2005

1 Questions et Réponses de Delannoy

1894

Q. 29 [I10] Donner une formule indiquant de combien de manières on peut former un nombre n en ajoutant des nombres non croissants. J'ai donné (A. F. Nancy, 1886) un Tableau qui résoud pratiquement la question ; mais la formule est encore à trouver.

Q.95 [J2c] A et B jouent l'un contre l'autre avec des probabilités p et q ; ils possèdent respectivement a et b francs avant d'entrer au jeu. A chaque partie, le perdant donne 1fr au gagnant, et le jeu ne cesse que lorsque l'un des deux joueurs est ruiné. On demande la probabilité pour que le jeu se termine juste à la fin d'une partie de rang assigné (Voir Association française, Congrès de Paris 1889. On demande ici une solution sans l'emploi de l'échiquier.).

R20 [J1b] *Etant données n boules garnies chacune de quatre crochets placés symétriquement, trouver le nombre des arrangements possibles des n boules accrochées les unes aux autres de façon à former un ensemble, chaque boule étant attachée au moins à une autre et pouvant en recevoir jusqu'à quatre.*
Le probème a été résolu par M. Cayley.
Mais il serait interessant pour les chimistes de savoir, d'abord s'il existe une méthode générale simple de le résoudre autrement que par des constructions graphiques faites de proche en proche, et dans ce cas d'avoir cette méthode.
Une Note abrégée sur le travail de M. Cayley se trouve dans les Berichte der deutschen Gesellschaft, t. VIII, p. 1056 ; 1875. Un mathématicien rendrait service aux chimistes en publiant dans un journal de Chimie une sorte *de traduction du travail de M. Cayley ou au*

moins de la Note des Berichte et la rendant aussi accessible que possible aux savants qui ne sont pas des mathématiciens proprement dits.(Friedel)

Je n'ai pu me procurer le Mémoire de Cayley. Je n'ai eu sous les yeux que la Note des Berichte, qui me paraît présenter des inexactitudes.

Le problème peut se résoudre sans constructions graphiques. Les enchaînements de boules forment des arbres géographiques, que nous distinguerons en arbres à centre unique, c'est-à-dire qui sortent d'un seul nœud ; et en arbre à deux centres, c'est-à-dire qui sortent de deux nœuds convenablement choisis et réunis entre eux.

Le nombre des arbres à deux centres dépend de celui des arbres à un centre et ce dernier dépend, à son tour, du nombre des arbres racines (*Wurzelbaüme*), qui servent à former les arbres à un centre.

Il s'agit donc de déterminer avant tout le nombre des *wurzelbaüme*.

Les wurzelbaüme peuvent avoir 1, 2 ou 3 branches. Le *wurzelbaüme* de hauteur h a une branche de hauteur h ; la hauteur des autres branches (s'il en existe) peut varier de 1 à h.

Désignons par ${}_{\alpha}\nu_n^h$ le nombe de *wurzelbaüme* à α branches et à n nœuds, de hauteur h, et par V_n^h le total des *wurzelbaüme* à 1, 2 ou 3 branches et à n nœuds, de hauteur h. On a

$$ {}_1\nu_n^h = V_{n-1}^{h-1}, $$

$$ {}_2\nu_n^h = \Sigma V_p^f V_{n-(p+1)}^{h-1}; $$

p variant de 1 à $n-(h+1)$ et f de 0 à $h-1$.

$$ {}_3\nu_n^h = \Sigma V_p^f V_q^g V_{n-(p+q+1)}^{h-1}, $$

p varie de 1 à $E\frac{n-(h+1)}{2}$ (c'est-à-dire qu'on prend la partie entière du quotient) ;

q varie de p à $n-(1+h+p)$;

f et g varient de 0 à $h-1$.

Au moyen de ces formules on construit le tableau des *wurzelbaüme* jusqu'à la valeur de n que l'on désire.

Les arbres à un centre peuvent avoir 2, 3 ou 4 branches. L'arbre à un centre de hauteur h a deux branches de hauteur h ; la hauteur des autres branches (s'il en existe) peut varier de 1 à h.

Désignant par ${}_{\alpha}a_n^h$ le nombre des arbres à un centre, à α branches et à n nœuds, de hauteur h, on a

$$ {}_2a_n^h = \Sigma V_p^f V_{n-(p+1)}^{h-1}, $$

p variant de h à $E\frac{n-(h+1)}{2}$;

$$_3a_n^h = \Sigma V_p^f V_q^{h-1} V_{n-(p+q+1)}^{h-1},$$

p varie de 1 à $E\frac{n-(h+1)}{2}$ (c'est-à-dire qu'on prend la partie entière du quotient) ;
q varie de p à $n-(1+h+p)$;
f et g varient de 0 à $h-1$.

$$_3\nu_n^h = \Sigma V_p^f V_q^g V_{n-(p+q+1)}^{h-1};$$

p varie de 1 à $n-(2h+1)$; q varie de h à $E\frac{n-(p+1)}{2}$; f varie de 0 à $h-1$;

$$_4a_n^h = \Sigma V_p^f V_q^g V_r^{h-1} V_{n-(p+q+r+1)}^{h-1},$$

p varie de 1 à $E\frac{n-(2h+1)}{2}$; q varie de p à $n-(2h+1+p)$; r varie de h à $E\frac{n-(p+q+1)}{2}$; f et g varient de 0 à $h-1$.
Ces formules permettent d'établir le tableau des arbres à un centre.
Remarque. — Dans l'application de toutes les formules précédentes, il y a lieu de remarquer que :

1. Pour éviter les répétitions, on doit négliger les termes dans lesquels, l'indice supérieur d'un facteur étant égal à $h-1$, l'indice inférieur est plus grand que celui d'un des facteurs suivants qui a également $h-1$ pour indice supérieur ;
2. Quand dans un terme, γ facteurs sont égaux à V_s^k, on remplace leur produit par le nombre des combinaisons complètes de V_s^k objets pris γ à γ.

Dans les arbres bicentriques, il sort de chaque centre 1, 2 ou 3 branches. Les arbres à deux centres de hauteur h ont, pour chaque centre, une branche de hauteur h ; la hauteur des autres branches (s'il en existe) peut varier de 1 à h.
En désignant par b_n^h le nombre des arbres bicentriques à n nœuds, de hauteur h, on a

$$b_n^h =_2 a_{n+1}^{h+1}.$$

Le total des arbres de n nœuds à un centre et à deux centres donne le nombre cherché des ennchaînements possibles des n boules.
A la prochaîne session de l'*Association française pour l'Avancement des Sciences*, je donnerai le détail des calculs, ainsi que les tableaux des *wurzelbaüme* et des arbres à un centre et à deux centres, des différentes hauteurs.

Dans le *Bulletin de la Société chimique de Paris*, 3^O série, t.XI, p.239-248, M. Delannoy a également donné une solution de cette question, avec des figures et des Tableaux numériques, sous le titre suivant : *Sur le nombre d'isomères possibles dans une molécule carbonnée*[1].

Q.141 [J2c] A joue contre B ; à chaque partie, les probabilités qu'ils ont respectivement de gagner sont p et q ; $(p+q=1)$ et le perdant donne 1^{fr} au gagnant. En entrant au jeu, les joueurs possèdent respectivement a et b francs. On demande la probabilité que A ruinera B avant le coup de rang r.

Q.142 [J2c] Deux joueurs d'échecs marquent, au fur et à mesure, les parties qu'ils gagnent et celles qu'ils perdent ; de plus, à chaque partie nulle, chacun des joueurs marque une partie gagnée et une partie perdue. Après avoir ainsi marqué chacun $2n$ parties, ils n'ont ni gain ni perte. On demande la probabilité qu'ils auront joué 2n parties effectives, c'est-à-dire qu'il n'y aura pas eu de partie nulle[2].

R.29 [I10] (Delannoy) – *Deuxième réponse* – La première formule de M. Franel ne résout pas, à vrai dire, complètement la question que je posais. C'est là une de ces formules que Catalan et Lucas appelais *illusoires*, parce qu'il est pratiquement impossible de les calculer à cause de la complication du déterminant. La seconde formule ne la résout pas non plus explicitement. M. le colonel Moreau a aussi trouvé une équation de récurrence, qu'il m'a communiquée :

$$R_x - R_{x-1} - R_{x-2} + R_{x-5} + R_{x-7} - R_{x-12} - R_{x-15} + \cdots = 0$$

(R_x désignant le nombre cherché et étant le coefficient de t^x dans le développement de $\frac{1}{(1-t)(1-t^2)(1-t^3)\cdots}$. Les calculs ne sont pas trop laborieux, parce que le nombre des termes de l'équation de la récurrence augmente lentement ; ainsi pour x =16, 50, 100, il y a respectivement 6, 10, 16 termes.

On a donc le moyen de calculer R de proche en proche, mais ce n'est pas la solution complète de la question. Ce qu'il s'agirait de trouver, si c'est possible, c'est un polynome en n donnant le nombre cherché pour une valeur quelconque de n, et cela n'est pas fait.

R.51 [Q4c] *Démontrer qu'on peut colorier avec quatre couleurs différentes toutes les subdivisions de la Carte d'un pays, quelque nombreuses qu'elles soient, de manière que les provinces contiguës se touchent suivant une ligne, et non en un point seulement.*(P. Mansion)

[1] paragraphe ajouté par les directeurs de la revue

[2] ajouté par les directeurs en bas de page : Pour les questions 141, 142, voir *Association française, congrès de Paris*, 1889, où ces problèmes sont résolus en se servant de l'échiquier ; on demande ici des solutions sans emploi de l'échiquier.

La question 51, fort difficile puisqu'elle a occupé beaucoup de géomètres, par exemple l'illustre Cayley, avant d'être résolue est maintenant élucidée complètement (*voir* Lucas, *Récréations mathématiques*, t. IV, p. 186) ; ce quiu n'est pas démontré démontré directement, c'est le théorème de Tait (loc. cit., p.189). On ne l'a démontré jusqu'ici qu'en le considérant comme une conséquence immédiate du problème du coloriage[3]

R95 [J2c] (Delannoy) – *deuxième réponse.* – La solution donnée page 170[4] est inexacte. La valeur indiquée se réduit au premier terme de la formule véritable. Quand l'auteur a calculé la probabilité que A sera ruiné juste après la $n^{ème}$ partie, il n'a pas tenu compte de cette condition que, pendant les n parties, les gains de A ne doivent jamais avoir dépassé de plus de $(b-1)$ ses pertes, car alors B serait décavé. La valeur assignée pour A dans la solution donnée correspond au cas où l'on permettrait au joueur B, s'il était décavé avant la $n^{ème}$ partie, de reconstituer indéfiniment sa mise.

A propos de cette question, la même erreur avait déjà été commise par un autre géomètre et je l'ai relevée dans le bulletin de la Société Mathématique de France, tXVI, 1888, p. 124.

1895

1. Q424[Q4bα] On ne connaît actuellement que 110 carrés magiques résultant de la marche du cavalier (*A. F.*, Congrès de Pau et de Marseille, général Parmentier). Tous ces carrés sont incomplètement magiques. Les lignes et les colonnes donnent la constante 260, mais les diagonales ne la fournissent pas. est-il possible d'obtenir aussi des carrés magiques parfaits, c'est-à-dire ayant 260 sur les diagonales ? Sinon démontrer l'impossibilité.
2. Q425[Q4aα] Donner une démonstration *directe* et rigoureuse, ce qui n'a pas encore été fait à ma connaissance, du théorème de Tait :

   " Dans un réseau à points triples, sans isthmes, on peut partager les *3n* chemins en trois groupes de n chemins, de telle sorte que

[3] notes ajoutées :

A.-S. Ramsey : Voir Tait, *Proc. of Royal Soc. of Edinburgh*, t. IX, p. 501, 729 ; M. A.-B. Kempe, *Nature*, 26 février 1880.

La Rédaction : M. L'amiral de Jonquières et M. E. Borel nous ont envoyé chacun une Note intéressante ssur la question, mais la solution complète à laquelle renvoie M. Delannoy rend la production de ces Notes inutile dans le journal.

[4] Solution donnée par Audibert, qui note qu'elle est contenue dans le Calcul des probabilités de M. J. Bertrand (1889).

les trois chemins qui aboutissent à un même carrefour ou trivium quelconque appartiennent à trois groupes différents." (Voir Ed. Lucas, Récréations mathématiques, t. IV, p. 189.)

3. Q443[J2c] Jean a une urne contenant *2n* boules blanches, *2n* boules noires, n boules rouges. Il donne 1^{fr} à Pierre quand il sort une noire, 1^{fr} à Paul quand il sort une blanche, 1^{fr} à Pierre et 1^{fr} à Paul quand il sort une rouge. A chaque tirage Pierre et Paul lui donnent chacun $1^{fr}, 60$. Le jeu est équitable. Après un certain nombre de tirages il se trouve que Pierre a reçu p^{fr} et Paul $q^{fr} (p \leq q)$; on demande la probabilité qu'il est sorti r rouges $(r \leq p)$?

4. Q444[J2f] Un vote de la Chambre donne lieu à pointage. Pendant le dépouillement, tantôt les votes Pour l'emportent sur les Contre, et tantôt c'est l'inverse. Finalement il y a p Pour et q Contre. On demande la probabilité que, à aucun moment du dépouillement, la différence entre les Pour et les Contre n'a dépassé $\mu = p - q$, ni dans un sens ni dans l'autre. On peut aussi demander la probabilité que l'excès des Pour sur les Contre n'a pas dépassé μ et que l'excès des Contre sur les Pour n'a pas dépassé m. On a $P = \frac{H_{p,q}}{Q_{p,q}}$; $H_{p,q}$ est le nombre des marches de la tour sur un échiquier hexagonal dont les deux côtés sont égaux à μ dans le premier cas, et égaux à μ et à m dans le second.
$Q_{p,q} = C_{p+q}^{q}$ est le nombre des marches sur l'échiquier carré. Je demande une démonstration sans le recours de l'échiquier.

5. Q493[Q4a] Etant donné un fil dont les entrelacements sont connus, déterminer à l'avance le nombre des nœuds qui se formeront quand on tirera sur les bouts du fil. (Extrait de ma correspondance avec Lucas.)

6. Q494[Q4b] *Le jeu de la Tchouka.* – Il se compose de $2n$ cases, contenant chacune n boules, et de la Rouma
(Extrait de ma correspondance avec Lucas.)

7. Q495[Q4c] Lucas dit dans sa *Théorie des nombres* (p. 93) : " Les problèmes suivants : Décomposition d'un polygone en triangles, les files de soldats, etc. reviennent l'un à l'autre." Montrer *directement* la relation ou plutôt l'identité qui existe entre ces diverses questions.

8. Q496[Q4b] On place 2 jetons sur 2 cases de l'échiquier de 36 cases ; en placer 4 autres de telle sorte que le nombre des jetons contenus

sur chaque ligne, colonne ou diagonale, soit un nombre pair. Combien de solutions ? (Extrait de ma correspondance avec Lucas.)

R.138 [V2a] Le Chapitre XXXVI du Pantagruel, Livre V : *Comment nous descendimes les degrés tétradiques, et de la paour qu'eut Panurge*, commence ainsi : "Depuis descendimes un degré marbrin soubs terre ; là estoit un repos ; tournants à gausche en descendimes deux aultres, là estoit un pareil repos , puis trius à destour, et repos pareil et quatre aultres de mesme. Là, demanda Panurge : Est-ce ici ? – Quants degrés, dist nostre magnifique lanterne, avez-vous compté ? – Un, respondit Pantagruel, deux, trois, quatre. – Quants sont-ce ? demanda elle. – Dis ? et de deux cubiques."

Que veut dire cela d'une façon précise à partir de : Et y notez prudentement, etc ?

Si un nombre plein signifie un nombre pair, ce que je suppose, je vois bien que la moitié de 108 ou 54 égale

$$2 + 4 + 4^2 + 4^2 + 2^3 + 2^3;$$

mais, qu'est-ce alors que "la vraie psychogonie de Platon" qui serait 108 ? et comment est-elle en rapport avec cette décomposition ? (E. Lemoine) *Remarque.* – Le nombre 108 est égal à $3^3 + 3.3^3$

R.155 (Gino Loria) ? ? ? p89 de 1894 Elégante solution de H. Delannoy[5]

R.314 (P.-F. Teilhet). ? ? ? [I19b], p179.

– Pour $m = 3$, ce théorème a été publié par Euler. Puis Legendre le démontra pour $m = 10$, Lamé pour $m = 7$, Lejeune-Dérichlet dans le cas de $m = 5$, enfin Kummer pour tous les exposants pairs et pour un grand nombre d'exposants premiers ; mais beaucoup échappent encore à son analyse. Parmi les plus grands mathématiciens qui, depuis deux siècles, ont aussi recherché vainement la solution de ce problème, qui semble jeté comme un perpétuel défi à l'intelligence humaine, nous signalemrons encore les essais intéressants de Sphie Germain, d'Abel, de Liouville et de Lebesgue ; Gauss lui-même s'en est occupé très longtemps.

(Lucas, *Théorie des Nombres*, Introduction, p. XXIX.)

Q.330 (E. Lemoine.) ? ? ?[J1aα] p184 de 1894

– Soit $(p - 1)h + k$ (k variant de 0 à $p - 2$) un nombre de boules qui, comptées de p en p, laissent comme boule restante celle qui

[5]non publiée

porte le numéro l ($l < p$) :

Avec $(p-1)h+k+1$ boules, il restela boule $l+p$

avec $(p-1)h+k+2$ boules, il restela boule $l+2p$

....

avec $(p-1)h+k+h$ boules, il restela boule $l-k$, si $k < l$

avec $(p-1)h+k+h+1$ boules, il restela boule $(p-1)+l-k$, si $k \geq l$.

Cette remarque permet de trouver assez rapidement le numéro de la boule restante.

Soit $n = 200$ et $p = 5$:

Avec $5 = (5-1).1+1$, la boule restante est 2
avec $6 = (5-1).1+2$, la boule restante est 1
avec $8 = (5-1).2$, la boule restante est 3
avec $10 = (5-1).1+2$, la boule restante est 3
avec $12 = (5-1).3$, la boule restante est 1
avec $15 = (5-1).3+3$, la boule restante est 1
avec $19 = (5-1).4+3$, la boule restante est 2
avec $24 = (5-1).6$, la boule restante est 3
avec $30 = (5-1).7+2$, la boule restante est 3
avec $37 = (5-1).9+1$, la boule restante est 1
avec $47 = (5-1).11+3$, la boule restante est 4
avec $58 = (5-1).14+2$, la boule restante est 1
avec $73 = (5-1).18+1$, la boule restante est 3
avec $91 = (5-1).22+3$, la boule restante est 2
avec $114 = (5-1).28+2$, la boule restante est 3
avec $142 = (5-1).35+2$, la boule restante est 1
avec $178 = (5-1).44+2$, la boule restante est 3

$$200 - 178 = 22,$$

$$22 \times 5 = 110.$$

La boule restante est donc $3 + 110 + 113$.

J'ai donné le moyen de trouver le numéro de la boule restante quand $n > p$. Il est encore facile de calculer ce numéro quand $n \leq p$. Appelons $b_{n,p}$ le numéro de la boule restante pour n boules comptées de p en p, n étant $\leq p$. Si $p = Mn + k$, on a $b_{n,p} = b_{n-1,p} + k$ si cette somme est $\leq n$, ou $= b_{n-1,p} + k - n$ si cette somme est $> n$. Comme $b_{2,p}$ est toujours égal à 1 ou à 2 suivant que p est pair ou impair, il est toujours possible de calculer $b_{p,p}$ de proche en proche, sans faire l'opération sur les boules elles-mêmes.

Ainsi, pour $p = 10$, on a

$b_{2,10} = 1$, $b_{3,10} = 2$, $b_{4,10} = 4$, $b_{5,10} = 4$, $b_{6,10} = 2$, $b_{7,10} = 5$,

$b_{8,10} = 7$, $b_{9,10} = 8$, $b_{10,10} = 8$. Note. – $b_{p,p}$ est toujours égal à $b_{p-1,p}$.

Q601 [J2c]. ? ? ? p204

Q602 [J2c]. ? ? ? p204

Q603 [J2c]. ? ? ? p204

R.191 (Lemaire, Thorin, Sautelles). ? ? ? p40 de 1895 (même vol) et 97 de 1894 – *Deuxième réponse.*– L'erreur signalée par M. Malvy dans l'*Intermédiaire* (t. II, p.41), n'est pas attribuable à Lucas.

Après avoir dit : "Pour modifier la conjecture de Fermat, on a énoncé la proposition suivante : Tous les nombres et les seuls nombres premiers qui surpassent de l'unité les puissances de deux sont ceux de la suite $2 + 1, 2^2 + 1$, $2^{2^2} + 1$, $2^{2^{2^2}} + 1$, . . . ".

Il ajoute : "D'autre part, Eisenstein a énoncé ce théorème dont il possédait peut-être la démonstration : Il y a une infinité de nombres premiers de la forme $2^{2^n} + 1$." Lucas n'affirme nullement l'exactitude de ces deux théorèmes. Il se contente de dire : "On ne connaît actuellement aucune démonstration de ces deux propositions encore inaccessibles."

Or il est facile de voir qu'elles sont contradictoires. En effet, si la seconde est vraie, comme c'est le cas pour $2^{2^3} + 1$, la première ne donne pas les *seuls* nombres premiers qui surpassent de l'unité les puissances de 2. Et inversement, si la première eût éteé exacte, la seconde n'aurait pu l'être.

R.192 (A. Lemaire). ? ? ? p98 de 1894 – *Deuxième réponse.*– Les Tables des nombres inverses, ou réciproques, sont très utiles pour la simplification des calculs ; la Table la plus étendue, celle de Oakes, publiée à Londres en 1865, donne les premières décimales des inverses des nombres entiers jusqu'à 100 000 ; au moyen de Tables proportionnelles, on peut obtenir facilement les sept premières décimales des inverses de tous les entiers jusqu'à 10 000 000.
(Ed. Lucas, Théorie des nombres, p. 149.)

R. 360 [Q4c](E. Goursat). ? ? ? p 213 de 1894

– Cette question est une application du théorème de Tait. La solution se trouve dans les Récréations mathématiques de Lucas (t. IV, p. 189-194).

Projetons le polyèdre sur le plan de l'une des faces et déformons au besoin, cette projection de manière que les projections de deux sommets ne coïncident pas et les projections de deux arêtes aboutissant à des sommets différents ne se coupent pas. Le dessin ainsi formé peut être considéré comme un réseau géographique, sur lequel les lignes de séparation des districts se rencontrent par trois. Kempe a démontré que, pour colorier une carte quelconque, il suffit de quatre couleurs. Colorions donnc notre dessin, entouré d'un circuit extérieur, au moyen des quatre couleurs A, B, C, D. Marquons par

O toute ligne entre A et B ou entre C et D,
I toute ligne entre A et C ou entre B et D,
II toute ligne entre A et D ou entre B et C,

et ce problème est résolu, en remplaçant O, I, II par trois couleurs différentes. Ce quui serait très intéressant, ce serait de trouver, pour le théorème de Tait, une démonstration *directe*, qui jusqu'ici n'a pu être obtenue.

R. 407 [J2f] (J. Voyer). ? ? ? p 4 de 1895 – La solution générale de ce problème des rencontres se trouve, p. 96 et suiv., dans : *Théorie des jeux de hasard*, par H. Laurent (*Encyclopédie des Aide-Mémoir*e ; Gauthier-Villars et G. Masson).

R. 451 [J2b](E. Lemoine). ? ? ? p17 de 1895 – Appelons x la probabilité cherchée. La probabilité de voir sortir la boule n est $\frac{1}{n}$. Le nombre d'épreuves à tenter pour que la probabilité de voir sortir la boule n soit égale à x est $\frac{l(1-x)}{l(1-\frac{1}{n})}$.

Pour les boules $(n-1)$, $(n-2)$, ... ce nombre sera

$$\frac{l(1-x)}{l(1-\frac{1}{n-1})},\ \frac{l(1-x)}{l(1-\frac{1}{n-2})},\ \cdots;$$

on doit avoir

$$l(1-x)[\frac{1}{l(1-\frac{1}{n})}+\frac{1}{l(1-\frac{1}{n-1})}+\cdots+\frac{1}{l(1-\frac{1}{2})}]=k$$

d'où

$$l(1-x)=\frac{k}{\Sigma_{h=n}^{h=2}l(1-\frac{1}{h})}$$

équation qui permet de calculer $1-x$ et, par suite, x.

Q664 [I13bα] ? ? ? p 318 de 1895

Q668 [J1aα] ? ? ? p 319 de 1895

R177 [V9] *Le Tome II et le tome III de la théorie des nombres de Lucas paraîtront-ils ?* (G. de Rocquigny) L'examen attentif des papiers laissés par Ed. Lucas a conduit à cette conclusion, que contrairement à l'espoir du premier moment, il serait très difficile de publier une suite à ... ? ? ? ? p 341 de 1895

R. 371 [J1b] ? ? ? p 227 de 1894 (R.-H. Van Dorsten). – *Troisième réponse.*– Le triangle arithmétique donné par M. Welsch (t. II, p. 236) est exactement la même chose que mon échiquier triangulaire (voir *Théorie des nombre*s, par Ed. Lucas, p. 90 et suiv.).

R514 [Q4bα] p 131 et 429b de 1895

1896

R. 51 (P. Mansion), R.360 (E. Goursat). – *Problème des quatre couleurs.– Troisième réponse.*– Les critiques de M. de la Vallée-Poussin, sur la démonstration de Lucas, ne me paraissent pas fondées. Lucas a parfaitement démontré qu'il est toujous possible de réduire à 3 le nombre des couleurs de 5 districts aboutissant à un point de concours. Il n'est pas douteux qu'en échangeant le bleu et le vert dans a, et le joune et le bleu dans b, le nombre des couleurs est réduit à 3 autour du point de concours. Lucas n'a point dit que cette réduction ne nécessitera pas de changement de couleurs dans d'autres parties de la carte. Il pense même le contraire, puisqu'il a dit (Théorie des nombres, p. 186) : " avant de colorier la carte, on a le soin de désigner les couleurs, au crayon, par les chiffres 1, 2, 3, 4 ; car on doit, à certain moments, changer le coloriage." Ainsi, dans le figure citée par M. de la Vallée-Poussin, Il suffit de permuter les couleurs du district hachuré de droite, devenu bleu, et du district extérieur jaune, pour que le coloriage de la carte soit satisfaisant ; (Voir ci-dessus, p. 180.) Ce changement ultérieur dans le coloriage ne modifie en rien la démonstration que l'on peut toujours réduire à 3 le nombre des couleurs aboutissant à un point de concours de 4 ou 5 districts et que par suite, le théorème de Tait est ainsi démontré.

R.749 (P.-F. Teilhet).– Dans ses *Eléments d'Algèbre* (édit. 1798, t. II, 247, p.355), Euler a démontré que les équations $x^3 + -y^3 = 2z^3$ n'ont d'autres solutions que $x = y = z$ pour l'une et $x = y, z = 0$ pour l'autre.

Remarque. – En calquant la démonstration sur celle d'Euler, on peut démmontrer que les équations

$$2x^3 + -2y^3 = 8z^3 \quad ou \quad x^3 + -y^3 = 4z^3$$

sont également impossibles.

R. 514 (B. Portier). – *Les Carrés magiques. Etude historique et arithmétique,* par H. Tarry. Alger, typographie Jourdan ; 1876. Brochure de 18 pages.– *On the géneral properties of nasik squares*, par A.-H. Frost (extracted from the quaterly Journal of pure and applied Mathematics, n 57 ; 1877), brochure de 16 pages. – *Magic squares, from the Encyclopædia britannica*, par M. A.-H. Frost ; 1882. Brochure de 13 P. – *Die magischen Figuren, allgemeine Lösung und Erweiterung eines aus dem Alterthum* stammenden Problems, par *D*^r Hermann Schefeler. Leipsig, Verlag Teubner ; 1882. Volume de 112 pages. – *Sur les égalités à deux degrés*, par G. de Longchamps (Extrait du *Journal de mathématiques élémentaires*, numéros d'août et de septembre 1889). Librairie Delagrave. Brochure de 8 pages. – *Egalités à deux degrés*, par Michel Frolow (Extrait du *Bulletin de la Société mathématique*, t. XVII ;1889). Brochure de 15 pages.

1897 Pas d'interventions de Delannoy ni de Lucas

1898

Q.453 p.252

1899

Q.1360 P.34 démonstration du théorème de Fermat par Euler.

R.84 (1894, 35) (E. Lucas).– *Solution de la question du taquin général.*– (1894, 215 ; 1899, 34).– Voici une addition à la solution du taquin général qui a été donnée 1899, 34.

J'ai dit que, pour ramener les pions dans l'ordre naturel, la disposition donnée devait être de première classe. Cette condition est toujours suffisante ; mais elle n'est nécessaire que dans le cas où $q + r$ est impair. On peut amener un pion quelconque à sa place, soit par k permutations successives dans le sens direct, soit par $q + r - (k + 1)$ peermutations dans le sens rétrograde. Lorsque $q + r$ est pair, les deux nombres k et $q + r - (k + 1)$ sont de parité différente. On peut donc en choisissant pour la mise en place du dernier pion le sens convenable, faire en sorte que le nombre total des opérations effectuées soit pair et que, par conséquent, les pions $(q + r + 1)$ et $(q + r + 3)$ soint revenus à leur place. Ainsi dans le cas de $q + r$ (ou $p + r$) pair, on peut toujours ramener les pions dans l'ordre naturel, quelque soit la disposition initiale. Cela est si vrai que l'application, que j'ai donné ppour $q + r = 6$, concerne une disposition de deuxième classe, et non de première comme je l'ai dit par erreur. Dans le taquin ordinaire, la solution n'est possible que si la disposition donnée est de première classe. C'est que si l'on y suppose un pont à une place quelconque et si l'on trace un contour soit à droite, soit à gauche, en réunissant les pions intérieurs par une ligne continue aboutissant au pont, il est facile de voir que $q + r$ sera toujours impair.

R.1551 (1899,151) (G. de Rocquigny). – 8n+3 est la somme de trois carrés.– D'après un théorème de Fermat, démontré, n est une somme de trois triangulaires au plus ; on a donc

$$n = \frac{x(x+1)}{2} + \frac{y(y+1)}{2} + \frac{z(z+1)}{2},$$

un ou deux des entiers x, y, z pouvant être nuls. Donc

$$\begin{aligned} 8n + 3 &= 4x(x+1) + 4y(y+1) + 4z(z+1) + 3 \\ &= (2x+1)^2 + (2y+1)^2 + (2z+1)^2. \end{aligned}$$

Aucun de ces carrés n'est nul, la proposition énoncée est donc exacte. n augmentant, le nombre des décompositions de $8n + 3$ en trois carrés effectifs augmente.

Remarque. – Si n peut être décompoé de diverses manières en trois triangulaires, il y a un nombre égal de manières de décomposer $8n + 3$ en trois carrés.

Exemple :

$$12 = \frac{3.4}{2} + \frac{3.4}{2} + \frac{0.1}{2} = \frac{3.4}{2} + \frac{2.3}{2} + \frac{2.3}{2} = \frac{4.5}{2} + \frac{1.2}{2} + \frac{1.2}{2},$$

$$8 \times 12 + 3 = 7^2 + 7^2 + 1^2 = 7^2 + 5^2 + 5^2 = 9^2 + 3^2 + 3^2$$

1900

R.1471 (1899, 52) (G. de Rocquigny) – *Toute puissance sixième d'un nombre entier est la somme d'un cube, d'un bicarré et d'un nombre triangulaire* (1899, 192).– L'identité

$$(n+1)^6 = (2n+1)^3 + (n^3 + 3n^2 + n^2)^2 + \frac{(2n^2 - 1)2n^2}{2}$$

démontre la proposition ; comparée à la réponse de M. Couturier (1899, 192), elle prouve que cette décomposition est possible au moins de deux façons différentes.

Q.1869 [J1b] On répartit p jetons entre q cases, le nombre des jetons mis dans une case pouvant aller de 0 à p ; démontrer que le nombre des répartitions possibles est égal à $\binom{p+q+1}{q-1}$.

R1540 [I2b] (1899,148) (G. de Rocquigny) *b étant un nombre composé, quelles sont les valeurs de b qui rendent le produit 1.2.3... (b-1) non divisible par b ?–*

Soit $b = p^\alpha q^\beta \cdots s^\lambda$, α étant le plus grand exposant. Le produit $1.2.3\cdots(b-1) = P$ contient le terme $pq\cdots s$ (ou ses multiples), un nombre de fois égal à $p^{\alpha-1}q^{\beta-1}\cdots s^{\lambda-1} - 1$ (sans parler des termes isolés $p, q, \cdots, s$ dont la multiplication donne le produit $pq\cdots s$). Or on a $p^{\alpha-1}q^{\beta-1}\cdots s^{\lambda-1} - 1 \geq \alpha$, excepté dans le cas unique où $p = 2$, $\alpha = 2$, $q = 1$, ..., $s = 1$; par conséquent P est toujours divisible par b, excepté pour $b = 4$.

R.1552 (1899, 151) (G. de Rocquigny). – *Généralisation d'une proposition sur les nombres triangulaires.* – D'après Fermat (*Œuves*, t. I, p. 305), on peut généraliser et étendre l'énoncé au cas d'un nombre polygonal quelconque. "Mais, dit Le Besgue (*Introduction à la théorie des nombres*, p. 27), la démonstration de Fermat n'est pas connue. Cauchy en a donné une très remarquable en modifiant l'énoncé. La formule du polygone pour $n = 1$ se réduit à 1 quel que soit b, pour $n = 0$, elle se réduit à zéro, bien que zéro ne résulte pas des sommations indiquées. En regardant 0, 1 comme des polygones de $b + 2$ côtés, qui, á l'exception de quatre, sont 0 et 1. Ce théorème est plus précis que celui de Fermat. On pourrait encore, comme le fait Legendre dans sa *théorie des nombres*, modifier l'énoncé d'une autre manière."

R.1479 (1899, 75) (A. Tanturri).– *Question de combinaisons* (1900, 141).– Il s'agit de trouver le nombre $c^m(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_q)$ des combinaisons p à p des m premiers nombres, dans lesquelles il entre α_1 nombres isolés, α_2 groupes de 2 nombres consécutifs, ..., α_q groupes de q nombres consécutifs, p étant égal à $\alpha_1 + 2\alpha_2, \cdots + q\alpha_q$). Un ou plusieurs des α peuvent être nuls.

Traçons sur une feuille de papier m verticales numérotées de 1 à m. Une quelconque des combinaisons comprises dans c^m peut être représentée en plaçant un pion noir sur la verticale de chaque nombres entrant dans la combinaison, et un pion blanc sur la verticale de chaque nombre qui n'y figure pas.

On a ainsi $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_q = h$ groupes de pions noirs et $h - 1$ ou h ou $h + 1$ groupes de pions blancs suivant que la combinaison renferme les nombres 1 et m, ou seulement l'un d'entre eux, ou aucun des deux. Il doit, en effet, y avoir *au moins* un piion blanc entre les groupes noirs pour les séparer.

La combinaison considérée peut être représentée d'une autre manière. Accolons sur une ligne d'un damier, en alternant les couleurs et en

respectant l'ordre des groupes, des piles de pions contenant chacune autant de pions qu'il y en a dans le groupe correspondant. Sans toucher aux piles blanches, permutons de toutes les manières possibles les piles noires, cela nous fournira $\frac{h!}{\alpha_1!\alpha_2!\cdots\alpha_q!}$ pour avoir $c^m(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_q)$
Cherchons donc combienil y a de ces dispositions.
Le nombre des pions blancs est $m-p$; mais, comme nous l'avons dit, il y en a $h-1$ qui séparent forcément les h piles noires. Restent donc $m-p-(h-1)$ pions blancs à répartir entre $h+1$ cases, le nombre de pions mis dans une case pouvant aller de 0 à

$$m-p-(h-1).$$

Le nombre de ces répartitions est égal à c_h^{m-p+1}, c'est-à-dire au nombre des combinaisons h à h de $m-p+1$ objets[6].
Par conséquent, on a

$$c^m(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_q) = \frac{h!}{\alpha_1!\alpha_2!\cdots\alpha_q!}\, c_h^{m-p+1}$$

R.1578 (1899,174) (A. Goldenberg).– *Sur le nombre des décompositions d'un nombre en sommes de deux carrés.*– Fermat (t.III, p.245) a donné le moyen de trouver le nombre demandé. Soit $P = a^\alpha b^\beta c^\gamma \cdots l^\lambda$, les facteurs $a, b, c, \cdots, l$ étant de la forme $4p+1$. Le nombre de manière de décomposer P en une somme de deux carrés est

$$\frac{(\alpha+1)(\beta+1)(\gamma+1)\cdots(\lambda+1)}{2};$$

si le numérateur est impair, on le diminue d'une unité.

R.1659 (1899, 243) (C. Wargny).– Décomposition d'un nombre en somme de deux carrés. – Solution non publiée de Delannoy.

R.1723 (1900, 7) (G. de Rocquigny).– Sur un passage de l' arithmétique de M. Bertrand. – Solution non publiée de Delannoy.

Q.1926 [I17b] A-t-on démontré les deux propositions suivantes de Fermat :

1. Le double de tout nombre premier de la forme $8n-1$ est somme de trois carrés (t.III, p.316) ;

[6]Je suis convaincu que cette assertion est exacte, mais je n'ai pas pu en trouver une démonstration suffisamment précise. C'est pourquoi je pose à ce sujet une question spéciale (voir ci-dessus, p.165, question 1869).

2. Le produit de deux nombres premiers, terminés par 3 ou 7 et de la forme $4n+3$, est la somme d'un carré et du quintuple d'un autre carré (t.III, p. 317).

R.1894 [V2] (1900, 238) (Barriol)). – *Les cahiers d'Arithmétique amusante cités dans l'Avertissement du quatrième Volume des Récréations mathématiques de Lucas seront-ils publiés ?.* – L'Arithmétique amusante, par E. Lucas, a paru chez Gauthier-Villars en 1895, publiée par MM. Delannoy, Laisant et Lemoine.

R.1875 [I17e] (1900, 195) (de Rocquigny). – *La proposition suivante est-elle exacte ? « Tout carré pair (plus grand que 4), qui est évidemment la somme de 4 carrés, est-il la somme de 5 carrés dont aucun n'est nul. »* – Oui, en effet pour les nombres pairement pairs, $4m$, on a

$$4^2 = 3^2 + 2^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2;$$

donc

$$(4m)^2 = (3m)^2 + (2m)^2 + m^2 + m^2 + m^2.$$

Cette démonstration n'est pas unique. Exemple pour 8^2 : en outre de $6^2 + 4^2 + 2^2 + 2^2 = 2^2$, on a

$$7^2 + 3^2 + 2^2 + 1^2 + 1^2, \quad 6^2 + 5^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2,$$

$$6^2 + 3^2 + 3^2 + 3^2 + 1^2, \quad 5^2 + 5^2 + 3^2 + 2^2 + 1^2.$$

Pour les nombres impairements pairs $4m+2$, on a

$$(4m+2)^2 = 16m^2 + 16m + 4.$$

Il suffit donc de prouver que $16m+4$ ou $4(4m+1)$ est toujours égal à la somme de 4 carrés dont aucun n'est nul ; $4m+1$ est toujous égal à 1, 2, 3 ou 4 carrés dont aucun n'est nul.

Dans le premier et le dernier cas, la décomposition en 4 carrés est évidente. Reste donc à considérer le deuxième et le troisième. Si $4m+1 = a^2 + b^2$, on a

$$4(a^2 + b^2) = (a+b)^2 + (a+b)^2 + (a-b)^2 + (a-b)^2$$

Si $4m+1 = a^2 + b^2 + c^2$, on a

$$4(a^2+b^2+c^2) = (a+b+c)^2 + (a+b-c)^2 + (a-b+c)^2 + (a-b-c)^2;$$

donc dans tous les cas, $4(4m+1)$ est égal à la somme de 4 carrés, et par suite $(4m+2)^2$ est égal à la sommme de 5 carrés.

Comme pour les nombres pairement pairs, il y a d'autres modes de décomposition.

1925 (1900, 309) (G. Espanet). – *Réussite de dominos.* – Ed. Lucas a proposé de donner à cet arrangement le nom de *quadrille.*

Le problème a été complètement étudié par MM. Laquière, H. Delannoy et Ed. Lucas, et la solution exposée dans les *Récréations mathématiques*, t. II ; 1883.

Dans les figures données (*loc. cit.*), les carrés en A, B, C, D sont respectivement ceux de 0, 1, 2, 3. Le nombre de solutions est de trente-quatre.

1901

1938 (1900, 330) (de Rocquigny). –*Tout carré entier* $> 2^2$ *est la somme de deux nombres triangulaires et d'un nombre pentagonal ; Aucun des composants n'est égal à zéro.*– En effet, si m est pair et $= 2n$, on a

$$(2n)^2 = \frac{1}{2}(n-1)n + \frac{1}{2}2n(2n-1) + \frac{1}{2}n(3n-1);$$

si m est impair et $= 2n+1$, on a

$$(2n+1)^2 = \frac{1}{2}n(n-1) + \frac{1}{2}2n(2n-1) + \frac{1}{2}(n+1)(3(n-1)-1).$$

1939 (1900, 331) (de Rocquigny).– *Propositions de la théorie des nombres.* – Toute puissance huitième d'un nombre entier quelconque est la somme :

1. De 2 triangulaires (de deux manières différentes)

$$n^8 = \frac{1}{2}n^4(n^4-1) + \frac{1}{2}n^4(n^4+1),$$

$$n^8 = \frac{1}{2}(n^4-n^2)(n^4-n^2-1) + \frac{1}{2}(n^4+n^2)(n^4+n^2-1);$$

2. De 2 carrés et de 1 triangulaire

$$n^8 = (\frac{n^4+n^2}{2})^2 + (\frac{n^4-n^2}{2})^2 + \frac{1}{2}n^4(n^4-1);$$

3. De 1 cube et de 1 triangulaire

$$n^8 = (2n^2-2)^3 + (n^4-4n^2+2)^2 + (2n^2-2)^2;$$

4. De 2 carrés et de 2 triangulaires

$$n^8 = (n^3)^2 + (n^4-n^2)^2 + \frac{1}{2}(n^3+n^2-n)(n^3+n^2-n-1) +$$

$$\frac{1}{2}(n^3-n^2-n)(n^3-n^2-n+1);$$

5. De 2 cubes et de 2 triangulaires

$$n^8 = (n^2)^3+(n^2+1)^3+\frac{1}{2}(n^4-2n^2+1)(n^4-2n^2+2)+\frac{1}{2}n^4(n^4-1);$$

6. De 2 cubes, de 1 carré et de 2 triangulaires

$$n^8 = (n^2)^3 + (n^2-1)^3 + (n^2-1)^2$$

$$+\frac{1}{2}(n^4-2n^2)(n^4-2n^2+1) + \frac{1}{2}n^4(n^4-1);$$

7. De 1 cube et de 2 triangulaires

$$n^8 = (n^2)^3 + \frac{1}{2}(n^4+n^3-n^2-n+1)(n^4+n^3-n^2-n)$$

$$+\frac{1}{2}(n^4-n^3-n^2+n+1)(n^4-n^3-n^2+n);$$

8. De 1 cube et de 3 carrés

$$n^8 = (n^2-1)^3 + (n^4-n^2)^2 + (n^3-n)^2 + (2n^2-1)^2;$$

9. De 2 cubes et de 3 carrés

$$n^8 = (n^2)^3+(n^2-2)^3+(n^4-3n^2+2)^2+(2n^3-2n)^2+(n^2-2)^2;$$

10. De 2 cubes, de 2 carrés et de 2 triangulaires

$$n^8 = (n^2)^3 + (n^2-1)^3 + (n^4-2n^2+1)^2 + (n^3-n)^2$$

$$+\frac{1}{2}(n^3+n^2-n)(n^3+n^2-n-1)+\frac{1}{2}(n^3-n^2-n+1)(n^3-n^2-n).$$

Il serait possible d'indiquer d'autres valeurs de n^8, par exemple :

11. de 2 cubes et de 3 triangulaires

$$n^8 = (n^2)^3 + (n^2-1)^3 + \frac{1}{2}(n^4-n^2)(n^4-n^2+1)$$

$$+\frac{1}{2}(n^4--n^2)(n^4-n^2-1) + \frac{1}{2}(2n^2-1)(2n^2-2);$$

12. De 1 cube et de 4 triangulaires

$$n^8 = (n^2)^3 + \frac{1}{2}(n^4 - n^2)(n^4 - n^2 + 1)$$

$$+\frac{1}{2}(n^4 - -n^2)(n^4 - n^2 - 1)$$

$$+\frac{1}{2}(n^3 + n^2 - n)(n^3 + n^2 - n - 1)$$

$$+\frac{1}{2}(n^3 - n^2 - n)(n^3 - n^2 - n + 1),$$

ou

$$= n^3 + \frac{1}{2}(n^4 + n^3 - n^2)(n^4 + n^3 - n^2 - 1)$$

$$+\frac{1}{2}(n^4 - n^3 - n^2)(n^4 - n^3 - n^2 + 1)$$

$$+\frac{1}{2}(n^3 + n^2 - n)(n^3 + n^2 - n - 1)$$

$$+\frac{1}{2}(n^3 - n^2 - n)(n^3 - n^2 - n + 1)$$

On peut varier les énoncés des numéros 4 à 7, 9 à 12, en y remplaçant 1 cube par 1 carré ou par une sixième puissance, les formules restant les mêmes.

Q.424 [Q4bα] (1895, 8) On ne connaît actuellement que 110 carrés magiques rśultant de la marche du cavalier (A. F., Congrès de Pau et de Marseille, général Parmentier). Tous ces carrés sont incomplètement magiques. Les lignes et les colonnes donnent la constante 260, mais les diagonales ne la fournissent pas. Est-il possible d'obtenir aussi des carrés magiques parfaits, c'est-à-dire ayant 260 sur les diagonales ? Sinon, démontrer l'impossibilité.

Q.444 [J2f] ((1895, 14) Un vote de la chambre donne lieu à un pointage. Pendant le dépouillement, tantôt les votes Pour l'emportent sur les Contre, et tantôt c'est l'inverse. Finalement, il y a p Pour et q Contre. On demande la probabilité que, à aucun moment du dépouillement, la différence entre les Pour et les Contre n'a dépassé $\mu = p - q$, ni dans un sens ni dans l'autre. On peut aussi demander la probabilité que l'excès des Pour sur les contre n'a pas dépassé μ et que l'excès des Contre sur les Pour n'a pas dépassé m.

On a $P = \frac{H_{p,q}}{Q_{p,q}}$, $H_{p,q}$ est le nombre des marches de la tour sur un échiquier hexagonal dont les deux côtés sont égaux à μ dans le premier cas, et égaux à μ et à m dans le second. $Q_{p,q} = \binom{p+q}{ps}$ est le nombre des marches sur l'échiquier carré. Je demande une solution sans le secours de l'échiquier.

2195 [I17c] La proposition suivante est-elle exacte : "Etant donné un nombre $8n + 1$ qui est égal à la somme de trois carrés différents, il y a *toujours* au moins une autre décomposition dans laquelle, ou bien deux des carrés composants sont égaux ou nuls, ou bien l'un des carrés égal zéro ou à 1" ?

Exemples :

$$36 + 4 + 9 = 49 + 0 + 0,$$

$$36 + 4 + 49 = 4 + 4 + 81 = 64 + 25 + 0$$

$$64 + 16 + 25 = 100 + 4 + 1$$

2076 (1901, 109) (de Rocquigny).– *La proposition suivante est-elle exacte ? Tout carré impair plus grand que 1 est la somme de 6 carrés dont aucun n'est nul–.*

Réponse : oui.

Soit $N = 2m + 1$,

$$N^2 = 4m^2 + 4m + 1.$$

Il suffit de prouver que $4m$ est somme de 4 carrés ; m est égal à 1, 2, 3 ou 4 carrés. Dans le premier et le dernier cas, la décomposition de m est évidente.

Si $m = a^2 + b^2$, on a

$$4(a^2 + b^2) = (a + b)^2 + (a + b)^2 + (a - b)^2 + (a - b)^2$$

Il se présente un cas d'exception quand $a = b$, alors $m = 2a^2$ et

$$N^2 = 4a^2(4a^2 + 1) + 4a^2 + 1.$$

On démontre comme ci-dessus que $4a^2(4a^2 + 1)$ est toujours somme de 4 carrés, et ici il n'y a pas de cas d'exception, car le nombre impair $4a^2 + 1$ ne peut être le double d'un carré.

Si $m = a^2 + b^2 + c^2$, on a

$4(a^2 + b^2 + c^2)$

$$= (a + b + c)^2 + (a + b - c)^2 + (a - b + c)^2 + (a - b - c)^2.$$

Nouveau cas d'exception quand, par exemple, $a = b + c$; alors $m = 2(b^2 + c^2 + bc)$, et l'on a $N^2 = (4b^2 + 4c^2 + 4bc + 1)^2$

$= (4b^2 + 4c^2 + 4bc - 1)^2 + (4b + 2c)^2 + (3c)^2 + c^2 + c^2 + c^2.$

2077 (1901, 109) (de Rocquigny).– *La proposition suivante est-elle exacte ? Tout carré pair plus grand que* 4^2 *est la somme de 6 carrés dont aucun n'est nul.*

Réponse : oui.

Il y a deux cas à considérer, suivant que ne nombre considéré N est pairement pair ou pairement impair.

I Soit $N = 4m$. Deux cas encore, suivant que m est pair ou impair :

1. $m = 2\mu$, alors on a

$$N^2 = (8\mu)^2 = (6\mu)^2 + (4\mu)^2 + (3\mu)^2 + \mu^2 + \mu^2$$

2. $m = 2\mu + 1$, alors

$$N^2 = 4^2(2\mu + 1)^2.$$

Nous avons démontré (2076) que $(2\mu+1)^2$ est toujours somme de 6 carrés, il en est donc de même de $4^2(2\mu + 1)^2$.

II Soit $N = 4m + 2$,

$$N^2 = 2^2(2m + 1)^2.$$

Même conclusion que dans le cas précédent.

Il y a d'autres modes de décomposition que ceux qui sont donnés par les formules. Pour 9^2, par exemple, en outre de la solution

$$4^2 + 4^2 + 4^2 + 4^2 + 4^2 + 1^2,$$

on a encore

$$5^2 + 5^2 + 5^2 + 2^2 + 1^2 + 1^2,$$
$$6^2 + 5^2 + 3^2 + 3^2 + 1^2 + 1^2,$$
$$7^2 + 5^2 + 2^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2,$$
$$8^2 + 2^2 + 2^2 + 2^2 + 2^2 + 1^2.$$

Il en est de ême pour les carrés pairs.

Quoi qu'il en soit, il est bien démontré que tout carré (sauf 1^2, 2^2, 4^2) est égal à la somme de 6 carrés.

Q.494 [Q4b] (1895,90) *Le jeu de la Tchouka.*– Il se compose de $2n$ cases, contenant chacune n boules, et de la Rouma

$$\underset{}{0\,0\,0} \quad \ldots \quad 0\,0\underset{\text{Rouma}}{\mathrm{O}}$$

On prende les billes d'une case et on les distribue une par une dans les cases suivantes à droite, y compris la Rouma, et en reprenant sur la gauche s'il en reste.

1. Si la dernière boule tombe dans la Rouma, on recommence l'opération où l'on veut ;
2. Si la dernière boule tombe dans une case pleine, on prend toutes les boules de cette case et on les distribue comme ci-dessus ;
3. Si la dernière boule tombe dans une case vide, la partie est perdue.

Il s'agit de placer toutes les boules dans la Rouma. Les billes de la Rouma ne sortent pas.
Combien y-a-t-il de solutions pour ,les valeurs successives de n ?
Pour $n = 2$, il n'y a qu'une solution, obtenue en jouant les boules dans l'ordre indiqué ci-après :

2	2	2	2	O
2	2	0	3	1
3	3	0	0	2
3	0	1	1	3
3	0	0	2	3
4	0	0	0	4
0	1	1	1	5
0	1	1	0	6
0	0	2	0	6
0	0	0	1	7
0	0	0	0	8

Je crois que pour $n = 3$ il n'y a pas de solution.
Le premier coup est forcé et commence à la $(n+1)^{eme}$ case ; sinon au bout de deux coups on aboutit à une case vide.
Il y a divers cas d'impossibilité :

1. Quand le nombre des pions de la case d'arrivée est zéro (règle du jeu) ;
2. Quand le nombre des pions de la case d'arrivée est $2n$ (excepté pour la Rouma) ;
3. Quand la somme des pions de la case de départ et de la case d'arrivée (autre que la Rouma) $= 2n$; Quand le nombre des pions de la case de départ $= 2n + 1$.

Voilà tout ce que j'ai trouvé.
Ces cas d'impossibilité limitent les recherches, qui ne laissent pas d'être excessivement longues, même pour $n = 4$. (Extrait de ma correspondance avec Lucas.)

1902 R.2212 (1901, 256) (V. Aubry).– Questions de dominos.– Le nombre demandé est 129 976 320.

La solution a été donnée pour la première fois par le docteur Reiss dans un long Mémoire de 58 pages in-4.

Monsieur l'abbé Jolivald a obtenu le même nombre, sans recourir à des calculs aussi laborieux que ceux de Reiss.

Mais la solution la plus simple a été donnée par M. G. Tarry (*A. F. Congrès de Nancy*, 1886).

Voir : *Récreations mathématiques* de Lucas (t.II, p.67 et 229, et t.IV, p.147).

R.2216 (1901, 274) (G. de Rocquigny).– Puissance 6^{eme} des entiers.– La proposition est exacte. Si le nombre donné est pair, on a

$$(2n)^6 = 64n^6 = (4n^3)^2+(4n^3)^2+(4n^3)^2+(2n^3)^2+(2^3)^2+(2n^3)^2+(2^3)^2$$

Si le nombre est impair, on a

$$\begin{aligned}(2n+1)^6 &= 64n^6+192n^5+240n^4+160n^3+60n^2+12n+1\\ &= (4n^3+6n^2+2n)^2+(4n^3+6n^2+2n)^2\\ &+(4n^3+6n^2+2n)^2+(4n^3+6n^2+2n)^2\\ &+(4n^2+6n+1)^2+(2n^2+2n)^2+(2n^2+2n)^2\end{aligned}$$

R.2091 (1901, 132) (G. de Rocquigny).– Décompositions s'un cube impair (1902,46).– M. Brocard a donné (*loc. cit.*) la décomposition de $(2n^2+1)^3$ en six triangulaires. Pour la décomposition en six carrés, on a

$$\begin{aligned}(2n^2+1)^3 &= 8n^6+12n^4+6n^2+1\\ &= (2n^3+n^2+n)^2+(2n^3-n^2+n)^2\\ &+(n^2)^2+(n^2)^2+(2n)^2+1^2.\end{aligned}$$

2325 (1902,93) (E.-N. Barisien).– *Sur un théorème de Géométrie élémentaire.*– Réponse non publiée de Delannoy.

R.2294 [I18c] (G. de Rocquigny) *Toute puissance sixième* n^6 *d'un nombre entier* > 1 *est égale à la somme :*

1^o *De 1 cube et de 4 carrés,* $\neq 0$.

2^o *De 2 cubes et de 5 carrés,* $\neq 0$.

1. De 1 cube et de 4 carrés $\neq 0$,

$$(n+1)^6 = (2n)^3+(n^3+3n^2)^2+(2n^2+3n+1)^2+(n^2+n)^2+(n^2-n)^2;$$

2. De 2 cubes et de 5 carrés $\neq 0$,

   $$(n+1)^6 = n^3+n^3+(n^3+3n^2+n)^2+(n^2+3n+1)^2+(n^2+n)^2+(n^2+n)^2+(n^2+n)^2.$$

   On pourrait ajouter :

3. De 1 cube et de 6 carrés $\neq 0$,

   $$(n+1)^6 = (2n)^3+(n^3+3n^2)^2+(n^2+3n+1)^2+(2n^2+n)^2+(n^2+n)^2+n^2+n^2;$$

4. De 2 cubes et de 3 carrés $\neq 0$,

   $$(n+1)^6 = n^3+n^3+(n^3+3n^2+n)^2+(2n^2+3n+1)^2+n^2;$$

5. De 3 cubes et de 3 carrés $\neq 0$,

   $$(n+1)^6 = (n^2+2n)^3+n^3+n^3+(n^2+3n+1)^2+(n^2+2n)^2+(n^2)^2;$$

6. De 3 cubes et de 4 carrés $\neq 0$,

   $$(n+1)^6 = (2n)^3+n^3+n^3+(n^3+3n^2+n)^2+(3n+1)^2+(2n^2+n)^2+(2n)^2;$$

7. De 3 cubes et de 5 carrés $\neq 0$,

   $$(n+1)^6 = (n^2+2n)^3+n^3+n^3+(n^2+3n+1)^2+(n^2+n)^2+(n^2+n)^2+n^2+n^2;$$

8. De 2 cubes et de 4 carrés $\neq 0$,

   $$(n+1)^6 = (n^2+2n)^3+(2n)^3+(3n+1)^2+(n^2+2n)^2+(n^2+n)^2+(n^2-n)^2;$$

9. De 2 cubes et de 6 carrés $\neq 0$,

   $$(n+1)^6 = (2n)^3+(2n)^3+(n^3+3n^2)^2+(3n+1)^2$$
   $$+(n^2+n)^2+(n^2+n)^2+(2n)^2+(2n^2)^2$$

La première formule ne s'applique qu'à tout nombre > 2 ; mais comme on a, d'autre part,

$$2^6 = 3^3+5^2+2^2+2^2+2^2 = 3^3+4^2+4^2+2^2+1^2,$$

la proposition est exacte.
Les autres formules s'appliquent à tout nombre > 1.
Il y a d'autres décompositions. Ainsi, par exemple :

Premier cas,

$$(2n)^3 + (n^3 + 3n^2 + 2n)^2 + (3n + 1)^2 + (n^2 + n)^2 + (n^2 - n)^2.$$

Deuxième cas,

$$(n^2 + 2n)^3 + (2n)^3 + (3n + 1)^2 + (n^2 + n)^2 + (n^2 + n)^2 + (2n)^2 + (n^2)^2.$$

Quatrième cas,

$$n^3 + n^3 + (n^2 + 2n)^3 + (n^3 + 3n^2 + 2n)^2 + (n^2 + 3n + 1)^2 + (n^2)^2.$$

Même observation pour la huitième formule que pour la première, car

$$2^6 = 2^3 + 2^3 + 6^2 + 2^2 + 2^2 + 2^2 = 3^3 + 3^3 + 2^2 + 2^2 + 1^2 + 1^2.$$

2075 (1901, 108) (G. de Rocquigny). – *Bicarré entier.* – J'ai démontré (199, 392) que tout bicarré pair est égal à la somme de 5 carrés dont aucun n'est nul. Il ne reste donc à examiner que les bicarrés impairs. Soit

$$N^4 = (2n + 1)^4 = (2n)^4 + 4(2n)^3 + 6(2n)^2 + 8n + 1;$$

$8n + 1$ est égal à 1, ou à deux, ou à 3 carrés, de là trois cas :
I. $8n + 1$ est égal à 1 carré $(2p + 1)^2$ alors

$$2n = p^2 + p,$$

et l'on a

$$N^4 = [(p^2+p)^2]^2+(p^2+p)^2(2p+1)^2+(p^2+p)^2+[2(p^2+p)]^2+(2p+1)^2.$$

II. $8n + 1$ est égal à la somme de deux carrés $(2q)^2 + (2p + 1)^2$

$$2n = q^2 + p^2 + p,$$

et l'on a

$$N^4 = [(q^2+p^2+p)^2+2(q^2+p^2+p)]^2+(q^2+p^2+p)^2+(q^2+p^2+p)^2+(2q)^2+(2p+1)^2.$$

III. $8n + 1$ est égal à la somme de trois carrés. Ce cas se subdivise en deux autres, suivant que les deux carrés pairs sont inégaux ou égaux :

1. $8n+1=(2s)^2+(2q)^2+(2p+1)^2$, q et s étant inégaux, alors

$$2n=s^2+q^2+p^2+p,$$

et l'on a

$$N^4=[(s^2+q^2+p^2+p)^2+s^2+q^2+p^2+p]^2+(s^2+q^2+p^2+p+1)^2(s^2+q^2)^2$$
$$+(s^2+q^2+p^2+p+1)^2(s^2-q^2)^2+(s^2+q^2+p^2+p+1)^2p^2$$
$$+(s^2+q^2+p^2+p+1)^2(p+1)^2;$$

2. $8n+1=2(2q)^2+(2p+1)^2$; la formule précédente ne serait pas applicable, car (s^2-q^2) serait nul ; nous avons alors

$$N^4=[(2q^2+p^2+p)^2+(2q^2+p^2+p)]^2+[2(2q^2+p^2+p)+1]^2$$
$$+(2q^2+p^2+p)^2(2q)^2+(2q^2+p^2+p)^2p^2$$
$$+(2q^2+p^2+p)^2(p+1)^2.$$

R.2251 (1902, 1) (G. de Rocquigny).– Tout nombre $N=a(a+2)$ est somme de 4 ou de 5 carrés $\neq 0$.–
Si a est impair et $=2p+1$, on a

$$N=4n^2+8n+3.$$

On sait que tout nombre de la forme $8n+3$ est somme de 3 carrés impairs (Gauss, p.353), par conséquent N= somme de 4 carrés.
Reste donc à examiner le cas où $a=2n$; on a

$$N=4n^2+4n,$$

$4n$ est égal à 1, 2, 3 ou 4 carrés. Dans les cas 1, 3, 4, la décomposition de N en 4 ou 5 carrés est évidente.
Nous n'avons donc à examiner que le cas où $4n$ est somme de 2 carrés. Ces deuux carrés ne peuvent être impairs, car leur somme serait impairement paire, tandis aue $4n$ est pairement pair.
Soit donc

$$4n=4p^2+4q^2;$$

On a

$$N=[2(p^2+q^2)]^2+(p+q)^2+(p+q)^2+(p-q)^2+(p-q)^2.$$

Cette formule ne s'applique pas quend $p=q$, il faut alors prendre

$$N=(2q^2+q)^2+(2q^2+q)^2+(2q^2-q)^2+(2q^2-q)^2+(2q)^2.$$

R.2305 (1902, 68) (G. de Rocquigny).– Tout bicarré entier ¿1 est la somme de 4 cubes et de 4 carrés, tous $\neq 0$.–
La décomposition est évidente.

$$(n+1)^4 = n^3 + n^3 + n^3 + n^3 + (2n+1)^2 + (n^2)^2 + n^2 + n^2.$$

? ? ? Rep non publiée de Delannoy
2452 51902,265) (F. Godey).– Probabilité de réussite à l'appel d'un jeu de cartes. –
Cette probabilité est donnée par la formule générale connue (1900, 101). Elle est égale à

$$1 - \frac{N_1}{32} + \frac{N_2}{32.31} - \frac{N_3}{32.31.30} + \cdots + \frac{N_{32}}{32!},$$

$N_1, N_2, \cdots, N_{32}$ étant les coefficients du développement de

$$(1 - 16x + 72x^2 + 96x^3 + 24x^4)^8.$$

Reste à terminer les calculs ; c'est une affaire de patience.
1903
R.2455 . (1902, 289) (Matito). – Classement de feuilles numérotées. – J'ai eu souvent à faire de ces classements, voici comment j'érais. Supposons $\lambda = 100$:

1. Prendre les feuilles telles qu'elles se présentent et les répartir en 10 paquets (unités, dizaines, vingtaines, etc.) placés dans leur ordre ;
2. Classer les feuilles de chaque paquets ;
3. Supperposer les paquets.

La première opération n'oblige à toucher chaque feuille qu'une fois. La deuxième oopération se fait très promptement et n'exige que le déplacement de quelques feuilles. C'est, je crois, le procédé le plus simple et plus rapide[7].
Q.601 [J2c](1895, 204) *Réussite.* – On abat quatre cartes d'un jeu de piquet. Si elles sont de quatre couleurs différentes, la réussite est manquée. Si elles sont toutes quatre de même couleur, on place dessus quatre cartes tirées du jeu. Si deux ou trois de ces cartes sont de même couleur, on met sur deux d'entre elles deux autres cartes tirées du jeu, et ainsi de suite.
On demande la probabilité de faire la réussite, c'est-à-dire que, jusqu'/'a épuisement des cartes, il n'y aura à aucun moment, sur les paquets, quatre cartes de couleurs différentes.

[7] L'auteur de la question désirais une étude mathématique de la question

Q.602 [J2c] (1895, 204) On répartit les cartes d'un jeu de piquet par paquet de trois (le dernier n'a que deux cartes).
S'il y a deux cœurs dans un même paquet, on retire celui qui a la valeur la plus élevée (l'as est la carte la plus forte). On recommence jusqu'à ce qu'on ait retiré cinq cœurs.
On demande la probabilité que ces cinq cartes formeront une quinte majeure.

Q.2583 (1903, 147) (E.-B. Escott). – Construction d'un triangle.– Réponse de Delannoy non publiée.

R.2638 (1903, 206) (Milèse).– *Probabilités de réussites.* –

1. Solution pour deux réussites par M. Badoureau (*Revue scientifique*, 8 octobre 1881, p.475).
2. Une réussite par M. Laurent (*Théorie des jeux de hasard*, p.105). La formule compliquée de M. Laurent se réduit à

$$\frac{\binom{2s}{s}^2}{\binom{4s}{2s}}$$

(A. F. ? Congrès de Bordeaux, 1895, p.87).

3. Probabilité d'une réussite, par M. le colonel Moreau (1896,95).
4. Probabilité de réussite à l'appel des cartes (1902, 344).

R.2648 (1903, 228) (G. de Rocquigny).– La somme

$$(2n-1)^2 + (2n+1)^2 + (2n+3)^2$$

peut toujours être remplacée par une somme de 5 carrś $\neq 0$, dont 4 sont distincts. En effet elle est égale à

$$(n+3)^2 + (3n+1)^2 + n^2 + n^2 + 1^2.$$

Ellle est aussi égale à la somme de 6 carrés $\neq 0$, tous distincts

$$(3n+1)^2 + (n+2)^2 + (n+1)^2 + n^2 + 2^2 + 1^2.$$

1904

[Q.668] [J1aα] (1895, 319) Parmi les vingt-quatre permutations des quatre premiers nombres, il y en a deux (2413 et 3142) qui jouissent de cette propriété que la différencec de deux quelconques de leurs nombres n'est jamais égale à la différence de leurs rangs :

1. *Démontrer* que le nombre des permutations jouissant de cette propriété *doit* être égal à 2 ;

2. généraliser, en considérant les permutations des n premiers nombres.

1905

[R.2865] (1905, 26) (Lazzaro Filus).– *Problème de jeu.* – Nous allons donner la solution pour les $3^3 - 1 = 26$ premiers nombres, ce qui suffira pour faire facilement comprendre la méthode.
Ecrivons ces nombres dans le système de numération ternaire :

1	1	10	101	19	201
2	2	11	102	20	202
3	10	12	110	21	210
4	11	13	111	22	211
5	12	14	112	23	212
6	20	15	120	24	220
7	21	16	121	25	221
8	22	17	122	26	222
9	100	18	200	27	1000

Un nombre quelconque est égal à une somme dont les termes sont des puissances de 3 ou le double de ces puissances, par exemple :

$$122 = 3^2 + 2.3^1 + 2.3^0 = 17,$$

$$212 = 2.3^2 + 3^1 + 2.3^0 = 23.$$

Inscrivons sur un premier carton les nombres dont le dernier chiffre dans le système ternaire est 1 ; sur un deuxième, les nombres dont le dernier chiffre est 2 ; sur un troisième ceux dont le deuxième chiffre à partir de la droite est 1 ; sur un quatrième ceux dont ce deuxième chiffre est 2 ; sur un cinquième ceux dont le troisième chiffre à partir de la droite est 1 ; enfin sur un sixième ceux dont le troisième chiffre est 2.
L'ensemble de ces six cartons est représenté dans le Tableau ci-après :
Supposons que le nombre pensé soit 17, on le trouve dans le cinquième, le quatrième et le deuxième carton ; d'après la manière dont ces cartons ont été formés, le nombre pensé s'écrira donc 122 dans le système ternaire ; par suite il sera égal à $3^2 + 2.3^1 + 2.3^0$.
Pour plus de simplicité, on inscrit les nombres 1, 2, 3, 6, 9, 18 au bas de chaque carton et l'on n'a alors qu'à additionner les nombres portés sur les cartons indiqués.
Si, au lieu de 26 nombres, on prenait $3^n - 1$, il faudrait $2n$ cartons.

1906 pas d'intervention de Delannoy

1907

18	9	6	3	2	1
19	10	7	4	5	4
20	11	8	5	8	7
21	12	15	12	11	10
22	13	16	13	14	13
23	14	17	14	17	16
24	15	24	21	20	19
25	16	25	22	23	22
26	17	26	23	26	25
18	9	6	3	2	1

[R.2868] (1905, 10) (A. Clause). – *Détermination d'une date* (1906, 252). – M. Brocard regrette que Lucas n'ait pas eu l'occasion de présenter les formules simples qui ont servi à l'établissement de son calendrier à roulette.

Ces formules sont implicitement contenues dans le texte des *Récréations mathématiques*, t. IV, p.11.

1908

[3326] (1908, 27) (E.-N. Barisien). – *Probabilité pour qu'un nombre écrit ou pensé soit premier.* – Solution proposée par Delannoy mais non publiées.

1909

une réponse à la question 668 (1895, 319 ; 1904, 210) par Mathieu p. 247

2 Questions de Ed. Lucas

Questions extraites de la correspondance de Lucas avec Delannoy et communiquées par Delannoy au journal. Ces question paraissent sous la signature Ed. Lucas, mort en 1891.

Q.32 [J1aα] n^2 hommes sont placés sur un rang ; on fait sortir du rang le premier, le $(n+1)^{eme}$, le $(2n+1)^{eme}$,..., le $[(n-1)n+1]^{eme}$; puis on fait serrer le rang, et l'on recommance jusqu'à ce qu'l ne reste plus que $n-1$ hommes. Quels sont les (n-1) hommes restants ? (Problème dit de Caligula)

Q.139 [J1bβ] On divise une circonférence en $2n+1$ parties égales. De combien de manières peut-on placer n cordes, sous-tendant les arcs $\frac{1}{2n+1}$, $\frac{2}{2n+1}$, ..., $\frac{n}{2n+1}$ de la circonférence, de telle sorte :

1. Que chaque corde aboutisse à deux points de division ;

2. Qu'aucune n'aboutisse au point $2n+1$;
3. Que deux cordes n'aboutissent jamais à un même point de division ?

(Monsieur Delannoy annonce avoir trouvé 1 solution pour $n = 1$, 1 pour $n = 2$, 3 pour $n = 3$, 9 pour $n = 4$, 25 pour $n = 5$.)

Q.140 [J1aα] On écrit sur 2^5 bâtons à cinq cases des 0 et des 1,

$$\begin{array}{|c|}\hline 0\\\hline 0\\\hline 0\\\hline 0\\\hline 0\\\hline\end{array}\quad\begin{array}{|c|}\hline 0\\\hline 0\\\hline 0\\\hline 0\\\hline 1\\\hline\end{array}\quad\begin{array}{c}\ldots\\ \\ \\ \ldots\\ \\ \end{array}$$

de telle sorte que l'on forme ainsi, écrits verticalement, les 32 premiers nombres, y compris zéro, écrits dans le sytème binaire.
On demande comment permuter l'ordre des 32 bâ tons, de telle sorte que l'ordre de succession des 0 et des 1 soit le même dans chaque rangée horizontale, à partir d'une certaine case (ignorée) de chaque rangée. De combien de manière peut-on arriver à ce résultat ?
Nota. – On lit au besoin chaque rangée en suivant l'ordre circulaire, de manière à revenir à la case d'où l'on est parti.
(M. Delannoy nous a dit, à propos de cette question, qu'l a trouvé un seul arrangement pour 2^2 bâtons, 2 pour 2^3, 16 pour 2^4, et qu'il serait désirable d'en trouver une formule générale pour 2^n)[8]

3 Réponses aux questions de Delannoy et de Lucas

R.95 par Audibert (H. Delannoy) – La solution est contenue dans le Calcul des probabilités de M.J. Bertrand (1889). Pour que A ait perdu a francs après n parties jouées, il faut qu'il ait gagn/'e $\frac{n-a}{2}$ parties, et perdu $\frac{n+a}{2}$. On sait (Bernouilli) que la probabilité de cet événement est

$$\frac{n!}{(\frac{n-a}{2})!(\frac{n+a}{2})!}p^{\frac{n-a}{2}}q^{\frac{n+a}{2}}.$$

Elle et supérieure à celle que nous cherchons, car elle comporte, comme cas favorables, tous ceux dans lesquels A c'est trouvé ruiné avant la

[8]notes des directeurs

n^{eme} partie. Or, le rapport du nombre des cas où il est décavé en n coups, est égal à $\frac{a}{n}$ (*loc. cit.*, p. 18).
C'est donc par $\frac{a}{n}$ qu'il faut multiplier la formule précédente pour le calcul relatif au sort de A. On conclut de là que la probabilité totale pour que le jeu se termine juste à la fin de la n^{eme} partie, par la ruine de l'un ou de l'autre des deux joueurs, sera

$$\frac{a}{n}\frac{n!}{(\frac{n-a}{2})!(\frac{n+a}{2})!}p^{\frac{n-a}{2}}q^{\frac{n+a}{2}}+\frac{b}{n}\frac{n!}{(\frac{n-b}{2})!(\frac{n+b}{2})!}p^{\frac{n-b}{2}}q^{\frac{n+b}{2}}+.$$

R.95 par Delannoy (H. Delannoy) – Deuxième réponse. – La solution donnée page 170 est inexacte. La valeur indiquée se réduit au premier terme de la formule véritable. Quand l'auteur a calculé la probabilité que A sera ruiné juste après la n^{eme} partie, il n'a pas tenu compte de cette condition que, pendant les n parties, les gains de A ne doivent jamais avoir dépassé de plus de (b-1) ses pertes, car alors B serait dsécavé. La valeur assignée pour A dans la solution donnée correspond au cas où l'on permettrait au joueur B, s'il était décavé avant la n^{eme} partie, de reconstituer indéfiniment sa mise.
A propos de cette question, la même erreur avait déjà été commise par un autre géomètre et je l'ai relevée dans S. M., t. XVI, 1888, p. 124[9].

2195 par G. Picou (1901, 252).– La proposition de M. Delannoy n'est pas exacte. Ainsi $945 = 8.118 + 1$ est décomposable de huit manières différentes en une somme de trois carrés, et aucune d'elles ne donne l'une des formes

$$a^2+2b^2, \quad a^2+b^2, \quad a^2+b^2+1,$$

visées par la proposition énoncée ; il en est de même pour les nombres

$$217, 345, 385, 497, 553, 609, 665, 705, 889, 897.$$

J'ai effectué la somme des mille premiers nombres en sommes de trois carrés et je tiens une copie de cette Table à la disposition de M. Delannoy, s'il la désire.

494 (1895, 90 ; 1901, 306). – *Le jeu de la Tchouka.*– Pour $n = 4$ (8 cases et 32 boules), j'ai trouvé neuf manières de gagner. Indiquées simplement par les numéros successifs des cases à choisir, au début de la partie et après chaque dernière boule versée dans la Rouma, ces neuf solutions sont notées comme il suit :
5, 8, 2, 5, 1, 8, 3, 6, 8, 7, 2, 8, 2, 8, 4, 8, 7, 8, 5, 8, 6, 8 ;

[9] Il s'agit du bulletin de la Société Mathématique de France

5, 3, 3, 7, 8, 4, 8, 2, 3, 7, 4, 8, 7, 8, 2, 8, 4, 8, 7, 8, 5, 8, 6, 8 ;
5, 3, 6, 2, 6, 3, 5, 7, 1, 8, 5, 8, 3, 8, 6, 8, 1, 8, 3, 8, 5, 8, 7, 8 ;
p. 207 (à compléter) par C. Flye-Sainte-Marie

R.1304 (1898, 147) par C. Flye-Sainte-Marie