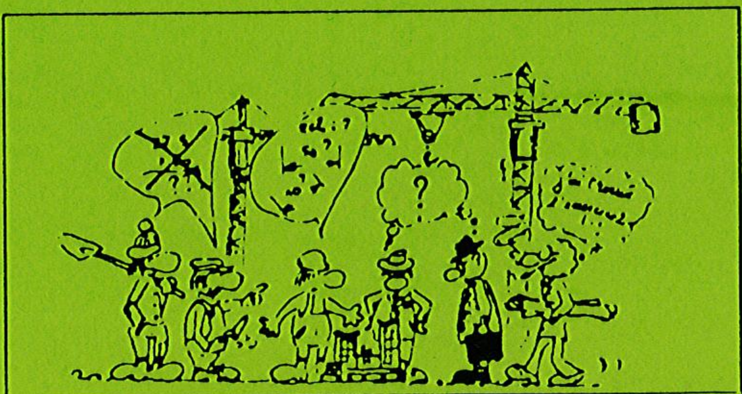
Brochure N° 38 DU GROUPE INTER IREM LYCEES TECHNIQUES

DES EXERCICES A SUPPORT CONCRET
TECHNOLOGIQUE
BIOLOGIQUE
PHYSIQUE
ECONOMIQUE...

Document pour le stage MAT 410 (1990-1991)
de la MAFPEN de CRETEIL



IREM- CSP
Avenue J.B. Clément
93 430 VILLETANEUSE

UNIVERSITE PARIS NORD.-IREM
DES EXERCICES A SUPPORT CONCRET.-
B. VERLANT.- Villetaneuse.- 1990.-
116 pages.

ISBN 2 86240 89 0

Dépôt légal : 4e trimestre 1990 (retirage)

500 ex.
30.00 F

SOMMAIRE

A propos des exercices à support concret	p. 3
Une introduction de Christian Houzel, Président du GREM	p. 4
Où trouver des exercices à support concret ... et ......quelques précautions	p. 5
Quelques réflexions à propos d'un exercice de baccalauréat F à support concret	p. 7
Est-ce du vrai faux concret ?	p. 10
Des activités à support concret	p. 11 à p. 111
Liste d'objectifs mathématiques	p. 112
Les sources d'inspiration des 166 activités présentées dans la brochure	p. 115

A propos des exercices à support concret, technologique,...

Les exercices à support concret (physique, technologique, biologique, économique,...) sont apparus en nombre dans beaucoup de manuels et de sujets de baccalauréat des séries A_1,B,D,F,G. A moins que ce ne soit d'abord dans certains sujets d'examens puis dans les manuels...

Des professeurs du groupe inter-IREM "Lycées Techniques"..., en liaison avec un groupe de recherche de l'IREM PARIS-NORD, ont entrepris depuis quelques années de réfléchir sur les problèmes posés par l'introduction de ce type d'activité en formation et dans les épreuves d'examen, de rédiger des activités à support technologique, économique, biologique,... à partir de documents techniques ou d'ouvrages d'autres disciplines, et des bibliographies.

Voici quelques unes de leurs réflexions et quelques pistes pour rédiger des activités "nouvelles".

EN GUISE D'INTRODUCTION

Feu le GREM (Groupe de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques de la Direction des Lycées) se proposait, peu de temps avant sa disparition, de publier un texte à ce sujet et son président, Christian HOUZEL, un professeur d'université spécialiste de l'histoire des mathématiques, avait écrit le préambule suivant qui est un peu une réponse à la question souvent posée, "pourquoi de telles activités ?" ou à l'objection tout aussi souvent avancée : "ce n'est pas des maths !".

« Ces exercices peuvent fournir aux classes des thèmes d'activité qui enrichissent considérablement l'enseignement des mathématiques. Avant de développer ce point de vue, on doit metre en garde contre une équivoque dangereuse. On pense souvent qu'une difficulté des mathématiques tient à leur abstraction et au peu de rapport qu'elles ont avec la "vie quotidienne". Dans cette optique, les exercices à support concret pourraient être compris comme un moyen d'atténuer l'abstraction de renouer avec la vie de tous les jours, et de supprimer par là une des difficultés des mathématiques. Mais on doit observer que beaucoup d'exercices issus des problèmes technologiques ou des questions économiques ou gestionnaires sont parfaitement étrangers à la vie de nos élèves, qui ne paient pas d'impôt, ne construisent pas de ponts et ne gèrent aucune société.

Cependant, ces exercices peuvent être intéressants. La vie quotidienne des élèves est surtout occupée par la classe : on aura donc d'abord intérêt à explorer les diverses disciplines scolaires comme sources d'exercices.

En tout état de cause, il semble que, loin d'être une facilité, la pratique d'exercices à support concret introduise de nouveaux types de difficultés dans les activités scolaires : problèmes plus complexes, exigeant la compréhension au moins partielle de la situation d'origine extra mathématique. Mais il vaut la peine d'affronter ces difficultés. En effet, c'est le seul moyen de faire découvrir aux élèves une dimension importante des mathématiques : c'est une science qui a des relations avec toutes sortes d'autres disciplines et qui intervient, par les puissantes méthodes de pensée qu'elle élabore, dans la plupart des activités rationnelles. Une telle découverte peut d'ailleurs accroître considérablement l'intérêt de certains élèves pour les mathématiques et leur permetre de surmonter certains blocages. »

Christian HOUZEL

OU TROUVER DES EXERCICES A SUPPORT CONCRET...... ET...... QUELQUES PRECAUTIONS

Il est bien sûr hors de question que chaque enseignant de mathématiques devienne un spécialiste en économie, biologie,... même si, dans certaines formations technologiques, comme par exemple la filière électronique des brevets de techniciens supérieurs, un savoir minimum s'impose. Ces activités doivent être présentées, éventuellement rédigées, en liaison avec les collègues utilisant les mathématiques. L'interdisciplinarité nécessite le travail en équipe.

Quant nous rédigeons à l'IREM une activité à partir d'un document provenant d'une autre discipline, nous soumettons toujours le "résultat" à un spécialiste. Souvent d'ailleurs, c'est un "spécialiste" qui nous a proposé le document.

Avant donc de se "plonger" dans des ouvrages de mécanique, physique ... pour élaborer des activités nouvelles, il est possible d'utiliser des documents "tout prêts" existants ...

Voici quelques pistes :

. Une première source de documentation est constituée par les manuels, les brochures d'IREM qui proposent de plus en plus d'activités de ce type, en général "prêtes à donner aux élèves"... Il est d'ailleurs souvent intéressant de consulter des ouvrages "pour les autres sections". Les livres pour les séries F, par exemple sont peu connus des professeurs des lycées d'enseignement général, inversement ceux pour les séries "classiques" peuvent proposer des activités intéressantes pour les séries technologiques (Cette remarque ne concerne pas seulement les exercices à support concret ...).

Des ouvrages de mathématiques pour DEUG de biologie peuvent rendre service aux enseignants de Terminale D. L'utilisation d'activités tirées de manuels réserve parfois des surprises : certains énoncés à support physique ou économique portent sur des notions non enseignées à ce niveau dans les disciplines correspondantes. (On trouve dans des douvrages de mathématiques pour la classe de première des exercices à support mécanique sur des thèmes ne figurant qu'aux programmes de mécanique des classes terminales; dans des ouvrages de mathématiques pour la série G on rencontre des exposés exhaustifs sur les phénomènes marginaux qui ne sont en général pas abordés à ce niveau dans les cours de sciences et techniques économiques). Les échanges avec les collègues spécialistes permettent d'éviter de telles surprises.

Les sujets des (nombreux !) examens (BEP, Brevets de Techniciens, Baccalauréats, professionnels, technologiques, généraux, BTS ...) peuvent fournir aussi des exemples de ce type. Par exemple, des sujets de mathématiques des BTS de la filière biologique, ou des baccalauréats technologiques F7-F7' peuvent fournir des activités originales pour 1ère S ou Terminale D même si les programmes de biologie de D et de F7-F7'... ne sont pas toujours identiques (et inversement !). Pour les sujets d'examens comme pour les manuels, regarder ce qui se fait "pour les autres" permet souvent de varier les activités. Les sujets d'examens à support concret sont en général (!) d'accès facile, la mathématisation des situations et l'interprétation des résultats n'y figurant pas (heureusement !).

Des magazines et des livres spécialisés fournissent de nombreux petits problèmes ou jeux mathématiques à support concret utilisables en seconde ou en premières.

On peut aussi rédiger des activités originales lorsqu'on enseigne dans des séries technologiques, à partir de documents fournis par des collègues d'autres spécialités, d'ouvrages de technologie, de sujets de dessin technique ... Il est vrai que l'élaboration d'activités nouvelles même "ne supposant aucune autre connaissance que mathématiques" suppose un savoir minimum dans les domaines abordés (physique, chimie, économie, biologie, technologie).

DES OUVRAGES AVEC DES EXERCICES "TOUT PRETS"

. Les jeux d'Eurêka aux Editions DUNOD pour les petits problèmes à (vrai ou faux) support concret, en géométrie, algèbre, probabilité ...

. Calculs pratiques de Chambadal chez HACHETTE pour les calculs des distances, d'aires, de volumes.

DES PUBLICATIONS POUR ELABORER DES ACTIVITES "ORIGINALES".

. Des ouvrages de technologie pour les topographes, aux Editions Eyrolle. Une mine pour les activités en géométrie plane mais ... il y a un gros travail à fournir pour en tirer des énoncés pour les élèves !

. Les documents publiés par l'INSEE permettent de renouveler les activités statistiques; en particulier dans chaque région l'INSEE a un observatoire qui fournit des observations locales.

DES SUJETS D'EXAMENS A SUPPORT CONCRET, TECHNOLOGIQUE ..?

Les baccalauréats technologiques ont été créés il y a une vingtaine d'années. Depuis 1985 les exercices à support concret, technologique ... sont entrés en force dans les épreuves d'examen de ces séries, notamment dans les séries industrielles F, suivant d'ailleurs une instruction officielle recommandant qu'un des deux exercices soit en rapport avec les objectifs de la série.

A la session de juin 1989, on remarque pas moins d'une quinzaine d'exercices de ce type dans les 21 épreuves des baccalauréats technologiques.

Dans les baccalauréats de second degré, divers problèmes d'optimisation ont été proposés; dans la série B certains problèmes à support économique posés récemment à la limite des programmes de mathématiques, n'ont pas été ... bien accueillis (!); dans la série D, certains exercices de probabilité à support biologique furent difficiles à comprendre ... pour les professeurs de mathématiques. Il n'est pas toujours facile de faire "autrement" ...

UN EXERCICE PROPOSE AU BACCALAUREAT F4 (Génie Civil) EN JUIN 1987

L'exercice suivant a été proposé par un animateur de l'IREM de PARIS-NORD enseignant dans la section F4, qui nous a confié : ses sources, les objectifs qui ont guidé son choix; d'autre part, au cours de différentes animations en région parisienne et en province nous avons recueilli des commentaires de collègues dont les élèves ont "planché" sur cet exercice.

En voici le texte :

Vo, lume d'un pilier de chaussée d'autoroute

On se proposed e calculer le volume d'un pilier en béton armé, servant à supporter une voie de circulation d'une bretelle d'autoroute, représenté par les quatre vues suivantes (figures 1,2,3,4).

La figure 1 est une vue en pespective, la figure 2 représente la section du pilier par un plan perpendiculaire au plan de la base et contenant [DC] . On admet que HI = D'C = A'B'. La figure 3 représente la section du pilier par un plan perpendiculaire au plan de la base et contenant [AD'] .

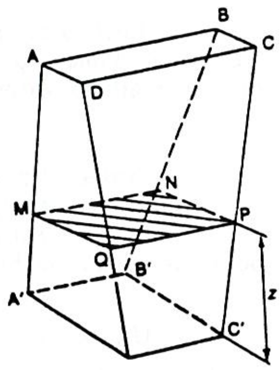


figure 1

L'espace est muni d'un repère orthonormal $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, que l'on ne demande pas de placer, tel que la base A'B'C'D' du plier soit contenue dan sle plan horizontal, don un repère est $(O,\vec{i},\vec{j})$.

Si S(z) est l'aire exprimée en m^2 d'une section du pilier par un plan parallèle au plan contenant la base, de cote z, exprimée en m, le volume est donné en m^3, par :

$$V = \int_0^{2,5} S(z)\, dx$$

1°) La section du pilier par un plan de cote z est un rectangle MNPQ dont il s'agit de déterminer les dimensions. Montrer que QP = 0,5 + 0,2 z (on admet que QP = QP') et que MQ = 0,75 - 0,2 z (on admet que MQ = M'Q'). En déduire S(z) .

2°) Calculer en m^3 à un dm^3 près, le volume du plier.

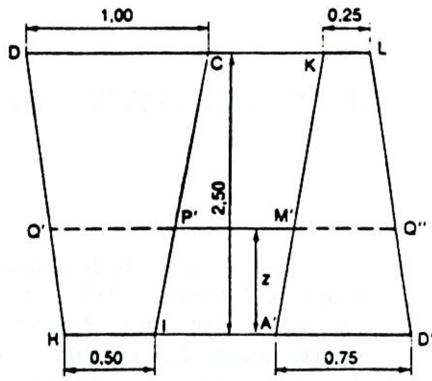


figure 2 figure 3

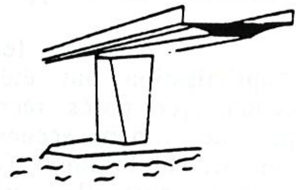


figure 4

3°) Dans certains manuels de technologie on trouve la "règle" suivante pour calculer un tel volume : le volume s'obtient en faisant le produit de la hauteur du pilier par l'aire de la section médiane, c'est-à-dire celle obtenue par le plan de cote 1,25 .

En utilisant cette règle, obtient-on le résultat "juste" du 2°) ?

La source :

Ce pilier existe, et a servi de thème à une épreuve d'enseignement professionnel dans un brevet de technicien du bâtiment.

Les objectifs de l'auteur du sujet :

. Introduire pour la première fois un peu de géométrie dans l'épreuve d'examen d'une spécialité (F4 : génie civil) qui en utilise beaucoup ... ailleurs qu'en mathématiques.

. Evaluer les capacités :
- "analyser un solide"
- "extraire une figure plane d'une figure de l'espace", indispensables pour un futur technicien du bâtiment.

. Utiliser la formule $V = \int_a^b S(z)\, dx$ autrement que par des solides de résolutions obtenus à partir d'une courbe d'équation $y = f(x)$.

. Poser le problème du domaine de validité de certaines "règles" données par les professionnels.

Mais :

Le technicien utilise-t-il le calcul intégral pour calculer un tel volume ?

Il se sert plutôt de la formule des trois niveaux ou règle de Kepler*. Une autre version de cet exercice utilisant cette règle figure au n°

Des réactions de collègues

. Le texte est trop long par rapport à la solution
Mais, apprendre à lire et à décoder un texte, c'est-à-dire à utiliser une source d'information, n'est-ce pas une capacité indispensable pour un futur technicien, peu évaluée actuellement dans notre enseignement ?

. Il n'y avait rien à savoir ...

La meilleure du lycée de ... élève n'a pas su faire ...

. Ce n'est pas des maths !
...

Cet exercice qui a surpris certains candidats serait-il une activité à donner en classe et non dans un examen ?

Mais quel sort réserve-t-on (et pas uniquement les années où il y a des "viaducs" au mois de mai !) aux questions qui ne "tombent jamais" à l'examen ?

Serait-ce un "cercle vicieux" ?

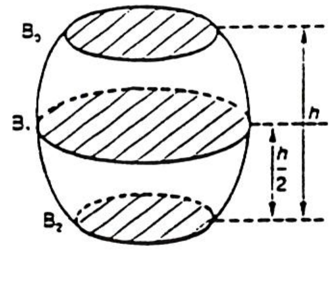
Qu'en pensez-vous ?

* Règle de Képler (ou formule des 3 niveaux)

Certaines formules d'approximation pour le calcul du volume d'un solide sont très utiles en pratique. Dans certains cas particuliers, les formules donnent même les valeurs exactes.

Le mathématicien Képler (1571-1630) donne une formule d'approximation pour déterminer le volume V d'un tonneau où B_0, B_2, B_1 sont les aires de la surface du sommet, du fond, de la section à mi-hauteur et où h est la hauteur :

$$V = \frac{h}{6}\,(B_0 + 4\,B_1 + B_2)\,.$$



Cette formule donne la valeur exacte du volume par exemple pour : une pyramide à base carrée de hauteur h, un cylindre, une sphère.

EST CE DU VRAI FAUX CONCRET ?

Voici deux exemples récents d'exercices proposés dans des baccalauréats technologiques.

. En F1 (construction mécanique) on a vu dans les exercices au baccalauréat un couloir de musée de largeur 3 $\sqrt{3m}$ ... mais c'était le premier exercice de géométrie posé en F depuis 1969 ...

. En F4 (génie civil) en 1988, dans un exercice d'optimisation (voir n°31) on alimentait un chantier de travaux pubics en béton avec un camion effectuant un trajet de 150 km ce qui d'après les spécialités du génie civil, est peu vraisemblable ... Mais dans cette série on a vu proposer la résolution du même type d'équations pendant des années ...

....

La critique est aisée ... et il est sûrement plus facile de reproduire indéfiniement les mêmes exercices ... de mathématiques !

La modélisation, qui fait appel à des notions de physique, mécanique ne pouvant être traitée qu'en liaison avec un spécialiste, la rédaction d'activités originales suppose un travail de recherche important au sein d'une équipe pluridisciplinaires, c'est par exemple, un travail d'IREM ...

B. VERLANT

DES EXERCICES
A SUPPORT CONCRET,
TECHNOLOGIQUE ...

Les activités suivantes complètent celles de notre brochure n°23.

Beaucoup figurent dans les ouvrages de 1ère F et Terminale F publiés par des membres du groupe inter-IREM - LYCEES TECHNIQUES dans la collection DIMATHEME aux Editions DIDIER.

CHAPITRE 1

STATISTIQUE

CALCULS DE MOYENNES ET D'ECARTS-TYPES HISTOGRAMMES

La plupart des exercices de statistique figurant dans les manuels, même des séries industrielles, sont à support économique. En voici quelques-uns, tirés d'épreuves de BTS, à support industriel.

Pour Seconde : exercices 1 à 4 (*d'après des sujets de BTS*)

Problèmes industriels

1. Soit la série statistique donnant la durée de vie en heures de 500 lampes.

Durée de vie	Nombre de lampes
[300, 500[	50
[500, 700[	150
[700, 900[	137
[900, 1100[	138
[1100, 1300[	25

Calculer la durée de vie moyenne de ces lampes.

2. Lors d'un contrôle de fabrication, les masses exprimées en grammes de 41 exemplaires d'une série de pièces usinées sont classées de la manière suivante :

Masse en grammes	Effectif n_i
[194,5 ; 196,5[	3
[196,5 ; 198,5[	7
[198,5 ; 200,5[	14
[200,5 ; 202,5[	11
[202,5 ; 204,5[	6

1° Construire l'histogramme des effectifs cumulés.
2° Si dans chaque classe les éléments sont répartis de manière uniforme, quelle ligne brisée peut remplacer cet histogramme
3° En déduire le nombre de pièces dont les masses sont inférieures à 201 grammes.
4° Calculer la masse moyenne des pièces de cet échantillon.

3. On mesure la longueur en millimètres de 50 tiges fournies par une machine. On trouve :
- 2 tiges dont la longueur est comprise entre 367,50 et 368,50
- 3 tiges dont la longueur est comprise entre 368,50 et 369,50
- 5 tiges dont la longueur est comprise entre 369,50 et 370,50
- 10 tiges dont la longueur est comprise entre 370,50 et 371,50
- 9 tiges dont la longueur est comprise entre 371,50 et 372,50
- 9 tiges dont la longueur est comprise entre 372,50 et 373,50
- 8 tiges dont la longueur est comprise entre 373,50 et 374,50
- 4 tiges dont la longueur est comprise entre 374,50 et 375,50.

Calculer la moyenne $\bar{x}$ et l'écart-type σ de cette série de pièces.

4. Les tôles constituant les ponts d'un navire subissent des déformations lors des opérations d'assemblage par soudure. Les tôles doivent être redressées : cette opération nécessite de nombreuses heures de travail.

Lors d'une construction, on relève les durées nécessaires au redressage d'un échantillon représentatif de 50 tôles. Les résultats obtenus sont résumés dans le tableau suivant :

x_i	[0.10[	[10.20[	[20.30[	[30.40[	[40.50[	[50.60[	[60.70[
n_i	1	4	8	20	12	3	2

x_i : durée en heures ; n_i : nombre de tôles.

Calculer la durée moyenne x et l'écart-type σ du redressage pour une tôle de cet échantillon.

Problèmes de gestion

Pour Seconde : exercices 5 et 6

5. On a relevé les prix de fours à micro-ondes dans différents points de vente d'une région. On a obtenu :

Prix en francs	Nombre de points de vente
[2600 . 2800[	10
[2800 . 3000[	12
[3000 . 3200[	55
[3200 . 3400[	20
[3400 . 3600[	15
[3600 . 3600[	13

1° Calculer à 0.01 près. la fréquence de chaque classe de prix.

2° Calculer les effectifs cumulés (croissants) et construire l'histogramme correspondant en prenant en abscisse 1 cm pour 100 F et en ordonnée 1 cm pour 5 points de vente.

6. Une entreprise utilise des camions pour transporter sa production. Elle dispose de 100 camions.
Elle désire étudier le taux de pannes. Pour cela, elle repère jour après jour le nombre de camions en panne.
Sur un mois de 31 jours, voici les résultats :
5 5 6 4 6 6 6 8 3 5 5 5 4 3 6 5 6 4 7 6
6 5 4 3 6 5 4 5 4 5 5
Calculer la moyenne et l'écart-type du nombre de camions en panne chaque jour pour le mois étudié.

Contrôle de qualité

Pour Seconde : exercices 7 à 10

7. Contrôle de qualité à Roissy

Dans un atelier de réparation, à ROISSY, on a enregistré la durée de 140 interventions :

Durée des Interventions	Effectif
moins de 20 min	2
de 20 à 40 min	18
de 40 min à 1 h	32
de 1 h à 1 h 20 min	40
de 1 h 20 min à 1 h 40 min	29
de 1 h 40 min à 2 h	12
plus de 2 h	7

1° Représenter l'histogramme des effectifs de cette série statistique.

2° Déterminer la moyenne x, le mode m_0 et la médiane m_e.

3° Calculer l'écart-type σ de cette série statistique.

4° Déterminer les pourcentages du nombre d'interventions dont la durée est d'une part dans l'intervalle [x - σ , x + σ] d'autre part dans l'intervalle [x - 2σ, x + 2σ].

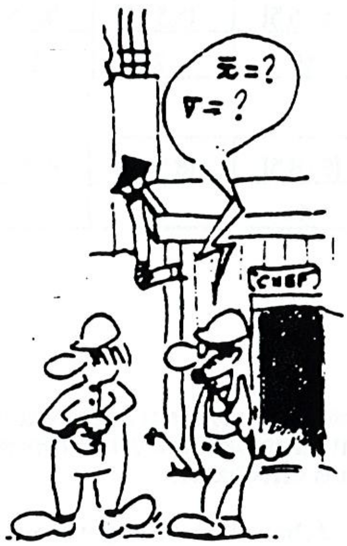
5° Le travail de l'atelier est jugé de bonne qualité si 95% des interventions ont une durée dans l'intervalle [x - 2σ, x + 2σ]. Le travail de l'atelier est-il bon ?

D'après un sujet de BTS de la session 1989

8. Contrôle de qualité en génie civil

D'après l'épreuve du baccalauréat F4 de 1987 à la Réunion.

Ces diamètres et cette tolérance ont été pris dans la norme AFNOR que l'on trouve dans tous les bons CDI de lycées technologiques.



Une machine fabrique des fers cylindriques pour le béton armé de diamètre théorique 25 mm.
On contrôle le fonctionnement de la machine en prélevant un échantillon de 100 pièces au hasard dans la fabrication.
Les mesures des diamètres ont donné les résultats suivants :

Classes par diamètres	[24,0 ; 24,2[	[24,2 ; 24,4[	[24,4 ; 24,6[
Effectifs	0	5	13
Classes par diamètres	[24,6 ; 24,8[	[24,8 ; 25,0[	[25,0 ; 25,2[
Effectifs	24	19	14
Classes par diamètres	[25,2 ; 25,4[	[25,4 ; 25,6[	[25,6 ; 25,8[
Effectifs	10	8	5
Classes par diamètres	[25,8 ; 26,0[		
Effectifs	2		

1° Calculer la moyenne arithmétique $\bar{x}$ et l'écart-type σ de la série statistique obtenue en considérant les centres des classes affectés des effectifs correspondants.

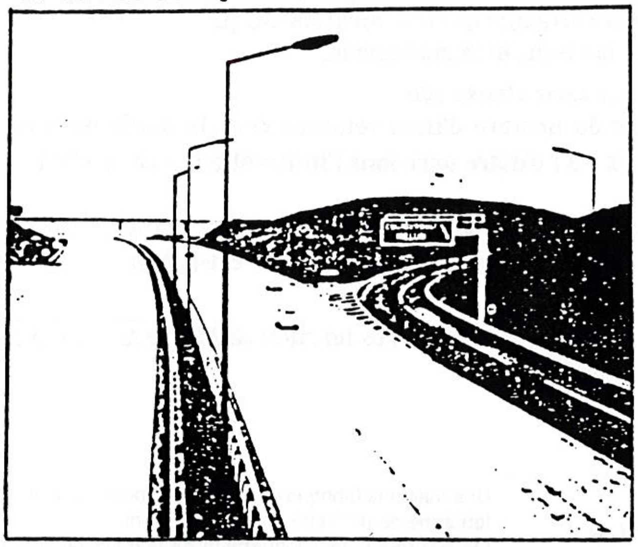
2° La production de la machine est jugée bonne si la série des mesures de l'échantillon remplit les trois conditions suivantes :

a) la moyenne $\bar{x}$ appartient à l'intervalle [24,9 ; 25,1].

b) l'écart-type σ est strictement inférieur à 4.

c) 95 % au moins de l'effectif figure dans l'intervalle $[\bar{x}-2\sigma, \bar{x}+2\sigma]$.
La production de la machine est-elle bonne ?

9. **On a bétonné pour vous ...**



Lors de la réalisation en 1976 du tronçon de l'autoroute A4 situé entre Noisy-le-Grand et Meaux, la fluidité du béton utilisé pour la chaussée a été testée par la méthode du cône d'Abrams.
Cette méthode consiste à mesurer le tassement en cm d'un échantillon de béton frais moulé dans un cône.

Plus le béton est fluide et plus son tassement est important. Lorsque le tassement est trop important le béton n'est plus utilisable.
Les mesures des tassements, en cm, pour 1236 prélèvements ont donné les résultats suivants :

Classes en cm	[0,5 ; 1[	[1 ; 1,5[	[1,5 ; 2[	[2 ; 2,5[	[2,5 ; 3[	[3 ; 3,5[
Effectifs	3	39	69	148	215	290

Classes en cm	[3,5 ; 4[	[4 ; 4,5[	[4,5 ; 5[	[5 ; 5,5[	[5,5 ; 6[	[6 ; 6,5[
Effectifs	179	131	48	48	25	17

Classes en cm	[6,5 ; 7[	[7 ; 7,5[	[7,5 ; 8[	[8 ; 8,5[	[8,5 ; 9[	[9,5 ; 10[
Effectifs	5	4	5	4	4	4

1. **Calculer la fréquence de chaque classe.**

2. **Construire l'histogramme des fréquences.**

3. **Toutes les valeurs du tassement supérieures à 6 cm correspondent à des quantités de béton considérées comme défectueuses (pouvant entrainer une usure rapide de la chaussée). Calculer le poucentage de prélèvements défectueux.**

4. **Déterminer la moyenne $\bar{x}$, l'écart-type σ de cet échantillon et le pourcentage de prélèvements dont le tassement figure dans l'intervalle $[\bar{x} - 2\sigma ; \bar{x} + 2\sigma]$**

D'après une notice technique publiée à l'issue du chantier.

10 Une station service de grande surface a relevé, pendant une semaine, la demande (en litres) de chacun de ses clients :

Demande en litres	Nombre de clients
[5 , 15[	11
[15 , 20[	45
[20 , 25[	158
[25 , 30[	223
[30 , 35[	273
[35 , 40[	132
[40 , 50[	44
[50 , 60[	4

· Etude de la série statistique

1° - Représenter l'histogramme de cette série dans un repère orthogonal (0x, 0y).
On prendra les unités suivantes :
- unité sur x'0x : 1 cm pour 5 litres,
- unité sur y'0y : 5 cm pour 100 clients.

2° - Calculer à 10^{-3} près la moyenne $\bar{x}$ et l'écart-type σ_x de cette série.
Les résultats intermédiaires ne sont pas demandés.

3° - Quel est à 10^{-1} près le pourcentage de clients dont la demande, en litres, est située entre $\bar{x} - \sigma_x$ et $\bar{x} + \sigma_x$? entre $\bar{x} - 2\sigma_x$ et $\bar{x} + 2\sigma_x$? entre $\bar{x} - 3\sigma_x$ et $\bar{x} + 3\sigma_x$?

11 **Problème de moyenne**

Soit V_a la vitesse d'un véhicule effectuant un trajet à l'aller et V_r la vitesse du même véhicule effectuant le même trajet au retour.

Montrer que, si V_a et V_r sont différentes la vitesse moyenne du véhicule sur la totalité du trajet aller et retour est :

$$V_m = \frac{2 V_a V_r}{V_a + V_r}$$

Un tracteur effectue chargé, le trajet aller à 2 km/h et à vide, le trajet retour à 10 km/h. Quelle est sa moyenne sur la totalité du trajet aller et retour ?

AJUSTEMENT AFFINE

En terminale, et donc au baccalauréat, c'est en statistique qu'il est le plus facile de trouver des exercices en rapport avec les objectifs de la série.

Ajustement par la méthode de Meyer

Pour Terminales F ·

Seules les méthodes d'ajustement graphique et de Mayer sont au programme de terminales F1-F2-F3-F4-F5-F6-F9-F10 (jusqu'en 1992 !)
Pour B, F7-F7', G ont peut remplacer 2a) par :
"Donner une équation de la droite d'ajustement affine par la méthode des moindres carrés".

12 *Où on trouve le logarithme nepénen et l'exponentielle dans un exercice de statistique*

On a mesuré à différents instants t la tension u aux bornes d'un condensateur se déchargeant dans une résistance.

On a obtenu les résultats suivants :

t en secondes	30	60	90	120	150	180	210	240
u en volts	2,35	1,40	0,80	0,50	0,30	0,20	0,15	0,10

1. a) Dessiner le nuage de points de la série statistique double (t,u).

   b) Dresser le tableau des valeurs de la série double (t, ln u) et dessiner, sur un second graphique, le nuage de points de cette série.

2. a) On veut obtenir une droite d'ajustement de ce dernier nuage. Pour cela, on le scinde en deux nuages de même effectif, constitués respectivement des quatre premiers points et des quatre derniers.
   Déterminer les points moyens de ces deux nuages partiels et une équation de la droite qui les joint, que l'on mettra sous la forme $\ln u = at + b$.

   b) A l'aide de cette relation, exprimer u en fonction de t et tracer la courbe représentative de cette fonction sur le premier graphique.

   (Tous les résultats numériques seront donnés avec 3 décimales.)

Réponse : $u = 3{,}343e^{-0{,}015\,t}$.

13 .. **Statistique et gestion**

Le montant x des charges publicitaires et le montant y du chiffre d'affaires réalisé par une entreprise au cours des dix dernières années sont indiqués par le tableau suivant (en milliers de francs) :

x	140	250	260	150	300	350	200	450	530	380
y	6400	12000	14500	6000	15000	18000	11000	20000	27000	21000

1° Représenter le nuage des points M(x,y) associé à cette série statistique dans le plan rapporté à un repère orthogonal. Pour la figure, l'origine sera le point (100 , 4000), 1 cm sur l'axe des abscisses représentera 20 (milliers de francs), 1 cm sur l'axe des ordonnées 2000 (milliers de francs).

2° Calculer les coordonnées du point moyen G_1 associé aux points du nuage ayant les cinq plus petites abscisses et les coordonnées du point moyen G_2 associé aux cinq autres points du nuage.
On prend la droite (G_1G_2) comme droite d'ajustement.
La tracer. Donner une équation de (G_1G_2).
Calculer le chiffre d'affaires prévisible, à un millier de francs près, pour des frais de publicité égaux à 600 000 francs.

Il s'agit de l'exercice 1 de l'épreuve du baccalauréat F9 (équipement technique-énergie) de 1988. En rapport avec les objectifs de la série ?!

14 . Statistique et résistance des matériaux

Le tableau suivant donne les mesures obtenues en laboratoire de la flèche f (en mm) d'une poutre en fonction de la charge F (en daN).

	M_1	M_2	M_3	M_4	M_5	M_6	M_7	M_8	M_9
F (daN)	108	216	272	432	540	650	756	864	972
$f_{(mm)}$	0,45	1,28	2,22	3,67	4,78	5,95	6,14	7,24	8,58

1°) Représenter le nuage de points associé à cette série statistique : en abscisse la charge (1 cm pour 100 daN) ; en ordonnée la flèche (2 cm pour 1 mm).

2°) a. Soient les points M_1, M_2, M_3, M_4 et M_5. Déterminer les coordonnées de leur point moyen G_1.

b. Soient les points M_6, M_7, M_8 et M_9. Déterminer les coordonnées de leur point moyen G_2.

c. On choisit la droite (G_1G_2) comme droite d'ajustement au nuage.
La tracer et déterminer graphiquement la flèche prévisible pour une charge de 1100 daN.

D'après l'épreuve du baccalauréat E_4 de métropole de 1987.

Ajustement par la méthode des moindres carrés

15 Pour Terminales F_7-$F_{7'}$: à support physique

Un conducteur ohmique de résistance R est traversé par un courant variable I. On fait varier I, et on mesure pour chacune des valeurs de I la puissance P absorbée par le conducteur. On a obtenu les résultats suivants :

I (ampère)	0	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5
P (Watt)	0	6	14	23	37	54	75	96	120	151

1. On pose $X = I^2$. Tracer dans 2 repères différents, les nuages statistiques représentant les couples (I,P) et (X,P). Peut-on envisager un ajustement affine de P en I ? De P en X ?

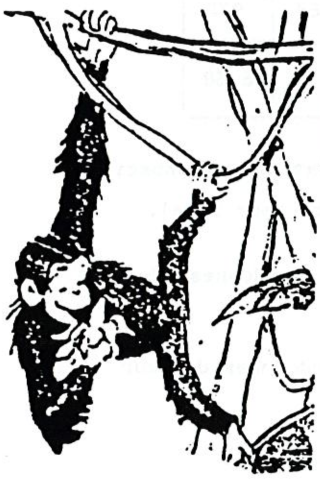
2. Donner une équation de la droite d'ajustement affine par la méthode des moindres carrés, de P en fonction de X et la construire.

3. On pose $R = \frac{P}{I^2}$. En utilisant le tableau des résultats, donner une valeur moyenne de R et la comparer avec le résultat de la deuxième question.

N.B. : On précisera toutes les formules utilisées pour effectuer les calculs demandés.

Pour terminales F_1...F_{10}, on peut remplacer au 2) "moindres carrés" par "de votre choix"

16 Pour Terminales B F_7 G



Le tableau suivant donne l'effectif des groupes de chimpanzés en fonction de l'abondance des feuillages et des fruits (consommation annuelle) :

x (milliers de m^3)	0,6	1,6	2,6	4,8	5,4	9	10	12	15	19
y (nombre de chimpanzés)	3	4	3	5	7	10	6	8	11	15

1° Représenter graphiquement cette série dans un repère orthogonal.
Unités : 1 cm pour 2 milliers de m^3
1 cm pour deux chimpanzés.

2° Déterminer le point moyen de ce nuage.

3° Déterminer par la méthode des moindres carrés une équation de la droite de régression de y en x ; on calculera les coefficients à 10^{-3} près et on donnera explicitement les formules permettant d'obtenir le résultat demandé.

4° Donner une estimation du nombre de milliers de m^3 de feuillages et de fruit correspondant à un groupe de treize chimpanzés.

D'après l'épreuve du baccalauréat F_7-$F_{7'}$ de 1988 (à faire en une demi-heure.)

17 Distance de freinage

L'objet de ce problème est l'étude d'un article du Quid concernant la distance nécessaire au freinage d'une automobile circulant sur une route humide.

L'article "freinage" du Quid 87 donne l'information suivante :

Vitesse (km/h)	x_i	40	50	60	70	80
Distance freinage (mètres)	y_i	29	42	57	75	94
Vitesse (km/h)	x_i	90	100	110	120	
Distance freinage (mètres)	y_i	115	150	166	193	

1. Représenter dans un repère orthonormal l'ensemble des points M_i de coordonnées (x_i, y_i) du plan (en abscisse 1 cm représentera 10 km/h et en ordonnée 1 cm représentera 10 mètres).

2. a) Etablir, par la méthode de votre choix, l'équation de la droite de régression de y en x .

   Tracer cette droite en utilisant son point d'abscisse 40.
   Déduire, de l'équation de cette droite, une formule d'approximation f, du type $x \longmapsto ax + b$, du calcul de la distance de freinage de l'automobile.

3. On se propose, dans cette question, de rechercher une autre forme d'approximation, ϕ, du type $x \longmapsto \alpha x^2 + \beta x$, du calcul de la distance de freinage.

   a) Quelles relations doivent vérifier les coefficients α et β pour que la courbe représentative de la fonction ϕ contienne les points de coordonnées (40,29) et (60,57) ?

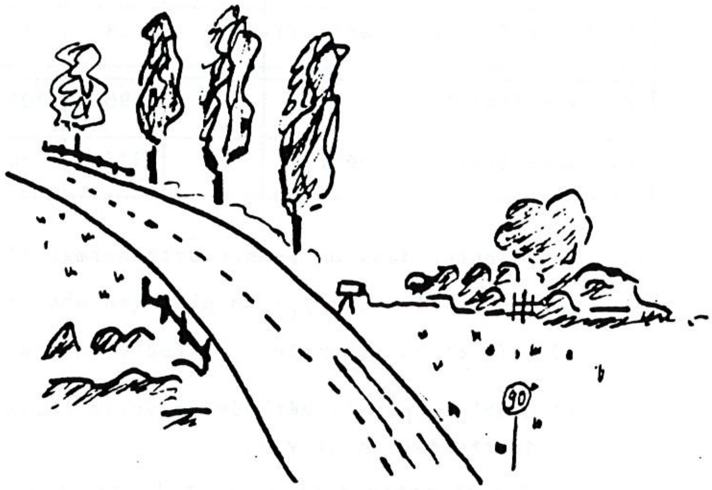
   b) Résoudre le système $(u,v) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ $\begin{cases} 1600u + 40v = 29 \\ 3600u + 60v = 57 \end{cases}$ et en déduire l'expression de $\phi(x)$.

   c) Etudier les variations de la fonction ainsi déterminée et la représenter graphiqement, dans le repère déjà utilisé, sur l'intervalle [40, 120].

4. Si vous deviez donner une valeur approchée de la distance de freinage d'une automobile circulant à 130 km/h, laquelle des deux formules, f ou ϕ, vous semblerait être la mieux adaptée ? (vous justifierez votre réponse par des considérations d'ordre graphique).
   Quelle valeur approchée de la distance de freinage donneriez-vous ?

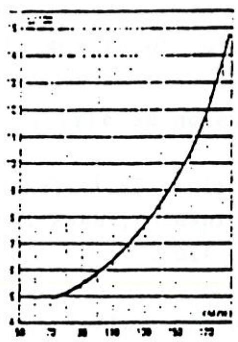
D'après l'épreuve du baccalauréat B d'Aix-Marseille de 1987.

Dans les ouvrages de travaux publics on trouve des formules d'origine américaine, établies expérimentalement. Dans tous les cas, la distance de freinage est une fonction du second degré de la vitesse (voir le n°).



18 L'étude de la consommation de la Peugeot 309 SX en fonction de la vitesse a conduit au tableau suivant :

x_i : vitesse en km/h	70	80	100	110	120	140	150	160	170
y_i : consommation en litres aux 100 km	4,9	5,1	5,9	6,4	7,1	8,6	9,4	10,6	12



Les points semblent être sur une courbe exponentielle (voir graphique ci-contre).

Auto-Journal - Juillet 89.

1°) On pose $Y = \ln y$ où $\ln$ désigne la fonction logarithme népérien, et on obtient les valeurs suivantes pour y :

x_i	70	80	100	110	120	140	150	160	170
$Y_i = \ln y_i$	1,589	1,629	1,775	1,856	1,960	2,152	2,241	2,361	2,485

Construire le nuage de points représentant la série $(x_i \; ; \; Y_i)$ dans un repère orthogonal dans lequel 1 cm représente 10 km/h sur l'axe des abscisses et 10 cm représentent une unité sur l'axe des ordonnées.

2°) On rappellera toutes les formules utilisées mais il est inutile d'indiquer les étapes des calculs.
Tous les résultats seront donnés à 10^{-3} près par défaut.

a) Déterminer le coefficient de corrélation linéaire entre x et Y.
Que peut-on en déduire ?

b) Déterminer une équation de la droite de régression de Y en x.

3°) On prendra pour la suite : $Y = 0,009x + 0,90$.
Donner une estimation de la quantité de carburant consommée pour un trajet de 400 km sur autoroute à 130 km/h.

Baccalauréat G_2G_3, 1990

CHAPITRE 2

EQUATIONS

INEQUATIONS

SYSTEMES

PROBLEMES DU SECOND DEGRE

Pour Premières toutes séries

19 Résistance à la traction

Une étude sur la résistance à la traction d'une poutre en tube dont l'épaisseur de la paroi , en mm, est e conduit à l'équation suivante :

$$\begin{cases} 0 \leqslant e \leqslant 100 \\ -\pi e^2 + 400\pi e - 3.10^4 = 0 \end{cases}$$

Donner une valeur approchée à 10^{-1} près de e .

20 Distance de freinage

D'après un ouvrage de travaux publics.

Une circulaire de 1970 fixe la distance minimum *d*, en mètres, dont doit disposer une automobile lancée à une vitesse V, en km/h, pour s'arrêter sans collision, après freinage, à la vue d'un obstacle sur la chaussée. Cette « distance de freinage » *d* est donnée par les formules suivantes :

- $d = \dfrac{V^2}{260f} + 0{,}55\ V$ en palier ;
- $d = \dfrac{V^2}{260(f+i)} + 0{,}55\ V$ en déclivité.

f est un coefficient de frottement des pneumatiques sur la chaussée, égal à 0,4 dans de bonnes conditions (pneumatiques en bon état et bonnes conditions atmosphériques), et *i* un coefficient lié à la pente de la route.

Dans la suite, on prend $f = 0{,}4$.

La valeur absolue de *i* est $\dfrac{n}{100}$ pour une « pente de n % ».

On prend $i > 0$ dans les montées et $i < 0$ dans les descentes.

Par exemple, dans une descente de pente 5 %, $i = -0{,}05$.

1° Calculer *d* pour V = 120 km/h en palier.

2° Calculer *d* pour V = 120 km/h dans une montée de pente 5 %.

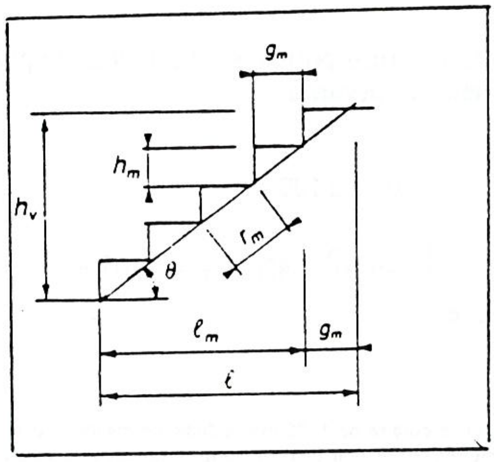
3° Calculer *d* pour V = 120 km/h dans une descente de pente de 5 %.

4° Calculer la vitesse maximale à ne pas dépasser pour pouvoir s'arrêter sur 100 m dans une descente à 8 %.

Ces formules tiennent compte du fait qu'un automobiliste réagit avec un certain retard à la vue d'un obstacle (c'est le terme 0,55 V qui prend en compte ce retard).

21 Pensez-vous à une équation du second degré en montant un escalier ? et pourtant ...

L'exercice suivant a été rédigé à partir d'une documentation pour les techniciens et ingénieurs du bâtiment et des travaux publics, diffusée par l'Association Technique pour le Développement de l'Emploi du Treillis Soudé* (ADETS).



La *figure* represente une coupe d'escalier.

On donne :

la distance verticale entre les paliers de départ et d'arrivee : $h_v = 1.62$ m,

la distance ℓ_m entre la première et la dernière contremarches : $\ell_m = 1.84$ m.

Soit g_m la largeur d'une marche (appelée giron) : $g_m \geqslant 0.23$ m.

h_m sa hauteur (hauteur de la contremarche),

r_m la « base » d'une marche.

Pour avoir un escalier confortable, on cherche à réaliser à peu pres la condition :

$$g_m - 2\,h_m = 0.64 \text{ m}$$

1° Montrer que le nombre de marches à prevoir est alors solution de l'équation :

$$n^2 - n\left[1 - \frac{2h_v - \ell_m}{0.64}\right] - 3.125\,h_v = 0.$$

2° Résoudre l'équation précédente. On arrondira la seule solution qui convient au nombre entier supérieur.

En déduire les valeurs numériques de h_m, g_m de la « portée » ℓ, de la « base » r_m et une mesure en degré à 10^{-1} pres de l'angle θ.

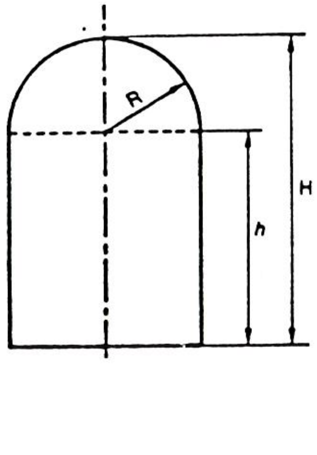
* Treillis soudé : la "ferraille" que l'on met dans le béton.

Problèmes où il faut mettre en équation

22 Un classique ...

Lorsque l'échelle est debout contre le mur de la propriété elle le dépasse de 20 cm. Quand on écarte son pied de 1 m, elle arrive juste au sommet du mur. Quelle est la longueur de cette échelle ?

23 Ballon d'eau chaude

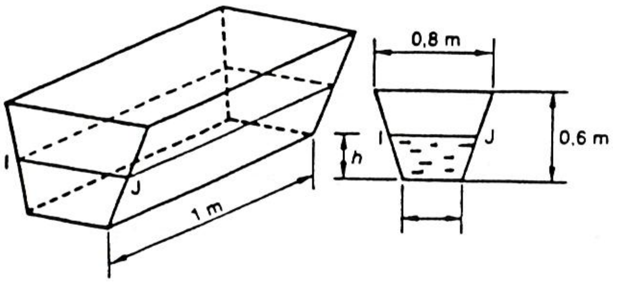


Un ballon d'eau chaude est composé d'un cylindre et d'une demi-sphère. L'aire de la surface totale de tôle utilisée pour construire l'appareil est 2,5 m² et la hauteur H est 1 m. Déterminer le rayon R et la hauteur h du cylindre.

On donnera des valeurs approchées en mètres, à 10^{-3} près, des résultats.

On rappelle que l'aire d'une sphère de rayon R est $4\pi R^2$.

24. Calcul de volume et équation



Une auge a la forme d'un prisme droit dont les bases sont des trapèzes isocèles. Les dimensions en sont données en mètres sur les figures ci-dessous.

1° Calculer le volume total de l'auge en m^3.

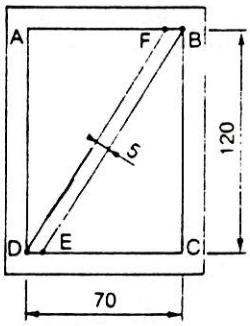
2° On remplit l'auge de liquide jusqu'à la hauteur h.

a) Exprimer la distance IJ en fonction de h. (On pourra utiliser une conséquence du théorème de Thalès.)

b) Calculer, en fonction de h, le volume $V(h)$ de liquide.

3° Déterminer h pour que l'auge soit à demi-remplie. On donnera une valeur approchée du résultat à 10^{-2} près.

25. Pour consolider le cadre



On se propose de consolider un cadre en bois, ABCD, dont les dimensions sont données sur la figure en cm, par une entretoise FBED de 5cm de largeur. Calculer les distances FB et DE, en cm, à 10^{-1} près. (FB = DE).

SYSTEMES LINEAIRES

Pour seconde et premières

Problèmes d'âges (d'après les "petits problèmes" d'un magasine.)

26 Un père dit à son fils "aujourd'hui je suis deux fois plus âgé que toi. Mais il y a 18 ans je l'étais trois fois plus car quand tu naquis j'avais _" Compléter cette phrase.

27 Un grand-père de 86 ans raconte que son petit fils Jean vient de dire à sa petite fille Marie: "j'ai deux fois l'âge que tu avais quand j'avais l'âge que tu as. Et lorsque tu auras l'âge que j'ai, la somme de mes âges sera 63 ans". Quel âge avait le grand-père lors des naissances respectives de ses petits enfants ?

28 J'ai autant de semaine que ma fille a de jours; ma fille a autant de mois que mon père a d'années; la somme des âges de mon père, ma fille et moi-même est 100 ans. Quel est mon âge ?

CONCOURS DE RECRUTEMENT D'ELEVES INSTITUTEURS

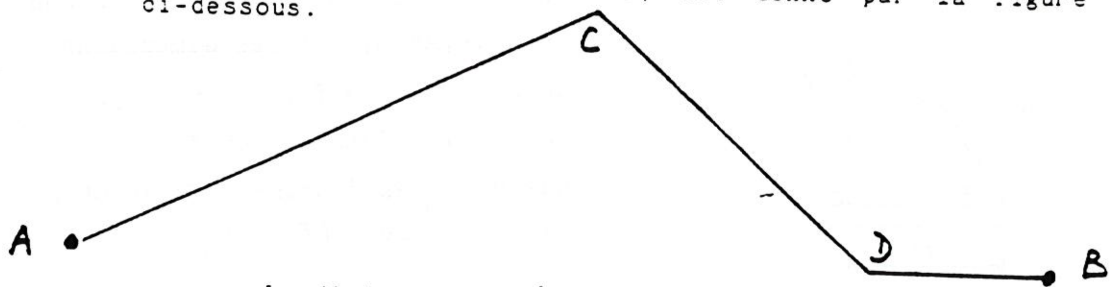
29 Un père de 3 enfants, âgé de 52 ans, donne les indications suivantes:

Mon âge est égal à la somme des âges de mes 3 enfants.

Leurs âges sont respectivement proportionnels aux nombres : 1,5 ; 2 ; 3.

Quels sont les âges des enfants ?

30 Le profil de la route reliant les villes A et B, séparées par le col C et la ville D, est donné par la figure ci-dessous.



La distance routière entre les villes A et B est de 36 km.

Pour effectuer le trajet dans le sens AB un cycliste met 2h12 min et pour effectuer le trajet dans le sens BA il met 1h 54 min.
Sachant que les vitesses moyennes de ce cycliste sont : 12 km/h en montée ; 30 km/h en descente ; 20 km/h sur le plat, calculer les distances AC, CD, DB.

SYSTEMES NON LINEAIRES

Pour Premières

31 **Problème d'âge**

Un frère et une soeur ont quatre ans de différence. Si on enlève au cube de l'âge du garçon le cube de l'âge de la fille, on trouve 988. Quel est l'âge de chacun des deux enfants ?

Réponse : 11 et 7 ans .

32 *La pièce rectangulaire*

On se trouve dans une pièce rectangulaire ABCD, respectivement à 3 m, 5 m et 6 m des sommets A, B et C. A quelle distance se trouve-t-on du quatrième sommet D ?

Réponse : $\sqrt{20} \approx 4{,}47$.

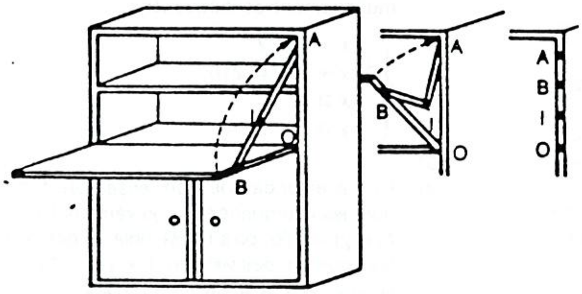
33 Elle vendait des parapluies, des kleenex et des chapeaux ...

Une vendeuse ambulante vend des parapluies, des chapeaux et des sachets de kleenex. Trois de ces sachets coûtent autant qu'un chapeau, un parapluie autant de francs qu'il y a de kleenex dans cinq sachets, deux parapluies autant que cinq chapeaux et un chapeau autant de francs que l'on pourrait avoir de kleenex pour 16 francs. Combien y a-t-il de kleenex dans chaque sachet ?

Réponse : 12

(D'après les petits problèmes d'un hebdomadaire.)

34 L'abattant du secrétaire

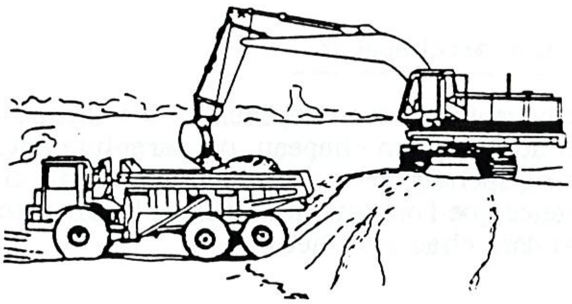


L'abattant d'un secrétaire est maintenu par deux tiges articulées IA et IB, telles que IA = 30 cm et IB = 20 cm. Ces deux tiges sont de longueurs différentes afin que, lorsque l'abattant est replié, la tête de vis située en B ne frotte pas contre la tête de vis située en A. Calculer les distances OA et OB.

PROGRAMMATION LINEAIRE

Pour premières et terminales

35 Programmation linéaire sur un chantier de travaux publics.



Une entreprise de travaux publics doit évacuer 3 200 m³ de déblais d'un chantier vers une décharge et se voit contrainte d'utiliser du matériel de location. Le parc automobile du loueur comprend des camions pouvant contenir 10 m³ de déblais et des semi-remorques pouvant contenir 20 m³.
Le but du problème est de déterminer le nombre de camions de chaque type à louer pour enlever le volume maximal de déblais chaque jour, compte tenu des contraintes.

1° On note x le nombre de camions pouvant contenir 10 m³ de déblais et y le nombre de semi-remorques pouvant contenir 20 m³. La distance entre le chantier et la décharge et la vitesse moyenne de chaque type de véhicules ne permettent que 5 rotations par jour pour les camions et 4 rotations par jour pour les semi-remorques.

a) Quel est le volume de déblais $f(x, y)$ évacué en une journée ?

b) A l'aide d'inégalités faisant intervenir x et y, exprimer chacune des conditions suivantes :
- les dimensions des accès au chantier et la capacité des aires de stationnement ne permettent pas d'utiliser plus de 7 véhicules par jour.
- l'entreprise ne souhaite pas dépenser plus de 21 000 F de location par jour. Le prix de la location par jour d'un camion est de 2 000 F, celui d'un semi-remorque est de 3 400 F.

2° L'objet de cette question est de procéder à des représentations graphiques. Elles seront exécutées avec le plus grand soin.

a) Représenter dans le plan P muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unité graphique : 2 cm) les droites :
D_1 d'équation $x + y = 7$;
D_2 d'équation $20x + 34y = 210$.

b) Hachurer verticalement l'ensemble Ω des points du plan P dont les coordonnées (x, y) vérifient simultanément les inéquations

$$\begin{cases} x + y \leq 7 \\ 20x + 34y \leq 210 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0. \end{cases}$$

3°

a) Représenter dans le plan l'ensemble Δ_1 des points dont les coordonnées (x, y) vérifient l'équation $f(x, y) = 300$, puis l'ensemble Δ_2 des points dont les coordonnées vérifient $f(x, y) = 500$.

b) Vérifier que le point I d'intersection de D_1 et D_2 appartient à Δ_2.

c) Déterminer le volume maximum de déblais que l'on peut évacuer chaque jour à la décharge et le coût de ce transport.

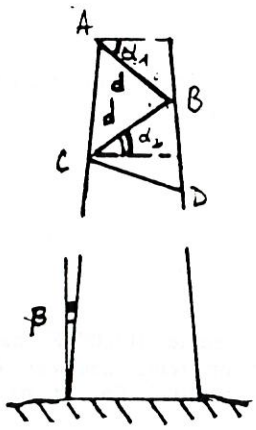
D'après un exercice de gestion de chantier, pour changer des ateliers des artisans ...

CHAPITRE 3

SUITES NUMERIQUES

SUITE ARITHMETIQUE

Pour premières



36 Pylone électrique

On considère un pylone électrique dont les entretoises AB, BC, CD ont même longueur d.
Soit α_1, α_2... les mesures respectives des angles de ces entretoises avec l'horizontale.
Soit β la mesure de l'angle des montants du pylone avec la verticale.
Montrer que α_1, α_2... sont termes succesifs d'une suite arithmétique dont on déterminera la raison.

(Réponse : $r = -2\beta$)

Suite géométrique

Pour Premières

37 Variations de t% en démographie

La population des États-Unis augmente de 0,79 % par an en moyenne, celle de la France de 0,34 %, celle de l'Allemagne Fédérale diminue de 0,2 % par an.
Ces populations en 1985 étaient respectivement de 237,5 millions, 55,1 millions, 61 millions. En admettant que cette évolution reste constante, quelles seront en l'an 2000 les populations de ces 3 pays ?

D'après un article dans un hebdomadaire.

38 Congélation

Dans un tunnel de congélation, on admet que la température T (en degrés Kelvin) d'une denrée alimentaire diminue régulièrement de 5 % toutes les 3 minutes.
A l'entrée, à l'instant $t = 0$, T = 293 °K (soit 20° Celsius). On note T(t) la température exprimée en degrés Kelvin à l'instant t, exprimé en minutes. Pour des raisons technologiques, on a $0 \leq t \leq 18$.

1° On note $u_0 = T(0)$; $u_1 = T(3)$; $u_2 = T(6)$ ... $u_6 = T(18)$; vérifier que $u_0, u_1, \dots u_6$, les températures mesurées toutes les 3 minutes, sont termes successifs d'une suite géométrique (u_n) de premier terme $u_0 = 293$ dont on donnera la raison.

2° Donner l'expression de $u_n = T(t)$ en fonction de n, puis en fonction du temps t. Déterminer T(9) T(12) T(15) T(18).
En donner des valeurs approchées à 10^{-1} près.

D'après un sujet de baccalauréat professionnel de 1987.

39 BACCALAUREAT TECHNOLOGIQUE H SESSION 1990

Une banque propose, pour un placement d'un montant de 10 000 F fait le 1er janvier 1990, un taux d'intérêt annuel de 4% auquel s'ajoute une prime constante de 500 F versée à la fin de chaque année. On appelle C_0 le capital initial et C_n la capital obtenu le 1er janvier 1990 + n (c'est-à-dire le capital obtenu n années plus tard).
1/ Calculer C_1 et C_2.

2/ Etablir la relation entre C_{n+1} et C_n.

3/ On pose, pour tout n : $U_n = C_n + 12\,500$.
Calculer U_0 et U_1.
Montrer que $U_{n+1} = 1{,}04.\,U_n$

4/ Exprimer U_n en fonction de U_0 et de n et C_n en fonction de C_0 et de n. En déduire la nature, le sens de variation et la limite de (U_n), puis le sens de variation et la limite de (C_n).
Calculer U_{10} puis C_{10}.

40 **Vente à crédit**

Monsieur Paul désire acheter une voiture qui coûte 100.000F mais ne dispose (hélas !) que de 50.000F. La banque lui propose un remboursement annuel de 10.000F, avec un prêt à 10%. Dans combien d'années aura-t-il fini de payer la voiture ?

Indications

x francs placés aujourd'hui à 10% représenterait $1{,}1^n$. x au bout de n années.

Donc 10.000F payés dans n années correspondant à $\dfrac{10.000}{1{,}1^n}$ aujourd'hui.

D'où $$50.000 = \frac{10.000}{1{,}1} + \frac{10.000}{1{,}1^2} + \ldots + \frac{10.000}{1{,}1^n}$$
(si le remboursement nécessite n années).

41 Un peu d'histoire de la technologie

Pour premières E,F

On doit à Charles Renard (1847-1905), officier et ingénieur militaire français, la conception de suites géométriques appelées « séries de Renard » et qui ont été utilisées pendant longtemps pour la normalisation, dans l'industrie*, **.

Par exemple, pour étudier les propriétés mécaniques d'un sol, on fait une analyse « granulométrique » pour obtenir la répartition des grains de terre par taille. Cette analyse peut se faire à l'aide d'une série de tamis à trous carrés, (ou « mailles carrées ») dont les dimensions sont les termes successifs d'une suite géométrique de raison 1,25.

(Cette suite est la « série de Renard R_{10} » ainsi notée parce que comportant 10 termes successifs dans l'intervalle]1,10] ; il existait de même des « séries » notées R_5, R_{20}, R_{40}).

1° Calculer les 10 termes de la série R_{10} appartenant à l'intervalle]1, 10], sachant que le terme est $u_{10} = 10$.

2° Les dimensions des mailles carrées des tamis sont numérotées de 20 à 51. Sachant que le numéro 20 correspond à un carré de 0,08 mm de côté, déterminer les dimensions du carré correspondant au numéro 51.

* En construction mécanique, elles ne sont pratiquement plus utilisées aujourd'hui.

** Pour Charles Renard, l'objectif était de normaliser les diamètres des câbles d'amarres des ballons dirigeables.

En fait, 1,25 est une valeur approchée par défaut, la série R10 a pour raison $\sqrt[10]{10}$ la série R5 $\sqrt[5]{10}$ la série R20, $\sqrt[20]{10}$, la série R40, $\sqrt[40]{10}$

En utilisant ces suites le colonel Renard ramena de 425 à 17 le nombre de types de câbles utilisés pour les ballons captifs.

Pour Terminales F

42 Une autre façon de présenter le 41 en utilisant le logarithme décimal et les suites arithmétiques et géométriques

La granulométrie est l'étude des propriétésdes sables et graviers (les granulats) utilisés pour fabriquer du béton.(un béton est un mélange de granulats et de ciment.)

Pour étudier les propriétés mécaniques des bétons,on est amené à trier les granulats par tailles à l'aide de séries de tamis à mailles carrées.(C'est à dire à trous carrés.)

Tous les trous(ou mailles) d'un même tamis de la série ont mêmes dimensions.

On définit le module M d'un tamis à mailles carrées de coté d, exprimé en millièmes de millimètres,par la formule:

$$M = 10 \log d + 1$$

ou logd est le logarithme décimal de 10.

On utilise le plus souvent une série de tamis dont les modules prennent toutes les valeurs entières possibles de 20 à 50.

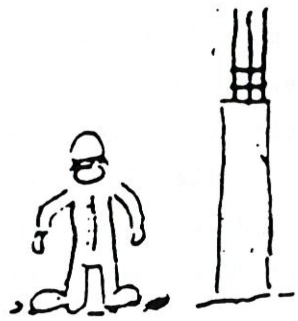
I) Calculer les diamètres en millimètres correspondants à $M = 20$ et $M = 50$.

2) On désigne par $M_1, M_2, \ldots, M_n, \ldots, M_{31}$ les différentes valeurs des modules des tamis. Ces nombres sont termes successifs d'une suite arithmétique de premier terme $M = 20$ et de raison 1.
Exprimer M_n ($1 \leqslant n \leqslant 31$) en fonction de n.

3) On désigne par $d_1, \ldots, d_n, \ldots, d_{31}$ les diamètres correspondant aux différents modules. Pour tout entier n ($1 \leqslant n \leqslant 31$), exprimer d_{n+1} en fonction de d_n. En déduire que la suite d est une suite géométrique dont on précisera la raison.

Vous aves reconnu la Série de Renard R_{10} !

Cet exercice nous a été fourni par un professeur de laboratoire de terminale F_4



CHAPITRE 4

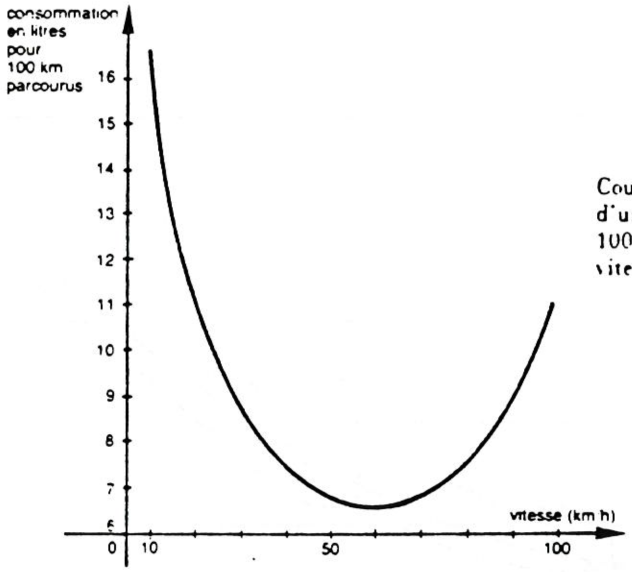
FONCTIONS NUMERIQUES

ETUDE GLOBALE

Fonctions définies par une courbe

Pour seconde premières

43. Une fonction peut être définie par une courbe



Courbe donnant la consommation moyenne d'une voiture en litres d'essence, pour 100 kilomètres parcourus, en fonction de la vitesse exprimée en kilomètres par heure.

Cette courbe a été établie en faisant de nombreuses mesures sur des routes. aussi bien en milieu urbain. qu'en campagne. avec des voitures de cylindrées moyennes.

1° Trouver une explication plausible au fait que la consommation est élevée à faible vitesse.

2° Pour quelle vitesse la consommation est-elle minimale ? Quelle est cette consommation minimale ?

44 Comment déterminer expérimentalement une courbe comme celle du n°43 ?

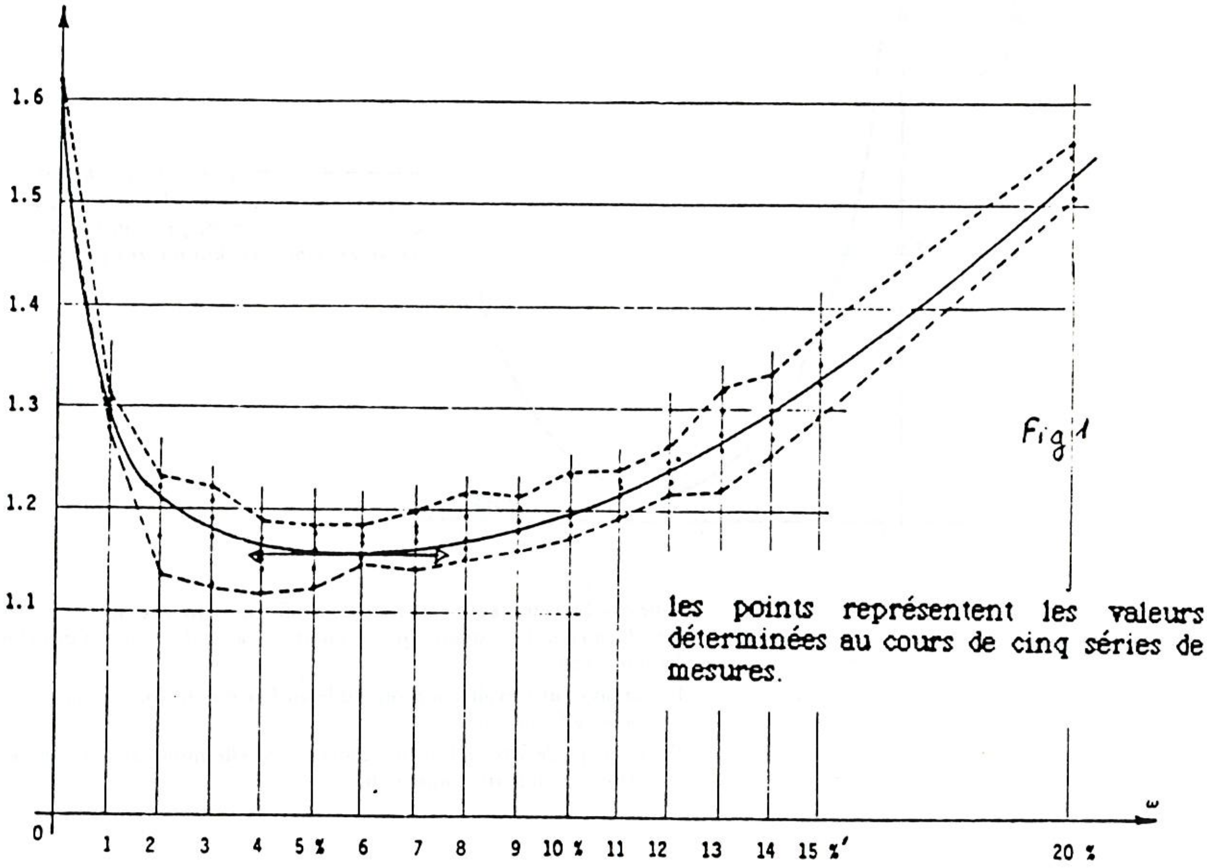
Variation de la masse volumique du sable en fonction de la quantité d'eau qu'il contient.
(d'après une notice technique.)

On appelle "teneur en eau" d'un corps le pourcentage :

$$\omega = \frac{\text{Masse de l'eau contenue}}{\text{Masse du matériau sec}} \times 100$$

$\omega = 20\%$ signifie que l'on a par exemple un mélange de 200 g d'eau et de 1 kg de sable sec.

En laboratoire on ajoute à 100 g de sable sec 10 g d'eau (alors ω = 1%) et on mesure la masse volumique du mélange obtenu et ainsi de suite jusqu'à ω = 20%.
Au delà de 20% il y a saturation : l'eau ajoutée s'écoule à travers le sable et ω reste constant.
On fait plusieurs séries de mesures et on porte les résultats sur un graphique (figure 1).



On définit alors une courbe moyenne par ajustement à l'aide des points dont les ordonnées, pour l'abscisse ω donnée, sont les moyennes des cinq ordonnées mesurées.

On obtient la courbe de la figure 2 (ou celle en traits pleins de la figure 1).

Cette méthode d'ajustement est parfois appelée : **méthode des moyennes discontinues.**

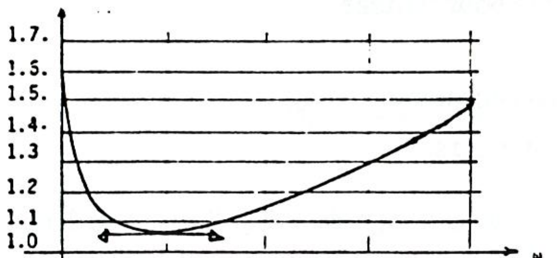


Fig 2

Exercice :

1. Construire le tableau de variation de la fonction f définie sur [0,20] par $\omega \mapsto f(\omega) = mv$

2. Quelle diminution de masse volumique, en pourcentage, obtient-on en ajoutant 10% d'eau à du sable sec ?

Fonctions affines

Pour seconde, premières

45. Comparaison de deux fonctions affines : quand les mathématiques servent .. à faire des économies !

On déménage !

Pour déménager des meubles entre mon domicile et Paris, je me suis adressé à deux loueurs de véhicules utilitaires. L'un m'a proposé un « C35 » pour 550 F par jour, plus 0,80 F par kilomètre parcouru, l'autre un « trafic » pour 200 F par jour, plus 3,14 F par kilomètre parcouru*.

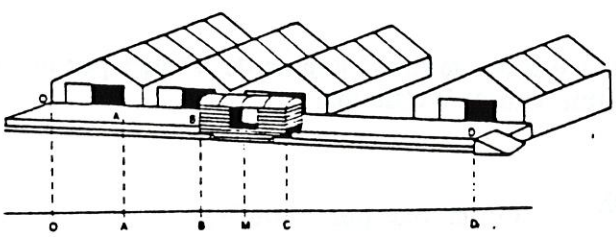
1° Je dois effectuer un trajet de 120 km dans la journée. Quel véhicule vais-je louer ?

2° Une association de consommateurs locale souhaite déterminer quel est le prix le plus avantageux selon le nombre de kilomètres à parcourir, dans le cas d'une location pour une journée. Quelle conclusion va-t-elle tirer ?

3° Illustrer par un graphique les deux possibilités de location.

Il s'agit des tarifs pratiqués en octobre 1987 par un garage Renault et un garage Citroën de la région parisienne.

46 *Pour se mettre en train*



Un responsable de quai de la SNCF cherche à réduire, pour des raisons de sécurité et d'économie, la longueur des déplacements d'un engin élévateur qui transporte des marchandises entre le wagon qu'il décharge et quatre entrepôts alignés sur un quai de 80 mètres de long. Les entrées des quatre entrepôts, notées A, B, C, D sont distantes respectivement de 10 mètres, 20 mètres, 30 mètres, 70 mètres de l'une des extrémités, notée O, du quai. On néglige la largeur du quai. La nature des marchandises déchargées est telle qu'en moyenne, pour chaque wagon, l'engin doit effectuer un aller et retour en A, trois en B, quatre en C et deux en D.

On note M le point du quai correspondant à la porte du wagon à décharger (A B C D M correspondant aux milieux des différentes ouvertures). Déterminer la distance OM pour que le trajet total de l'engin, lorsqu'il a effectué le déchargement complet du wagon, soit minimal.

POURCENTAGES

Pour Seconde et Premières

47 Où on peut prouver qu'un élève de seconde est plus "astucieux" qu'un fonctionnaire du Ministère du Tourisme...

Voici un extrait de la "Gazette Officielle du Tourisme" :

Perspectives d'évolution - Le marché des skieurs

Dans sa dimension européenne, on compte environ 15 millions de skieurs clients potentiels de la France auxquels s'ajoutent les Autrichiens et les Suisses peu enclins à skier hors de leurs frontières. Ces skieurs se répartissent entre les offres européennes principales (France, Autriche, Suisse, RFA, Italie, Espagne). Les marchés scandinaves et lointains (Japon, Amérique) ne sont pas pris en compte ici.

	FRANCE	RFA	HOLLANDE	BELGIQUE	ITALIE	GRANDE-BRETAGNE	ESPAGNE	TOTAL
Nbre de skieurs en millions	4,9	4,7	0,8	0,4	3,5	0,65	0,64	15,6
Pourcentage population 86/87	8,8	7,8	5	4	5,5	1,2	1,8	34,1

1. L'un des nombres de ce tableau n'a aucun sens, lequel ?

2. Sachant que la population totale de ces huit pays est d'environ 230 millions d'habitants, à quelle contradiction arrive-t-on en prenant ce nombre pour "argent comptant" ?

48. On reconstruit la piscine

Pour reconstruire le bassin en forme de parallélépipède rectangle d'une piscine, on augmente la longueur de moitié, on augmente la largeur de 20 % et on diminue la profondeur de 10 %. Quelle augmentation de volume, en pourcentage, obtient-on ?

49. La roue tourne

Lorsqu'une roue de diamètre D (en mètres) tourne de N tours par minute, un point de sa jante est animé d'une vitesse V telle que :

$$V = \frac{\pi DN}{60} \quad \text{(en mètres par seconde)}$$

1. Que fait V si N diminue de 10% ?

2. Que fait V si N augmente de 5% et, qu'on même temps D diminue de 10% ?

CHAPITRE 5

APPROXIMATION D'UN REEL

FORMULES APPROCHEES

Pour premières :

50. En l'air _

On trouve dans un manuel d'aviation une formule donnant la distance L qui sépare un avion volant à l'altitude h au-dessus de la mer de l'horizon : $L = \sqrt{hD}$, où D est le diamètre de la terre. (On prendra D = 12757 km.) Cette formule est en fait une formule simplifiée donnant une valeur approximative de L.

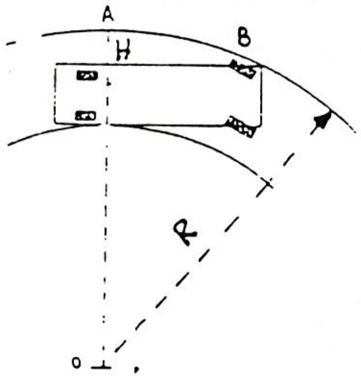
1° Démontrer que la formule exacte est :
$L = \sqrt{hD + h^2}$.

2°
a) Démontrer que :
$\sqrt{hD + h^2} - \sqrt{hD}$ est majorée par $\dfrac{h\sqrt{h}}{2\sqrt{D}}$.

b) En déduire que, si on accepte sur L une erreur inférieure à 1 km, la formule du 1° peut être utilisée lorsque $h < 35$ km.

En voiture _ *(D'après un ouvrage de travaux publics.)*

51. Surlargeur



En circulant dans les courbes les véhicules couvrent une bande de chaussée plus large que dans les lignes droites ce qui conduit, lorsque le rayon du virage est inférieur à 200 mètres, à donner une « surlargeur » à la chaussée.

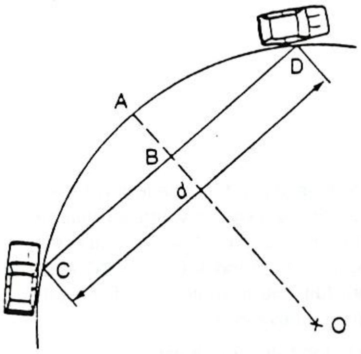
1° Calculer la « surlargeur » AH pour une chaussée de rayon R = 100 m et un camion tel que BH = 10 m.

2° Une réglementation propose (dans le cas de BH = 10 m) l'expression $AH = \dfrac{50}{R}$.

Quelle erreur admet-on avec les hypothèses du 1° en appliquant cette formule ?
Quel terme suffit-il de négliger dans le calcul effectué au 1° pour retrouver cette expression de la surlargeur AH ?

52. Visibilité en courbe et approximation affine

Il existe une règlementation très détaillée qui définit les caractéristiques géométriques des routes à réaliser, telles que les différentes rayons, dans les courbes, les échangeurs, au sommet des côtes ou la dimension des aires à dégager pour assurer une bonne visibilité aux automobilistes.



Dans une courbe une instruction prévoit que la "distance de visibilité" CD = d (voir figure) doit être au moins égale à la distance d'arrêt. La distance d'arrêt est la distance nécessaire à une automobile pour s'arrêter avant collision lorsque le conducteur a vu un obstacle de 15 cm de haut sur la chaussée .

Par exemple, dans une courbe de rayon 240 mètres (avec un "devers" de 7%), à la distance d'arrêt, lorsque la vitesse est limitée à 80 km/h, est fixée à 120 mètres (cela se calcule aussi !).

La distance "de visibilité" d et le rayon $R = OA$ étant fixés, l'instruction précise que la distance AB a une longueur "voisine" de $\frac{d^2}{8R}$. On se propose ici d'établir cette formule approchée

1°) Montrer que $AB = R - R\sqrt{1 - \frac{d^2}{4R^2}}$

2°) A l'aide de l'approximation de $\sqrt{1+h}$ par $1 + \frac{h}{2}$, lorsque h est assez petit, établir la formule approchée $AB = \frac{d^2}{8R}$

En préparant le tracé de la route

CHAPITRE 6

APPLICATIONS DE LA DERIVATION

UTILISATION DE PARABOLES

53. Pour seconde et premières : Résistance de l'air

Lorsqu'un véhicule roule, la résistance de l'air R qui s'oppose à son déplacement est donnée par la formule :

$$R = \frac{1}{2} C_x \cdot \rho \cdot S \cdot V^2.$$

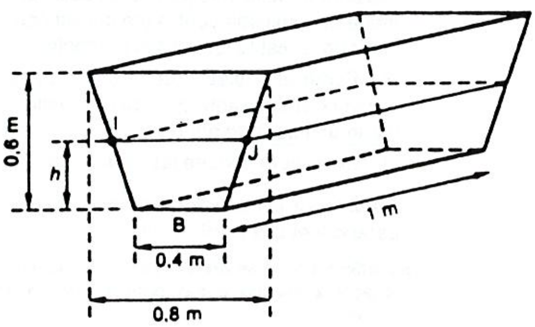
où : C_x est un coefficient dit « de pénétration dans l'air » ou « de traînée » (sans unité), donc dépendant de la formule du véhicule.
Pour diminuer R le plus possible, donc la consommation de carburant, les constructeurs d'automobiles s'efforcent actuellement de présenter des modèles avec C_x le plus faible possible (un modèle de la gamme Renault affiche un C_x « record » de 0,28... la plupart des véhicules de tourisme actuels ont un C_x compris entre 0,30 et 0,35).
ρ est la masse volumique de l'air : $\rho = 1{,}3$ kg/m³.
S est la valeur du « maître-couple », c'est-à-dire l'aire de la plus grande section transversale du véhicule, en m².
V est la vitesse du véhicule en m/s.
R s'exprime en Newtons.

1° On donne un véhicule de $C_x = 0{,}34$ et de maître-couple $S = 1{,}50$ m².
Construire la courbe représentative de la fonction $f : V \rightarrow R = f(V)$ définie pour V variant entre 0 et 36 mètres par seconde, dans le plan muni d'un repère orthogonal ; unités :
sur $x'Ox$ 1 cm pour 3 m/s
sur $y'Oy$ 1 cm pour 50 N.

2° Déterminer graphiquement la vitesse correspondant à R = 300 N.
Vérifier par le calcul.

54. Pour seconde et premières : graduation d'une auge

Une auge a la forme d'un prisme droit dont les bases sont des trapèzes isocèles.



1° Calculer le volume total de l'auge en litres.

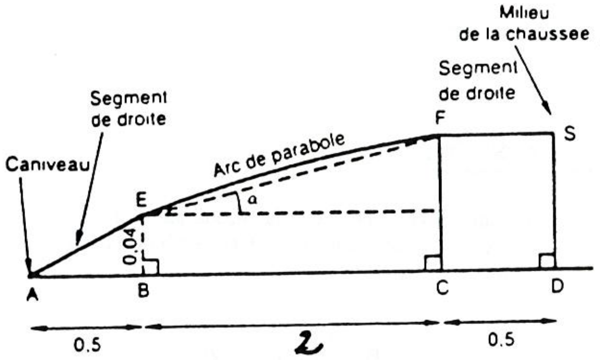
2° a) Exprimer la distance IJ en fonction de h.
b) Calculer le volume $V(h)$ du liquide contenu dans l'auge remplie jusqu'à la hauteur h.

3° Construire la courbe représentative de la fonction V définie sur [0 ; 0,6] par $h \rightarrow V(h)$, dans le plan muni d'un repère orthogonal.

4° On se propose de graduer cette auge de 50 litres en 50 litres. Utiliser la courbe pour remplir le tableau de valeurs suivant qui permettra ensuite de réaliser la graduation.

h	0	...	...	......	0,60
V	0	50	100		360

55. Pour premières : courbure d'une chaussée



D'après des ouvrages sur les routes.

La figure représente le profil d'une chaussée de 6 mètres de large, en ville. Les cotes sont en mètres.

1° Déterminer une équation de l'arc de parabole EF dans un repère bien choisi, sachant que la droite (AE) est tangente à la parabole en E et que F est le sommet de la parabole.

2° Calculer la flèche DS = FC de la chaussée.

3° Calculer la « pente » de la chaussée entre E et F, c'est-à-dire tan α. Exprimer le résultat en pourcentage. $\left(\text{Si, par exemple, } \tan \alpha = 0{,}05 = \frac{5}{100}\text{, on dit que la « pente » est de 5 \%}\right)$.

56. Recherche de fonction en physique
Pour premières

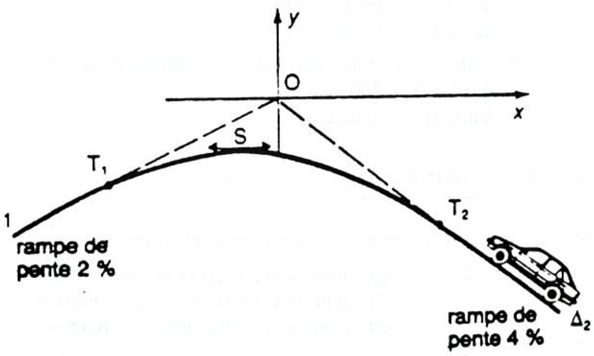
I *Caractéristique en charge d'une dynamo*

On admet que la caractéristique en charge d'une dynamo est la courbe d'équation $u = f(i) = ai^2 + bi + c$ dans le plan muni d'un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unités 1 cm pour 1 ampère en abscisses, 1 cm pour 10 volts en ordonnées)

1° Déterminer les nombres réels a, b, c sachant que cette courbe passe par les points O(0, 0), A(2, 66), B(4, 120).

2° On appelle point de fonctionnement d'une dynamo l'intersection de la caractéristique en charge, d'équation $u = f(i)$, et de la droite d'équation $u = Ri$ pour une résistance donnée R.
Déterminer graphiquement, puis par le calcul, ce point pour R = 16,5 Ω.
(On rappelle qu'une courbe d'équation de la forme $y = ax^2 + bx + c$ dans le plan muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ s'appelle parabole).

57 *Raccordement parabolique au sommet d'une côte*



La *figure* représente le profil d'une route au sommet d'une colline.

Pour réaliser ce profil on se propose de raccorder les deux paliers, de droites Δ_1 et Δ_2 par un arc de parabole T_1T_2, tangent à Δ_1 et à Δ_2, respectivement en T_1 et T_2. Le plan de la figure est muni du repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ d'axes (Ox et Oy), l'unité est le mètre.

Le but de l'exercice est, les deux droites Δ_1 et Δ_2 étant données et se coupant en O, de déterminer une équation de l'arc de parabole, ainsi que les coordonnées du sommet S et des points de contact T_1 et T_2 dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

En consultant la réglementation* on est conduit à chercher une équation de l'arc T_1T_2 de la forme

$$y = -\frac{x^2}{3\,000} + bx + c.^*$$

où b et c sont deux nombres réels qu'on se propose de déterminer dans ce qui suit.

La droite Δ_1, de pente 2 % a pour équation $y = 0{,}02x$ dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, la droite Δ_2, de pente 4 %, a pour équation $y = -0{,}04x$.**

1° *a*) Écrire une équation (E_1) dont l'abscisse de T_1 est solution.

b) Écrire une équation (E_2) dont l'abscisse de T_2 est solution.

2° *a*) Écrire une relation entre b et c, condition nécessaire et suffisante pour que l'équation (E_1) admette une solution double (ce qui est équivalent à dire que Δ_1 est tangente à la parabole).

b) Écrire une relation entre b et c condition nécessaire et suffisante pour que l'équation (E_2) admette une solution double.

c) De *a*) et *b*) déduire les valeurs de b et c.

3° Déterminer les coordonnées du sommet S de la parabole et des points T_1 et T_2.

* Le coefficient de x^2 dépend de la catégorie de la route et est fixé de façon à ménager une visibilité suffisante à l'approche du sommet.

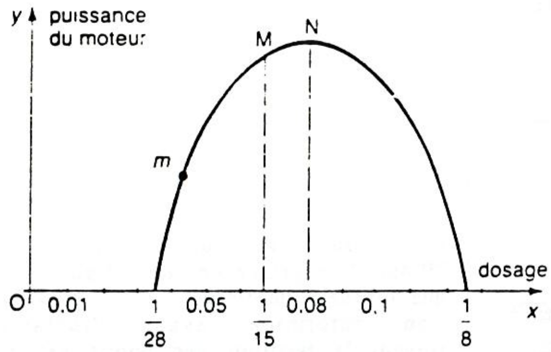
** Une pente de n % correspond à un coefficient directeur de $+\frac{n}{100}$ ou $-\frac{n}{100}$ suivant les cas.

Réponses :

2° *c*) $b = -0{,}01$; $c = -0{,}675$.

3° $S(-15 ; -0{,}6)$; $T_1(-45 ; -0{,}9)$; $T_2(45 ; -1{,}8)$.

58. *Rendement d'un moteur*



La courbe de la figure représente les variations de la puissance y d'un moteur en fonction du « dosage essence-air ». Ce dosage est mesuré par le quotient x de la masse d'essence (en grammes) et de la masse d'air (en grammes) contenus dans le mélange alimentant le moteur. Le point M correspond au « dosage parfait » (voisin de $\frac{1}{15}$ il correspond à des conditions « idéales » de combustion).

Le point N correspond au maximum de puissance du moteur.

1° On appelle rendement du moteur le rapport $R = \frac{\text{puissance}}{\text{dosage}}$. Donner une interprétation graphique du rendement R pour un point m donné de la courbe.

2° Le rendement correspondant au point M est-il « meilleur » ou « moins bon » que celui associé au point N ?

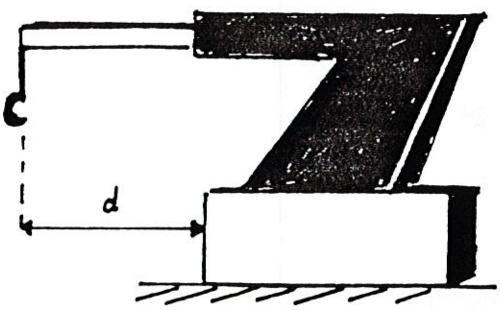
3° L'expérience montre que le rendement maximum est obtenu pour un dosage de 1 g d'essence pour 18 g d'air, environ. Justifier graphiquement ce résultat.

UTILISATION D'HYPERBOLES

Histoires de grues

59. Grue de levage : construction d'une courbe point par point

Pour seconde et premières



Le dessin représente une grue de levage dont le bras horizontal a une longueur variable d, exprimée en mètres.

1 Si Q est la charge maximale, exprimée en tonnes, que l'on peut soulever lorsque le bras a une longueur d, on montre en physique que $Q = \frac{k}{d}$, où k est une constante liée aux caractéristiques de la grue. Déterminer k sachant que l'on peut soulever 3 tonnes lorsque $d = 3$ m.

2 Dans cette question, on prend $k = 9$.

a) Dans le plan muni d'un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$, d'axes $x'Ox$, $y'Oy$ (unités : 1 cm pour 1 m sur $x'Ox$; 1 cm pour 1 tonne sur $y'Oy$), construire point par point la courbe de charge de la grue, c'est-à-dire la courbe représentative de la fonction :

$$\begin{cases} [2, 6] \to \mathbb{R} \\ d \mapsto Q = \frac{9}{d} \end{cases}$$

b) Quelle longueur faut-il donner au bras pour pouvoir soulever au maximum 4 tonnes ?

D'après une épreuve d'un baccalauréat professionnel de 1987.

60 Courbe de charge d'une grue à tour : cela ressemble à une hyperbole ...

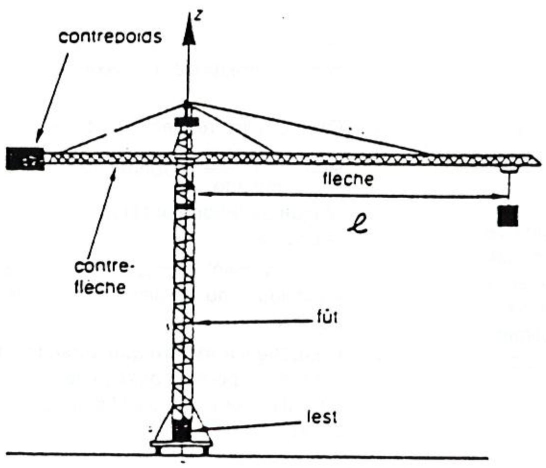
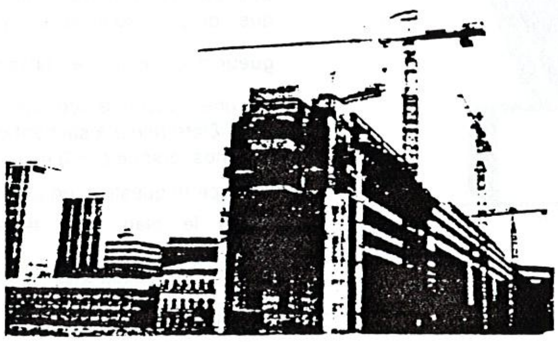


Fig 1

Les "grues à tour" comme la grue "Pingon" représentée ici (figure 1) ont une longueur de flèche variable que l'on détermine avant l'installation, suivant la position des points extrêmes à desservir sur le chantier et la charge maximale que l'on veut soulever à l'extrémité.

Le loueur de grues fournit donc au responsable de l'implantation du chantier un document tel que celui de la figure 2 comportant une "courbe de charge" qui donne pour une longueur fixée de la flèche la charge maximale que l'on peut soulever à l'extrémité.



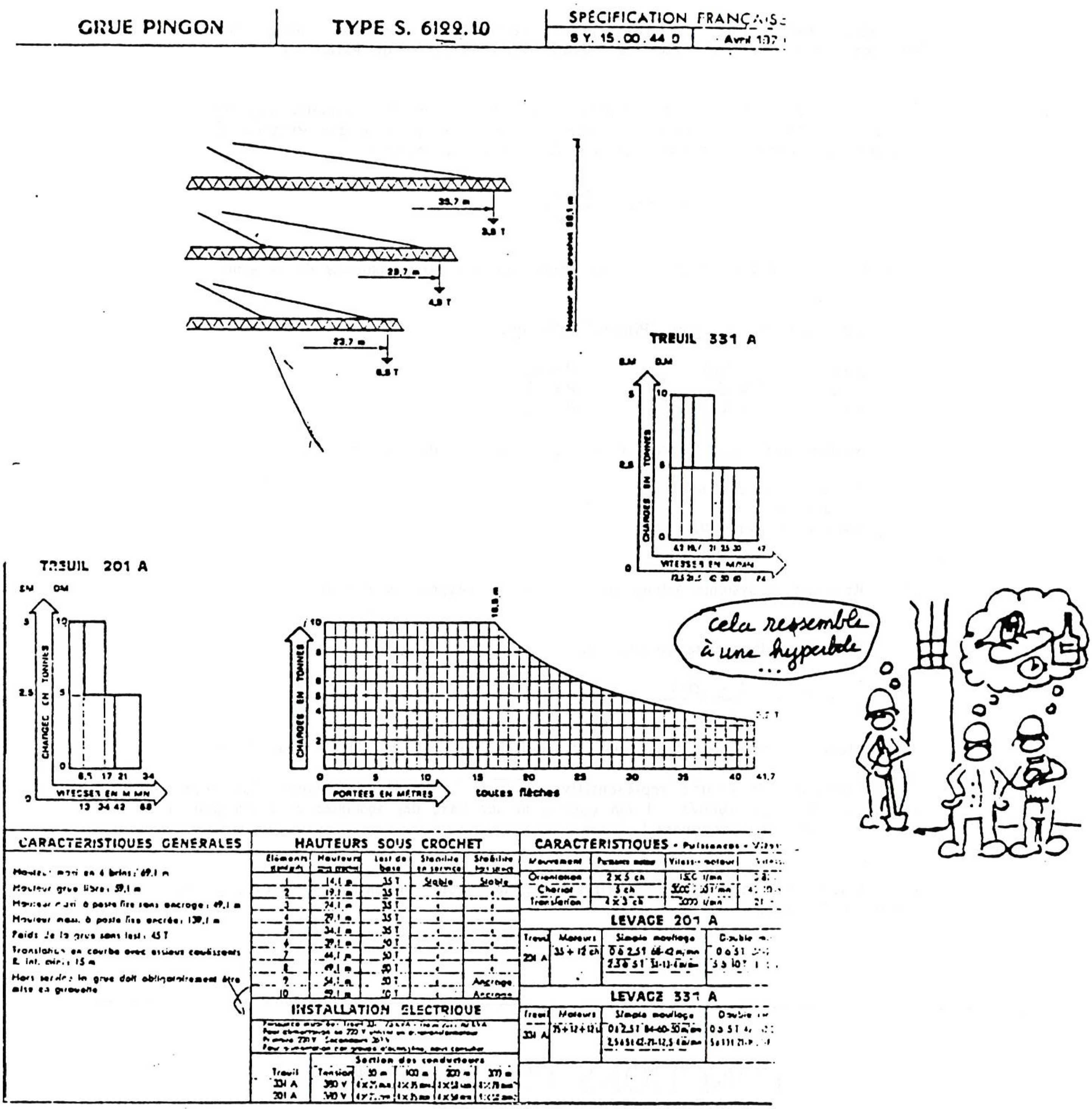


fig 2

En voyant ce document nous avons voulu ajuster l'arc de courbe correspondant à $15,6 \leq l \leq 41,7$ par une hyperbole.

Un calcul réalisé avec un professeur de mécanique a confirmé notre conjecture. Nous en avons alors tiré l'exercice suivant (pour la classe de Première).

On démontre en mécanique que la charge P maximale, exprimée en tonnes, que l'on peut soulever avec une grue dont la flèche a une longueur ℓ , exprimée en mètres, est donnée par une formule de la forme :

$$P = f(\ell) = \frac{\ell + c}{a \cdot \ell + b}$$

où a, b, c sont des nombres réels qui dépendent des caractéristiques de la grue.

1°) On considère une grue "Pingon" telle que :

pour $\ell = 16{,}5$, $P = 10$;
pour $\ell = 25$, $P = 6$;
pour $\ell = 40$, $P = 3{,}5$;

Montrer que , dans ce cas, a, b, c sont solutions du système :

$$\begin{cases} 165\,a + 10\,b - c = 16{,}5 \\ 150\,a + 6\,b - c = 25 \\ 140\,a + 3{,}5\,b - c = 40\,. \end{cases}$$

2°) Résoudre le système obtenu au 1°) et écrire l'expression P = f( ).

3°) On admet dans cette question que

$$f(\ell) = \frac{\ell - 2014}{-15{,}5\ell + 56}$$

Etudier les variations de la fonction f définie sur [16,5 ; 41,7] par $\ell \longmapsto f(\ell)$

Construire la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthogonal (O, i, j) (unités : 1 cm pour 2 m sur l'axe des abscisses et 1 cm pour 1 tonne sur l'axe des ordonnées.)

4°) Quelle est la longueur maximale de la flèche permettant de soulever une charge de 5 tonnes ?

FONCTIONS POLYNOMES

61 Mon beau sapin

Voici un exercice posé il y a une trentaine d'année au baccalauréat.

Un sapin fait l'objet d'un marche. Il a la forme d'un tronc de cône (ou d'un cône) de revolution, de hauteur h et de rayon de bases R et r (r pourra être nul). Son volume est désigne par V; on l'appellera le volume *reel* par opposition avec ce qu'on appellera le volume *fictif*, qui est la quantité W produit de la hauteur h par la surface de la section moyenne du tronc de cône (cette section ayant donc pour rayon $\frac{R+r}{2}$). D'apres une coutume locale de la region où se traite le marché, celui-ci est basé sur l'evaluation du volume *fictif*.

1°) Caculer $V - W$ et montrer que la coutume favorise l'acheteur. Calculer la valeur de $\frac{V-W}{V}$ (perte relative du vendeur) lorsque $r = 0$.

2°) Dans toute la suite du probleme, on suppose que r est nul; on dit alors que le sapin est *non etete*. Il a pour hauteur h et pour rayon de base R. Il s'agit de reconnaitre si le vendeur a interêt à *eteter* son sapin, c'est-à-dire à le scier perpendiculairement à l'axe, à une distance du sommet qui sera désignee par x. La partie proche du sommet sera perdue; l'autre troncon etant seul vendu. On designe par $W(x)$ le volume *fictif* du tronc de cône qui fait l'objet de la vente. $W(x)$ est un polynôme du troisieme degre.

a) Calculer $W(x)$, puis $W(x) - W(0)$. Ce dernier polynôme se met sous la forme $xP(x)$. Trouver les valeurs de x pour lesquelles $P(x)$ s'annule, et etudier le signe de $P(x)$. En deduire le signe de $W(x) - W(0)$ lorsque x croît de 0 à h.

b) Calculer $W\left(\frac{h}{3}\right)$ et repondre à la question pratique posee au début de ce paragraphe. Enfin, donner la valeur de

$$\frac{V - W\left(\frac{h}{3}\right)}{V}$$

3°) Dans ce paragraphe, le sapin est toujours scié à la distance x du sommet, mais les deux tronçons du sapin sont vendus separement. Calculer le volume *fictif* de chacun des tronçons, puis la somme $W'(x)$ de ces volumes fictifs. Etudier les variations de $W'(x)$ lorsque x varie, et les représenter graphiquement. Deduire de cette etude à quel endroit le vendeur a le plus grand interêt à scier son sapin. Calculer la valeur de

$$\frac{V - W'\left(\frac{h}{2}\right)}{V}$$

4°) Le vendeur a le choix entre les trois modes suivants de vendre son sapin :

a) Entier, en un seul morceau.

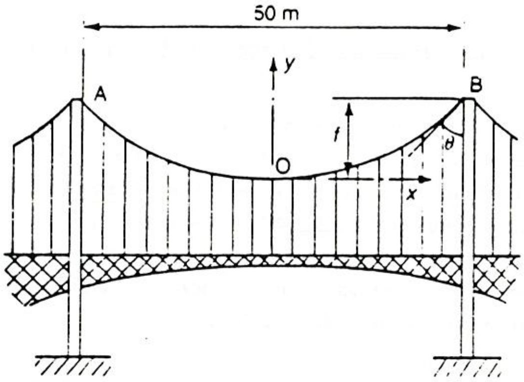
b) Eteté à une distance du sommet au choix du vendeur (comme au

c) Coupé en deux troncons, à une distance du sommet au choix du vendeur, les deux troncons étant vendus séparement (comme dans le 3°).

Quel est le mode de vente le plus avantageux pour le vendeur, et, s'il doit couper son sapin, à quelle distance du sommet doit-il le faire ?

N.B. Le prix du sciage du sapin sera considere comme negligeable.

62 *Un pont suspendu*



La *figure* représente un pont suspendu de « portée » 50 m. Un calcul de mécanique a permis d'établir, que compte tenu des différents efforts, le gros câble AOB a la forme de la courbe d'équation
$y = 0{,}0000371\,x^4 + 0{,}0007956\,x^2$ dans le repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ d'axes (Ox) et (Oy) (unité : 1 m).

(D'après un ouvrage de mécanique)

1° Déterminer la « flèche » f en O du câble.

2° Déterminer une mesure θ, en degrés à 10^{-2} près, de l'angle du câble avec le pilier en B.

Rappel :

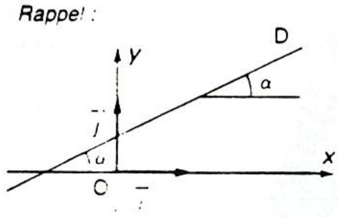


fig. 17

On rappelle que si D est une droite d'équation $y = mx - p$ dans un repère orthonormal, $m = \tan \alpha$, où α est une mesure de l'angle de $(O, \vec{i})$ avec (D), ou avec n'importe quelle parallèle à $(O, \vec{i})$.

RESOLUTION GRAPHIQUE D'INEQUATION

63 Distance de freinage : pour premières

Une circulaire du 28 octobre 1970 définit les longueurs moyennes de freinage d'une voiture sur une route ayant un bon revêtement, dans des conditions climatiques normales.
De nombreuses expériences ont conduit les ingénieurs à adopter la formule :

$$d = \frac{V^2}{290 - V}$$

qui donne la distance de freinage en mètres en fonction de la vitesse en kilomètres/heure.

1° Dans le plan muni d'un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$, construire la courbe représentative de la fonction définie sur [40, 130] par $V \mapsto d$.

2° Déterminer graphiquement la vitesse à ne pas dépasser pour s'arrêter sur moins de 50 mètres.

3° vérifier par le calcul

Remarque :
Cette formule n'est pas la même que celle donnée à l'exercice 22. Elle ne tient pas compte du temps de retard avec lequel réagissent la plupart des conducteurs avant de freiner.

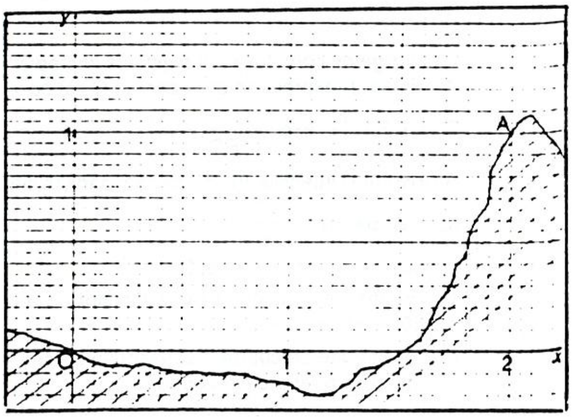
D'après un ouvrage sur les routes.

FONCTIONS EXPONENTIELLES

Exemples d'applications technologiques... des fonctions exponentielles et puissances

64 *Câble de téléphérique et exponentielle*

Un bureau d'étude fait un projet de téléphérique. La coupe de terrain est représentée sur la feuille de papier millimétré jointe et prévue pour cet exercice.



Dans le repère (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$) le départ est en O, l'arrivée en A(2, 1).
On admettra que tout câble tendu entre O et A prend une position d'équilibre qui coïncide sur [0, 2] avec la courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction f définie par $f(x) = b(e^{ax}+e^{-ax}) + c$, où a, b et c sont trois nombres réels.

On suppose, en outre, que la tangente en O à la courbe $\mathscr{C}$ est horizontale.

1° Écrire les conditions (trois au total) auxquelles sont soumises la fonction f et sa dérivée f'. En déduire les valeurs exactes de a, b et c.

2° Étudier les variations de la fonction f définie sur l'intervalle [0, 2] par : $f(x) = \dfrac{e^{x}+e^{-x}-2}{e^{2}+e^{-2}-2}$

3° a) Donner une valeur décimale approchée à 10^{-2} près du coefficient directeur de la tangente à $\mathscr{C}$ en A.

b) Sur la feuille de papier millimétré où figure la coupe de terrain, tracer la partie de la courbe $\mathscr{C}$ comprise entre O et A ainsi que la tangente à $\mathscr{C}$ en A.

(Baccalauréat F., 1988)

D'aucuns prétendent qu'il s'agit de vrai faux concret.

65 *Exponentielle en mécanique*

Ça baigne dans l'huile !

La température θ exprimée en degrés Celsius du lubrifiant d'un moteur varie en fonction du temps t de fonctionnement, exprimé en minutes. On pose $\theta = f(t)$ où f est la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par :
$t \mapsto 25 - 10e^{-kt}$ et k une constante réelle.

1° Déterminer k pour que la température du lubrifiant au bout de 5 minutes de fonctionnement soit de 19 °C.

2° Quelle est la température du lubrifiant lorsque le moteur ne fonctionne pas ?

3° Étudier les variations de la fonction f.

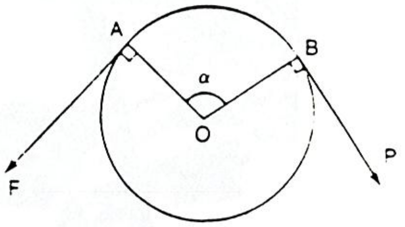
4° Soit C sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$) ; unités : sur $x'Ox$, 5 cm pour 10 minutes, sur $y'Oy$, 1 cm pour 2,5 °C.

5° Comment interpréter physiquement l'existence d'une asymptote pour C lorsque t augmente indéfiniment ?

6° Construire C pour t appartenant à [0, 20].

(D'après baccalauréat professionnel MSMA, 1988)

66 *Jeu de corde*



Pour hisser un poids P à l'aide d'une corde enroulée sur une poulie fixe, il faut exercer une force $F = P\,e^{f\alpha}$ où e est la base du logarithme népérien, f le coefficient de frottement de la corde sur la poulie, α une mesure en radians de l'angle $\widehat{AOB}$.
On donne $f = 0{,}075$, déterminer une valeur approchée à 10^{-2} près de α permettant de hisser un poids de 45 newtons, en exerçant une force de 52 newtons.

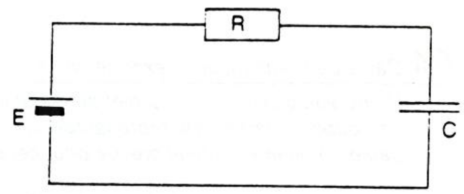
67 *Exponentielle en physique et en chimie*

Décharge d'un condensateur dans un résistor

La tension $V(t)$ aux bornes d'un condensateur, se déchargeant dans un résistor, varie en fonction du temps t suivant la loi $V(t) = V_0 \exp\left(-\dfrac{t}{RC}\right)$, où V_0 est la tension initiale, R la résistance du résistor, C la capacité du condensateur.
On donne C = 12 µF (microfarads). Calculer R en ohms, sachant que la tension est tombée au $\dfrac{1}{10}$ de sa valeur initiale au bout de 2 secondes.

68 *Charge d'un condensateur : où on utilise la notation différentielle de la dérivée*

Un condensateur non chargé, de capacité C, est monté en série avec un résistor de résistance R et l'ensemble est soumis à une tension E à l'instant $t = 0$.



La charge du condensateur n'est pas immédiate.
A l'instant t l'expression de la charge Q est de la forme $Q = CE\left[1 - \exp\left(-\dfrac{t}{RC}\right)\right]$.
A l'instant t l'intensité $i(t)$ du courant dans le circuit est donnée par $i(t) = \dfrac{dQ}{dt}$.
On donne E = 50, R = 1 et C = 1.

1° Etudier les variations de la fonction i définie sur $[0, +\infty[$ par $t \mapsto i(t)$.

2° Construire sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal.

Pour terminales F7-F7' et D : mathématiques et biologie

Voici deux problèmes qui ont été rédigés par deux personnes différentes à partir de la même source : un livre de mathématiques appliqués à la biologie pour le premier cycle de l'enseignement supérieur. le premier a été posé dans un baccalauréat F7-F7'.

69 le problème de F_7-F_7.

Une substance est injectée par voie intramusculaire. Elle passe du muscle au sang puis est éliminée par les reins. Après étude, on constate que la quantité de substance contenue dans le sang à un instant t est donnée, approximativement par la fonction s définie par :

$\forall t \in \mathbb{R}^+$, $s(t) = q(e^{-0,5t} - e^{-t})$ t étant le temps exprimé en heures
q étant la quantité de substance injectée

1. Calculer la dérivée de s et vérifier que s'(t) peut se mettre sous la forme $s'(t) = qe^{-0,5t}(-0,5 + e^{-0,5t})$. En déduire le signe de s'(t). (On rappelle que la dérivée de $e^{\alpha x}$ est $\alpha e^{\alpha x}$).

   Etablir le tableau de variation de s. Préciser la limite de s(t) lorsque t tend vers $+\infty$.
2. On désire contrôler les effets de cette substance (cas d'un médicament). Pour cela, il faut que la quantité de ce médicament contenue dans le sang soit comprise entre deux valeurs : S_m et S_M

   $S_m = 1,2$ seuil d'efficacité
   $S_M = 2,6$ seuil de toxicité
   D'après le tableau de variation de s, quelles valeurs peut-on donner à q pour qu'à aucun moment la quantité de substance ne dépasse S_M ?
3. On prendra désormais q = 10 .

   3.1. Représenter graphiquement la fonction s : $t \longrightarrow s(t)$. Indiquer les seuils S_m et S_M .

   3.2. Déterminer l'équation de la tangente au point d'abscisse 0 .

   3.3. Déterminer graphiquement l'intervalle de temps durant lequel le médicament est efficace.

70 le problème rédigé simultanément par nous _

On injecte à un lapin par voie intramusculaire un médicament. Cette substance passe du muscle dans le sang et est ensuite éliminé au niveau des reins.

Soit S(t) la quantité de substance présente dans le sang à l'instant t . On établit que :

$$S(t) = -11,3\,(e^{-0,7t} - e^{-0,4t})$$

(les quantités étudiées sont exprimées en unités arbitraires, non précisées, et notées u.a.)

1) Etudier les variations de la fonction définie pour $t \geqslant 0$ par $t \longmapsto S(t)$.

2) Construire sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormal (unité 1 cm pour 1 sur chaque axe).

3) On désire que la quantité de médicament injectée soit comprise entre deux valeurs $S_M = 2,30$, qui constitue le seuil de toxicité, et $S_m = 1,4$, qui constitue le seuil d'efficacité.

   Vérifier que 2,3 correspond approximativement à la valeur maximale de obtenue au 1). Déterminer graphiquement deux valeurs t_0 et t_1 telles que si $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, $1,4 \leqslant S(t) \leqslant 2,30$.

71 *Exponentielle et biologie*

I On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = 8(e^{-x} - e^{-2x}).$$

1° Démontrer que, pour tout x reel, $f(x) = \dfrac{8(e^{x}-1)}{e^{2x}}$.

2° Démontrer que, pour tout x réel, $f'(x) = \dfrac{8(2-e^{x})}{e^{2x}}$, f' désignant la dérivée de f. En déduire le signe de $f'(x)$.

3° Déterminer les limites de f aux bornes de l'ensemble de définition.

4° Donner le tableau de variation de f.

5° Représenter la fonction f dans un repère orthogonal (unités : 4 cm en abscisses et 2 cm en ordonnées).

II

On injecte à l'instant $t = 0$ une substance dans le sang d'un animal. A l'instant t (t positif exprimé en secondes), la concentration y de la substance injectée est : $y = 8(e^{-t} - e^{-2t})$.

On appelle « concentration » le rapport entre la quantité du liquide injecté et la quantité du sang qui le contient.

1° En utilisant les résultats de la partie I, donner le tableau de variation de la concentration en fonction du temps t, t positif exprimé en secondes.

2° Au bout de combien de temps la concentration est-elle maximale ? On donnera une valeur approchée par défaut de ce résultat en centièmes de secondes.

3° Calculer au bout de combien de temps la concentration « retombe » au quart de sa valeur maximale. Donner ce résultat avec la même précision que dans la question II.2. Vérifier graphiquement en utilisant la question I.5.

4° Donner une valeur approchée de $f(9)$. En déduire qu'à l'instant t, $t \geq 9$, la concentration est inférieure à 10^{-3}.

RECHERCHES D'EXTREMUM

Pour premières, terminales

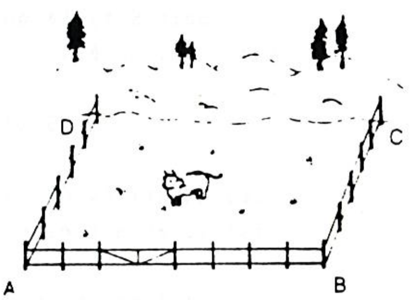
Fonctions polynômes à maximiser

Des classiques !

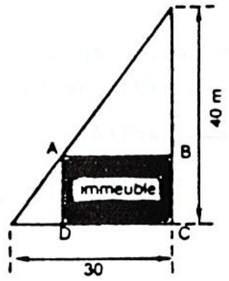
72 *Sur le pré*

Sur un pré, au pied d'une barre rocheuse, on veut disposer une clôture de 100 mètres de longueur telle que ABCD soit un rectangle. (figure 32)

Calculer les distances AB (= DC) et BC (= AD) pour que l'aire de ABCD soit maximale.



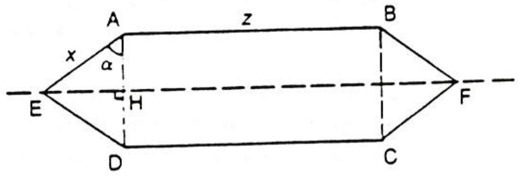
73 **La plus grande surface construite**



On veut construire un bâtiment dont la base est rectangulaire sur un terrain ayant la forme d'un triangle rectangle dont les deux côtés de l'angle droit mesurent respectivement 30 m et 40 m. Déterminer les dimensions de l'édifice pour que la surface construite ABCD soient maximale. (On peut poser BC = x.)

74 la section d'aire maximale

Dans cet exercice, les longueurs sont exprimées en millimètres, les aires en millimètres carrés et les angles en radians.
On veut fabriquer une pièce de section longitudinale hexagonale .., mettant en évidence un rectangle ABCD de longueur AB = z et deux triangles isocèles ADE et BCF tels que
AE = DE = FB = FC = x
et $\widehat{EAD} = \widehat{EDA} = \widehat{FBC} = \widehat{FCB} = \alpha$.



On désigne respectivement par p et $\mathcal{A}$ le périmètre et l'aire de cette section hexagonale.

1° Exprimer p et $\mathcal{A}$ en fonction de x, z et α.

2° On suppose désormais que $p = 24$ et $\alpha = \frac{\pi}{6}$. Déterminer l'expression de $\mathcal{A}$ en fonction de x.

3°a) Etudier le sens de variation de la fonction réelle f définie sur l'intervalle $[\,0\ ;\ 6\,]$ de $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \frac{3\sqrt{3}}{2}\,(-x^2 + 8x)$$

b) Trouver la valeur de x qui permet d'obtenir une section longitudinale d'aire maximale. Dessiner alors cette section à l'échelle 10.

D'après l'exercice 2 de l'épreuve de mathématiques du baccalauréat F_{10} (microtechnique) de juin 1988

(6 points sur 20 pour une épreuve en 4 heures)

75 Il y a de l'eau dans le jus d'orange

Prenez deux flacons vides de 200 cm^3. Remplissez le premier avec du jus d'orange. Versez une partie de ce jus d'orange dans le deuxième flacon, et complétez le avec de l'eau. Servez. Versez le mélange ainsi obtenu dans le premier flacon jusqu'à le remplir complètement. Secouez encore ce mélange. Quel est le pourcentage minimum de jus d'orange qu'il contient ?

Réponse : 75%

D'après un petit problème d'un hebdomadaire

Fonctions rationnelles à maximiser

76 Problème à support physique :

le problème de l'épreuve du baccalauréat F2-F3 groupe 2 de juin 1987.

(sur 11 points sur 20 dans une épreuve de 4 heures).

Le but du problème est l'étude d'une fonction numérique f qui s'introduit dans une question d'électricité. Cette étude sera ensuite appliquée à un problème d'extremum et à une évaluation d'aire. Seules les connaissances du programme de mathématiques sont utiles pour la résolution du problème.

I - On considère un générateur de force électromotrice E et de résistance interne r qui débite sur un résistor de résistance R variable. On désigne par P la puissance dépensée dans le résistor. On sait que si i désigne l'intensité du courant :

$$E = ri + Ri \quad \text{et} \quad P = Ri^2$$

Les résistances R et r sont exprimées en ohms. On a $r = 0,5$ et l'on désigne par x la résistance R.
E est exprimé en volts et $E = 3$.
P est exprimé en Watts et i en ampères.
Montrer que P est une fonction de x qu'on déterminera.

II - 1° Soit f la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{9x}{(x + \frac{1}{2})^2}$$

On appelle (C) sa courbe représentative dans un repère orthornormé $(O;\vec{i},\vec{j})$; unité de longueur 2 cm sur chaque axe.
Déterminer les nombres réels constants a et b tels que pour tout x appartenant à $[0, +\infty[$ on ait :

$$f(x) = \frac{a}{x + \frac{1}{2}} + \frac{b}{(x + \frac{1}{2})^2}$$

2° Etudier les variations de la fonction f.

Déterminer la limite de f quand x tend vers $+\infty$ et préciser l'asymptote.

Dresser le tableau de variation.

3° a) Déterminer l'équation de la droite (D) passant par les points d'abscisses $\frac{1}{2}$ et 1 de (C) et l'écrire sous la forme $y = g(x)$.

b) Montrer que (D) recoupe (C) en un troisième point dont on déterminera les coordonnées.

4° Construire (D), puis (C) avec son asymptote.

III - 1° Montrer que la puissance P dépensée dans le résistor du circuit étudié dans la première partie est maximale pour une valeur de R qu'on précisera.

2° Le repère étant celui de la deuxième partie, on se propose de déterminer l'aire A en cm^2 de la partie du plan délimitée par (C) et par les droites d'équations :

$$x = \frac{1}{2} \quad ; \quad x = \frac{3}{2} \quad ; \quad y = \frac{9}{2}$$

a) Mettre en évidence soit par des hachures, soit en la coloriant cette partie du plan sur le schéma.

b) Donner, en cm^2, une première évaluation approchée A' de A à l'aide du triangle dont les côtés sont D et les droites d'équations :

$$x = \frac{3}{2} \quad \text{et} \quad y = \frac{9}{2}$$

c) Calculer en cm^2 la valeur exacte de A puis une valeur approchée de $(A - A')$ à 10^{-3} près.

Ici l'objectif ne se limite pas à faire faire une recherche d'extremum, il y a aussi du calcul intégral. L'énoncé est rédigé de telle façon que la partie physique soit contournable ce qui est souhaitable dans un examen où certains candidats peuvent être peu familiarisés avec les problèmes à support concret, technologique, physique _ (en mathématiques ...!)

On peut aussi limiter le problème à la situation physique, comme nous l'avons fait dans l'ouvrage de 1ère F de la collection Dimathème :

77 Pour premières scientifiques et industrielles

Fonction rationnelle à maximiser à propos d'une situation physique

Le but du problème est l'étude d'une fonction numérique f qui s'introduit dans une question d'électricité. Cette étude sera ensuite appliquée à un problème d'extremum.

1° On considère un générateur de force électromotrice E et de résistance interne r qui débite sur un résistor de résistance R variable. On désigne par P la puissance dépensée dans le résistor. On sait que si i désigne l'intensité du courant :
$E = ri + Ri$; $P = Ri^2$
Les résistances R et r sont exprimées en ohms. On a $r = 0,5$.
E est exprimé en volts et $E = 3$.
P est exprimé en watts et i en ampères.
Montrer que P est une fonction de R que l'on déterminera.

2° Soit f la fonction définie sur [0, 5] par :
$$f(R) = \frac{9R}{\left(R + \frac{1}{2}\right)^2}.$$
Etudier les variations de f.

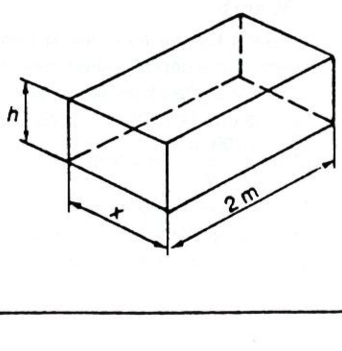
3° Vérifier que la puissance P dépensée dans le résistor du circuit étudié dans la première partie est maximale pour une valeur de R qu'on précisera.

78. Problème de terrain

Une société de HLM possède un terrain qu'elle souhaite diviser en lots rectangulaires pour y construire des maisons individuelles.
Chaque lot doit être un rectangle d'aire 450 m² et posséder des dimensions telles que la clôture qui l'entoure sur 3 côtés (il n'est pas jugé nécessaire de clôturer le côté donnant sur la rue) ait une longueur minimale.
Déterminer les dimensions de chaque lot.

79 *Le réservoir le plus économique*

On se propose de construire un réservoir en tôle en forme de parallélépipède rectangle de volume intérieur 4 m³ (figure 37).



1° Déduire de l'information relative au volume une relation entre h et x.

2° Montrer que l'aire des faces intérieures (sans couvercle) s'écrit :
$$S(x) = 2x + 4 + \frac{8}{x}$$

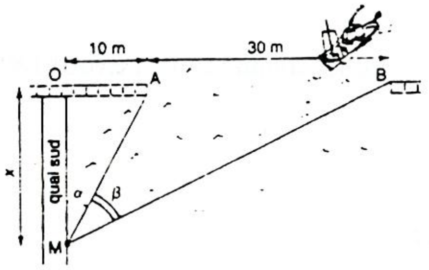
3° Étudier les variations de la fonction définie sur [0,5 ; 4] par $x \mapsto S(x)$. En déduire les valeurs de x et de h correspondant à une surface minimale, donc à un coût de fabrication minimal.

80 L air du large

L objectif du problème est d'étudier les variations d'une fonction numérique et d'utiliser cette étude pour résoudre un problème d'extremum.

1° Soit f la fonction définie sur [0,30] par
$$f(x) = \frac{30x}{x^2 + 400}.$$
Étudier les variations de f.

2° La figure représente l'entrée d'un port breton.



On se propose de calculer la distance OM = x pour qu'un observateur situé en M au bord du quai sud voit le large sous un angle β maximal (sa vue étant limitée par les extrémités A et B de deux jetées). Exprimer $\tan \alpha$ et $\tan (\alpha+\beta)$ en fonction de x.
En utilisant la formule
$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta},$$ montrer que $\tan \beta = f(x)$.
La distance OM est inférieure ou égale a 30 m.
Calculer x pour que $\tan \beta$ donc β soit maximal.
Donner une valeur approchée en degré a 10^{-2} près de la valeur maximale de β.

Cela ressemble au n°57 du livre de Terracher, mais _ c'est un sujet de bac !
(F_4 : génie civil juin 1988)

81 La consommation minimale

Un camion ravitaille en matériaux un chantier en empruntant toujours le même trajet qui mesure aller-retour 150 km. Le prix d'un litre de gasoil est de 3,50 F. Le chauffeur du camion est payé 62 F de l'heure.

La consommation c du véhicule, exprimée en litres de gasoil par heure, est une fonction de la vitesse moyenne v du camion donnée par
$$c(v) = 6 + \frac{v^2}{100},$$ v étant exprimée en km/h.

1° a) Si la vitesse moyenne v du camion est de 50 km/h, calculer le coût de revient d'un trajet.

b) Plus généralement, exprimer en fonction de v le coût de revient d'un trajet.
Vérifier la formule trouvée pour v = 50 km/h.

2° Étudier les variations de la fonction f définie pour tout x de l'intervalle [40, 100] par :
$$f(x) = 5{,}25x + \frac{12\,450}{x}.$$
Représenter ensuite graphiquement f dans un repère bien adapté que l'on précisera.

3° Déterminer la vitesse moyenne v pour que le coût d'un trajet soit minimum. Quel est, alors, ce coût ?

(6 points sur 20 dans une épreuve de quatre heures).

Ce n'est pas la première fois qu'un sujet de baccalauréat s'inspire très directement d'un exercice d'un livre et après tout pourquoi pas, si la transformation est habile ! Bien que là, la coloration "travaux publics" paraisse un peu discutable : plutôt que de faire faire un trajet aussi important, un bon gestionnaire, suivant la taille du chantier, cherchera un fournisseur plus proche, ou installera une centrale à béton sur place _ Mais ce n'est pas grave ! cela change des résolutions d'équations "classiques" _

82 Circulation sur autoroute

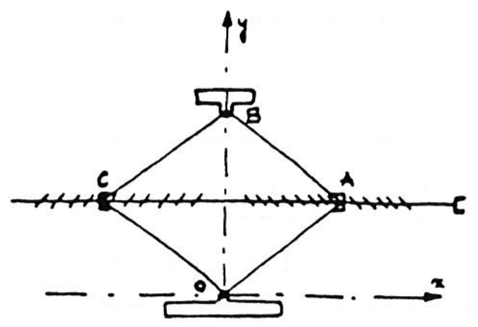
Des études expérimentales d'écoulement d'un flot régulier de véhicules sur autoroute ont conduit à admettre la loi suivante : lorsque deux véhicules roulent dans le même sens à vitesse constante V, dans de bonnes conditions atmosphériques, le premier s'arrêtant après avoir freiné au maximum, pour que le second puisse s'arrêter sans risque de collision, la distance minimale d les séparant doit être telle que :
$d = 8 - 0{,}2\,V + 0{,}003\,V^2$
où d est en mètre et V en km/h.

Préciser l'espacement minimal pour 60 km/h, 120 km/h, 130 km/h.

Le débit horaire (nombre de véhicules passant en un point donné pendant une heure) d'une file de véhicules circulant à vitesse constante et à intervalles égaux aussi réduits que possible est donc :
$$Q = \frac{1000 \times V}{d}$$ (où V est en km/h et d en mètres).

Écrire Q en fonction de V. Quelle est la vitesse pour laquelle le débit est maximum ? Calculer les valeurs de d et de Q correspondantes.

83 cric de voiture



La figure représente un cric de voiture. Celui-ci est constitué d'un losange déformable OABC. Une vis de manœuvre à « pas contraire » permet, en rapprochant les écrous A et C, de faire monter l'appui B selon l'axe (O*y*).

On donne OA = AB = BC = OC = 25 cm. On appelle *a* l'abscisse de A et *h* l'ordonnée de B. Les conditions de fonctionnement imposent $a > 6$ cm et $h > 10$ cm.

1° Montrer que *h* et *a* sont liés par la relation $h = 2\sqrt{625 - a^2}$. (Représenter graphiquement la fonction $x \mapsto 2\sqrt{625 - x^2}$ pour x variant de 0 à 25, dans un repère orthonormal (unité : 0,5 cm). Soit Γ la courbe obtenue.

On admet que si, pour tout x de l'intervalle I, $u(x) > 0$ la dérivée de la fonction $x \mapsto \sqrt{u(x)}$ est la fonction $x \mapsto \dfrac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$.

Chercher, en tenant compte des conditions de fonctionnement ($a > 6$ cm, $h > 10$ cm), les valeurs maximales pour *a* et pour *h* (à 1 mm près).

2° En montée, à chaque tour de manivelle, *a* diminue de 0,4 cm, et *h* augmente d'une quantité $q(a)$ dépendant de *a*.

a) Calculer $q(a)$ pour les valeurs suivantes de *a* : 10 ; 14 ; 18 ; 22.

Vérifier ces résultats sur la courbe Γ en laissant les constructions effectuées.

b) Justifier l'approximation $q(a) = -0{,}4\, h'(0)$. Utiliser cette approximation pour donner les variations de $q(a)$ en fonction de *a*.

c) On actionne le cric placé sous une voiture pour faire monter celle-ci en tournant la manivelle de façon régulière.

Parmi les propositions suivantes, lesquelles sont justes :

α) la voiture monte régulièrement,

β) c'est au début de la montée que la voiture s'élève le plus vite,

γ) la vitesse de montée de la voiture diminue au fur et à mesure que l'on actionne le cric,

δ) au départ, la vitesse de montée de la voiture augmente, puis, à partir d'une certaine valeur, elle diminue.

PROBLEMES A SUPPORT ECONOMIQUE

Pour terminales

Les deux problèmes suivants proposés en série B à Paris au baccalauréat en 1987 et 1988 ont été jugés difficiles par les candidats _

84. en 1987

Une entreprise fabrique une quantité x d'un certain produit. On suppose que x est un réel compris entre 0 et 20 ($0 \leqslant x \leqslant 20$) et que le coût de production $f(x)$, exprimé en milliers de francs, est donné par :

$$f(x) = x^3 - 30\,x^2 + 300\,x\,.$$

On note C la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthogonal $(O\,;\,\vec{i}, \vec{j})$ (unités : 1 cm sur l'axe Ox, 1 cm pour 100 000 F sur l'axe Oy).

A. *Étude du coût de production*

1. *a.* Calculer la dérivée f' de f et étudier le sens de variation de f sur l'intervalle $I = [0,20]$.

   b. Compléter le tableau de valeurs suivant :

x..........	2	5	8	10	12	15	18	20
$f(x)$........	488	875				1 125	1 512	2 000

2. *a.* Déterminer le réel b non nul de I tel que la tangente T à C au point d'abscisse b passe par O.

   b. Étudier le sens de variation de f' sur I; interpréter graphiquement ce résultat en indiquant la position de C par rapport à ses tangentes dans les intervalles $[0,10]$ et $[10,20]$.

3. Tracer la courbe C, en précisant les tangentes aux quatre points d'abscisses 0, 10, 15 et 20.

B. *Étude du bénéfice en fonction de la production*

On suppose que toute la production est vendue à un prix de 84 000 F par unité.

La recette totale g (exprimée en milliers de francs) est alors définie sur I par $g(x) = 84\,x$. Le bénéfice total $h(x)$ est donc donné par $h(x) = g(x) - f(x)$.

1. *a.* Étudier le signe de la fonction h sur l'intervalle I (on déterminera les solutions de l'équation $h(x) = 0$).

   b. Interpréter le résultat obtenu en termes de bénéfice.

2. *a.* Étudier les variations de la fonction h sur l'intervalle I.

   b. En déduire la quantité x_m assurant à l'entreprise un bénéfice maximum. Calculer $h(x_m)$. Donner une valeur décimale approchée de x_m à 10^{-2} près, et la valeur du bénéfice $h(x_m)$, exprimée en francs, et arrondie à l'unité la plus proche.

'85 ,en 1988

PROBLÈME (*sur 11 points*)

On se propose de chercher, pour une entreprise, le meilleur moment pour renouveler son équipement. Dans ce problème tous les coûts seront exprimés en milliers de F.

L'entreprise est équipée de machines-outils toutes identiques. Chacune coûte à l'achat 30 milliers de F et se revend au bout d'une durée t d'utilisation (exprimée en années) à un prix de $30\,e^{-0,2t}$ milliers de F.

Le coût d'utilisation d'une machine comprend donc un *coût d'investissement* :

$$I(t) = 30 - 30\,e^{-0,2t}.$$

Il comprend d'autre part *un coût d'entretien* $E(t)$ qui sera précisé dans la question I.1.

Le coût total d'utilisation de la machine pour une durée t est donc :

$$f(t) = I(t) + E(t)$$

On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthogonal (unités : 3 cm pour un an en abscisse; 0,5 cm pour un millier de F en ordonnée).

I. *Étude du coût total.*

1. Calcul du coût d'entretien.

   Le coût instantané d'entretien d'une machine d'âge x $(0 \leqslant x \leqslant 6)$ étant $\varphi(x) = \frac{1}{2} e^{0{,}5x}$, son coût total d'entretien depuis son achat et pour une durée t d'utilisation s'écrit $E(t) = \int_0^t \varphi(x)\, dx \quad (0 \leqslant t \leqslant 6)$.

   Montrer que $E(t) = e^{0{,}5t} - 1$.

2. *a.* Expliciter le coût total $f(t)$ où t appartient à $[0, 6]$;

   b. Calculer $f'(t)$ et préciser le sens de variation de f.

3. *a.* Soit g la fonction définie sur $[0, 6]$ par :

$$g(t) = 4{,}8\, e^{-0{,}3t} - e^{0{,}5t}.$$

   Préciser le sens de variation de g et montrer que g s'annule en un point α et un seul de $[0, 6]$, dont on donnera la valeur exacte, puis une valeur décimale approchée à 10^{-2} près;

   b. Exprimer $f''(t)$ à l'aide de $g(t)$. En déduire le signe de $f''(t)$. Interpréter graphiquement ce résultat en indiquant la position de la courbe $\mathscr{C}$ par rapport à ses tangentes sur chacun des intervalles $[0, \alpha]$ et $[\alpha, 6]$.

4. Représenter sur papier millimétré la courbe $\mathscr{C}$ et ses tangentes aux trois points 0, α et 6.

   On pourra utiliser le tableau ci-dessous de valeurs de f (approchées à 10^{-3} près).

t	0	1	2	3	4	5	6
$f(t)$.........	0	6,087	11,609	17,017	22,909	30,146	40,050

II. *Étude du coût moyen.*

Le coût moyen d'utilisation d'une machine au bout d'une durée t est :

$$c(t) = \frac{f(t)}{t}, \qquad \text{où} \qquad 0 < t \leqslant 6.$$

On se propose de déterminer le minimum de ce coût.

1. *a.* Étant donné le point $M(t)$ d'abscisse t sur la courbe $\mathscr{C}$, montrer que $c(t)$ est le coefficient directeur de la droite $OM(t)$;

   b. Estimer graphiquement le meilleur moment pour renouveler le matériel de production.

2. Étude des variations de c.

   Soit z la fonction définie sur $[0, 6]$ par $z(t) = t f'(t) - f(t)$.

   a. Exprimer $z'(t)$ à l'aide de $f''(t)$. En déduire les variations de z (on ne demande pas de représenter la courbe représentative de z);

   b. Montrer que sur $[\alpha, 6]$ z s'annule en un point β et un seul.

   Calculer $z(3{,}2)$ et $z(3{,}3)$. En déduire un encadrement de β;

   c. Exprimer $c'(t)$ à l'aide de $z(t)$. En déduire que c admet un minimum que l'on précisera.

A. Étude de fonctions

Soient f et g les fonctions numériques définies sur $[0, +\infty[$ par :

$$f(t) = \frac{36}{8 + e^{-t}} \quad \text{et} \quad g(t) = 2\ln(t+1) + 2.$$

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ [unité graphique : 2 cm].

1. Étude de f et g.

a. Étudier les variations de f et g. Préciser les limites de f et g quand $t \to +\infty$.

b. Soient C la courbe représentative de f, Γ celle de g.

Tracer la tangente à C et la tangente à Γ au point d'abscisse $t = 0$.

Tracer C et Γ ; on se limitera pour le tracé à l'intervalle $[0, 5]$ et on s'appuyera sur le tableau de valeurs approchées suivant, après l'avoir complété :

t	0	1	2	3	4	5
$f(t)$		4,30		4,47		4,49
$g(t)$		3,39		4,77		5,58

c. On pose $h = g - f$. Calculer la dérivée h' de h et montrer que pour tout $t \geq 0$:

$$e^t h'(t) \geq \frac{2e^t}{t+1} - \frac{9}{16}.$$

En déduire que h est strictement croissante (on admettra que pour tout $t \geqslant 0$, $e^t \geqslant t + 1$).

d. Montrer que h s'annule en un point $a \in [0, \infty[$ et un seul.

Montrer que a appartient à l'intervalle $[2, 3]$.

2. Calcul d'intégrales.

a. Vérifier que $f(t) = \dfrac{36\,e^t}{8\,e^t + 1}$, puis calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^5 f(t)\,dt$. (On en donnera la valeur exacte, puis un encadrement d'amplitude 10^{-3}).

b. Vérifier que $\dfrac{t}{t+1} = 1 - \dfrac{1}{t+1}$. À l'aide d'une intégration par partie, calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^5 g(t)\,dt$.

(Donner la valeur exacte, puis un encadrement d'amplitude 10^{-3}.)

B. Étude d'un phénomène économique

Un plan de restructuration industriel, étalé sur dix ans, entraîne, d'une part, des suppressions d'emplois, d'autre part, la création d'emplois nouveaux. L'unité de temps étant l'année, on estime que sur une période $[t, t+1[$, pour $0 \leq t \leq 9$, le nombre d'emplois supprimés peut s'exprimer, en milliers d'emplois, par $f(t)$, et que, pendant la même période, et avec les mêmes unités, le nombre d'emplois créés est $g(t)$.

Ces deux phénomènes, suppression et création d'emplois, sont supposés se réaliser continûment au cours du temps. On s'intéresse ici aux cinq premières années.

1. Par lecture graphique, préciser si le plan de restructuration induit à l'instant t, pour la période $[t, t+1[$ (où $0 \leq t \leq 5$), une perte ou un gain d'emplois dans le secteur industriel considéré.

   Exprimer ce solde en fonction de $f(t)$ et $g(t)$.

2. On admet que, sur ces cinq ans, le plan de restructuration induit une variation dans le nombre d'emplois assimilable à :

$$\int_0^5 (g(t) - f(t))\,dt.$$

   Exprimer le bilan du plan de restructuration sur les cinq premières années.

87 Session 1990

PROBLÈME *(sur 11 points)*

Étude d'une fonction.

Soit la fonction numérique f définie sur $[0\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{3}{4}x + e^{-\frac{3}{4}x+\frac{1}{2}}.$$

Le plan P est rapporté à un repère orthonormé $(O\,;\vec{i},\vec{j})$ [unité graphique : 4 cm]. On note C la courbe représentative de f dans P.

1. *a.* Résoudre l'équation : $1 - e^{-\frac{3}{4}x+\frac{1}{2}} = 0$.

   Résoudre l'inéquation : $1 - e^{-\frac{3}{4}x+\frac{1}{2}} \geqslant 0$.

   Calculer $f'(x)$, où f' désigne la fonction dérivée de f.

   Étudier les variations de f et montrer que f admet un minimum lorsque x vaut $\frac{2}{3}$.

   b. Étudier la limite de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$.

2. *a.* Tracer la courbe C : on se limitera à l'intervalle [0,4], et on s'appuiera sur le tableau de valeurs approchées suivant :

x	0	1	2	3	4
$f(x)$	1,649	1,529	1,868	2,424	3,082

   b. Tracer la droite Δ d'équation $y = \frac{4}{5}x$. Elle coupe C en un point A d'abscisse α dont on donnera, par lecture graphique, un encadrement d'amplitude 0,5.

Application économique.

Une entreprise fabrique des objets à l'aide d'une machine à emboutir. La fonction f précédente représente le coût d'utilisation de cette machine en fonction de la quantité x d'objets produits. On exprime x en centaines d'objets et $f(x)$ en milliers de francs.

1. Quel nombre d'objets, à l'unité près, faut-il produire pour que le coût d'utilisation soit minimum ?

2. Un objet fabriqué par cette machine est vendu 8 F pièce.

   a. Exprimer le bénéfice $g(x)$, en milliers de francs, obtenu par la vente de x centaines d'objets.

   Vérifier que : $g(x) = \frac{1}{20}x - e^{-\frac{3}{4}x+\frac{1}{2}}$.

   b. Étudier les variations de la fonction g dans $[0,+\infty[$.

   c. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ a pour unique solution le nombre α. Prouver que : $3{,}13 \leqslant \alpha \leqslant 3{,}14$.

   d. En déduire la quantité minimale d'objets à produire afin que cette entreprise réalise un bénéfice sur la vente des objets.

Baccalauréat G_2G_3, 1990

88 Une entreprise fabrique et commercialise un certain produit. Soit x la quantité produite en tonnes ; x est un réel compris entre 0 et 13.

Le coût de production, exprimé en milliers de francs, est donné par :

$$p(x) = x^3 - 15x^2 + 76x.$$

L'entreprise vend chaque tonne de sa production 40 000 F. La recette est donc, en milliers de francs, donnée par :

$$r(x) = 40x$$

et le bénéfice, en milliers de francs, est :

$$b(x) = r(x) - p(x).$$

1°) Etude du coût de production $p(x)$.

a) Calculer $p'(x)$ et étudier le sens de variation de la fonction p sur $[0, 13]$.

b) Tracer la courbe représentative C de la fonction p dans le plan rapporté à un repère orthogonal (unités graphiques : 1 cm pour 1 tonne en abscisse, 2 cm pour 100 000 francs en ordonnée), en précisant la tangente au point d'abscisse 5.

On pourra utiliser le tableau de valeurs suivant :

x	1	2	3	5	8	10	11	12	13
$p(x)$	62	100	120	130	160	260	352	480	650

c) Déduire de ce qui précède le coût de production de la troisième tonne, de la douzième tonne.

2°) Etude du bénéfice.

a) Dans le même repère, tracer la droite d'équation $y = 40x$. Déterminer graphiquement la position de cette droite par rapport à la courbe C.

b) En déduire les valeurs de x pour lesquelles l'entreprise réalise effectivement un bénéfice.

3°) Détermination du bénéfice maximum.

a) Etudier les variations de la fonction b sur $[0, 13]$.

b) En déduire la production x_0 qui assure à l'entreprise un bénéfice maximum. Donner une valeur approchée de x_0 à 10^{-2} près. Donner une valeur arrondie à 1 000 francs près du bénéfice et du coût de production correspondants.

89 A / Cette partie a pour objet l'étude de la fonction f définie sur l'intervalle $I = [0 ; 18]$ par $f(x) = \ln(2x + 1)$.

1°/ Vérifier que f est bien définie sur I.

2°/ Calculer $f'(x)$ et déterminer son signe. Donner le tableau de variation de f.

3°/ Déterminer l'équation de la tangente à la courbe $(\mathscr{C})$ représentant la fonction f au point d'abscisse 0.

4°/ Tracer cette tangente et la courbe $(\mathscr{C})$ dans un repère orthogonal. (Unités: 1 cm sur l'axe des abscisses, 2 cm sur l'axe des ordonnées).

B / Une entreprise construit une quantité x d'appartements $(0 \leqslant x \leqslant 18)$ dont le coût de production est donné par $f(x) = \ln (2x + 1)$ en millions de francs.

Chaque appartement étant vendu au prix de 400 000 F l'unité, la recette totale est alors $g(x) = 0,4\ x$ en millions de francs. Le bénéfice de l'entreprise est donc égal à $g(x) - f(x)$.

1°/ Tracer la droite (D) représentant g sur le graphique de la question 4, partie A.

2°/ En examinant le graphique, dire si l'entreprise est bénéficiaire quand elle vend : 5 appartements ? 15 appartements ?

3°/ En s'aidant de la représentation graphique, déterminer la quantité minimale d'appartements que doit vendre l'entreprise pour être bénéficiaire.

90. D'après une épreuve de BTS

. *Où l'on utilise une fonction exponentielle en logistique.*

L'objectif de cet exercice est l'étude d'une modélisation éventuelle en logistique automobile. Le tableau ci-dessous décrit une évolution du parc automobile français en ce ce qui concerne les voitures particulières et commerciales. Les données font référence au 1er janvier de l'année.

Année	*Effectif*
1895	300
1900	2 897
1930	1 109 000
1939	1 900 000
1960	4 950 000
1970	11 860 000
1980	18 440 000
1981	19 130 000

(Source : *Quid* 1989.)

En admettant que le parc automobile français soit régi par une loi de type

$$t \mapsto \frac{X_0}{1 + e^{a - bt}},$$

où t désigne le rang de l'année a, b, X_0 des constantes réelles, on se propose de calculer ces différents paramètres à partir de trois données étalées sur près d'un siècle.

1° On impose les hypothèses suivantes :

• l'origine est l'année 1900, le nombre de véhicules circulant est donné pour $t \in [-5, 81]$ par

$$f(t) = \frac{X_0}{1 + e^{a - bt}},$$

• t est considéré comme un réel mais on ne retient que les valeurs entières pour $f(t)$,

• on utilise les données simplifiées suivantes :

Année	t	$f(t)$
1900	0	2 900
1940	40	$1{,}9 \cdot 10^6$
1980	80	$18 \cdot 10^6$

a) Soient $A = e^a$ et $B = e^{-40b}$.
Montrer que l'on a :

$$\begin{cases} X_0 = 2\,900(1 + A) \\ X_0 = 1{,}9 \cdot 10^6(1 + AB) \\ X_0 = 18{,}5 \cdot 10^6(1 + AB^2). \end{cases}$$

b) En utilisant la méthode de comparaison pour les deux premières égalités, montrer que

$$A = \frac{1{,}897\,1 \cdot 10^6}{2\,900 - 1{,}9 \cdot 10^6 \cdot B}.$$

c) En utilisant la méthode de comparaison pour les deux dernières égalités et le résultat précédent, montrer que B vérifie l'équation :

$$35\,096\,350B^2 - 35\,144\,490B + 48\,140 = 0.$$

d) Après avoir vérifié que $B = 1$ est solution de cette équation, montrer que cette solution ne satisfait pas le système initial.

e) Calculer alors les réels a, b et X_0 correspondant à l'autre solution de l'équation obtenue en *c*).

2° Pour $t \in [-5, 81]$ soit :

$$f(t) = \frac{1{,}872\,5 \cdot 10^7}{1 + e^{8{,}77 - 0{,}165t}}.$$

a) Étudier les variations de la fonction f.

b) Tracer la courbe représentative de f et placer sur le graphique, les points correspondant aux données réelles de l'énoncé.

c) En admettant que cette loi traduise effectivement l'évolution du parc automobile français pour les années futures, calculer $\lim_{t \to +\infty} f(t)$, et donner votre interprétation de ce résultat en terme d'économie de marché.

Réponses :

1° *e*) $a = 8{,}77...$

$b = 0{,}165...$

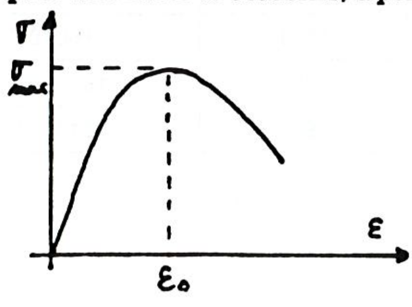
$X_0 = 18\,724\,703{,}4...$

2° $\lim_{t \to +\infty} f(t) = 18\,725\,000.$

FAMILLES DE FONCTIONS

91 **Nous avons même rencontré (dans une notice technique) des familles de fonctions**

En laboratoire on compare la fragilité de deux bétons, comportant par exemple plus ou moins de ferraille, à partir de courbes "contraintes déformations" :



En abscisse on porte les raccourcissements relatifs ε, en pourcentage, obtenus pour un échantillon de béton subissant une contrainte σ exprimée en Mega pascals.

($\varepsilon = \dfrac{\text{raccourcissement}}{\text{longueur initiale}}$ et σ est une pression)

On obtient des courbes comme celles de la figure où ε_0 est le raccourcissement correspondant à la pression maximale σ max .

On pose alors $x = \dfrac{\varepsilon}{\varepsilon_0}$, x varie dans l'intervalle [0;2,5]

et $y = \dfrac{\sigma}{\sigma_{max}}$, y varie dans l'intervalle [0,1]

et on construit de nouvelles courbes.

M. Sargin, de l'Université du Ontario, a montré que les courbes obtenues pouvaient être ajustées par celles d'équations :

$$y = \frac{kx - x^2}{1 + (k-2)x} \qquad (1) \qquad \text{et} \qquad y = \frac{kx + (k-2)x^2}{1 + (k-2)x + (k-1)x^2} \qquad (2)$$

k est un coefficient caractérisant la fragilité du béton et qui prend des valeurs entre 1 et 3. (si k est voisin de 1 on a des bétons fragiles, si k est voisin de 3 on a des bétons qui peuvent être plus étirés sans se rompre).

<u>Exercice</u>

pour x élément de [0;2,5] construire les courbes des familles (1) et (2) obtenus pour k = 1 , k = 2, k = 3.

CHAPITRE 7

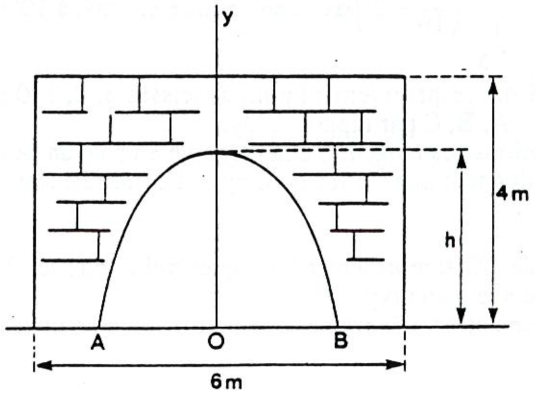
APPLICATIONS DU CALCUL INTEGRAL

CALCULS D'AIRES

92 série B *septembre 1990*

cela ressemble à un exercice pour F4...mais ce n'est pas...

On se propose de construire un mur rectangulaire de 6 m de longueur et 4 m de hauteur, et comportant une ouverture limitée par un arc de parabole de hauteur h: on suivra la description sur le schéma ci-dessous (échelle 1/100).



On suppose que Oy est axe de symétrie de la figure, et que les points A et B sont chacun à 1 m des extrémités du mur. Pour des raisons de sécurité, l'aire de l'ouverture ne doit pas dépasser le tiers de l'aire totale du mur (ouverture comprise). On veut déterminer la hauteur maximum de l'ouverture.

On choisit un repère orthonormé (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$); l'axe des abscisses passe par A et B, l'axe des ordonnées est porté par (Oy).

1. L'équation de la parabole est de la forme $y = ax^2 + c$; déterminer c puis a.

2. Calculer, en fonction de h, l'aire de l'ouverture. En déduire la valeur maximum que peut prendre h.

93 D'après une épreuve de BTS

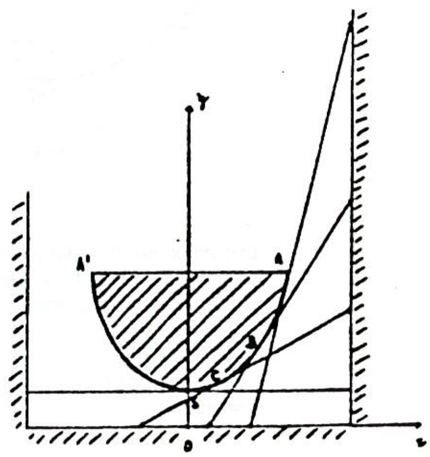
Dans une cour rectangulaire de 24 m sur 30 m fermée par un mur sur 3 côtés, on donne des spectacles en plein air.

Pour abriter la scène du soleil, on tend un velum (une bâche). Ce velum est tendu dans un plan horizontal (H) par 7 filins ; chaque filin rectiligne est lui même tendu entre deux crochets fixés aux murs dans le même plan que (H) conformément au croquis suivant (qui n'est pas la figure exacte) :

Le mur du fond mesure 24m.

On rapporte le plan [H] au repère (O, x, y) défini par :

- l'axe Ox est porté par le mur du fond
- l'axe Oy est l'axe de symétrie de la cour
- l'origine O est donc le milieu du mur du fond



<u>Velum</u> :

C'est une pièce de toile dont le contour est formé d'un segment [A , A'] de longueur 12 m et de l'arc de parabole d'équation

$$\begin{cases} y = \dfrac{x^2}{16} + 2 \\ -6 \leq x \leq 6 \end{cases} \quad \text{dans } (O, x, y)$$

<u>Filins</u> :

Ils sont fixés au velum tangentiellement au bord parabolique en chacun des sept points A, B, C, S, C', B', A'.

-1°) Calculer la quantité $I = \displaystyle\int_{-3}^{+3} \left(\frac{x^2}{16} + 2\right) dx$; en déduire en m^2, à 10^{-1} près par excès, la surface du velum

2°) Les points A, B, C, S ont respectivement pour abscisses 3, 2, 1, 0 dans le repère Oxy, A', B', C' sont les symétriques de A, B, C par rapport à Oy.

a) Déterminer les équations des tangentes à la parabole en chacun de ces points.

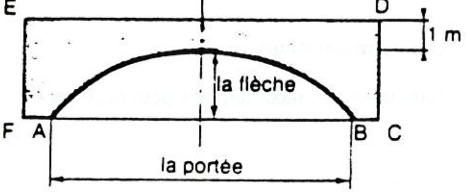
b) En déduire les coordonnées dans le repère Oxy des extrémités de ces 4 filins passant par A, B, C ou S.

3°) En prenant pour échelle 1/200 représenter sur papier millimétré les 3 murs de la cour, la forme du velum et les 7 filins dans le plan Oxy.

En utilisant cette représentation, déterminer une estimation en mètres de la longueur de filin nécessaire.

94 *On fait le pont ! (en mai ?)*

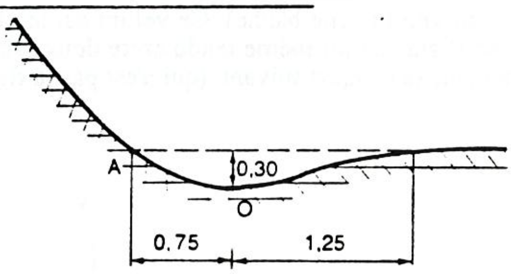
On considère une arche de pont parabolique de 24 mètres de portée et de 6 mètres de flèche :



1° Déterminer dans un repère bien choisi une équation de la forme $y = ax^2$ de l'arc de parabole AB.

2° Calculer une valeur approchée, en mètres, à 10^{-2} près, de l'aire de la surface ABCDEF de l'arche.

95 *Où on plonge dans un fossé !*



Les eaux, qui ruissellent sur la chaussée et les accotements, s'écoulent dans les terrains voisins quand la route est en remblai, mais, dans les sections en déblai, elles sont nécessairement recueillies et évacuées par des fossés.

Les dimensions des fossés dépendent du volume d'eau à évacuer.

On se propose de calculer le volume en m^3 par mètre linéaire, du fossé dont la coupe est représentée sur la *figure* . Les dimensions sont en mètres.

On munit le plan de la figure d'un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1° On admet que l'arc OA est une partie d'une parabole de sommet O, d'équation de la forme $y = kx^2$, où k est un nombre réel que l'on déterminera.

2° On admet que l'arc OC est une partie d'une courbe C d'équation de la forme $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ où a, b, c, d sont des nombres réels.

Déterminer les nombres réels a, b, c, d sachant que la courbe admet au point O et au point C une tangente horizontale.

3° Déterminer l'aire en m^2, à 10^{-2} près, de la coupe AOC. En déduire le volume en m^3, par mètre linéaire, du fossé.

96 BACCALAUREAT TECHNOLOGIQUE F9
ENERGIE ET EQUIPEMENT SESSION 1990

PROBLEME

On se propose d'étudier les variations de la résistance thermique d'un manchon, en fonction de son épaisseur.

I - Soit la fonction définie sur $D = \left[\frac{1}{10} ; +\infty\right[$ par : $f(x) = \ln(10x) + \frac{1}{3x}$

1/ Quelle est la limite de f en $+\infty$?

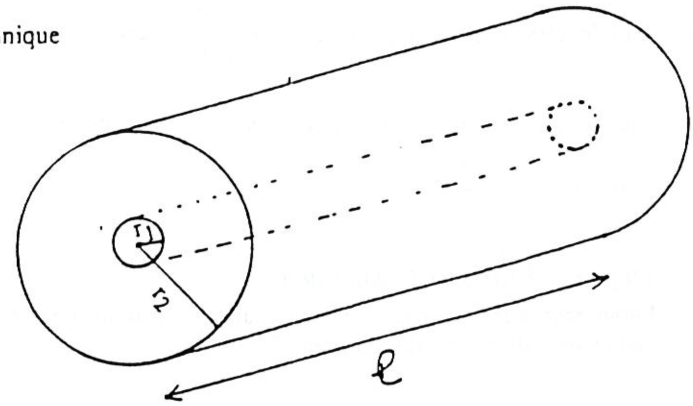
2/ Etudier les variations de f sur D et tracer sa courbe représentative (C) dans un repère orthonormé d'unité 2 cm

3/ Vérifier que F définie par $F(x) = x(\ln(10x) - 1) + \frac{\ln x}{3}$ est une primitive de f sur D.

En déduire l'aire de la partie du plan limitée par (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations

$x = \frac{1}{10}$ et $x = 2$

II - Application technique



Le manchon a une longueur fixée l, un rayon intérieur fixé r_1 et un rayon extérieur r_2 variable ($r_2 \geq r_1$).

Les nombres λ et h_e sont des constantes pour un matériau donné.

La résistance thermique du manchon est la somme de deux composantes appelées résistance conductive $\mathcal{R}_c$ et résistance de convection rayonnement $\mathcal{R}_e$ décrites dans les questions 1/ et 2/.

On se propose d'étudier comment varie la résistance thermique lorsqu'on fait varier le rayon extérieur du manchon.

1/ Dans le cas de la figure, la résistance conductive $\mathcal{R}_c$ a pour valeur :

$$\mathcal{R}_c = \frac{1}{\lambda} \times \frac{1}{2\pi l} \times \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r}$$

Calculer l'intégrale $\int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r}$ en fonction de r_1 et r_2.

2/ La résistance de convection rayonnement est inversement proportionnelle à l'aire de la surface externe du manchon suivant la formule :

$$\mathcal{R}_e = \frac{1}{h_e} \times \frac{1}{\text{aire externe}}$$

Calculer $\mathcal{R}_e$ en fonction de h_e , r_2 et ℓ

(Nota : les bouts du manchon n'interviennent pas dans le calcul de l'aire externe).

3/ Vérifier que la résistance thermique totale, somme de $\mathcal{R}_c$ et $\mathcal{R}_e$ est donnée par la formule :

$$\mathcal{R} = \frac{1}{\lambda} \times \frac{1}{2\pi l} \times \ln \frac{r_2}{r_1} + \frac{1}{h_e} \times \frac{1}{2\pi r_2 l}$$

On donne au manchon les dimensions $l = 1/\pi$ m et $r_1 = 0{,}01$ m

Exprimer $\mathcal{R}$ en fonction de λ , h_e et r_2 seulement.

4/ On fabrique le manchon en polystyrène extrudé. Les constantes λ et h_e ont alors les valeurs suivantes :

$\lambda = 0{,}03$ w/m. degré (valeur normale à sec)

$h_e = 15$ w/m^2 degré.

a/ Exprimer $\mathcal{R}$ en fonction de r_2 seulement.

b/ On pose $r_2 = x$ et on appelle g la fonction qui à x fait correspondre $\mathcal{R}$.

Montrer que g est une fonction croissante sur l'intervalle $\left[\frac{1}{100} ; +\infty \right[$

5/ On suppose l'isolant mouillé ; la valeur de λ devient $\lambda = 0{,}5$ w/m.degré, h_e reste la même.

a/Montrer que $\mathcal{R} = \ln (100\, r_2) + \dfrac{1}{30\, r_2}$

b/ On pose alors $10 r_2 = x$; écrire $\mathcal{R}$ en fonction de x.

Utiliser la partie I pour décrire les variations de la résistance thermique $\mathcal{R}$ en fonction du rayon externe du manchon. Pour quelle valeur de r_2 est-elle minimum ?

CALCUL DE VOLUME

De nombreux ouvrages d'art, piliers de ponts, chateaux d'eau, barrages, tour de réfrigération _ ont des formes géométriques simples dont le calcul intégral permet de calculer le volume.

Dans la pratique, les techniciens utilisent le pous souvent la formule des trois niveaux_

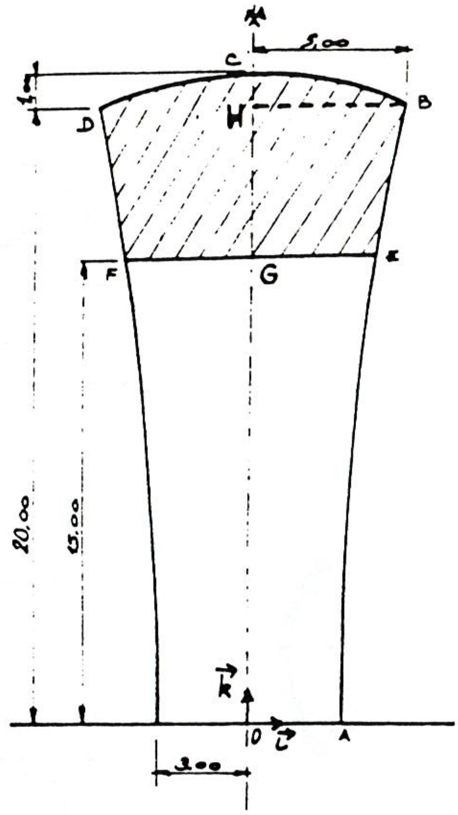
97 Le volume de la cuve du château d'eau

Exercice 1 de l'épreuve du baccalauréat F4 (génie civil) de juin 1988.

EXERCICE 1 : (5 points)

Le but de l'exercice est de calculer le volume V du reservoir du château d'eau dont la coupe par un plan de symetrie vertical est representee ci-contre. (les cotes etant exprimees en mètres). Ce plan est rapporte a un repere orthonorme (O, $\vec{i}$, $\vec{k}$) dans lequel le point A a pour coordonnees (3,0).

La cuve du reservoir correspond à la zone hachurée. Le volume V est obtenu par la revolution de la partie (GEBC) autour de l'axe (OC)



1°) On appelle V_1 le volume obtenu par la révolution de la partie (GEBH) autour de (OC)

Ce volume est donné par : $V_1 = \int_{15}^{20} S(z)\,dz$

ou S(z) designe l'aire du disque, section de la cuve par le plan parallele a la base correspondant a la hauteur z.

On admet que : $S(z) = 9\pi\left(\frac{z^2}{225} - 1\right)$

Calculer le volume V_1.

2°) a: Sachant que BC est un arc d'une parabole ayant une equation de la forme : $z = \alpha x^2 + \beta$, determiner les reels α et β.

b) En deduire que le volume V_2 obtenu par la revolution de la partie (CBH) autour de (OC) est :

$$V_2 = \int_{20}^{21} 25\pi(21 - z)\,dz$$

3°) Determiner a 0,5 m³ pres le volume V de la cuve.

98 BARRAGE DE CHUTE EN MONTAGNE

Programme abordé :

En geometrie :

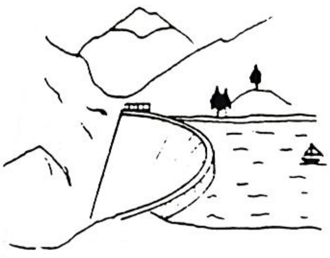
- Analyse de la forme d'un solide ;
- Calcul de volume.

En analyse :

- Utilisation du calcul intégral pour calculer le volume d'un solide de révolution.

Le croquis et la *figure 1* representent un barrage de chute pour une vallée étroite encaissee entre des parois rocheuses.

L'epaisseur du mur du barrage est relativement faible par rapport à la hauteur aussi le barrage a-t-il ete construit en courbe, la convexite etant tournee vers l'amont, pour beneficier de l'effet de voûte.



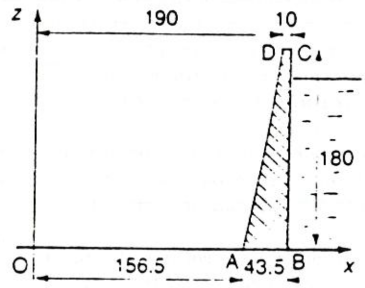


fig. 1

L'espace est muni d'un repere orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ et la *figure 40* est realisee dans le plan rapporte au repere $(O, \vec{i}, \vec{k})$ d'axes $x'Ox$ et $z'Oz$; les dimensions sont exprimees en metres.

La *figure 2* est une vue de dessus montrant que le barrage a eté construit en « quart de cercle ».

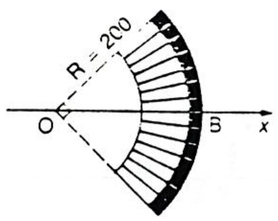


fig. 2

A *Dans cette partie on remplace l'arc de courbe AD par un segment de droite*

Le mur du barrage est donc un solide engendré par la rotation d'un quart de tour de la surface ABCD representee sur la *figure 40* autour de l'axe vertical Oz.
Le rayon OB est 200 mètres.

En calculant le volume d'un tronc de cône et le volume d'un cylindre, calculer le volume de la paroi du barrage en m³.

B *Dans cette partie on considere que AD est un arc de parabole*

1° Determination d'une equation de l'arc AD.

Dans le plan rapporte au repere $(O, \vec{i}, \vec{k})$ on admet que l'arc AD est l'ensemble des points M de coordonnees (x, z) tels que $156.5 \leq x \leq 190$ et $z = ax^2 - b$ où a et b sont deux nombres réels dont on donnera une valeur approchee a 10^{-4} pres.

2° Determination du volume de la paroi, en m³.

En utilisant la formule $V = \int S(z)\,dz$, calculer une valeur approchée en m³, à un m³ près, du volume de la paroi du barrage.

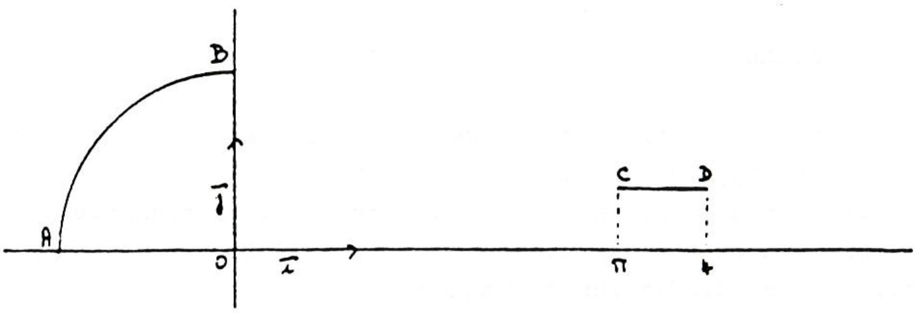
99 UNE AMPOULE

Le but de l'exercice est le calcul du volume d'une ampoule.

Le plan est muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$, unité : 2 cm.

(La figure sera faite sur la même feuille de papier millimétré que celle de l'exercice I)

On donne les points $A(-\frac{3}{2}, 0)$, $B(0, \frac{3}{2})$, $C(\pi, \frac{1}{2})$ et $D(4, \frac{1}{2})$ et l'arc de cercle AB de centre O, comme l'indique la figure :



1°) On veut raccorder l'arc AB au segment [CD] par une courbe admettant en B la même tangente que le cercle, et tangente en C à la droite (CD).

Soit f la fonction numérique définie sur $[0, \pi]$ par

$$f(x) = \frac{1}{2}\cos x + 1,$$

Démontrer que la courbe d'équation $y = f(x)$ répond aux conditions posées.

Tracer cette courbe, l'arc AB et le segment [CD] dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

2°) Démontrer que, pour tout réel x,

$$\left(\frac{1}{2}\cos x + 1\right)^2 = \frac{1}{8}\cos 2x + \cos x + \frac{9}{8}.$$

3°) Soit E l'ensemble des points du plan limité par la courbe ABC, l'axe (O, i) et la droite d'équation $x = \pi$.

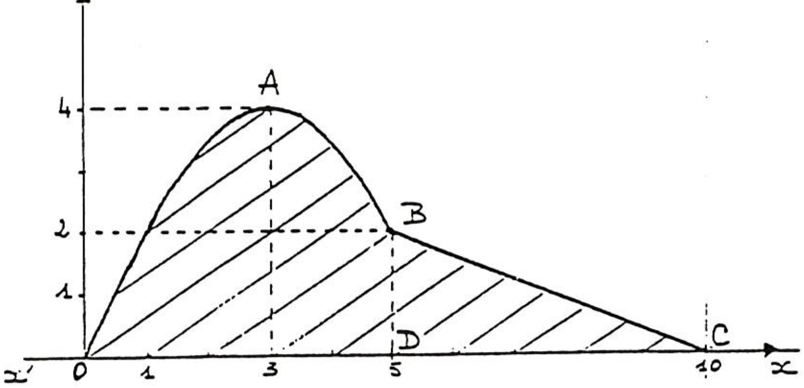
Calculer le volume V du solide de révolution engendré par la rotation de E autour de l'axe $(O, \vec{i})$. On rappelle que le volume V de la demi-boule de rayon r est donnée par $V = \frac{2}{3}\pi r^3$.

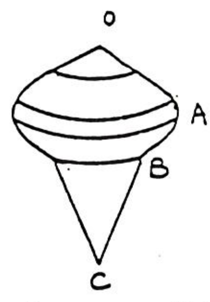
On donnera la valeur exacte de V (en cm^3), puis à l'aide de la calculatrice, une valeur approchée à 10^{-3} près.

BACCALAUREAT TECHNOLOGIQUE

100 UNE TOUPIE

Le but de cet exercice est de calculer le volume d'une toupie. On obtient un modèle réduit de cette toupie par rotation autour de l'axe des abscisses (xx') de la surface hachurée ci-dessous (le modèle réduit représente la toupie en position "couchée").





toupie en position "debout"

Unité graphique : 1 cm.

On donne les quatre points A(3,4) ; B(5,2) ; C(10,0) et D(5,0).

La partie inférieure du modèle réduit est le cône de révolution engendré par le triangle BCD.

La partie supérieure du modèle réduit est engendrée par la surface limitée par une courbe (Γ) ayant l'allure du schéma et vérifiant les conditions suivantes :

. la courbe (Γ) passe par O, A et B

. la courbe (Γ) a une tangente horizontale au point A.

1) Vérifier que la courbe d'équation $y = 4\sin(\frac{\pi x}{6})$ (x variant de 0 à 5) remplit ces conditions. On admet dans la suite que c'est la courbe (Γ).

2) a) En utilisant la formule donnant le volume d'un cône de révolution ou bien en introduisant la fonction dont la courbe représentative est le segment [BC], calculer le volume en cm^3 de la partie inférieure du modèle réduit.

b) Linéariser $\sin^2(\frac{\pi x}{6})$ puis calculer le volume en cm^3 de la partie supérieure du modèle réduit.

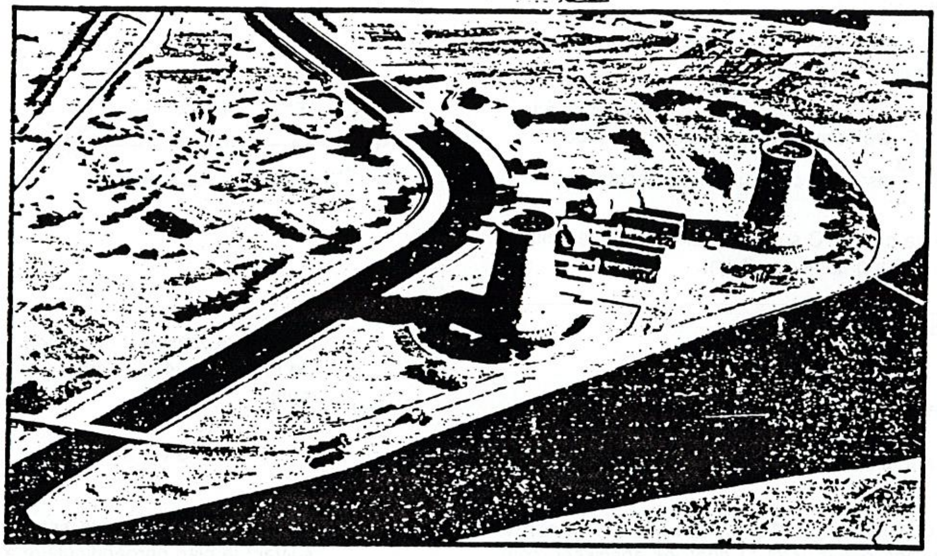
3) Sachant que la hauteur OC de la toupie en vraie grandeur est de 30 cm, calculer la valeur exacte du volume en cm^3 de cette toupie, puis en donner une valeur approchée à 0,1 cm^3 près.

N.B. : On rappelle que :
si f est une fonction continue et positive sur $[a,b]$ et si E est l'ensemble des points $M(x,y)$ du plan tels que :
$a \leq x \leq b$ et $0 \leq y \leq f(x)$ alors le volume V du solide de révolution engendré par la rotation de E autour de (xx') est $V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 \, dx$.

BACCALAUREAT TECHNOLOGIQUE

TOUR DE REFRIGERATION D'UNE CENTRALE NUCLEAIRE

Ou encore : peut-on passer à côté d'une centrale nucléaire étant professeur de mathématiques, sans dire ah! le bel hyperboloïde !



101 *Un exercice au baccalauréat*

Une tour de condenseur a une hauteur $H = 48$ m. Sa base circulaire a un rayon R_1. Son orifice supérieur a un rayon R_2 (*figure 39*).

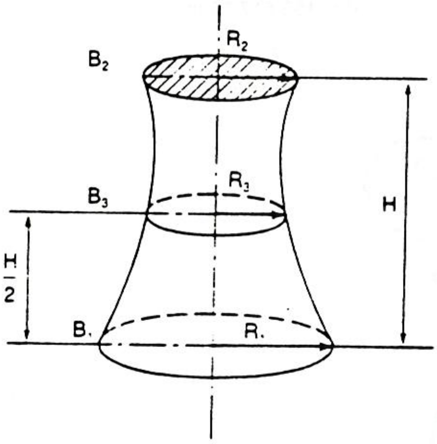


fig. 39 (échelle : 1 cm = 10 m)

Son volume peut être considéré comme le volume du solide de révolution engendré par la rotation autour de l'axe $x'Ox$ du domaine plan hachuré S (*figure 40*).

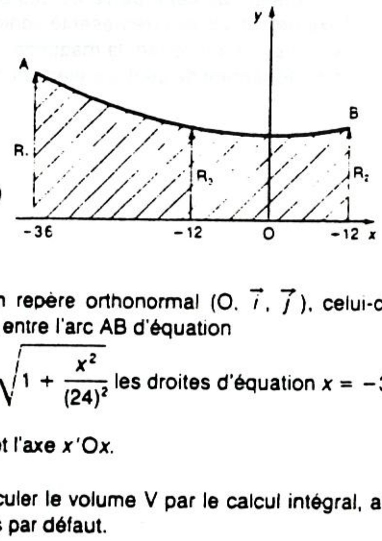


fig. 40

Dans un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$, celui-ci est compris entre l'arc AB d'équation

$y = 12\sqrt{1 + \frac{x^2}{(24)^2}}$ les droites d'équation $x = -36$ et $x = 12$ et l'axe $x'Ox$.

1° Calculer le volume V par le calcul intégral, au m^3 près par défaut.

2° On désire retrouver ce volume par la formule suivante, dite des trois niveaux :

$$V' = \frac{H}{6}(B_1 + B_2 + 4B_3).$$

Calculer les rayons R_1, R_2, R_3 respectivement de la base, de l'orifice, de la section médiane (H/2). Calculer les aires B_1, B_2, B_3 de la base, de l'orifice, de la section médiane.

Quelle est la valeur du volume V', donnée par la formule des trois niveaux ?

(Baccalauréat F_2 - F_3, groupe 4, 1988)

102 *Un problème au baccalauréat*

Le but du problème est de calculer le volume d'une cheminée de refroidissement de centrale électrique.

Première partie

On considère la fonction f définie sur $]-\infty, 5[$ par :

$$f(x) = \frac{x}{2} - \frac{3}{2} + \frac{2}{(x-5)}$$

Soit C la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1° Étudier les variations de f et dresser son tableau de variation sur $]-\infty, 5[$.

2° Donner une équation de l'asymptote verticale à la courbe C. Démontrer que la droite d'équation $y = \frac{x}{2} - \frac{3}{2}$ est asymptote oblique à la courbe C.

3° Tracer la courbe C sur une feuille de papier millimétré (unité graphique : 2 cm).

Deuxième partie

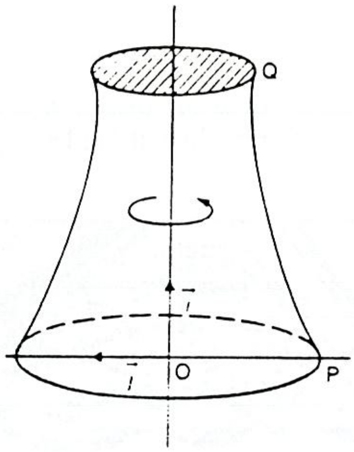
1° *a*) Vérifier que sur $]-\infty, 5[$ on a :

$$[f(x)]^2 = 2 + \frac{(x-3)^2}{4} + \frac{4}{(x-5)^2} + \frac{4}{x-5}.$$

b) En déduire une primitive g de la fonction f^2 sur $]-\infty, 5[$.

2° On considère la portion de la courbe C comprise entre les points P et Q dont les abscisses sont respectivement 0 et 3.5.

Par rotation de cette partie de courbe, autour de l'axe des abscisses (représenté verticalement sur la *figure* '), on obtient la maquette d'une tour de refroidissement de centrale électrique.



a) Calculer le volume V de la maquette.
On rappelle que le volume V est donné par la formule

$$V = \int_0^{3.5} S(x)\,dx.$$

où $S(x)$ est l'aire de la section de la maquette suivant le plan perpendiculaire à l'axe de rotation $(O, \vec{i})$ au point d'abscisse x.

b) Si la hauteur de la tour en vraie grandeur est de 70 mètres, calculer son volume en m^3.

(Baccalauréat F., groupe 2)

Réponse :
$V \approx 158\ 617{,}56\ m^3$.

PROBLEMES A SUPPORT PHYSIQUE

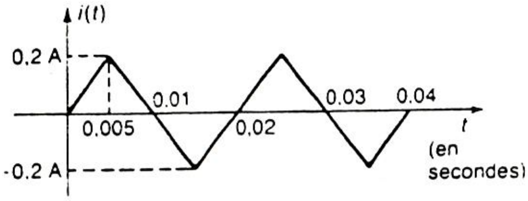
103 Un résistor ($R = 10\ \Omega$) est alimenté par un courant dont l'intensité i est représentée en fonction du temps t par la courbe de la *figure*

1° Quelle est la période de ce courant ?

2° Donner l'expression de i en fonction de t lorsque $0 < t < 0{,}005$ s, $\quad 0{,}005$ s $< t < 0{,}015$ s.

3° Quelle est la quantité d'électricité q qui a traversé R entre les instants 0 et 0,01 ? entre les instants 0,005 et 0,015 ?

(On rappelle que, entre les instants t_1 et t_2, $q = \int_{t_1}^{t_2} i(t)\,dt$.)



104 Dans chacun des cas (*figures* 1, 2) calculer l'intensité moyenne sur une période T sachant que pour

$0 \leqslant t \leqslant \frac{T}{2}$, $i(t) = I_M \sin \omega t$

avec $\omega = \frac{2\pi}{T}$.

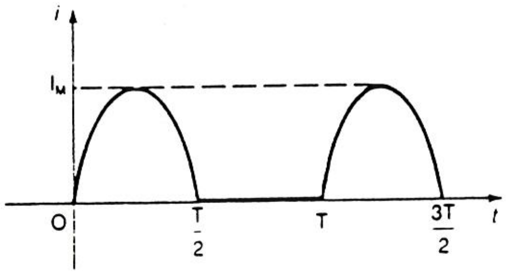


FIG 1

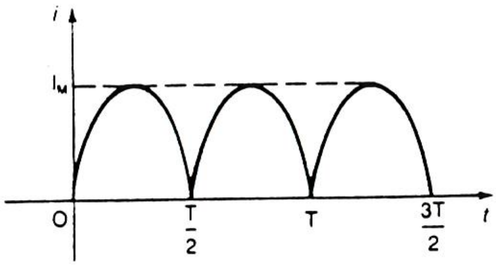


FIG 2

105 Les dessins , représentent la variation de l'intensité i en fonction du temps t pour des courants périodiques de période T.

Calculer l'intensité moyenne et l'intensité efficace dans chacun des cas.

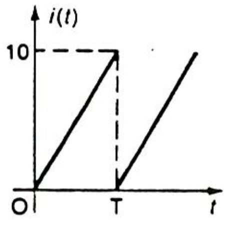


FIG 1

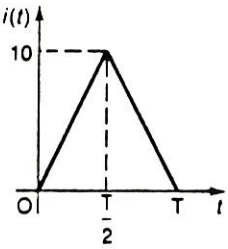


FIG 2

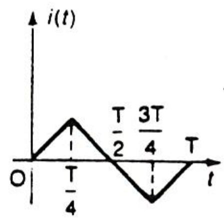


FIG 3

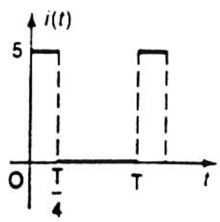


FIG 4

CHAPITRE 8

EQUATIONS DIFFERENTIELLES

EQUATIONS DU PREMIER ORDRE

PHYSIQUE ET CHIMIE

106 Un corps radioactif se désintègre en transformant une partie de ses noyaux.
t est le temps exprimé en jours. $N(t)$ le nombre de noyaux radioactifs à l'instant t.
On établit en physique que la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par $t \to N(t)$ est solution de l'équation différentielle

$$\frac{dN}{dt} = -\lambda N$$

où λ est un nombre réel strictement positif appelé constante radioactive du corps.

1° Soit N_0 le nombre d'atomes à l'instant $t = 0$. Déterminer l'expression de $N(t)$.

2° On appelle « période » ou « demi-vie » de ce corps radioactif le temps T au bout duquel le nombre d'atomes de ce corps a diminué de moitié. Calculer T en fonction de λ.

3° Calculer la constante radioactive de l'iode 131 sachant que sa période est de 8,06 jours.

107 L'atome de radium, en se désintégrant, donne de l'hélium et une émanation gazeuse, le radon, elle-même radioactive.
La masse $m(t)$ d'un échantillon de radium est donc une fonction décroissante du temps t. La « vitesse » de désintégration $m'(t)$ (m' est la dérivée de m) est proportionnelle à la masse de l'échantillon à l'instant considéré :

$$m' = km.$$

a) Déterminer la solution de l'équation différentielle précédente telle que $m(0) = m_0$ (masse initiale de l'échantillon).

b) On observe que la masse de radium diminue de 0,043 % par an.
Déterminer le coefficient k ci-dessus.

c) Montrer qu'il existe un réel T tel que pour tout t de $[0, +\infty[$,

$$m(t + T) = \frac{1}{2}\, m(t). \text{ (On suppose } m_0 \neq 0.)$$

T est dit période du radium ; c'est le laps de temps pendant lequel se désintègre la moitié de la quantité de radium initialement contenue dans un échantillon quelconque.

108 *Ça freine !*

Un disque tournant dans un liquide subit de la part de ce liquide un freinage proportionnel à sa vitesse de rotation angulaire ω.

On a donc l'équation différentielle : $\dfrac{d\omega}{dt} = a\omega$.

Déterminer ω en fonction de t, sachant que la vitesse de rotation du disque, 100 tours par minute à l'instant $t = 0$, est devenue 50 tours par minute, une minute plus tard.

A quel instant la vitesse de rotation du disque sera-t-elle de un tour par minute ?

109 *Cinétique chimique*

Au cours d'une réaction chimique la teneur $x(t)$ en benzène d'un mélange gazeux varie en fonction du temps t et vérifie l'équation différentielle :

$$-\frac{dx(t)}{dt} = 100\,kx(t)$$

où k est une constante liée à la vitesse de réaction.

Résoudre cette équation différentielle, sachant qu'à l'instant $t = 0$ on a $x(0) = 5$.

110 *Exemple d'équation de la forme* $y' - ay = b$

Résolution de l'équation $L\dfrac{di}{dt} + Ri = E$ (1) *de l'exemple du paragraphe 1a du cours.*

1° Résoudre l'équation différentielle

$$L\frac{df}{dt} + Rf = 0 \quad (2)$$

où l'inconnue est la fonction f de la variable t, définie sur $[0, +\infty[$.

2° Déterminer une fonction constante g solution de l'équation (1).

3° Démontrer que toute fonction $f + g$, où f est une solution de (2), est aussi solution de (1).

4° On admet que les seules solutions de (1) sont les fonctions $f + g$ définies au 3°. Quelle est la solution i de (1) qui vérifie : $i(0) = 0$?

Réponse :

$$i(t) = \frac{E}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right).$$

BIOLOGIE

111 *Le coup du lapin*

On injecte à un lapin une substance qui passe d'abord du muscle dans le sang, puis est éliminée. On étudie alors l'évolution de cette substance dans le sang au cours du temps.

Soit $Q(t)$ la quantité de substance présente dans le muscle à l'instant t.

On suppose que $\frac{dQ}{dt} + aQ = 0$, où a est un réel strictement positif.

1° Intégrer* cette équation différentielle.

2° Soit Q_0 la quantité de substance injectée dans le muscle à l'instant initial $t = 0$.
Écrire $Q(t)$ en fonction de Q_0 et t.

* intégrer signifie ici : résoudre.

112 *Histoire de microbes*

Dans une culture de microbes, le nombre de microbes à un instant t, exprimé en heures, peut être considéré comme une fonction y à valeurs réelles de la variable t. La vitesse de prolifération à l'instant t du nombre des microbes est la dérivée y' de cette fonction. On a constaté que

$$y'(t) = ky(t)$$

où k est un coefficient réel strictement positif. On désigne par N le nombre de microbes à l'instant $t = 0$.

1° Déterminer l'unique solution de l'équation différentielle $y' = ky$ telle que $y(0) = N$.

2° Sachant qu'au bout de deux heures le nombre de microbes a quadruplé, calculer en fonction de N, le nombre de microbes au bout de trois heures.

3° Quelle est la valeur de N sachant que la culture contient 6 400 microbes au bout de cinq heures ?

113 *Votre taux de glycémie nous intéresse*

1° Résoudre l'équation différentielle :

$$(1) \quad \phi' + k\phi = 0$$

où ϕ est une fonction dépendant du temps t ($t \geqslant 0$), ϕ' sa dérivée et k une constante réelle strictement positive.

Préciser la solution particulière ϕ_1 correspondant à la condition initiale $\phi_1(0) = 2$.

2° *Application :* Deux laborantins ont constaté qu'après une injection intraveineuse de glucose (sucre), la glycémie (taux de glucose sanguin) décroît à partir d'un certain instant choisi comme origine des temps, selon la loi :

$$(2) \quad g' + Kg = 0$$

où g désigne la fonction glycémique dépendant du temps t ($t \geqslant 0$) et K une constante strictement positive appelée coefficient d'assimilation glucidique.

a) A l'aide de la première question, trouver l'expression de $g(t)$ à l'instant t sachant qu'à l'instant $t = 0$, $g(0) = 2$. Étudier les variations de g en fonction du temps et donner l'allure de sa courbe représentative.
Déterminer en fonction de K l'abscisse T du point d'intersection de la tangente à la courbe au point M(0, 2) avec l'axe du temps.

b) Trouver la formule donnant le coefficient K en fonction de $g_1 = g(t_1)$, g_1 étant le taux de glycémie à l'instant t_1 donné et positif.

c) La valeur moyenne de K chez un sujet « normal » varie de $1{,}06.10^{-2}$ à $2{,}42.10^{-2}$. Préciser si le sujet X, qui a un taux de glycémie $g_1 = 1{,}20$ à l'instant $t_1 = 30$, est normal.

TECHNOLOGIE

114 Problème de citerne

Une citerne calorifugée est chauffée par une résistance. La température θ (t) de la citerne vérifie l'équation différentielle

(1) $\theta' = a - b\theta$ avec $a = 2{,}088 \times 10^{-2}$ et $b = 2{,}32 \times 10^{-4}$

lorsque t est exprimé en secondes et θ (t) en °C.

1/ a/ Montrer que $y = \theta - 90$ est solution de l'équation différentielle

(2) $y' = -by$

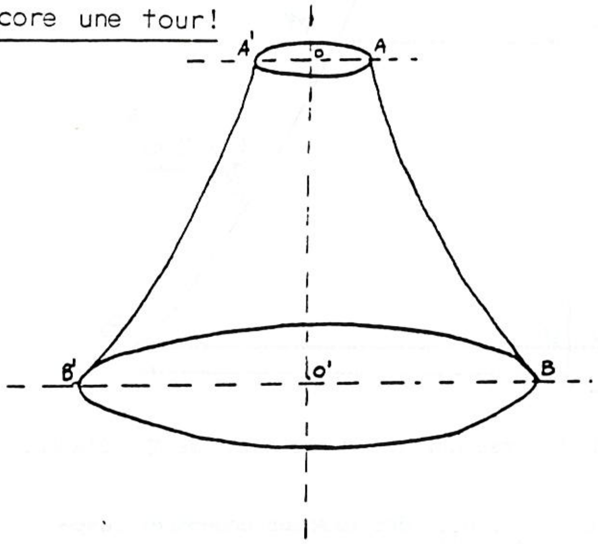
b/ Donner la solution générale de l'équation (2)

c/ En déduire l'expression de θ (t) sachant que $\theta(0) = 20$

2/ Au bout de combien de temps la température atteint-elle 80°C ?

Baccalauréat F9, 1990

115 Encore une tour!



La figure I ci-contre représente la maquette d'une tour en béton ; on se propose de calculer le volume de cette maquette.

A) Résoudre l'équation différentielle $8y' = y$; déterminer la solution particulière f qui prend la valeur 2 lorsque la variable est nulle.

B) On considère la fonction f définie sur IR par :

$$f(x) = 2e^{\frac{x}{8}}.$$

On désigne par $(\mathscr{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, l'unité étant le centimètre.

1° - Etudier les variations de f .

2° - Déterminer une équation de la tangente $(\mathscr{T})$ à la courbe $(\mathscr{C})$ au point A d'abscisse nulle.

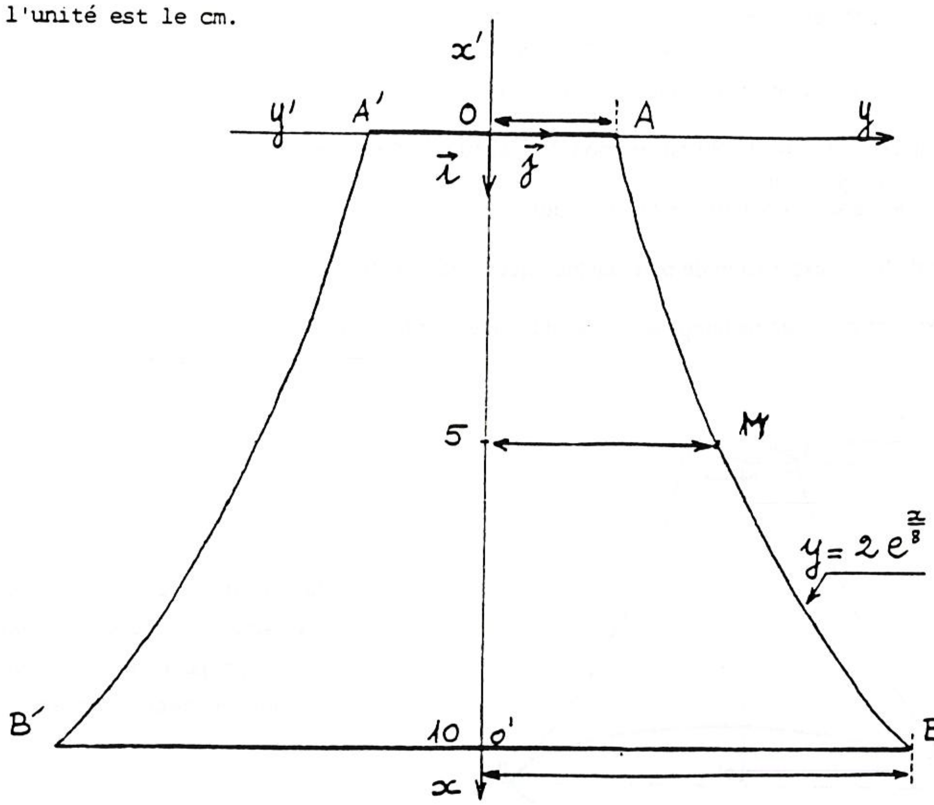
3° - Tracer la courbe $(\mathscr{C})$ ainsi que la tangente $(\mathscr{T})$.

C) La figure II de la page suivante représente la section selon un plan vertical (x O y) de la maquette de la tour.

La tour admet l'axe x'x comme axe de révolution ; son profil a été calculé de telle sorte qu'en tout point de sa paroi (dont on négligera l'épaisseur) la résistance à la compression soit constante.

Après calculs du bureau d'étude, on a obtenu comme équation de l'arc $\widehat{AB}$: $y = 2e^{\frac{x}{8}}$ pour $x \in [0, 10]$; ainsi, par rotation autour de l'axe x'x , le solide engendré par l'arc $\widehat{AB}$ est assimilé à celui de la maquette.

$(O, \vec{i}, \vec{j})$ est orthonormé ;
l'unité est le cm.



1° - A désigne le point de $\mathscr{C}$ d'abscisse nulle, M le point de $\mathscr{C}$ d'abscisse 5, B celui d'abscisse 10.
Calculer en cm^2 les aires D_0, D_5, D_{10} des disques engendrés respectivement par la rotation autour de $x'x$ des points A, M et B.
Donner une valeur approchée à 10^{-2} près de chacune de ces aires.

2° - Une approximation V_1 du volume de la tour peut être obtenue par la formule dite "des trois niveaux", soit :

$$V_1 = \frac{h}{6} \times (a_0 + 4 \times a_5 + a_{10})$$

dans laquelle h désigne la longueur OO' en cm et a_0, a_5 et a_{10} les valeurs approchées respectives des aires D_0, D_5 et D_{10}.
Donner en cm^3 la valeur de V_1.

3° - Effectuer le calcul de volume V de la maquette à l'aide d'une intégrale, donner la valeur exacte en cm^3 de V puis une valeur approchée à 10^{-3} près.

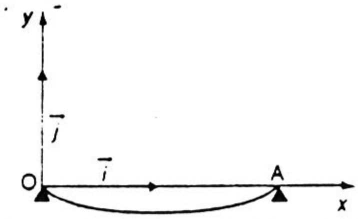
Brevet de technicien

EQUATION DU SECOND ORDRE

EN RÉSISTANCE DES MATÉRIAUX

Déformat ion d'une poutre

116



Une poutre horizontale de longueur deux mètres est en appui sur ses deux extrémités O et A. On suppose qu'elle supporte une charge de ω newtons par mètre de longueur, et que sous l'action de cette charge, elle se déforme. L'arc de courbe OA (figure 1) est la *déformée* de la poutre.

On note $y = f(x)$ une équation de la déformée OA dans le repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ où l'unité de longueur est 1 m. En résistance des matériaux on admet que la fonction f est deux fois dérivable sur $[0, 2]$ et on montre que la dérivée seconde de f vérifie

$$K f''(x) = \omega x - \frac{1}{2}\omega x^2.$$

où K est une constante.

L'équation précédente, où l'inconnue est la fonction f, est une **équation différentielle du second ordre.**

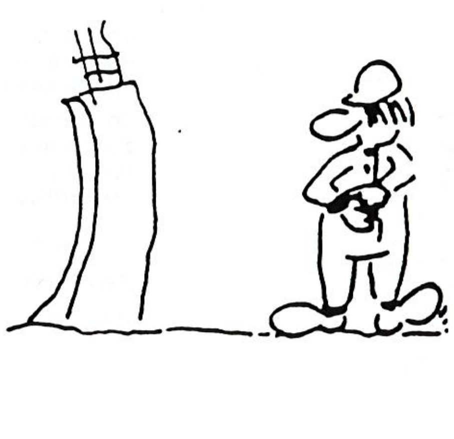
1° Montrer, à l'aide de deux calculs de primitives successifs, que, pour tout x de $[0, 2]$,

$$K f(x) = \frac{1}{6}\omega x^3 - \frac{1}{24}\omega x^4 + C_1 x + C_2,$$

où C_1 et C_2 sont des constantes réelles.

2° Déterminer C_1 et C_2 en remarquant que $f(0) = 0$ et que $f(2) = 0$.

On obtient alors l'équation $y = f(x)$ de la *déformée* de la poutre.



117 Une poutre horizontale de longueur 2 mètres « travaille en console » (elle est fixée à l'extrémité O, l'autre, A, étant libre). On suppose qu'elle supporte une charge de ω newtons par mètre de longueur.

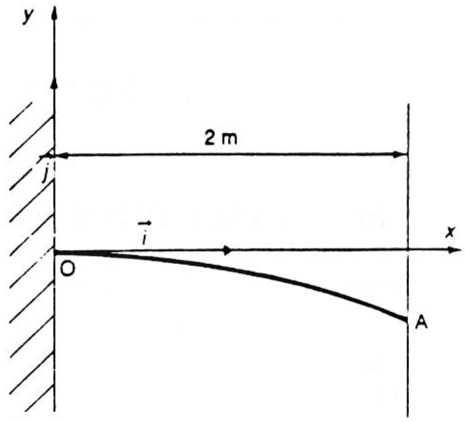
On se propose de déterminer une équation $y = f(x)$ de la déformée OA de la poutre dans un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ où l'unité de longueur est le mètre.

En résistance des matériaux on admet que f est deux fois dérivable sur [0, 2] et que f'' vérifie

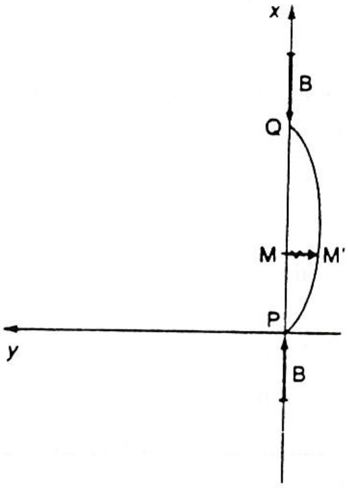
$K f''(x) = -\dfrac{1}{2}\omega(2-x)^2$ où K est une constante.

Déterminer l'équation de la déformée.

Réponse : $y = \dfrac{\omega}{24K}(4x^3 - 6x^2 - x^4)$.



118 Compression d'une barre rectiligne



On se propose d'étudier le fléchissement d'une barre rectiligne homogène PQ, de longueur ℓ (de section constante et de grande longueur par rapport aux dimensions transversales), lorsqu'elle est compressée.

On suppose que la barre PQ est sollicitée par deux forces opposées d'intensité B, co-axiales avec l'axe de la barre avant déformation.

La flèche $y = \overline{MM'}$ en un point M d'abscisse x de [PQ] définit une fonction f de variable réelle x définie sur $[0, \ell]$ par $f(x) = y$.

On admet que cette fonction f est une solution de l'équation différentielle :

(1) : $\quad EIy'' = -By$

où I, E, B sont des constantes strictement positives, et qu'elle satisfait aux conditions : $f(0) = 0$ et $f(\ell) = 0$.

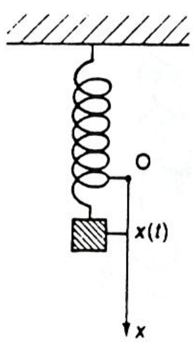
1° Montrer que les solutions de (1) sont définies sur $\mathbb{R}$ par
$f(x) = C_1 \sin kx + C_2 \cos kx$,
où k est un nombre réel à déterminer en fonction de I, E et B, C_1 et C_2 étant des constantes quelconques.

2° *a)* Déterminer les solutions de (1) vérifiant la condition : $f(0) = 0$.

b) Démontrer que les solutions non nulles de (1) telles que $f(0) = 0$ satisfont à la condition $f(\ell) = 0$ si et seulement si : $\sqrt{\dfrac{B}{EI}}\,\ell = n\pi$, où n est nombre entier naturel non nul.

EN PHYSIQUE

119 *Une masse suspendue*



Un ressort de raideur 800 N/m pend verticalement, son extrémité supérieure étant fixée. Une masse de 8 kg est attachée à l'extrémité libre.

On abaisse la masse au-dessous de sa position d'équilibre O de 0,05 m et on la relâche. On étudie alors le mouvement. On montre en physique que l'abscisse $x(t)$ du centre de gravité de la masse est solution de l'équation différentielle $\dfrac{d^2x}{dt^2} + 100x = 0$.

(On néglige la résistance de l'air).

Déterminer $x(t)$ en fonction de t sachant que pour $t = 0$, $x = 0{,}05$ et $x' = 0$.

120 *Exemple d'équation différentielle du second ordre*

Aucune connaissance de physique n'est nécessaire pour ce problème.

Le but du problème est l'étude de la charge q d'un condensateur C dans un circuit fermé comprenant en série :

– le condensateur C de capacité C = 0,5 farad, initialement neutre ;

– un condensateur C_1 de capacité C_1 = 1 farad, de charge initiale Q_1 = 15 coulombs ;

– une résistance R = 9 ohms ;

– et une self-inductance L = 6 henrys.

– On appelle $q(t)$ la charge de C à l'instant t ($t \geqslant 0$).

La charge de C_1 au même instant est $q_1(t) = Q_1 - q(t)$.

La loi d'Ohm appliquée au circuit donne l'équation différentielle :

$$(E_1) : Lq''(t) + Rq'(t) + \frac{1}{C} q(t) = \frac{1}{C_1} q_1(t)$$

soit $6q''(t) + 9q'(t) + 2q(t) = 15 - q(t)$.

1° En posant $q(t) = Q(t) + 5$, montrer que l'application Q vérifie sur $[0, +\infty[$ l'équation différentielle :

$$(E_2) : 6Q'' + 9Q' + 3Q = 0$$

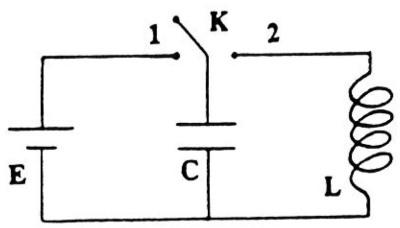
2° Vérifier que e^{-t} et $e^{-\frac{t}{2}}$ sont des solutions de (E_2). On admettra que toutes les solutions de (E_2) sont de la forme : $Q(t) = ae^{-t} + be^{-\frac{t}{2}}$ où a et b sont réels.

3° Déterminer alors a et b pour que la solution q de (E_1) vérifie les conditions initiales :

$$q(0) = 0 \text{ et } q'(0) = 0$$

(D'après baccalauréat F_2 - F_3, 1988)

121



Un oscillateur électrique est un circuit constitué d'un condensateur de capacité C (en Farads), en série avec une bobine d'auto-inductance L (en Henrys), de résistance négligeable, alimenté par un générateur de force électromotrice E.

* A l'instant t = 0, on ferme l'interrupteur K en position 1 (voir figure), le condensateur se charge. La charge se termine lorsque la tension aux bornes du condensateur est U_0 = E (en Volts), la charge est alors q_0 = CUo et l'intensité est i_0 = 0.

* On ferme alors l'interrupteur K en position 2, le circuit oscille et la charge q du condensateur à l'instant t est solution de l'équation différentielle ($\mathcal{E}$) :

$$q''(t) + \frac{1}{LC} q(t) = 0 \cdot$$

L'intensité du courant à l'instant t est $i(t) = q'(t)$ (en Ampères).

<u>Données numériques</u> : L = 0,625 $\qquad$ C = $1{,}6 \times 10^{-6}$.

1 - Résoudre l'équation différentielle ($\mathcal{E}$).

2 - Déterminer la solution particulière q répondant aux conditions initiales :

$U_0 = E = 12{,}5$, $i_0 = 0$ c'est à dire $q(0) = 1{,}6 \times 10^{-6} \times 12{,}5$ et $q'(0) = i_0 = 0$

Quelle est alors l'expression de l'intensité i(t) ?

3 - Calculer la valeur moyenne sur l'intervalle $[\, 0, \frac{\pi}{10^3} \,]$ de l'intensité i définie par

$$i(t) = -2 \times 10^{-2} \times \sin 10^3 t.$$

4 - Calculer la valeur efficace sur $[\, 0, \frac{\pi}{10^3} \,]$ de l'intensité i définie à la question 3.

<u>Rappel</u> : la valeur efficace de l'intensité i sur l'intervalle [0, a] est :

$$i_{eff} = \sqrt{\frac{1}{a} \int_0^a i^2(t)dt}$$

(Baccalauréat F_2 – F_3,)

CHAPITRE 9

GEOMETRIE

RECHERCHES DE

CENTRE DE GRAVITE

Pour secondes premières

Cette recherche intervient aussi bien en physique qu'en mécanique.

122 Centre de gravité d'un camion

Le calcul suivant est nécessaire pour déterminer la charge par essieu.

Le plan est muni du repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ d'axes (Ox) et (Oy) (unité 1 cm pour 1 mètre).

La *figure* , représente un camion-benne - 19 tonnes PTAC - immobile.

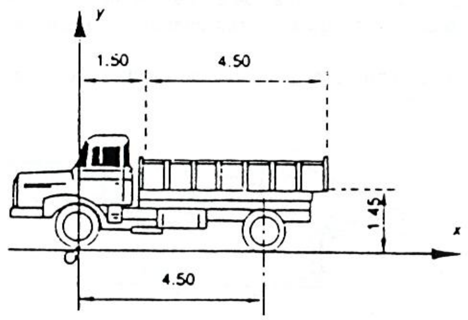
Dans l'espace, le plan xOy est plan de symétrie du camion.

Les caractéristiques du camion sont les suivantes :

- un châssis cabine de poids 6 tonnes dont le centre de gravité G_1 de la section représentée a pour coordonnées (1,80 ; 1,20) dans $(O, \vec{i}, \vec{j})$
- une benne pesant 2 tonnes de centre de gravité G_2 (4,00 ; 1,50)
- cette benne est remplie d'une couche de sable supposée uniforme de 50 cm de haut et de poids volumique 2 tonnes/m³. La largeur utile de la benne est 2,30 m.

Déterminer le poids total du camion chargé, ainsi que la position de son centre de gravité G.

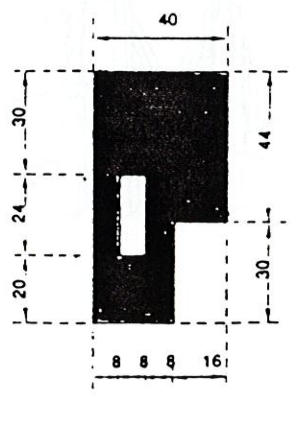
N.B. : On remarquera que les centres de gravité de la masse de sable et de la benne vide sont distincts.



Dans les exercices , il s'agit, à chaque fois, de décomposer chaque surface en une réunion de surfaces simples, de remplacer chacune d'entre elles par son centre de gravité affecté de sa masse et de déterminer la position du barycentre des points matériels obtenus dans un repère bien choisi.

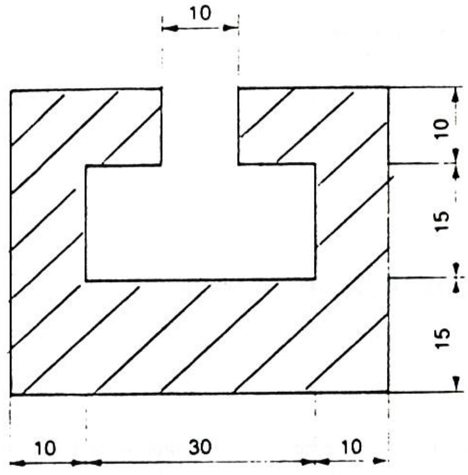
123 *La pièce percée*

Déterminer la position du centre de gravité de cette pièce dont les cotes sont en centimètres

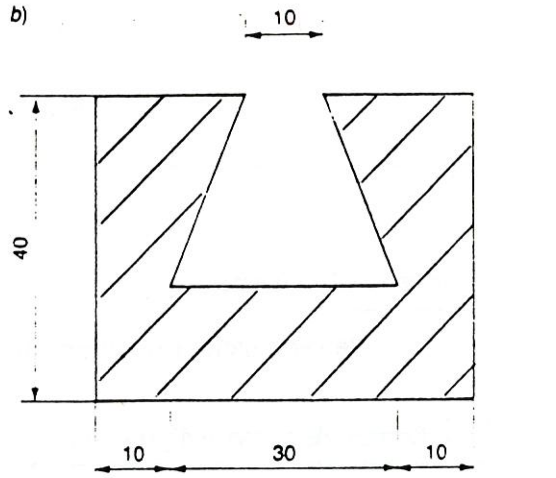


124 Déterminer la position du centre de gravité de la surface suivante.

a)



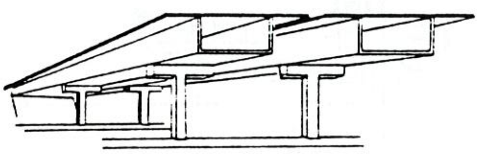
b)

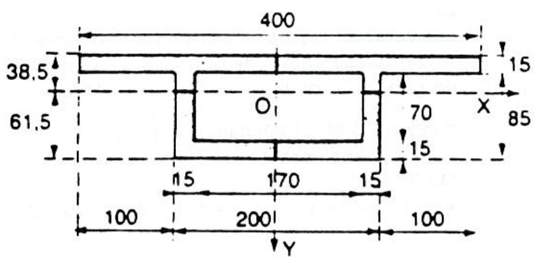


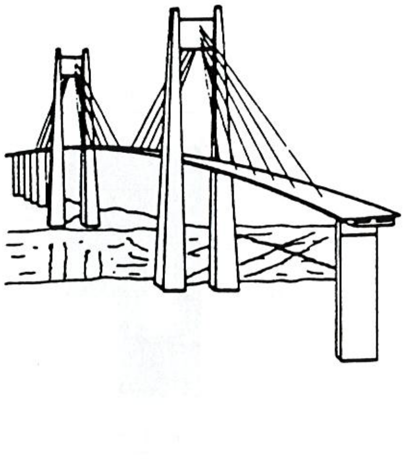
125 *Chaussée de pont autoroutier*

La *figure* est une vue en perspective d'un pont autoroutier, la figure représente la section de l'ouvrage.

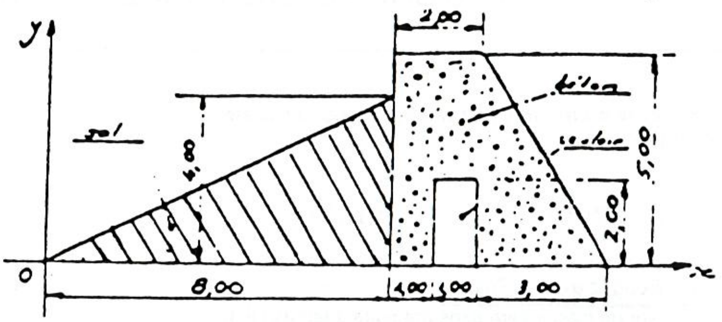
Déterminer la position du centre de gravité de cette section.







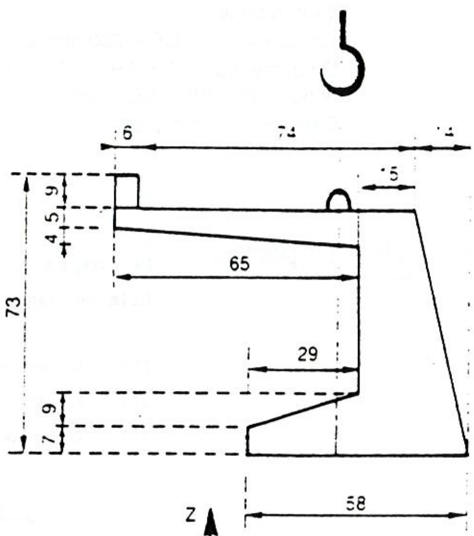
126 Un barrage



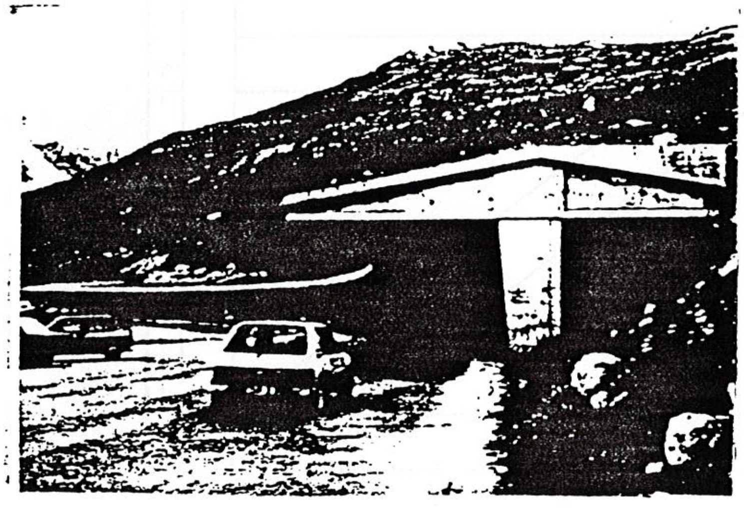
Le croquis ci-dessus représente la section d'un barrage par son plan de symétrie xOy . Ce barrage est constitué d'une partie en terre de masse volumique 1,5 tonne par m^3 et d'une partie en béton de masse volumique 2,4 tonnes par m^3 . Sa largeur est de 20 mètres. Déterminer la position du centre de gravité de ce barrage.

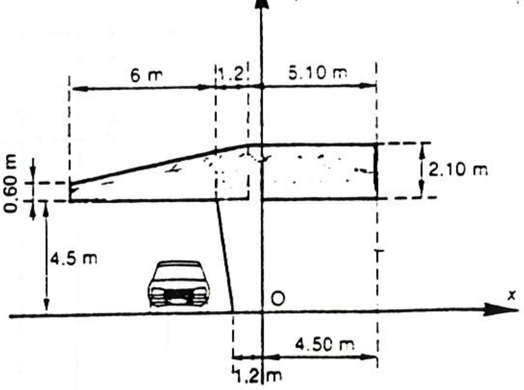
127 Où fixer le crochet de levage ?

La pièce en béton, dont la section par un plan de symétrie est représentée , ne doit pas basculer lorsqu'on la soulève avec une grue, pour la mettre en place. Pour cela on fixe le crochet de levage à la verticale de son centre de gravité. Les cotes sont en centimètres. Déterminer la position du centre de gravité.



128 Centre de gravité sur la route des vacances





Sur la route des vacances j'ai rencontré ce parc-avalanches ,

Les dimensions figurant sur le croquis) sont en mètres.

Déterminer la position du centre de gravité de la section.

Indication :

On peut munir le plan de la section d'un repère orthonormal d'axes (Ox) et (Oz) (*voir la figure*), et découper la surface en surfaces élémentaires.

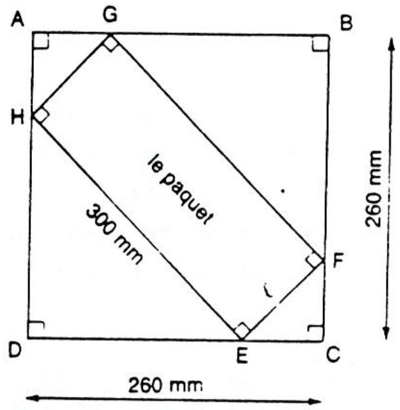
Réponse :

G (−0,68 ; 4,66).

CALCUL DE DISTANCES ET D'ANGLES

Géométrie du triangle rectangle, trigonométrie élémentaire

pour Seconde et Premières



129 *Bougez avec la Poste !*

Sur un tract inséré dans ma boîte à lettres j'ai lu :
« Pour recevoir tout votre courrier sans problèmes, votre boîte aux lettres doit respecter quelques règles élémentaires : H 260 mm × L 260 mm × P 340 mm.

L'objectif est de déterminer la dimension ℓ d'un paquet, dont une face est rectangulaire, qui a été inséré dans une boîte à lettre « réglementaire » (pour la Poste !).

La *figure* est une coupe montrant le paquet enfoncé dans la boîte.
On donne HE = GF = 300 mm. EF = HG = ℓ mm.
On admet que AG = AH = EC = FC
et que GB = BF = DE = DH.
Calculer ℓ à 1 mm près.

130 Le portail

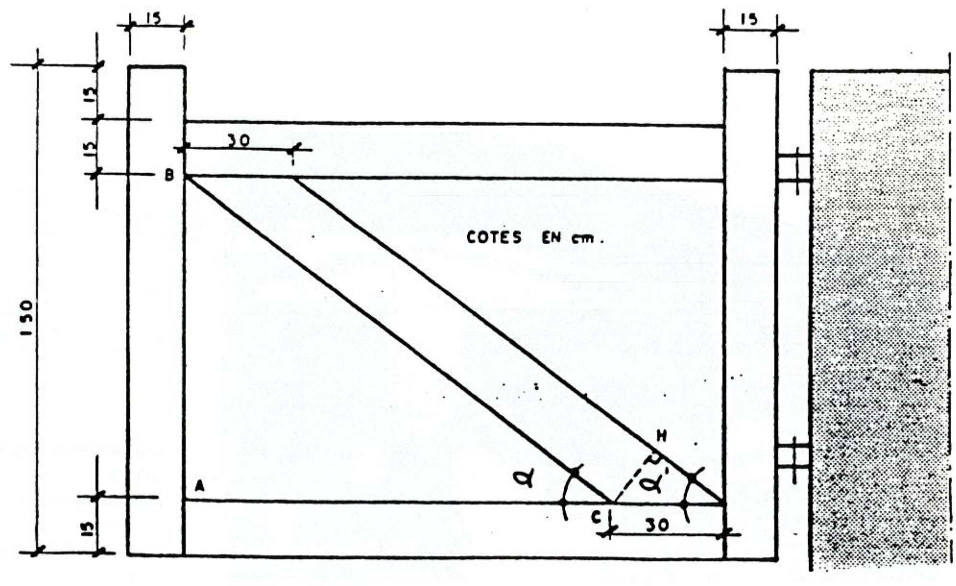
Le croquis ci-dessous représente la partie boisée d'un portail.
Elle se compose de deux traverses, deux montants et d'une écharpe.

. Les cotes étant en cm, on demande :

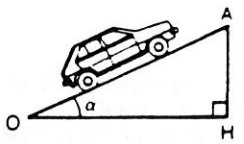
1°) - La mesure des segments AB, AC, BC, au cm près.

2°) - La valeur de $\alpha = \alpha'$ au degré près.

3°) - La largeur CH de l'écharpe.



131 *Pente d'une route*



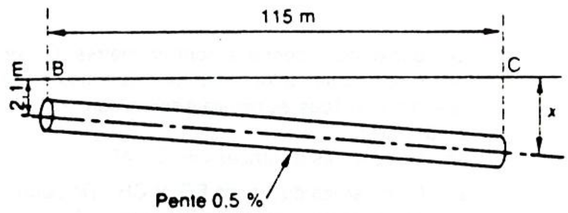
La pente d'une route est le rapport $\frac{HA}{OH}$)
c'est-à-dire tan α, si α est une mesure de l'angle que fait la route avec l'horizontale. On exprime la pente en pourcentage, c'est alors la hauteur en mètres dont s'élève (ou s'abaisse...) la route pour 100 mètres parcourus horizontalement.

Lorsque $\alpha \leqslant 3°$, la pente est approximativement égale à sin α (et même à α, exprimé en radians). La pente est alors la distance dont s'élève la route pour 100 mètres parcourus (sur la route).

Une route a une pente de $\frac{5}{100}$. En disant que « pour 1000 mètres parcourus » elle s'élève de 50 mètres, calculer l'erreur commise en centimètres, à un centimètre près.

132 *Le bon écoulement*

Une canalisation doit être placée dans une tranchée. Pour permettre l'écoulement de l'eau on prevoit une pente* de 0,5 %

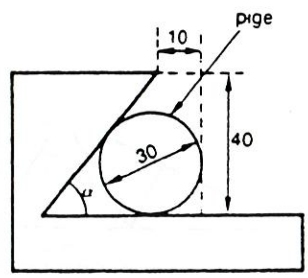


Au-dessous du point B la canalisation doit être placée à 2,10 mètres de profondeur. A quelle profondeur devra-t-elle être placée au-dessous du point C ?

133 **Cote sur pige**

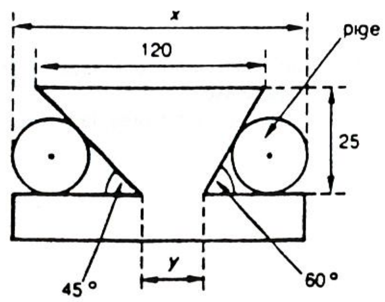
Sur une pièce usinée il n'est pas toujours possible de vérifier directement certaines longueurs ou certains angles. On utilise alors des petits cylindres d'acier de diamètres connus appelés « piges ». Les piges sont placées près de la pièce et les cotes mesurées sur les piges permettent de calculer celles qui ne sont pas mesurables.

La *figure* représente la section d'une pièce métallique.
Utiliser les mesures réalisées grâce à une pige et indiquées sur la figure, en millimètres, pour calculer α en degres à 10^{-2} pres.

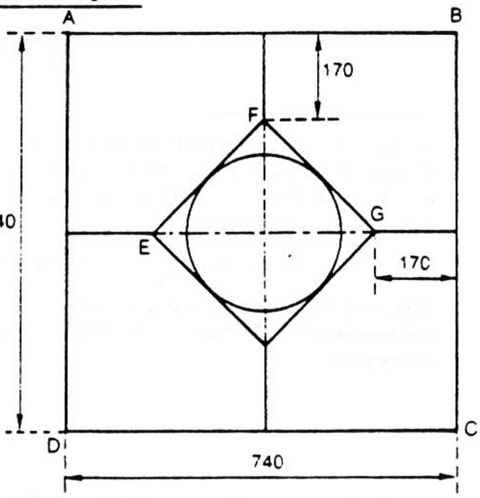


134 *Vérification d'une cote*

La *figure 144* represente une glissière mâle en queue d'aronde ; les cotes sont en millimètres.
On utilise deux piges de 20 mm de diamètre pour vérifier ses dimensions. Calculer au 1/10^e de mm près la cote *y*, et la cote *x* (qui devra être lue sur un pied à coulisse dont les becs s'appliquent sur les deux piges).



135 *Motif d'une grille*



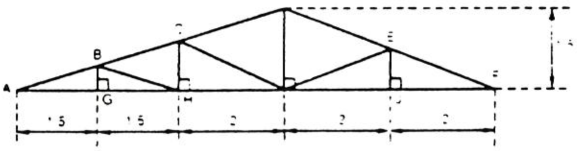
La *figure*) représente un élément d'une grille. Les cotes sont en millimètres.
L'encadrement est un carré de 740 mm de côte.
Les quatre pattes d'attache mesurent chacune 170 mm.
Déterminer :

1° La longueur du côté du carré EFGH.

2° Le rayon et le périmètre du cercle.
Les résultats seront donnés à 1 millimètre près.

Charpentes

136 Le dessin ( ) représente un élément de charpente, appelé « ferme », d'un hangar à foin.

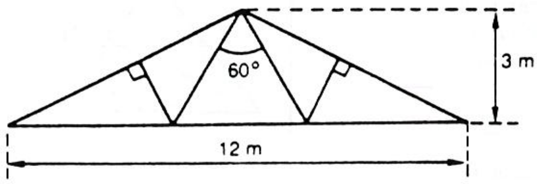


Les dimensions données sont en mètres. On se propose de calculer la longueur de différentes parties de la « ferme ». Tous les résultats seront donnés en mètres à 10^{-3} près.

1° Calculer les distances DF, EJ, AD.

2° Calculer les distances BG et CH. (On pourra utiliser deux triangles homothétiques.)

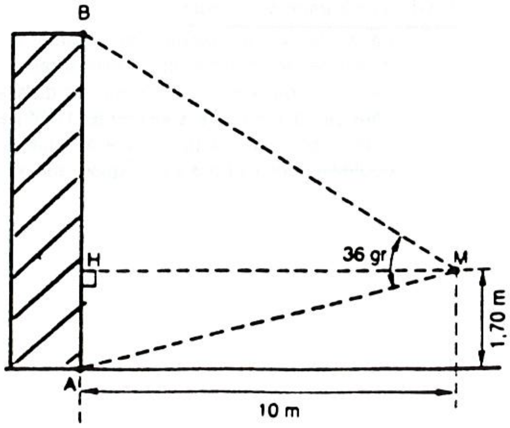
137



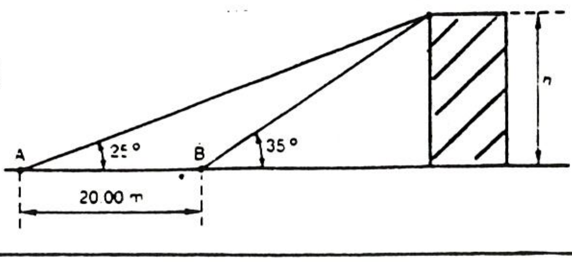
Calculer la longueur des parties constituant la ferme représentée sur la figure (

Au pied du mur ... (d'un édifice)

138 Un observateur est placé en M devant un édifice de façade [AB]
Calculer, au cm près, la hauteur de l'édifice.



139

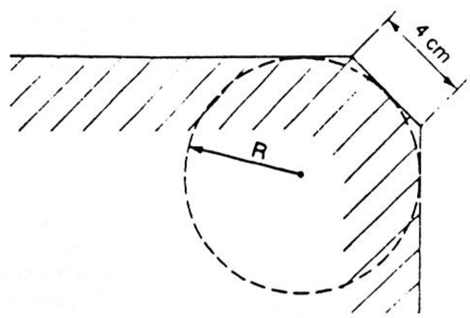


Avec les données de la figure ( ) calculer la hauteur *h* de l'immeuble.
Donner le résultat en mètres à 10^{-2} près.

140 *Au coin du mur !*

Les angles entre les murs sont toujours difficiles à réaliser correctement. Aussi lorsque l'angle de deux murs mesure moins de 135° réalise-t-on un « chanfrein ».

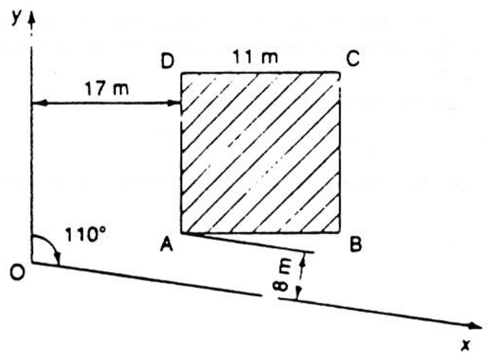
Déterminer, en utilisant les symétries de la figure, le rayon R du cercle tangent aux deux faces et au « chanfrein ».



141 *Le phare*

Du sommet d'un phare situé à 130 m au-dessus du niveau de la mer, on observe l'horizon. A quelle distance est-il approximativement du phare, si on admet que la terre est une sphère de 6 350 km de rayon ?

142 *Au coin de la rue*



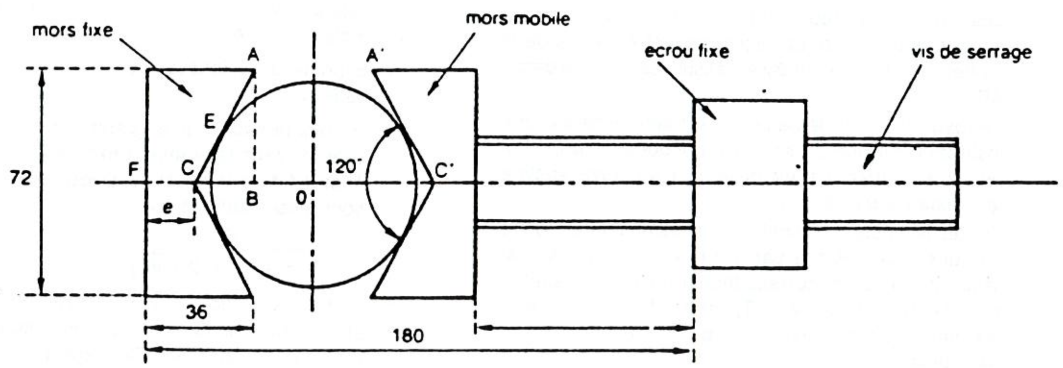
La *figure* représente le plan d'un bâtiment repéré par rapport aux axes Ox et Oy de deux rues.

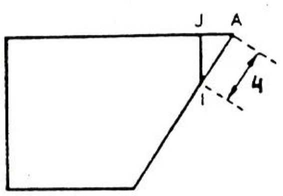
1° Avec les données de la figure, expliquer comment construire les points A, B, C, D, après avoir placé les axes Ox et Oy. Faire une figure à l'échelle en prenant un centimètre pour quatre mètres.

2° Calculer les distances OA, OB, OC, OD en mètres, à 10^{-2} près, et les mesures des angles $\widehat{DOA}$ et $\widehat{AOB}$ en degrés, à 10^{-2} près.

143 Serrons l'étau ! Pour seconde premières

La figure ci-dessous représente un étau de serrage pour pièces cylindriques. Les cotes sont en millimètres.





Les deux mors sont identiques, l'un étant fixe, l'autre mobile étant solidaire de la vis de serrage. On appelle x la distance entre l'écrou fixe et le mors mobile. Tous les résultats seront donnés en millimètres à 10^{-2} près.

1° Calculer les distances AB, BC, AC, FC = e.

2° Lorsque le mors mobile se déplace vers la gauche, le diamètre du cylindre que l'on peut serrer diminue. Calculer le diamètre du plus petit cylindre que l'on peut serrer avec cet étau. Quelle est alors la valeur de x ?

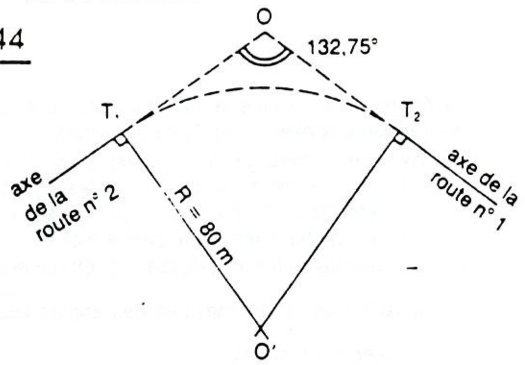
3° Calculer le diamètre du plus grand cylindre que l'on peut serrer avec cet étau. Quelle est alors la valeur de x ?

4° On serre un cylindre de diamètre D. Calculer D en fonction de x.

5° Afin d'augmenter la capacité de l'étau on décide de scier les coins des mors ( ).
Calculer le gain de course du mors mobile. Calculer alors le diamètre du plus petit cylindre que l'on peut serrer avec l'étau.

Problèmes de raccordement

144



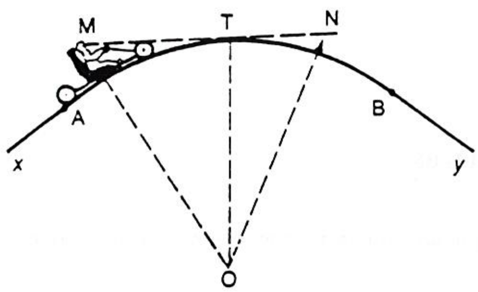
On se propose de raccorder deux routes en construction par un tronçon en arc de cercle de 80 mètres de rayon.

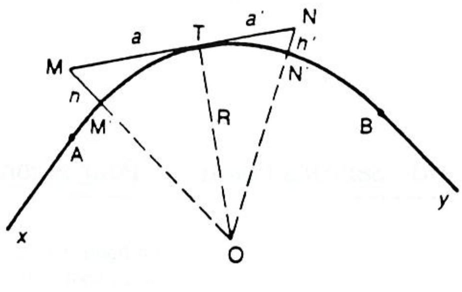
On connait la position du point O et l'angle

$\widehat{T_1OT_2} = 132{,}75°$.

Calculer la distance $OT_1 = OT_2$ en mètres, à 10^{-2} près.

145 *Raccordement au sommet d'une côte*





Les deux figures représentent le profil d'une route au sommet d'une côte. Le raccordement entre les deux parties rectilignes Ax et By est assuré par l'arc de cercle AB.

Le rayon minimal de ce cercle est déterminé par une instruction officielle qui impose qu'un obstacle de 0,15 m puisse être aperçu à une distance d au moins égale à la « distance d'arrêt » d.

Toutes les distances sont exprimées en mètres. Dans ce qui suit on désigne par d = MN, ( ) la distance de visibilité, correspondant au rayon visuel limite, tangent au cercle en T, par h = MM' et h' = NN' les hauteurs respectives de l'œil de l'automobiliste et de l'obstacle.

On pose a = MT, et a' = NT, et on appelle R le rayon du cercle de centre O.

1° Exprimer a^2 en fonction de R et h et a'^2 en fonction de R et h'.

2° R étant beaucoup plus grand que h et h', on néglige h^2 dans la première expression obtenue au 1° et h'^2 dans la seconde. Déduire des deux relations ainsi obtenues que

$$R = \frac{d^2}{2(h + h' + 2\sqrt{hh'})}.$$

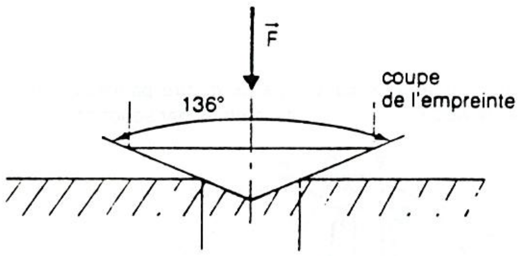
3° L'instruction officielle précise qu'en prenant h = 1 et h' = 0,15 le rayon R doit être choisi tel que $R > 0{,}25\, d^2$. Justifier cette inégalité.

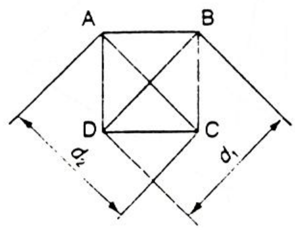
146 *Essai Vickers*

On peut évaluer la dureté d'un matériau avec l'essai Vickers.

On réalise une empreinte dans un échantillon du matériau à l'aide d'une pyramide régulière à base carrée dont l'angle au sommet mesure 136° ' -'

soumise à une force $\vec{F}$.



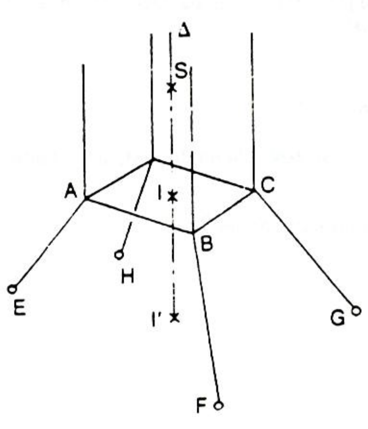


L'empreinte a donc la forme d'une pyramide régulière à base carrée, ABCD, ' i. On mesure la diagonale d de ABCD.

La dureté du matériau est définie par le rapport $\frac{F}{S}$ où F est l'intensité de la force $\vec{F}$ et S l'aire latérale de l'empreinte.

Montrer que $S = \frac{d^2}{2 \sin 68°}$.

147 *Pylône de téléphérique*



La *figure* ' . représente un pylône supportant le câble d'un téléphérique. L'ossature principale du pylône est constituée d'un parallélépipède à base rectangulaire ABCD qui s'appuie sur le sol par l'intermédiaire de quatre jambages disposés suivant les arêtes d'une pyramide de sommet S passant par les points A, B, C, D.
Les plans ABCD et EFGH sont parallèles (et horizontaux).

On appelle I le centre du rectangle ABCD et I' le centre du rectangle EFGH. Les points S, I, I' sont alignés sur la droite verticale Δ. La distance entre les deux plans ABCD et EFGH est 2 m, la hauteur de la pyramide SEFGH est 4 m. De plus AD = BC = 0,8 m et AB = DC = 1,2 m.

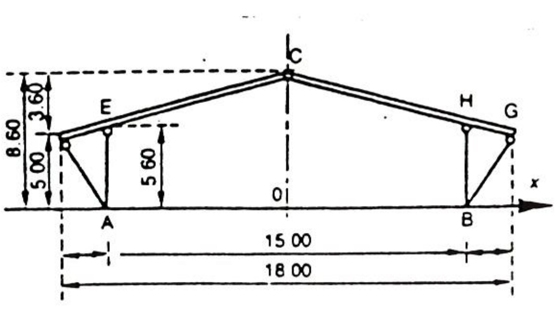
1° Calculer la distance IB. En donner une valeur approchée en mètres à 10^{-2} près.

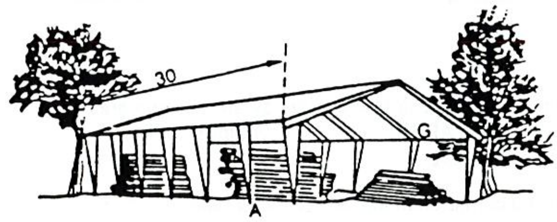
2° Faire une figure à l'échelle du triangle rectangle SIF. On prendra 1 cm pour 1 m. (On sera amené à utiliser le point I' et le résultat établi au 1°).

3° Déterminer une valeur approchée en mètres à 10^{-2} près de la distance I'F.
En déduire la longueur, en mètres, à 10^{-2} près de chacun des jambages
AE, BF, CG, DH (AE = BF = CG = DH).

148 Scions du bois

Les deux *figures* . représentent une halle de stockage de produits forestiers. Les cotes sont en mètres.





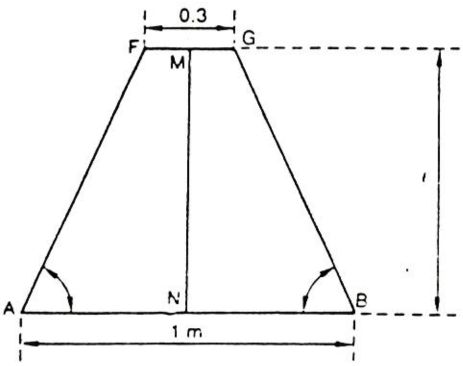
1° Calculer les distances AD, DC, DE.
On donnera des valeurs approchées à 10^{-2} près.

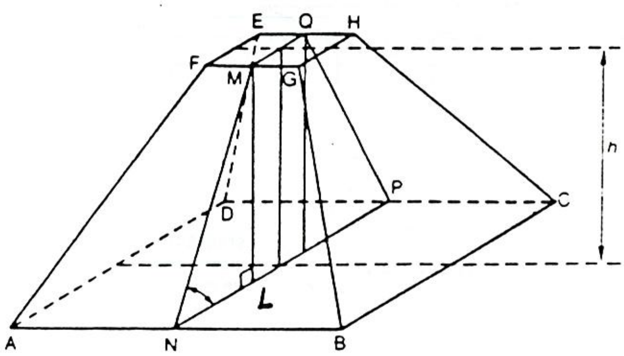
2° Calculer une mesure en degrés à 10^{-2} près de l'angle $\widehat{ADE}$.

3° Calculer l'aire de la toiture.

149 Une hotte

Les *figures* représentent une hotte constituée de quatre panneaux identiques, tels que le trapeze isocèle ABGF , assemblés par soudage.





Les deux bases ABCD et EFGH sont des carrés.

Soit M le milieu de [F, G], N le milieu de [AB], P le milieu de [DC], Q le milieu de [EH],
L la projection orthogonale de M sur [NP].

Les cotes sont en mètres.

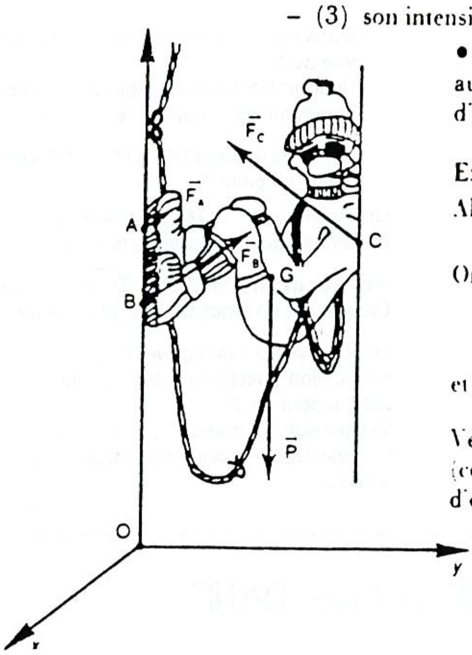
On donne AB = 1 m, FG = 0,3 m, $\widehat{PNM} = 60°$.

1° Dans le trapèze isocèle MNPQ, calculer MN et la hauteur ML de la hotte.

2° Calculer AF et une mesure α en degrés de l'angle $\widehat{BAF}$.

CALCUL VECTORIEL

150 Alpinisme et forces
Pour premières



- Une force en mécanique est un moyen de rendre compte de l'action mutuelle entre deux ou plusieurs corps.
- Une force est caractérisée par :

– (1) son point d'application (point de contact ou centre de gravité), pour une force appliquée en un point :
– (2) sa direction et son sens ;
– (3) son intensité.

- Une force appliquée en un point peut donc être associée au couple formé par un point du plan ou de l'espace et d'un vecteur.

Exemple :

Alpiniste en équilibre dans une « cheminée ».

On donne $\vec{F_A}\begin{pmatrix}0\\10\\7.5\end{pmatrix}$ $\vec{F_B}\begin{pmatrix}0\\40\\32.5\end{pmatrix}$ $\vec{F_C}\begin{pmatrix}0\\-50\\40\end{pmatrix}$

et $\|\vec{P}\| = 80$. (l'unité est le décanewton).

Vérifier que $\vec{F_A} + \vec{F_B} + \vec{F_C} + \vec{P} = \vec{0}$
(ce qui est une condition nécessaire, mais non suffisante, d'équilibre).

151 Il y a polaires et polaires ...
Pour secondes et premières

Toiture d'un bâtiment
Passage de coordonnées « polaires » aux coordonnées cartésiennes

La *figure 1* est une vue en plan d'une partie de la toiture d'un bâtiment administratif représenté sur la *figure 2*.
Le rectangle ABCD représente une ouverture.
Les dimensions sont en mètres. On donne $a = 0{,}7$, $b = 1$, OM = 3 et $\alpha = 54°$.
Déterminer les coordonnées cartésiennes des points M, A, B, C, D dans le repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ d'axes (Ox) et (Oy).
Les résultats sont donnés à 10^{-2} près.

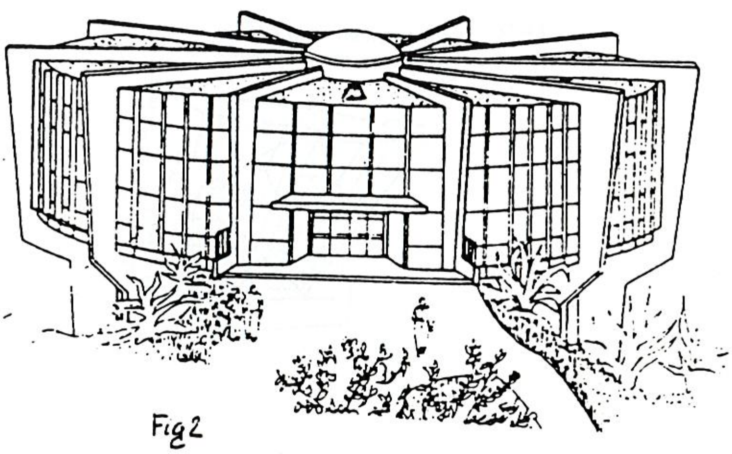
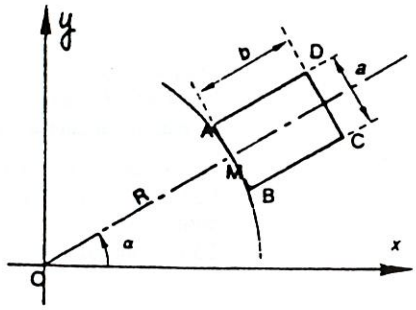


Fig 2

Le couple (OM, α), où OM = R est un nombre strictement positif et α une mesure comprise entre 0° et 360° (ou entre 0 et 2π radians), est parfois appelé *coordonnées polaires* du point M.
Pour O, R = O et α n'est pas défini.
Si M a pour coordonnées cartésiennes (x, y) dans le repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$, et pour coordonnées polaires, (R, α) vérifier que :
$x = R \cos \alpha$ et $y = R \sin \alpha$.
Ces coordonnées polaires sont utilisées en technologie et en topographie, pour l'implantation de bâtiments.

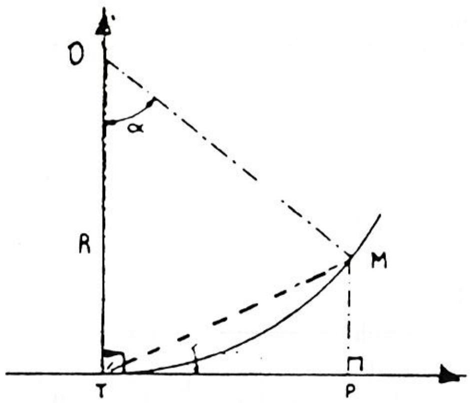
Fig 1



D'après un document technique.

152 Implantation d'un route

Pour seconde et première



L'arc de cercle TM de la *figure* représente l'axe d'une courbe d'une route.
Sur le terrain, lorsqu'on construit la route, on jalonne le tracé par des piquets.

1• Quel est le nombre minimum *n* de piquets à implanter sur le tracé TM, sachant que les piquets sont équidistants, qu'ils doivent être espacés d'une distance comprise entre 10 et 15 mètres, que le rayon du cercle est R = 240 m et que l'angle α mesure 30°.

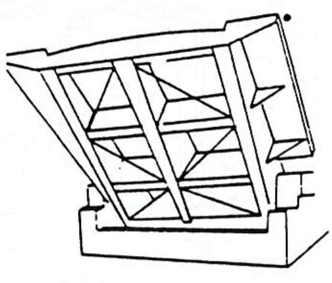
2• Dans cette question on prend pour *n* la valeur trouvée au 1.
Pour l'implantation les piquets sont repérés par leurs coordonnées dans le repère orthonormal $(T, \vec{i}, \vec{j})$ d'axes (TP) et (TO) ((TP) est tangente au cercle au point T).

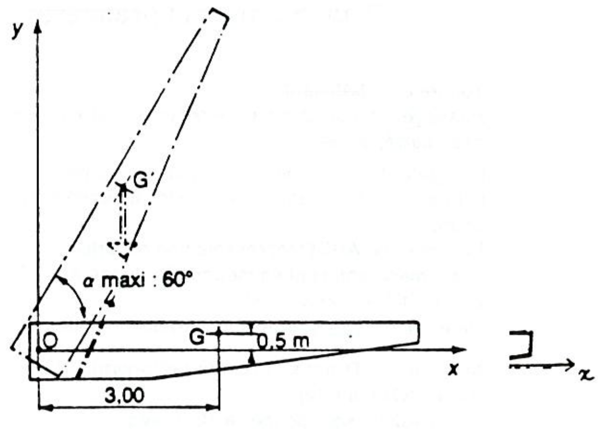
On note $M_1, M_2, ..., M_i ... M_n = M$ les points du cercle où sont implantés les piquets et $\alpha_1, \alpha_2, ... \alpha_i ... \alpha$ les mesures des angles $\widehat{TOM_1}, \widehat{TOM_2}, ... \widehat{TOM_i} ... \widehat{TOM}$.
Déterminer en fonction de α_i et de R les coordonnées du point M_i dans le repère $(T, \vec{i}, \vec{j})$.
Application : déterminer les coordonnées du point M_2 obtenu pour $i = 2$.
Vérifier que les mesures $\alpha_1, \alpha_2, ... \alpha_i ... \alpha$ sont termes successifs d'une suite arithmétique dont on précisera la raison.

PRODUIT SCALAIRE DANS LE PLAN ET DANS L'ESPACE

Pour premières

153 *Pont levant sur une écluse*

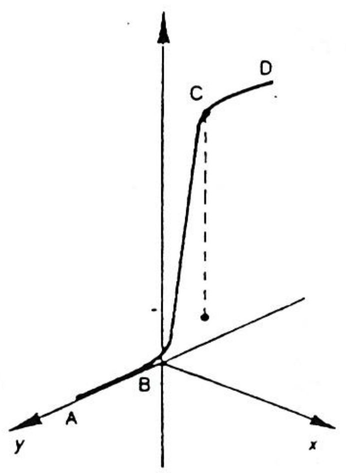




Les deux *figures* représentent un pont levant franchissant une écluse. Les cotes sont en mètres.
Le plan de la section *figure 70* est muni du repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ d'axe O*x* et O*y*.
Soit G (3 ; 0,5) le centre de gravité de la section du pont.
Déterminer les coordonnées du point G' position du centre de gravité de la section lorsque le pont a tourné autour de O d'un angle de 60°.

Indication :
Écrire de deux façons différentes le produit scalaire $\overrightarrow{OG} \cdot \overrightarrow{OG'}$.

154 Calcul d'un élément de tuyauterie et produit scalaire dans l'espace



Les figures 23 et 24 représentent un élément de tuyauterie. Pour réaliser la fabrication de cet élément on se propose de déterminer une mesure de l'angle $\widehat{ABC}$ (les angles $\widehat{ABC}$ et $\widehat{BCD}$ ont même mesure. les droites (AB) et (CD) étant parallèles).

Dans l'espace muni du repère orthonormal $(B, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ les points A et C ont pour coordonnées :

$A\,(0, -1000, 0)$, $C\,(-1005, -1400, 2450)$.

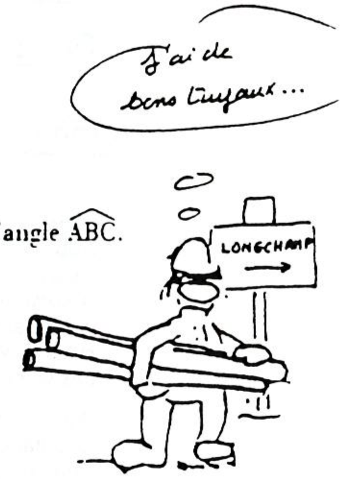
Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$.

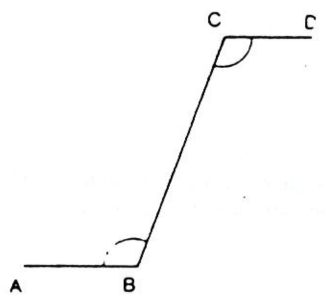
Calculer $\| \overrightarrow{BA} \|$ et $\| \overrightarrow{BC} \|$.

En déduire : $\cos(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) = \cos \widehat{ABC}$.

En déduire une mesure en degré à 0.05 degré près de l'angle $\widehat{ABC}$.

Réponse : 118°.



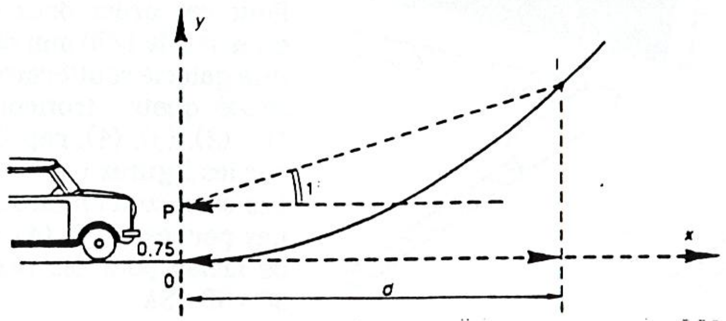


D'après un document technique.

EQUATION DE CERCLE

155 *Raccordement de deux segments de droite du profil d'une route par un arc de cercle*

Aux changements de déclivité, le raccordement de deux segments de droite du « profil en long » d'une route est assuré par un arc de cercle tangent à chacun des segments.



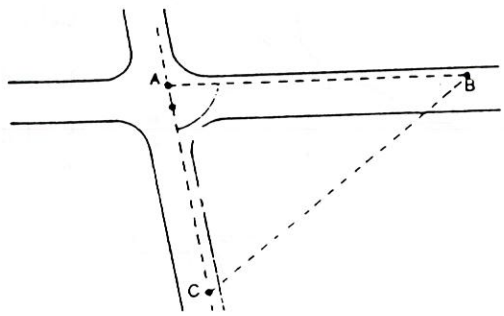
Le rayon de l'arc de cercle (OI sur la *figure*) est déterminé par des conditions de visibilité. Au « point bas » du profil en long (le point O sur la figure), de nuit, il faut que la chaussée soit éclairée assez loin par les phares. Une instruction officielle indique que le rayon R de l'arc de cercle doit être tel que la distance *d* définie sur la figure soit au moins égale à la distance d'arrêt d'un véhicule circulant à une vitesse de 80 km/h.

APPLICATION DU PRODUIT SCALAIRE AUX TRIANGLES QUELCONQUES

Pour premières

156 *Visibilité au carrefour*

Dans les carrefours on cherche à assurer la meilleure visibilité possible. Entre deux branches du carrefour on considère un triangle de visibilité ABC (qui représente la surface dégagée de tout obstacle). Les longueurs des côtés AB et AC dépendent des vitesses des véhicules au voisinage du carrefour et de la priorité relative des voies.



Sur la *figure* ·S7, le côté AB correspond à une voie prioritaire où la vitesse autorisée est de 90 km/h, le côté AC correspond à une voie où la vitesse autorisée est de 60 km/h. Les distances AB et AC doivent donc être égales aux distances d'arrêt fixées réglementairement à 160 m pour une vitesse de 90 km/h, et à 70 m pour une vitesse de 60 km/h.

Sachant que l'angle des 2 voies mesure 80°, calculer la distance BC et l'aire du « triangle de visibilité » ABC.

157 On raccorde les conduites

Pour premières F

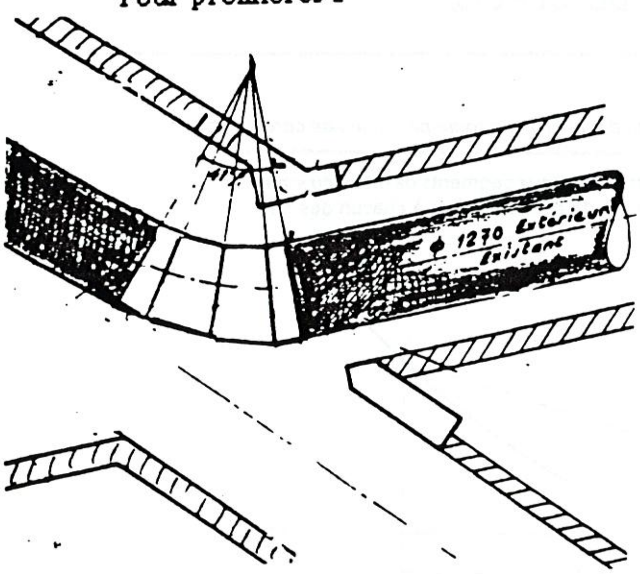


FIG 1

Pour raccorder deux conduites d'eau en acier de 1270 mm de diamètre dans une galerie soutterraine de Paris, on a soudé quatre tronçons de conduite (1), (2), (3), (4), représentés en plan sur les figures 1 et 2.
Les cotes sont en millimètres.
Les parties (1) et (4) sont identiques, de même pour les parties (2) et (3).
SC = SB = SA.

Déterminer les distances AB, DE, BC, EF.

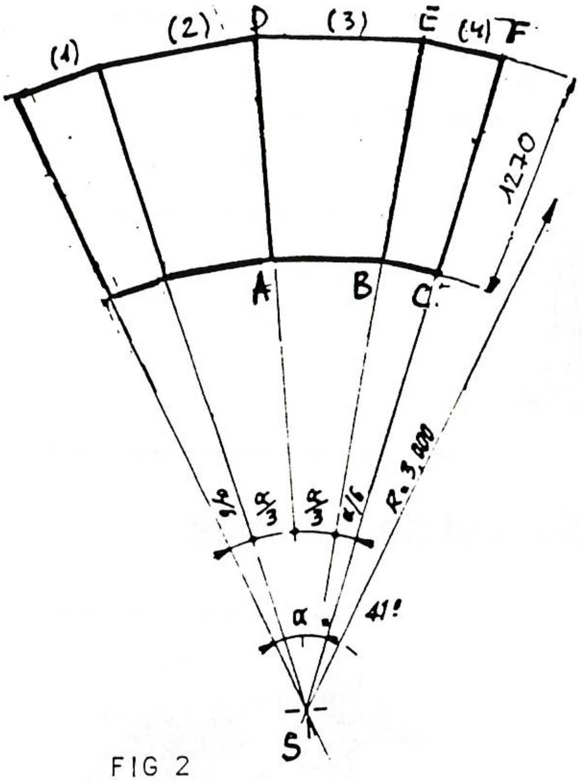
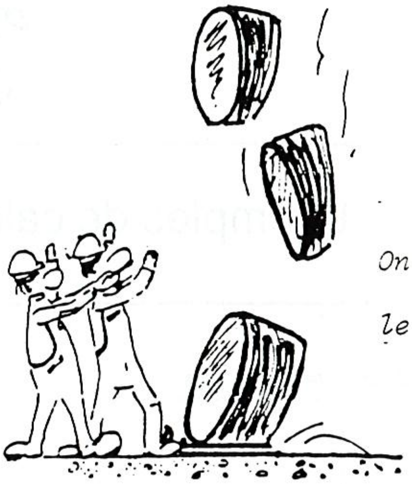


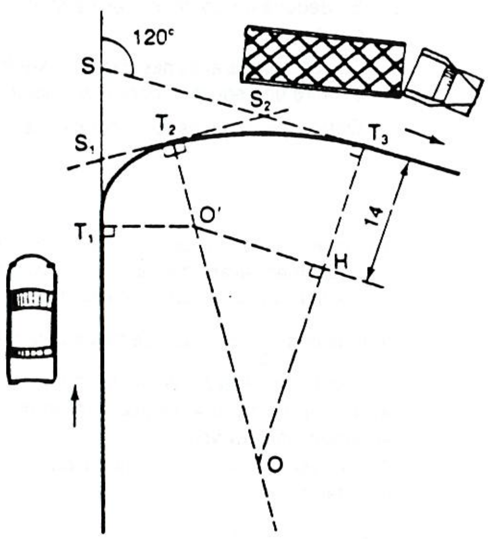
FIG 2

C'est une histoire vraie



On livre sur le chantier

158 *Raccordement à un carrefour*



Sur la *figure* . le trait plein represente le bord d'une chaussée à un carrefour. La partie courbe est constituée par deux arcs de cercles de centre O et O'.

Les deux cercles sont respectivement tangents aux bords des chaussées en T_1 et T_3 et admettent en T_2 la droite (S_1S_2) comme tangente commune.

Une instruction officielle fixe pour chaque valeur de l'angle des deux voies (la « déviation ») les rayons minimaux des deux cercles, afin que des semi-remorques puissent tourner facilement.

Pour 120° on lit :

$O'T_1 = 11$ m

$OT_3 = 75$ m.

D'autre part la distance HT_3 est fixée à 14 m.

Le point S étant connu, le but de l'exercice est de calculer les distances ST_1 et ST_3.

Toutes les distances seront calculées en mètres à 10^{-2} près et les angles en degrés à 10^{-2} près.

1° Calculer une mesure de l'angle $\widehat{T_2OT_3}$. En déduire une mesure de l'angle $\widehat{T_2S_2T_3}$, puis de l'angle $\widehat{T_1S_1T_2}$.

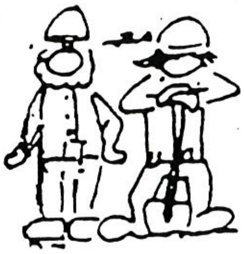
2° Calculer les distances S_2T_3 et S_1T_1. En déduire la distance S_1S_2.

3° Calculer les distances SS_1 et SS_2. En déduire les distances ST_1 et ST_3.

4° Faire une figure à l'échelle en prenant 2 cm pour 10 m.

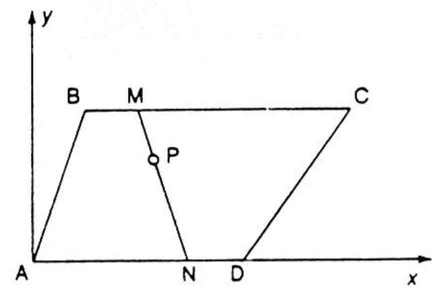
Réponses :

$ST_1 \approx 22.52$ m ; $ST_3 \approx 40.25$ m.



Exemples de calculs d'aires et de volumes

159 *La vérité sort du puits*



La *figure 54* représente une parcelle de terrain. Le plan de la figure est muni du repère orthonormal $(A, \vec{i}, \vec{j})$. L'unité étant le mètre, on donne B(10, 30), C(60, 30), D(40, 0).

Dans cette parcelle se trouve un puits dont le centre P a pour coordonnées (30, 20).

On se propose de déterminer deux points M et N tels que la droite (MN) partage ABCD en deux parcelles d'aires égales (ABMN et MNDC) ayant chacune accès au puits. (C'est-à-dire que (MN) passe par P).

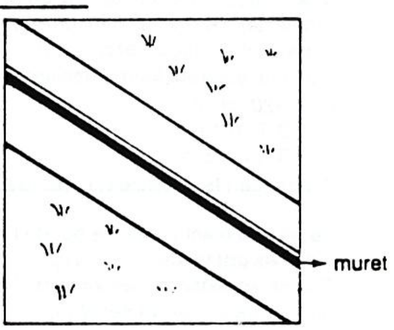
1° Soit m le coefficient directeur de la droite (MN), déterminer une équation cartésienne de (MN).

2° En déduire les coordonnées de M et N en fonction de m.

3° De l'égalité des aires des trapèzes ABMN et MNDC, déduire une équation dont m est solution.

4° Déterminer m et les coordonnées de M et N.

160 *Expropriation*



J'ai acheté un terrain carré de 30 mètres de côté. Malheureusement avant même que j'y fasse commencer les travaux de construction d'une maison on m'a exproprié des $\frac{7}{15}$ de la surface totale pour y faire passer une route dont le plan est sur la figure 64.

Au milieu de la route, se trouvera un muret en béton séparant les deux voies.

Quelle est la longueur du muret qui se trouvera sur mon terrain ?

Réponse : 34 mètres.

161 *Trouver les prismes*

Les dimensions de cette pièce (*figure* 1,2,3) sont données en centimètres.
Calculer le volume de la pièce en cm^3, à 10^{-1} près, à partir du volume d'un parallélépipède rectangle, en calculant le volume à « enlever ».

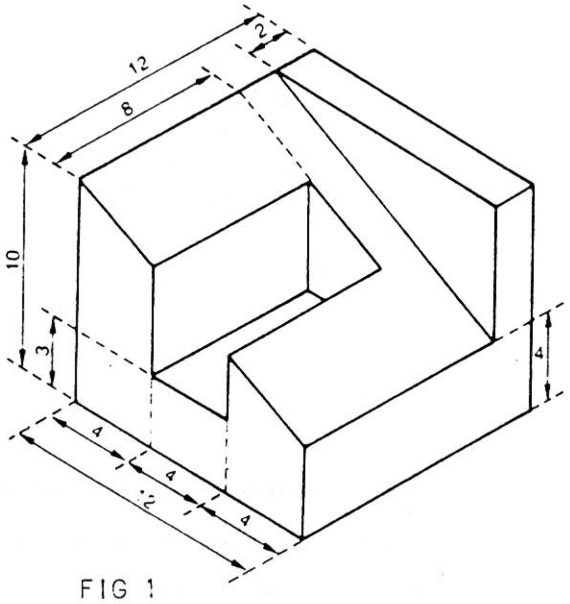


FIG 1

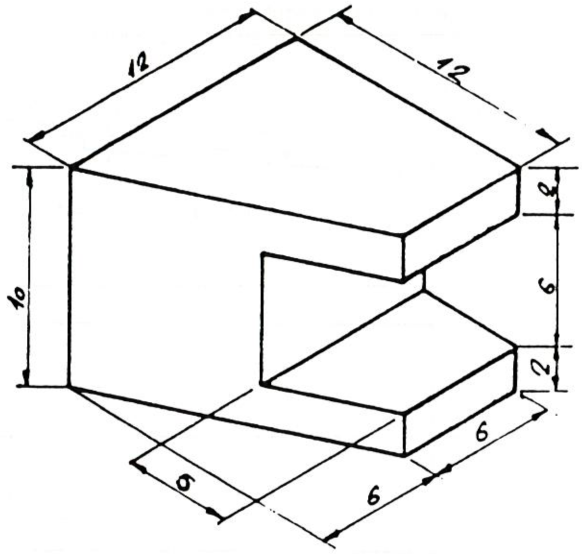


FIG 2

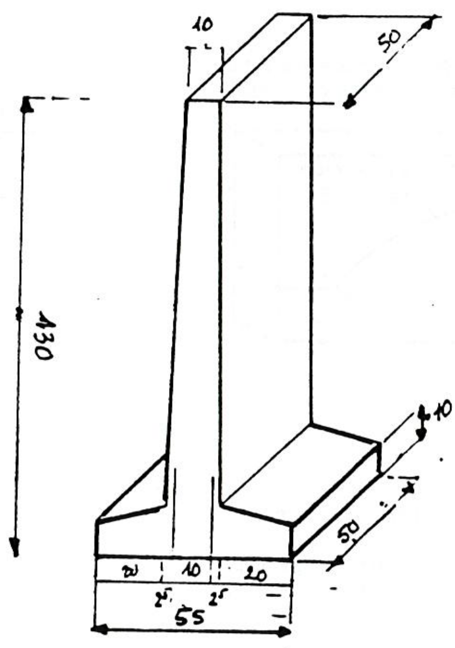


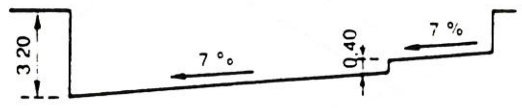
FIG 3

162 *Le volume de la piscine*

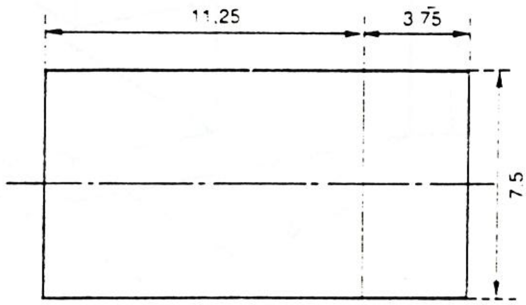
Les deux figures représentent la vue en coupe) et en plan · d'un bassin.

Les dimensions sont en mètres.

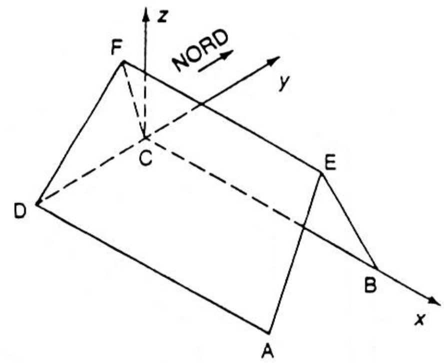
Calculer son volume en m^3, à 10^{-2} près.



Le fond « a une pente de 7 ‰ »



163 *Un comble !*



La *figure* représente une toiture en perspective isométrique*.

L'espace est muni du repère orthonormal $(C, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ d'axes (Cx), (Cy), (Cz).

Les coordonnées des points A, B, C, D, E, F, sont données en mètres dans le tableau suivant :

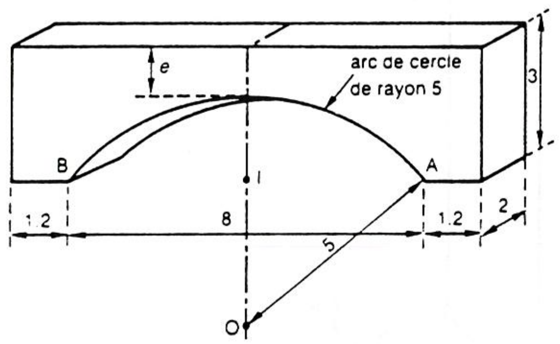
	A	B	C	D	E	F
x	+12,5	+12,5	0	0	+12,5	+3
y	−6	0	0	−6	−3	−3
z	0	0	0	0	−6	+6

1° Calculer l'aire de la toiture, en m^2 à 10^{-2} près (c'est-à-dire l'aire des deux versants AEFD et BEFC).

2° Calculer le volume des combles en m^3 à 10^{-3} près.

164

On considère une arche dont la forme et les dimensions (en mètre) sont données sur la figure ci-dessous.



1° Calculer e, l'épaisseur minimale de l'arche.

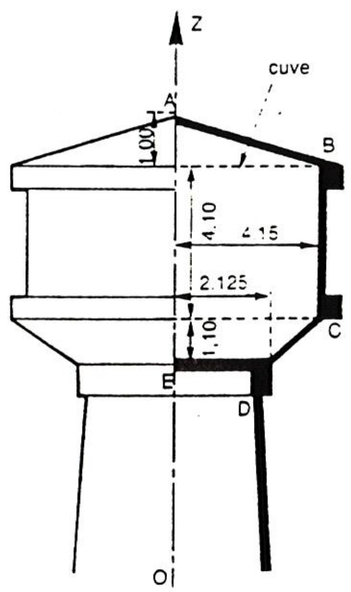
2° Chercher une valeur approchée de l'angle $\widehat{AOB}$ et en déduire une valeur approchée du volume de cette arche.

165 *Volume de la cuve d'un château d'eau*

La figure représente la section de la partie supérieure d'un château d'eau par un plan de symétrie.

Les cotes sont données en mètres sur la figure. La cuve du château d'eau est le solide engendré par la rotation de la surface ABCDE autour de l'axe Oz.

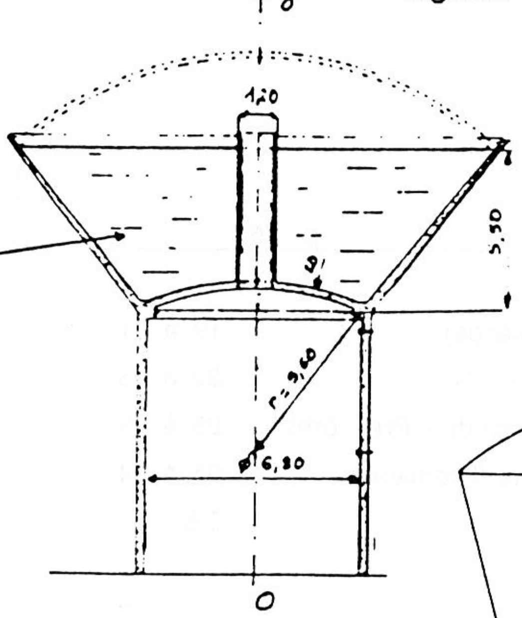
Calculer le volume de la cuve en m^3 à 10^{-3} près.



166 CHATEAUX D'EAU

dont on peut calculer le volume ...

figure 1



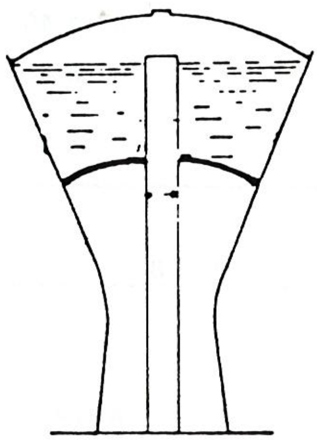


figure 2

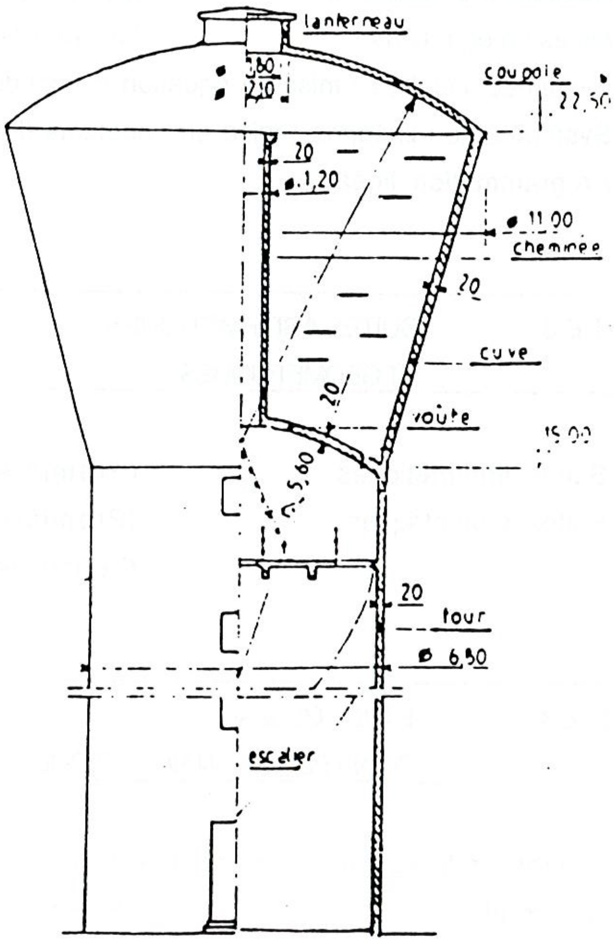


figure 3

DES OBJECTIFS MATHEMATIQUES

CHAPITRE 1	STATISTIQUE	p. 4

Calculs de moyennes et d'écart-types (Seconde) 1/2/3/4/5/6/10

Contrôle de qualité (Seconde) 7/8/9/10

Ajustement affine (Terminales) 12 à 18.

CHAPITRE 2	EQUATIONS INEQUATIONS SYSTEMES	p. 26

Résolution d'équations	(premières)	19 à 21
Mises en équations	(premières)	22 à 25
Systèmes linéaires : mise en équation (Seconde - Premières)		26 à 29
Systèmes non linéaires : mise en équations (Premières)		31 à 34
Programmation linéaire		35

CHAPITRE 3	SUITES ARITHMETIQUES ET GEOMETRIQUES	p. 33

Suites arithmétiques	(Premières)	36
Suites géométriques	(Premières)	37 à 40
	(Terminales)	41 à 42

CHAPITRE 4	ETUDE GLOBALE D'UNE FONCTION NUMERIQUE	p. 38

Courbes définies par un tableau de valeur ou une courbe	(Seconde)	43/44
Fonctions affines	(Seconde)	45/46
Pourcentages	(Seconde)	47 à 49

CHAPITRE 5	APPROXIMATION D'UN REEL	p. 44

Formules approchées	(Premières et Terminales)	50 à 52

CHAPITRE 6	APPLICATIONS DE LA DERIVATION	p. 46

Utilisation de paraboles	(Premières)	53 à 58
Utilisation d'hyperboles	(Premières)	59 et 60
Fonctions polynômes	(Premières et Terminales)	61 et 62
Résolution graphique d'inéquation	(Premières et Terminales)	63
Fonctions exponentielles	(Terminales)	64 à 68
Mathématiques et biologie	(Terminale D et F7)	69 à 71
Recherches d'extremums	(Premières et Terminales)	72 à 83
Problèmes à support économique	(Terminales)	84 à 90
Familles de fonctions	(Terminales F)	91

CHAPITRE 7	APPLICATIONS DU CALCUL INTEGRAL	p. 72

Calculs d'aires	(Terminales)	92 à 96
Calculs de volumes	(Terminales)	97 à 102
A support physique	(Terminale D,F)	103 à 105

CHAPITRE 8	EQUATIONS DIFFERENTIELLES	p. 84

Du premier ordre		106 à 115
Du second ordre		116 à 121

CHAPITRE 9 GEOMETRIE

Recherche de centre de gravité	(Premières)	122 à 128
Calculs de distances et d'angles	(Seconde et Premières)	129 à 149
Calcul vectoriel	(Seconde et Premières)	150 à 152
Produit scalaire	(Premières)	153 et 154
Equation de cercle	(Premières)	155
Calculs dans les triangles quelconques	(Premières)	156 à 158
Calculs d'aires et de volumes	(Seconde et Premières)	156 à 168

LES SOURCES D'INSPIRATION

Adaptés de livres de mathématiques, brochures IREM...	22/23/24/25/31/32/36/46/54/61/66/72/73/78 79/80/81/116/117/119/141/159/164

Exercices de physique	56/67/68/103/104/105/106/107/108/109/110

Exercices de mécanique	62/148/150

Sujets de BEP et divers concours	48/49/53/126/130/131/132/133/134/135/138 139/147/149/162

Sujets de baccalauréats professionnels	38/59/65

Sujets de baccalauréats A B D	17/71/84/85/86/87/88/92

Sujets de baccalauréats FG	12/13/14/15/16/18/39/64/69/74/76/77/89/94 96/97/99/100/101/102/111/112/113/114/120 121

Concours de recrutement d'élèves instituteurs	29/30
Sujets de BT	115
Sujets de BTS	1/2/3/4/5/6/7/9/10/90/93/118
Documents d'enseignement technique :	35/122/123/124/125/127/142/143/151/161163
Documents techniques d'entreprises	21/60/140/157
Ouvrages de technologie	11/19/20/41/42/43/44/50/51/52/55/57/58/63 82/91/95/98/136/137/144/145/146/154/155 156/158/165/166
Ouvrage de biologie	70
Petits problèmes relevés dans des magazines	33/40/160
Articles de journaux	37/47/75
Situations concrètes	34/41/83/128/129