EXERCICES ET PROBLEMES DE B.T.S

UNIVERSITÉ PARIS-NORD

INSTITUT DE RECHERCHE
SUR L'ENSEIGNEMENT DES MATHÉMATIQUES

C.S.P. - IREM
Avenue Jean-Baptiste Clément
93430 VILLETANEUSE
☎ 821.61.70

UNIVERSITE PARIS-NORD.- I.R.E.M.
EXERCICES ET PROBLEMES DE BTS.-
Bernard VERLANT.- Villetaneuse
1986, 270 pages dactylo., 21 x 29,7cm.

ISBN 2 86240 80 7

Dépôt légal : juillet 1986

AVANT PROPOS

Cette brochure regroupe des exercices ou problèmes posés aux épreu
de BTS des dernières années :

afin d'élargir les champs d'investigation, les textes c
été regroupés par thèmes ; dans chaque thème, les sujets ont été cl
sés par ordre de difficulté croissante.

pour chaque sujet, sont indiqués la durée de l'épreuve
le barême, pour que chacun puisse mesurer le niveau de performance
tendu.

Cette brochure a été constituée, en gardant à l'esprit, trois idée:

. l'utilisation prochaine d'un référentiel dans les section:
techniciens supérieurs

. l'utilisation par les élèves

. l'utilisation par les professeurs.

1. <u>L'utilisation du référentiel dans les S.T.S.</u>

Le décret du 14 mars 1986 portant règlement général du Brev
de Technicien Supérieur stipule au titre I° article 2 : "le brevet
technicien supérieur est défini par un <u>référentiel</u> caractéristique
compétences professionnelles, technologiques et générales requises
son obtention".

Le D.A.P.E.D., à la Direction des Lycées, mène en particuli
travail de rédaction du référentiel de mathématiques.

Des référentiels provisoires existent déjà et sont utilisés
la délivrance de BTS par unités de contrôle capitalisables (Servic
formatiques ; Informatique Industrielle ; Mécanique et Automatisme
triel ; Electronique).

Les documents décrivent les niveaux d'exigence sur chacun des contenus du programme et permettent au niveau des épreuves de sérier les compétences mises en jeu.

Les thèmes présentés ici suivent le plan du référentiel en cours d'élaboration.

2. L'utilisation par les élèves :

Le regroupement par thèmes permet de sortir du cadre étroit d'une spécialité.

3. L'utilisation par les professeurs

Un certain nombre de programmes ont été rénovés ; dans une spécialité donnée il est parfois nécessaire de s'assurer que tel ou tel exercice peut toujours être posé (par exemple des exercices sur "valeurs propres" posés il y a quelques années en électronique ne figurent plus qu'au programme d'assistant d'ingénieur, aujourd'hui).

La mention "corrigé " signifie que le corrigé de ce texte figure dans des brochures du groupe Inter-IREM déjà publiée ou figurera dans une brochure à paraître (avec ces corrigés classés par thèmes).

Enfin cette brochure sera évolutive: chaque année, les textes les plus anciens (ou périmés) seront remplacés par les nouveaux.

D. Raulin et B. Verlant

LES TEXTES PRESENTES

rospecteur géologue	85(5.31)
djoint technique âtiment	77(5.32)(11.12) 78(11.4) 79(11.43)521.2) 80(5.27)(10.9) 81(7.14)(11.22) 82(1.31)(10.16) 83(1.36) 84(11.49) 85(1.38)(14.3) 86(13.7)
djoint technique TP	80(10.2)(11.42) 83(13.5)(21.3) 84(13.13) 85(5.17)
quipement technique u bâtiment	78(1.6) 80(1.5) 81(15.2) 82(1.33)(11.52) 83(1.14)(5.5)(12.13) 84(5.25)(11.16) 85(1.16)(7.11)(13.16) 86(11.25)(12.14)(14.8)
onderie sur modèle	85(5.30)(20.6)(23.1)
onderie en moules étalliques	85(5.13)(7.4)(23.9)
onstruction navale	85(1.24)(11.9)
onstruction métallique	76(1.1)(11.13) 77(5.34)(6.15) 80(7.3)(11.51) 82(10.3) 8587.6)(11.26)
orge et estampage	85(5.16)(20.2)
haudronnerie	85(6.21)(7.17)(11.24)
aintenance	80.23.41) 81(23.42) 82(11.36)(23.43) 83(11.35)(23.44) 84(10.18)(23.16) 85(1.28) (11.32)(23.17)
ureau d'études	77(6.17) 78(10.13) 79(6.8)(44.5) 80(12.9)(13.2) 81(12.2)(20.3) 82(7.12)(13.14)(21.1) 83(12.10) (20.4) 84(7.9)(11.34)(20.1) 85(9.6)(13.9) (23.32) 86(11.6)(20.7)(23.31)
icromécanique	76(13.15) 77(1.25)(5.23) 78(10.19)(11.11) 79(1.18)(11.15) 76(6.5)(11.10) 80(6.16)(14.7)

25) Opticien	85(21.4)
26) Céramiques	85(9.5)(11.3)
27) Industries graphiques	85(4.2)(5.9)(10.8)
28) Analyses biologiques	79(8.2)(22.4) 80(23.39) 81(9.1)(23.11) 82(22.5) 83(8.3)(23.30) 84(22.6)(23.12) 85(8.4)(23.13) 86(8.5)(23.10)
29) Industries céréalières	85(5.29)(8.1)
30) Blanchiment	85(7.10)(11.19)
31) Chimiste	85(9.4)(17.1)(19.1)
32) Textiles	85(6.3)(10.4)(11.5)(22.2)
33) Cuir	85(15.1)(18.3)
34) Bois	76(5.7)(6.18) 78(18.1) 79(11.8) 80(5.24) 81(6.1)(23.26) 82(6.19)(11.39) 83(5.28)((23.27) 85(6.20)(11.4)(23.7)(23.28)
35) Mobilier	85(7.7)(10.5)(23.14)(23.40)
36) Architecture intérieure	85(4.1)(22.1)(23.2)
37) Assistant d'ingénieur	79(2.17) 81(2.18) 82(2.19)(6.3)(12.17) 83(2.20)(14.6) 84(1.27)(2.21)(11.46) 85((12.8)
38) Etude de prix du bâtiment	76(11.45) 77(1.20)(9.8) 79(9.9)(11.40) 80(1.23)(5.1)(10.20) 81(12.12)(13.4) 83((9.10) 84(5.14)(14.2) 85(5.21)(13.11) 86 (13.1)
39) Services informatiques	83(2.2)(3.1)'5.10) 84(2.4)(3.2)(5.20) 85 (3.3)(10.17) 86(2.4)

Instruments optiques de précision	81(1.17)(6.7)(9.11) 82(2.1)(7.13)(10.10) 85(1.37)(7.15)(10.15)
Fabrications mécaniques	76(11.30)(20.5) 77(23.33) 78(11.20)(23.34) 79(11.48)(23.35) 80(6.24)(11.44)(23.36) 81(11.47)(23.18) 82(6.9)(11.37)(23.19) 83(11.50)(23.20) 84(6.25)(11.23)(23.21) 85(6.2)(11.33)(23.22)
Mécanique automatismes	79(23.37) 81(11.14) 83(23.4)(23.8) 84(1.15)(23.23) 85(23.6)(23.24)
Moteurs à combustion interne	85(12.1)(13.6)
Transformation des plastiques	85(5.26)(10.6)(23.39)
Froid et climatisation	79(7.1)(13.3) 80(5.18)(15.4) 81(11.31) 82(12.3) 83(6.10)(11.21) 85(9.3)
Exploitation des véhicules à moteur	82(1.4)(7.2)(11.2) 83(1.22)(7.8)(11.1) 85(1.10)(12.5)
Maintenance des matériels aéronautiques	85(11.38)(12.15)(23.3)
Informatique industrielle	85(22.3)
Electrotechnique	76(1.19(7.18) 77(1.30)(6.23)(11.28) 78(1.39) 79(1.8)(10.7)(12.7) 80(14.9)(17.2) 81(1.9)(6.11)(12.4) 82(11.18)(1.11)(12.11) 83(1.29)(10.2)(13.12) 84(1.21)(10.11)(11.29) 85(12.18)(15.5)(17.3) 86(1.12)(13.10)(6.12)
Electronicien	76(2.13)(5.23)(14.4)(15.3) 77(10.12)(16.1)(17.4) 78(9.7)(15.6) 79(2.14)(17.5)(18.2) 80(1.32)(2.15)(5.8) 81(2.16)(16.2) 82(5.6)(7.16)(17.6) 83(1.35)(16.3) 84(11.27)(15.7) [illegible]

40) Comptabilité	79(2.5)(5.3) 80(2.6) 81(2.7)(5.4)(5.22) 82(2.8)(5.2) 83(2.9)(5.15) 85(2.11)(5.12) 86(2.12)(3.4)(5.11)
41) Biotechnologie	86(9.2)(22.7)

SOMMAIRE

ALGEBRE

I. Nombres Complexes page 5

II. Algèbre linéaire page 26

III. Algèbre de Boole page 41

IV. Numération page 45

ANALYSE

V. Etude de fonctions, calculs d'aires, de volumes page 4

VI. Procédés d'intégrations, calculs d'intégrales page 7

VII. Equations différentielles du premier ordre. page 8

VIII. Applications des équations différentielles du 1er ordre page 8

IX. Equations différentielles du 1er ordre et courbesintégrales y =
page 9

X. Equations différentielles du second ordre. page 1

XI. Courbes en paramétriques page 1

XII. Equations différentielles et courbes intégrales en paramétriqu
(Equations homogènes). page 1

XIII. Courbes en polaires page 1

XIV. Courbes en polaire et courbes intégrales page 1

XV. Fonctions de plusieurs variables page 1
* dérivées partielles
* différentielle totale
* systèmes différentiels

XVI. Séries entières page190

XVII. Séries de Four ier page 193

XVIII. Intégrales doubles page 198

XIX. Cinématique page 201

GEOMETRIE

XX . Géométrie analytique page 203

XXI . Coniques page 207

STATISTIQUES ET PROBABILITES

XXII . Ajustement affine page 211

XXIII. Probabilités et statistiques (Loi Normale . page 220
Loi de Gauss
Loi de Poisson
problèmes de maintenance)
des tables .)

ALGEBRE

CHAPITRE I : NOMBRES COMPLEXES

EQUATIONS DANS C

1.1 CONSTRUCTION METALLIQUE 76 (4 points , durée totale : 1,5 heure)

Calculer le module et l'argument du nombre complexe :

$$z = \frac{\sqrt{3} + i\sqrt{3}}{-3\sqrt{2} + i\sqrt{6}}$$

En déduire la résolution dans l'ensemble des nombres complexes de l'équation d'inconnue x :

$$(-3\sqrt{2} + i\sqrt{6})x^2 - (\sqrt{3} + i\sqrt{3}) = 0$$

On donnera les solutions sous leur forme trigonométrique. (i est le nombre complexe de module 1, d'argument $\frac{\pi}{2}$).

1.2 ELECTRONIQUE 80 (4 points , durée totale : 3 heures)

1) Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes l'équation d'inconnue z :

$$z^2\left(1 + \mathrm{tg}^2\,\frac{\theta}{2}\right) + 4jz\,\mathrm{tg}\,\frac{\theta}{2} - 4 = 0 \qquad \text{avec } 0 < \theta < \frac{\pi}{2}$$

(j désigne le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$)

2) Déterminer en fonction de θ le module et l'argument de chaque solution.

corrigé

1.3 MICROMECANIQUE 84 (durée totale : 3 heures)

(6 points)

Dans cet exercice, l'argument d'un nombre complexe est un réel de l'intervalle $[\,0, 2\pi\,[$.

A tout réel φ, donné dans l'intervalle $[\,0, 4\pi\,[$, on associe l'équation (E_φ), d'inconnue le complexe z :

$$(E_\varphi) \quad 2\,(1 - \cos\varphi)z^2 - 2\,z\sin\varphi + 1 = 0$$

1. Résoudre (E_φ). Préciser, selon la valeur de φ, le module et l'argument de chacune des solutions.

2. Lorsque φ appartient à l'intervalle $[\,0,2\pi\,[$, on appelle z_1 la solution de (E_φ) d'argument $\frac{\varphi}{2}$, et pose $Z = (z_1)^2$.

Montrer que $|Z| = \text{Re}Z + \frac{1}{2}$ où Re Z désigne la partie réelle de Z.

3. A tout réel φ de l'intervalle $[0, 2\pi[$ on associe, dans le plan rapporté à un repère orthonor $(O; \vec{i}, \vec{j})$, le point M d'affixe Z. On définit ainsi un ensemble F de points du plan. Détermi la nature de F ; en donner une équation cartésienne.

1.4 EXPLOITATION DES VEHICULES A MOTEURS 82 (durée totale: 2 heures) (6 points)

---

1 - Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation (E) du second degré

$$2z^2 - 2(1 + j\sin 2\theta)z + j\sin 2\theta = 0$$

où j désigne le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$ et où θ appartient à l'inter $]0, \frac{\pi}{2}[$.

2 - Déterminer le module et l'argument des deux racines z_1 et z_2 de (E).
On pourra commencer par exprimer z_1 et z_2 en fonction de $\sin\theta$ et de $\cos\theta$.

3 - Dans le plan complexe on considère les points M_1 et M_2 d'affixes respectives z_1 et z_2.
Démontrer que, pour $\theta \neq \frac{\pi}{4}$, la droite M_1M_2 est parallèle à l'axe des réels.

1.5 ADJOINT TECHNIQUE DES ENTREPRISES DES TP 80 (durée: 3 heures) (6 points)

---

1 - Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équatic
$z^2 - \lambda(1 + i)z + i\lambda^2 = 0$ (1)
où z est l'inconnue et λ un paramètre complexe.

2 - Déterminer λ pour que l'équation (1) admette pour solution nombre 1 + i. Résoudre (1) dans chacun des cas trouvés.

3 - L'image M du nombre λ décrit dans le plan complexe le cerc d'équation $x^2 + y^2 - x = 0$. Donner l'ensemble des images, plan complexe, des solutions de (1).

1.6 *ADJOINT TECHNIQUE DES ENTREPRISES DU BATIMENT 78* *(durée: 3 heures)* *(10 points)*

Au nombre complexe z, on associe le nombre complexe Z tel que

$$Z = z^2 - (9 - 2i)z + 26$$

- Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - (9 - 2i)z + 26 = 0$ (le résultat devra être donné sous la forme algébrique).

- M désigne l'image de z dans un plan rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Quelle est l'équation de l'ensemble C_1 des points M tels que Z soit réel ? (On pourra poser $z = x + iy$).

- Quelle est l'équation de l'ensemble C_2 des points M tels que Z soit imaginaire pur ?

- On désigne par Ω le point de coordonnées $\left(\frac{9}{2}, -1\right)$. Déterminer les équations de C_1 et de C_2 dans le repère $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$.
  Tracer C_1 et C_2.
  Déterminer les coordonnées des points d'intersection de C_1 et de C_2.

1.7 *ETUDES DE PRIX DU BATIMENT 83* *(durée: 4 heures)* *(4 points)* *corrigé*

1. Résoudre dans l'ensemble C des nombres complexes l'équation :

$$z^2 - (2+i)(\cos\phi + \sin\phi)z + 2i + 3\sin\phi\cos\phi = 0$$

où i est le complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$ et où ϕ est un paramètre réel appartenant à $[0, 2\pi[$.
On pourra au cours des calculs utiliser l'identité $(\cos\phi - \sin\phi)^2 = 1 - 2\sin\phi\cos\phi$.

2. Dans le plan complexe on désigne par M' et M" les points d'affixes respectives z' et z" racines de l'équation précédente. Déterminer l'ensemble décrit par M' et M" quand ϕ varie sur l'intervalle $[0, 2\pi[$.

3. Déterminer l'ensemble décrit par le milieu I du segment [M'M"] quand ϕ varie sur l'intervalle $[0, 2\pi[$.

1.8 ELECTROTECHNIQUE 79 (durée: 3 heures)

(4 points)

1 - Soit :

$$h(z) = z^3 - 3(1 - j)z^2 - 8\,jz + 4\,j(1 - j)$$

où z est un nombre complexe et où $j^2 = -1$.

1.1. Mettre h(z) sous la forme A(x) + jB(x) dans le cas où z un nombre réel x .
En déduire que l'équation h(z) = 0 admet une solution ré que l'on déterminera.

1.2. Mettre z - 2 en facteur dans h(z).
En déduire les solutions de l'équation h(z) = 0.

1.9 ELECTROTECHNIQUE 81 (durée: 3 heures)

(5 points) *corr*

Soit P la fonction polynôme de la variable complexe z définie

$$P(z) = z^3 + az^2 + bz + c$$

où a, b, c sont trois nombres complexes.

1. Déterminer les trois nombres complexes a, b, c sachant que

$$P(2j) = 0 \quad ; \quad P(j) = -2-j \quad ; \quad P(1) = 1-2j \ .$$

2. Résoudre dans C l'équation d'inconnue u :

$$u^2 - 2u + 2 = 0 \ .$$

3. Déduire de ce qui précède les solutions de l''équation :

$$P(z) = 0.$$

(j est le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$.)

1.10 *EXPLOITATION DES VEHICULES A MOTEURS 85 (durée: 2 heures)*

(5 points)

Soit le polynôme $P(z) = z^3 + (6 - 3j)z^2 + (9 - 14j)z - 15j$

j est le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$.

1. Calculer $P(-3)$ et résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$.

2. Représenter dans le plan complexe, par leurs images M_1, M_2, M_3, les solutions z_1, z_2, z_3 de l'équation $P(z) = 0$ et montrer que les points M_1, M_2, M_3 sont alignés.

1.11 *ELECTROTECHNIQUE 82 (durée : 3 heures)*

(4 points) *corrigé*

On considère le polynôme P de la variable complexe Z défini par :

$$P(Z) = Z^3 - jZ^2 + (1+2j)Z + 10 - 5j$$

(où j est le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$.)

1/ Calculer $P(1+2j)$ et résoudre l'équation $P(Z) = 0$.

2/ Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, construire les images M_1, M_2, M_3 des solutions Z_1, Z_2, Z_3 de l'équation $P(Z) = 0$. Démontrer que l'origine O est le centre du cercle circonscrit au triangle $(M_1M_2M_3)$.

1.12 *ELECTROTECHNIQUE 86 (durée: 3 heures)*

(6 points)

Soit $P(z)$ le polynôme de la variable complexe z défini par

$$P(z) = z^3 - 2(1 + j)z^2 + 5jz + 1 - 7j$$

où j est le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$.

1 – Calculer $P(1 - j)$, puis résoudre l'équation $P(z) = 0$.

2 – Représenter dans le plan muni d'un repère orthonormé les points A, B et C d'affixes respectives z_1, z_2 et z_3, où z_1, z_2 et z_3 sont les solutions de l'équation $P(z) = 0$.

Calculer l'aire du triangle ABC (on pourra utiliser le produit vectoriel $\vec{AB} \wedge \vec{AC}$).

1.13 ETUDES DE PRIX DU BATIMENT 86 (durée : 4 heures) (5 points)

On donne le polynôme à variable complexe z :

$$P(z) = z^3 - (7 + 3i)z^2 + (16 + 15i)z + 2 - 36i$$

où i est le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$.

1. Démontrer que l'équation $P(z) = 0$ admet dans $\mathbb{C}$ une solution de la forme $z_1 = bi$, où b est un nombre réel.

2. Résoudre, dans $\mathbb{C}$, l'équation $P(z) = 0$.

3. Placer, dans le plan complexe, les points A, B, C d'affixes respectives $z_1 = 2i$, $z_2 = 3 - 2i$, $z_3 = 4 + 3i$.

   Calculer la valeur exacte de la mesure de chaque côté du triangle ABC.

   Calculer, en degrés décimaux, à 10^{-2} près, la mesure de chaque angle du triangle ABC.

1.14 EQUIPEMENTS TECHNIQUES DU BATIMENT 83 (durée : 4 heures) (3 points)

Dans $\mathbb{C}$, corps des complexes, on considère le polynôme P défin par :

$$P(z) = z^3 - 3z^2 + z - 3.$$

1. Démontrer que P admet une racine réelle et deux racines imag naires pures et conjuguées. On placera les images de ces trois racines dans le plan complexe rapporté au repère orthonormé (O,

2. Soit f la fonction numérique de la variable réelle x telle c

$$f(x) = \frac{10(x-2)}{x^3 - 3x^2 + x - 3}.$$

Préciser l'ensemble de définition de la fonction f et détermine la primitive de la fonction f qui s'annule pour x=0.

1.15 *MECANIQUE ET AUTOMATISMES 84* *(durée 1 heure)*

(10 points)

On désigne par i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$; m étant un paramètre réel, on considère le nombre complexe z_m défini par :

$$z_m = \frac{-\frac{1}{2} + m + i\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{1}{2} - m + i\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

a) Calculez la partie réelle et la partie imaginaire de z_m.

b) Déterminez les valeurs de m pour lesquelles la partie réelle de z_m est nulle. Calculez le module et un argument de z_m pour chacune des valeurs de m obtenues.

c) Résoudre dans C, corps des complexes, l'équation

$$(z + i)^3 = \frac{1}{\sqrt{3}} z_{-1}$$

où z_{-1} désigne la valeur de z_m pour $m = -1$.

1.16 *EQUIPEMENTS TECHNIQUES DU BATIMENT 85* *(durée : 4 heures)*

(7 points)

1 - Soit P le polynôme de la variable complexe z défini par :

$$P(z) = z^3 - 6iz^2 + (-12 + 2i)z + 4 + 8i$$

(i est le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$)

Calculer P (2i)

En déduire une factorisation de P(z).

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$.

2 - Le plan (P) est rapporté à un repère orthonormé $(0, \vec{u}, \vec{v})$. Toutes les courbes seront construites dans ce même repère. Démontrer que les points A, B, C, images respectives des solutions de l'équation $P(z) = 0$, sont alignés.

3 - On considère l'application φ de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ qui au nombre complexe $z = x + iy$ fait correspondre Z donné par :

$$Z = \varphi(z) = \frac{z - 1 - i}{z + 1 - 3i}$$

M est le point du plan (P) d'affixe z.

a - Déterminer et représenter l'ensemble E_1 des points M du plan (P) tels que $|Z| = 1$

b - Déterminer et représenter l'ensemble E_2 des points M du plan (P) tels que

$$\operatorname{Arg} Z = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad , \quad k \in Z$$

4 - Le faisceau de cercles (C_λ) est défini par :

$$x^2 + y^2 + (\lambda-2)x + (\lambda-6)y + 6-2\lambda = 0$$

où λ est un paramètre réel et (x, y) les coordonnées d'un point du plan (P).

Préciser l'axe radical et la droite des centres du faisceau (C_λ).

Construire le cercle C_0.

Préciser la nature ainsi que les coordonnées des points de base ou des points limites du fai

---

1.17 INSTRUMENT OPTIQUE DE PRECISION 81 (durée : 4 heure)

(3 points) *corrigé*

---

t étant un réel quelconque, résoudre dans le corps des compl
l'équation : $z^4 - 2z^2 \cos(2\,t) + 1 = 0$.

---

1. 18 MICROMECANIQUE 79 (durée : 3 heures)

(4 points)

---

1 - Résoudre dans le corps des nombres complexes C l'équation :

$$z^4 + (5 - i)z^2 + 4 - 4i = 0$$

(i désignant le nombre complexe tel que : $i^2 = -1$).

1.19 ELECTROTECHNIQUE 76 (durée 3 heures)

(4 points)

I - Soit à résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation :

(1) $z^4 + 8\,jz^3 - 22\,z^2 - 24\,jz + 17 = 0$ avec $j^2 = -1$.

1°/ Former l'équation (2) déduite de (1) en posant $Z = z + 2\,j$.

2°/ Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(z^2 - 2z + 3)\,(z^2 + 2\,z + 3) = 0$.
et en déduire les solutions de (1) .

1.20 ETUDES DE PRIX DU BATIMENT 77 (durée :4 heures)

(3 points)

---

1 - Soit l'équation (E) $z^4 + z^3 + 2\,z^2 + z + 1 = 0$ z est un nombre co
Montrer que si z_0 est racine de (E) alors $\frac{1}{30}$ est racine de E.

Montrer que i est racine de l'équation.
Trouver les autres racines de l'équation (E). Faire une figure et p
dans le plan complexe les points qui ont pour affixes les solutions

1.21 *ELECTROTECHNIQUE 84* (*durée : 3 heures*)

(*5 points*) *corrigé*

Dans le corps C des nombres complexes on considère le polynôme (avec $i^2 = -1$) :

$$P(z) = z^4 + (-4 - 4i)\,z^3 + (-6 + 20i)\,z^2 + (28 + 32i)\,z + 32 - 48i$$

1) Calculer $P(-2)$. En déduire une factorisation de $P(z)$ sous la forme : $(z+2)\,Q(z)$ ou $Q(z)$ est un polynôme complexe du 3ème degré.

2) Démontrer que l'équation $Q(z) = 0$ admet une solution imaginaire pure que l'on calculera.

3) Achever la résolution dans C de l'équation $P(z) = 0$. Calculer les modules des quatre solutions z_0, z_1, z_2 et z_3. On notera z_0 la solution ayant le plus petit module.

4) Dans le plan complexe représenter les points M_0, M_1, M_2 et M_3 d'affixes respectives -2, $4i$, $5-i$ et $1+i$. Montrer que M_1, M_2, M_3 est un triangle isocèle et que M_0 est le centre de gravité de ce triangle.

1.22 *EXPLOITATION DES VEHICULES A MOTEURS 83* (*durée : 2 heures*)

(*6 points*)

1. Résoudre dans l'ensemble **C** des nombres complexes l'équation $z^2 + 12 = 0$. On donnera pour chaque racine, d'une part sa partie réelle et sa partie imaginaire, d'autre part son module et son argument.

2. Résoudre de même dans **C** l'équation $z^2 = 1 + i\sqrt{3}$ où i désigne le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$.

- On donnera pour chaque racine les mêmes éléments que ceux demandés dans la première question.

3. Résoudre dans **C** l'équation $z^4 - 2z^2 + 4 = 0$.

Démontrer que dans le plan complexe les quatre points d'affixes respectives, les quatre racines de l'équation précédente sont les sommets d'un rectangle que l'on représentera.

1.23 *ETUDES DE PRIX DU BATIMENT 80* (*durée : 4 heures*)

(*5 points*)

II - n est un entier positif ou nul

1) Résoudre l'équation $z^n = i$ dans l'ensemble C des nomb complexes. Déterminer n pour que i soit solution de l'équation cédente.

2) Soit $f(z) = (z + i)^n - i$
Déterminer n pour que z = 0 soit solution de l'équati $f(z) = 0$

3) Montrer que les solutions de l'équation $f(z) = 0$ ont images dans le plan complexe qui appartiennent à un cercle don donnera une équation cartésienne.

1.24 *CONSTRUCTION NAVALE 85* (*durée 2 heures*)

(*6 points*)

1) Démontrer que pour tout nombre complexe z différent de 1 :

$$\frac{1 - z^7}{1 - z} = 1 + z + \ldots + z^6$$

2) Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ l'équation : $z^7 = 1$ (les solutions seront exprimées sous for trigonométrique).

3) Soit u, l'une des solutions de l'équation $z^7 = 1$. On voudrait exprimer, en fonction de u,

$$A = 1 + 2u + 3u^2 + 4u^3 + 5u^4 + 6u^5 + 7u^6$$

a) Examiner le cas où u = 1.

b) Pour $u \neq 1$, calculer $(1 - u)A$ et en déduire la valeur de A en fonction de u.

4) Application : calculer

$$S = 1 + 2\cos\frac{2\Pi}{7} + 3\cos\frac{4\Pi}{7} + 4\cos\frac{6\Pi}{7} + 5\cos\frac{8\Pi}{7} + 6\cos\frac{10\Pi}{7} + 7\cos\frac{12\Pi}{7}$$

NOTATION EXPONENTIELLE D'UN NOMBRE COMPLEXE

1.25 MICROMECANIQUE 77 (durée : 4 heures)

(4 points)

α désignant un nombre réel et z un nombre complexe, on donne l'équation définie dans $\mathbb{C}$, d'inconnue z :

$$z^4 - 2\,z^3 e^{i\alpha} + 2\,z^2(1 + i\sin 2\alpha) - 2\,z\,e^{i\alpha} + 1 = 0$$

Résoudre cette équation dans $\mathbb{C}$ (On pourra poser $Z = z + \frac{1}{z}$ et montrer que l'équation proposée est équivalente à l'équation :

$$z^2 + \frac{1}{z^2} - 2\,e^{i\alpha}\left(z + \frac{1}{z}\right) + 2(1 + i\sin 2\alpha) = 0)$$

1.26 ELECTRONIQUE 86 (durée: 1 h 30 + 30 minutes)

(4 points) *corrigé*

A tout nombre complexe z différent de 8, on associe le nombre complexe Z défini par :

$$Z = \frac{(z-6)\,z}{z-8}$$

1 – Quels sont les nombres z pour lesquels $Z = 10$?

2 – On désigne par j le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$.

a) Quel est l'ensemble E des points m d'affixe $z = 8 + 4\,e^{j\theta}$. lorsque le nombre réel θ décrit l'intervalle $[-\pi, \pi[$?

b) Lorsque m décrit l'ensemble E, quel est l'ensemble des points M d'affixe Z ?
On représentera les deux ensembles de points mis en évidence.

1.27 ASSISTANT(E) TECHNIQUE D'INGENIEUR 84 (durée : 3 heures)

(3 points)

Le Plan P est muni d'un repère orthonormé d'axes x'Ox, y'Oy (unité : 1 cm). P* est le plan P privé du point O.

A tout nombre complexe $z = x + iy$ est associé le point d'affixe z, de coordonnées (x, y).

A – On considère l'application f de P* dans P telle que le point m d'affixe z ait pour image le point M d'affixe Z avec

$$Z = i\left(\frac{2}{z} - z^2\right)$$

1. A étant le point d'affixe 1 et B = f (A) son image par f, déterminer l'ensemble des p
tels que

$$f(m) = f(A) = B$$

2. Trouver l'ensemble (γ) des points m d'affixe $z = e^{it}$, $(t \in \mathbb{R})$.

Donner une représentation paramétrique de l'ensemble f (γ) en fonction du param

---

1.28 MAINTENANCE 85 (durée : 3 heures)

(5 points)

Soit pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le réel S_n tel que :

$$S_n = \sin\frac{\pi}{n} + \sin\frac{2\pi}{n} + \cdots\cdots + \sin\frac{(n-1)\pi}{n}$$

a) On pose $z = \cos\frac{\pi}{n} + i\sin\frac{\pi}{n} = e^{\frac{i\pi}{n}}$

Donner une expression simple de la somme

$$\Sigma = 1 + z + z^2 + \cdots\cdots + z^{n-1}$$

b) Calculer la partie réelle et la partie imaginaire de cette somme Σ.

En déduire l'égalité $S_n = \dfrac{1}{\operatorname{tg}\frac{\pi}{2n}}$

et $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\dfrac{S_n}{n}\right)$

1.29 ELECTROTECHNIQUE 83 (durée : 3 heures)

(8 points)

θ étant un paramètre réel et z une variable complexe, on considè
polynôme P de la variable complexe z défini par :

$$P(z) = z^2 - (2e^{\frac{3}{2}j\theta}\cos\frac{\theta}{2})z + e^{3j\theta}.$$

1. Calculer $P(e^{j\theta})$ et résoudre l'équation $P(z) = 0$.

2. Pour une valeur donnée du paramètre θ, on désigne par M_1 et M_2 les images respectives dans le plan $\mathcal{P}$ des nombres complexes $e^{j\theta}$ et $(e^{j\theta})^2$ et par M le point du plan tel que $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{OM_2}$.

2.1. Déterminer θ pour que le point M appartienne au cercle $(\mathcal{C})$ de centre O et de rayon 1. Quelle est alors la position correspondante de M ?

2.2. Déterminer θ pour que l'isobarycentre des trois points M, M_1 et M_2 appartienne à $(\mathcal{C})$. En supposant $0 < \theta < \pi$, donner la valeur décimale approchée de θ à 10^{-4} près par défaut.

3. Soit N le point du plan tel que $\overrightarrow{ON} = f(\theta) \cdot \overrightarrow{OM_1}$ avec

$$f(\theta) = \mathrm{Re}(e^{2j\theta}) + \mathrm{Im}(e^{2j\theta}).$$

3.1. Déterminer θ pour que N appartienne au cercle $(\mathcal{C})$. Préciser les positions correspondantes de N.

3.2. Calculer la valeur exacte de l'intégrale I telle que :

$$I = \int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{3\pi}{8}} f^2(\theta)\, d\theta.$$

FONCTION : $z \longmapsto \dfrac{az+b}{cz+d}$

1.30 ELECTROTECHNIQUE 77 (durée : 3 heures)

(5 points)

---

1 - Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé on considère les points :

m d'affixe $z = x + iy$

M d'affixe $Z = X + iY$ tel que $Z = \dfrac{1+z}{1-z}$

A d'affixe 1.

1.1. - 1.1.1. Démontrer que si le nombre complexe $z = x + iy$ a l'unité pour module, le nombre $Z = \dfrac{1+z}{1-z}$ $(z \neq 1)$ est imaginaire pur. Préciser alors l'ensemble (C) des points m et l'ensemble (Δ)

des points M.

1.1.2. Démontrer que pour tout z appartenant à $\mathbb{C} - \{1\}$, les p
A, m, M sont alignés.
En déduire la construction du point M connaissant m.

1.2. - Déterminer l'équation cartésienne de l'ensemble (Γ) des points
que $|Z| = \sqrt{2}$.
Préciser la nature de (Γ).

1.31 ADJOINT TECHNIQUE D' ENTREPRISE DU BATIMENT 82 (durée : 3 heures)
(8 points) corrigé

A tout nombre complexe z non nul, on associe le nombre complexe $Z = \frac{1}{2}(z - \frac{i}{z})$. On désigne par M et P les images respectives de z et dans le plan P rapporté à un repère orthonormé.

1 - Déterminer les valeurs de z pour lesquelles on a : $Z = 2 + 2i$

2 - On écrit z sous la forme trigonométrique $z = r(\cos\theta + i\sin$
$(r > 0 ; -\pi < \theta \leqslant \pi)$.

Calculer en fonction de r et θ, les coordonnées (X ; Y) du po
dans le plan.

3 - On appelle (C) l'ensemble des points M du plan tels que Z soi
imaginaire pur. Déterminer une relation entre r et θ caracté
les points M appartenant à (C).

1.32 ELECTRONIQUE 80 (durée : 2 heures)
(10 points)

On désigne par j le nombre complexe de module 1 et d'argu $\frac{\pi}{2}$, par P le plan complexe rapporté au repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ e par P* le plan complexe privé du point A d'affixe - j. Soit f l'appl de P* vers P qui, à tout point m de P* d'affixe $z = x + jy$ associe l point M d'affixe $Z = X + jY$ tel que $Z = \frac{z - j}{z + j}$

1 - a) - Déterminer l'ensemble E des points m tels que Z soit réel.

b) - Déterminer l'ensemble F des points m tels que Z soit imaginaire pur.

c) - Déterminer l'ensemble G des points m tels que $f(m) = m$.

- L'application f est-elle bijective ?

- Soit D la droite d'équation $y = 0$. Déterminer en fonction de l'abscisse x d'un point m de D, les coordonnées X et Y du point M associé à m. On pose $x = \operatorname{tg} \frac{t}{2}$ avec $t \in]-\pi, +\pi[$. Calculer X et Y en fonction de t. Quel est l'ensemble C des points M lorsque m décrit D ? Le point $M_0(1, 0)$ appartient-il à C ?

NOMBRES COMPLEXES ET CONIQUES

1.33 EQUIPEMENTS TECHNIQUE DU BATIMENT 82 (durée : 4 heures)
(8 points)

Le plan affine euclidien P est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ avec $\|\vec{i}\| = 2$ (unité 1 cm).

1 - Montrer que la courbe (H) d'équation :

$$x^2 - y^2 + x + 1 = 0$$

est une hyperbole dont on précisera le centre de symétrie, les sommets, les foyers et les asymptotes.

Donner une équation de la tangente à (H) en chacun des points d'abscisse 0.

Construire la courbe (H) ainsi que ces tangentes.

2 - A tout point m de P, d'affixe $z = x + iy$, on fait correspondre le point M d'affixe

$$Z = (z + 1 + i)(z - i)$$

2.1 - Trouver z tel que $Z = 0$.

2.2 - Donner la forme algébrique $X + iY$ de Z, en fonction de x et y.

2.3 - Démontrer que Z est imaginaire pur si, et seulement si, $m \in (H)$, (H) étant la courbe de la partie 1.

2.4 - Trouver l'ensemble (C) des points m tels que Z soit réel ; donner l'équation cartésienne $y = f(x)$ de (C) ; donner une équation de la tangente à (C) au point d'abscisse 0.

Construire (C) dans le même repère que précédemment.

Déterminer les points d'intersection de (C) et de (H).

Que peut-on dire de Z si m est l'un de ces points ?

1.34 EQUIPEMENTS TECHNIQUES DU BATIMENT 86 (durée : 4 heures)
(8 points)

---

1 - Soit l'équation :

$$z^2 - z(4 + i\sqrt{3}) + 3(1 + i\sqrt{3}) = 0$$

dans laquelle z désigne la variable complexe et i le nombre complexe de module 1 d'argument $\frac{\pi}{2}$.

1-1 - Résoudre cette équation dans $\mathbb{C}$ et représenter les images A et B des solutions dans plan complexe de repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

1-2 - Ecrire une équation de l'éllipse de centre W (1, 0), passant par A et B et dont les axes sont parallèles aux axes de coordonnées.

2 - Soient (x, y) les coordonnées d'un point dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

2-1 - Déterminer la nature, le centre, les sommets, les foyers de la courbe d'équation :

$$3x^2 + 4y^2 - 6x - 9 = 0.$$

2-2 - On définit une famille de courbes (C_λ) dépendant du paramètre λ par son équation :

$$\frac{(x-1)^2}{4} + \frac{y^2}{\lambda} = 1, \quad \lambda \in \mathbb{R}^*.$$

Déterminer suivant les valeur de λ la nature et les caractéristiques des courbes (C_λ).

Tracer dans un même repère les différentes courbes (C_λ) possibles.

3 - Soit l'équation différentielle :

$$y' = \frac{x-1}{x^2 - 2x - 3} \cdot y$$

dans laquelle x désigne la variable et y est fonction de x.

3-1 - Résoudre l'équation différentielle.

3-2 - Déterminer la solution particulière prenant la valeur $\sqrt{3}$ pour $x = 1$.

Montrer que la courbe intégrale correspondante est une partie de la courbe étudiée au paragraphe 2-1.

NOMBRES COMPLEXES ET FONCTIONS NUMERIQUES

.35 ELECTRONIQUE 83 *(durée : 2 heures)*

(10 points) *: corrigé*

A la variable réelle t, $t \in \mathbb{R}^+$, on associe la variable complexe z par la relation :

$$z = \alpha \frac{1 + it}{1 + \alpha it}$$

où α est un paramètre réel tel que $0 < \alpha < 1$ et où i est le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$. On appelle ϕ l'argument de z et on désigne par M le point image de z dans le plan affine euclidien P rapporté au repère orthonormé $(O;\vec{u},\vec{v})$.

1. Calculer les coordonnées x et y de M en fonction de t et γ. Démontrer que le point M est situé dans le premier quadrant du plan ; peut-il être situé sur l'un ou l'autre des deux axes de coordonnées ?

2. Calculer ϕ en fonction de t et de α. Démontrer que, lorsque t décrit $\mathbb{R}^+$, ϕ appartient à l'intervalle $[0,\frac{\pi}{2}[$ et passe par un maximum ϕ_m que l'on exprimera en fonction de α :

   2.1 à l'aide de la fonction arctan ; (la notation arctan désigne la fonction arc tangente).

   2.2 à l'aide de la fonction arcsin ; (la notation arcsin désigne la fonction arc sinus).

3. Lorsque t décrit $\mathbb{R}^+$, le point M décrit une courbe $(\mathcal{C})$ dont on déterminera une équation cartésienne. Prouver que $(\mathcal{C})$ est une portion d'un cercle dont on déterminera en fonction de α le rayon et les coordonnées du centre.

4. Retrouver, à l'aide de la courbe ($\mathcal{C}$), les résultats sur le mum ϕ_m de ϕ introduit à la fin de la seconde question.

NOMBRES COMPLEXES ET COURBES EN POLAIRES

1.36 ADJOINT TECHNIQUE D' ENTREPRISES DU BATIMENT 83 (durée : 3 heures)

(10 points) corrigé

A tout nombre complexe z on associe le nombre complexe Z tel que :

$$Z = |z|^2 + \bar{z}^2$$

où $|z|$ désigne le module de z, et $\bar{z}$ le complexe conjugué de z. On désigne par m et M les images respe z et Z dans le plan P rapporté à un repère orthonormé $(O\,;\vec{i},\vec{j})$.

1. Calculer les coordonnées (X, Y) du point M en fonction des cordonnées (x, y) du point m.
2. On écrit z et Z sous la forme trigonométrique :

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta), \qquad r \in \mathbb{R}^+, \qquad \theta \in]-\pi, \pi]$$

$$Z = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi), \qquad \rho \in \mathbb{R}^+, \qquad \varphi \in]-\pi, \pi]$$

Calculer ρ et φ en fonction de r et θ.

3. On suppose que le point m décrit le cercle $\mathcal{C}$ de centre O et de rayon 1. Démontrer que l'ensemble des p correspondants est un cercle $\mathcal{C}'$ dont on précisera le centre et le rayon.
4. 4.1. Déterminer une relation liant r et θ, caractérisant les points m tels que M appartienne au cercle $\mathcal{C}$

   4.2. Dans le plan P, on considère la courbe Γ_1, définie en coordonnées polaires par :

$$r = \frac{1}{\sqrt{2\cos\theta}} \qquad \theta \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$$

Démontrer que Γ_1 possède un axe de symétrie.

Étudier les variations de r en fonction de θ. Tracer Γ_1, et en déduire Γ, ensemble des points m tel appartienne à $\mathcal{C}$.

1.37 INSTRUMENTS D' OPTIQUE DE PRECISION 85 (durée : 4 heures)

(8 points)

A tout nombre complexe z non nul, on associe le nombre complexe $Z = (z - \frac{i}{z})$. On désigne par et M les images respectives de z et Z dans le plan P rapporté à un repère orthonormé.

1. On écrit z sous la forme trigonométrique : $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ (θ compris entre 0 et 2π).

   Calculer en fonction de r et θ, les coordonnées (X, Y) du point M dans P.

2. On appelle (C) l'ensemble des points M du plan P tels que Z soit imaginaire pur. Déterminer u relation entre r et θ caractérisant les points M appartenant à (C).

3. Construire l'ensemble (C) dans le plan P, en considérant la relation obtenue à la question précédente comme une équation polaire de (C). On précisera les points de (C) où la tangente est parallèle à l'axe des ordonnées.

4. Calculer, en unités d'aire, la mesure de l'aire de la partie du plan limitée par la courbe (C) et la droite d'équation $y = x$.

1.38 ADJOINT TECHNIQUE D'ENTREPRISES DU BATIMENT 85 (durée : 3 heures)

(10 points)

---

1) Soit θ un nombre réel tel que $0 \leqslant \theta < \pi$. Déterminer en fonction de θ le module et un argument du nombre complexe

$$Z = \frac{1 - \cos\theta + i\sin\theta}{1 + \cos\theta - i\sin\theta}$$

2) Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(0; \vec{i}, \vec{j})$, (unité : 2 cm), on considère la courbe (Γ) d'équation polaire $r = \tan\frac{\theta}{2}$.

(on rappelle que tan est le symbole de la fonction tangente).

a) Démontrer que (Γ) admet un axe de symétrie.

b) Démontrer que (Γ) admet une asymptote et préciser la position de (Γ) par rapport à cette asymptote.

c) Tracer la courbe (Γ).

d) Exprimer, en cm^2, la mesure de l'aire intérieure de la boucle formée par (Γ).

NOMBRES COMPEXES ET ALGEBRE LINEAIRE

1.39 ELECTRONIQUE 78 *(durée : 2 heures)*

(10 points)

On désigne par j le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$
γ le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{2\pi}{3}$. On rappelle que $\{1, j$
une base de $\mathbb{C}$, ensemble des complexes, qui est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

1 - Le conjugué de γ étant noté $\bar{\gamma}$, démontrer que :

$$1 + \gamma + \gamma^2 = 0 \qquad \text{et} \qquad \gamma^2 = \bar{\gamma}.$$

2 - Démontrer que $\{1, \gamma\}$ est une base de $\mathbb{C}$. Tout nombre $z = x + j\,y$ (x et
s'exprime donc sous la forme $z = a + \gamma b$ (a et b réels). Exprimer x e
fonction de a et b, et inversement a et b en fonction de x et y. En d
les matrices P et Q définies par :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Vérifier que P est inversible et que $Q = P^{-1}$. Quelles sont les compos
de j et de $\bar{\gamma}$ dans la base $\{1, \gamma\}$?

3 - Calculer en fonction de a et b le carré du module de $z = a + b\gamma$.
Déterminer les composantes dans la base $\{1, \gamma\}$ des nombres complexes
vants :

3.1. - Le conjugué $\bar{z}$ du nombre $z = a + \gamma b$.

3.2. - L'inverse $\frac{1}{z}$ du nombre $z = a + \gamma b$ supposé non nul.

3.3. - Les produits γz et $\gamma^2 z$.

3.4. - Le produit des nombres $z = a + \gamma b$ et $z' = a' + b'\gamma$. (a, b, a',
sont réels).

4 - Soit f l'application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ qui, au complexe z, associe son conjug
Ecrire la matrice A de f dans la base $\{1, j\}$ et la matrice A' de f da
base $\{1, \gamma\}$. Calculer $P^{-1} A P$ et comparer avec A'.

CHAPITRE II : ALGEBRE LINEAIRE

ALGEBRE LINEAIRE - SYSTEMES LINEAIRES

2.1 INSTRUMENTS D'OPTIQUE DE PRECISION 82 (durée : 4 heures) *corrigé*
(6 points)

a et m désignent deux paramètres réels, on considère le systèm
d'inconnues réelles x, y, z et t :

$$\begin{cases} (m+1)x + (m+1)y = 2 \\ x + y + mz = 2 \\ (m+1)x + y + (2m+1)z + t = 5 \\ 2my + z + (m+1)t = a \end{cases}$$

1) Déterminer les valeurs de m pour lesquelles la matrice associ
n'est pas inversible.

2) Pour chaque valeur de m ainsi trouvée, résoudre le système da
$\mathbb{R}^4$ en discutant suivant les valeurs de a.

2.2 SERVICES INFORMATIQUES 83 (durée : 3 heures)
(4 points)

1 - Résoudre, dans R^3, le système :

$$\begin{cases} 3x + 2y + z = a \\ 2x - y + z = b \\ x + 3y + 2z = c \end{cases}$$

où a, b, c sont trois nombres réels donnés.

2 - On considère la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

De la première question, déduire A^{-1} , matrice inverse de A.

2.4 SI 84 (4 points)

Soient les matrices à trois lignes et à trois colonnes

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix} \qquad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} b & 1 & 1 \\ 1 & b & 1 \\ 1 & 1 & b \end{pmatrix}$$

Existe-t-il des couples (a,b) de nombres réels tels que les matrices A et B soient inverses l'une de l

2.3 SI 85 (5 points)

Résoudre et discuter si a est élément de IR le système d'équations :

$$\begin{cases} ax + y + z = 1 \\ x + ay + z = a, \\ x + y + az = a^2 \end{cases}$$

2.4 SI 86 (4 points)

Soient les matrices à trois lignes et à trois colonnes

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -3 & 8 & -16 \\ -3 & 7 & -12 \\ -1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

1 – Calculer la matrice $M = B \times A$

2 – Déterminer la matrice M^{-1} inverse de la matrice M.

2.5 COMPTABILITE ET GESTION 79 (1 H 30)

(10 points)

On appelle $\mathcal{M}_3$ l'espace vectoriel réel des matrices carrées d'ordr
et I la matrice unité de cet espace :

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Etant donnée la matrice A :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

on considère l'ensemble E :

$$E = \{\alpha . A + \beta . I \ / \alpha \in \mathbb{R}, \beta \in \mathbb{R}\}$$

1 - Démontrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3$ de dimension 2.

2 - Démontrer que A^2 est un élément de E. Déterminer les composantes du vecteur A^2 dans la base $\{A, I\}$. En déduire que E est stable pour la multiplication des matrices.

3 - 3.1. - Déduire des résultats précédents la matrice A^{-1} définie par :

$A . A^{-1} = A^{-1} . A = I$ (A^{-1} est appelée matrice inverse de A)

3.2. - Résoudre dans $\mathbb{R}^3$ le système :

$$\begin{cases} x + 2y + 2z = 1 \\ 2x + y + 2z = -3 \\ 2x + 2y + z = 2 \end{cases}$$

2.6 COMPTABILITE 80 (10 points)

---

1 - Soit E un espace vectoriel rapporté à une base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On considère les 4 vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$, $\vec{t}$ appartenant à E et donnés par leurs coordonnées dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

$$\vec{u}\begin{pmatrix} 2m \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} ; \quad \vec{v}\begin{pmatrix} 1 \\ 2m \\ 1 \end{pmatrix} ; \quad \vec{w}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2m \end{pmatrix} ; \vec{t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2(1-m) \end{pmatrix}$$

1.1. - Pour quelle valeur du réel m les 2 vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont-ils linéairement dépendants ?

1.2. - Pour quelles valeurs du réel m les 3 vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ sont-ils linéairement dépendants ?

1.3. - On suppose m = 1. Déterminer les réels x, y, z tels que :

$$x\vec{u} + y\vec{v} + z\vec{w} = \vec{t}$$

Combien y a-t-il de solutions ? Justifiez la réponse.

2.7 COMPTABILITE 81 (10 points)

Soit E un espace vectoriel de dimension 3 et de base B = (i, j, k)

On notera le vecteur $V = xi + yj + zk$ $\quad V = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

On pose $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} -1 \\ a \\ -a \end{pmatrix}$, $w = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix}$ $a \in \mathbb{R}$

et $M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & a & 1 \\ 3 & -a & 8 \end{pmatrix}$

1 - Démontrer qu'il existe un a unique pour lequel la matrice M est non inversible.

Donner dans ce cas une relation de dépendance linéaire entre u, v,

Quel est alors le rang du système (u, v, w) ?

2 - Dans le cas $a = 12$ résoudre le système linéaire noté

matriciellement $M \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$

2.8 COMPTABILITE 82

---

2 - Dans un espace vectoriel réel E, rapporté à la base $B = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les 3 vecte

$\vec{e_1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\vec{e_2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\vec{e_3} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

2.1 - Montrer que $B' = (\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ est une base de E.

2.2 - On considère l'endomorphisme de E défini par :

$$f(\vec{e_1}) = 3\vec{e_1} - \vec{e_2} + \vec{e_3} = \vec{e_1'}$$
$$f(\vec{e_2}) = \vec{e_1} + \vec{e_2} - \vec{e_3} = \vec{e_2'}$$
$$f(\vec{e_3}) = \vec{e_1} - \vec{e_2} - \vec{e_3} = \vec{e_3'}$$

2.2.1 - Trouver la matrice M' de f dans la base B'.

2.2.1 - Trouver la matrice M de f dans la base B.

2.9 COMPTABILITE 83

---

1 - Soit E un espace vectoriel de dimension 3 rapporté à une base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Soit a un réel quelconque et A la matrice.

$$A = \begin{pmatrix} a-2 & 1 & 1 \\ 1 & a-2 & 1 \\ 1 & 1 & a-2 \end{pmatrix}$$

1.1 - Pour quelles valeurs de a la matrice A est-elle non inversible ?

1.2 - Soient les vecteurs X et B de composantes : $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}$

On considère le système écrit matriciellement :

$$AX = B$$

1.2.1 - Résoudre ce système dans le cas où $a = 0$.

1.2.2 - Résoudre ce système dans le cas où $a = 3$.

1.2.3 - Pour $a = 1$, calculer A^{-1} , matrice inverse de A, et résoudre le système obtenu.

2.11 COMPTABILITE 85 (10 points)

Soit E un espace vectoriel de dimension 3 sur IR rapporté à une base $B = \left(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$.

L'endomorphisme f de E (application linéaire de E dans E) est défini par sa matrice F relativement à la base B $F = \begin{pmatrix} -2 & -3 & 6 \\ 3 & 1 & 5 \\ 3 & 4 & -7 \end{pmatrix}$

On pose $f(\vec{i}) = \vec{u}$; $f(\vec{j}) = \vec{v}$; $f(\vec{k}) = \vec{w}$

1°/ Démontrer que $\vec{w}$ est une combinaison linéaire de $\vec{u}$ et de $\vec{v}$ et déterminer les réels p et q tels que $\vec{w} = p\vec{u} + q\vec{v}$

2°/ Soit $\vec{V} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ un vecteur de E

En utilisant la première question, calculer les réels a et b tels que

$$f(\vec{V}) = a\vec{u} + b\vec{v}$$

(on exprimera a et b en fonction de x et de y)

3°/ Soit $\vec{N} = -3\vec{i} + 4\vec{j} + \vec{k}$

a) vérifier que $f(\vec{N}) = \vec{o}$

b) démontrer que, si $f(\vec{V}) = \vec{o}$ alors $\vec{V} = \alpha\vec{N}$ (α désignant un nombre réel)

2.12 COMPTABILITE 86 (10 points)

Soit E un espace vectoriel de base $B = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, m un réel et g l'application linéaire de E dans E définie par :

$$\vec{e}_1 = g(\vec{i}) = \vec{i} + m\vec{j} + \vec{k}$$
$$\vec{e}_2 = g(\vec{j}) = \vec{i} + \vec{j} + m\vec{k}$$
$$\vec{e}_3 = g(\vec{k}) = \vec{i} + (m-1)\vec{j} + \vec{k}$$

1 — Donner la matrice A de g dans la base B.

2 — Pour quelles valeurs de m la famille $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ est-elle libre ?

3 — **On suppose m = 1**

Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ les matrices représentant 3 vecteurs de dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

a) Résoudre le système écrit matriciellement $AX = B$

b) Résoudre le système écrit matriciellement $AX = C$

4 — **On suppose m = −1**

a) Démontrer que $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ est une base de E.

b) On considère f l'endomorphisme de E défini par

$$f(\vec{i}) = -\vec{i} + \vec{j} \quad ; \quad f(\vec{j}) = 2\vec{i} + \vec{k} \quad ; \quad f(\vec{k}) = \vec{j} - \vec{k}$$

Ecrire M la matrice de f dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ et M' la matrice de f dans la base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$.

(On rappelle qu'un endomorphisme de E est une application linéaire de E dans E.

2.13 ELECTRONIQUE 76 (durée : 2 heures)
(10 points)

E_2 étant un espace vectoriel de dimension 2 sur ℝ, rapporté à la b $B = (\vec{i}, \vec{j})$, on considère l'application linéaire φ de E_2 vers E_2 do trice A relativement à B est $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

1) **Calculer A^2 et vérifier la relation $A^2 - 2A - 3I = 0$ (1)**

dans laquelle $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Soit $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer J^2.

Montrer que A peut s'écrire sous forme d'une combinaison linéaire $\alpha I + \beta J$ des matrices I et J, $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$.

Retrouver alors la relation (1).

2) On se propose de déterminer les vecteurs propres $\vec{u} \in E_2$ $(\vec{u} \neq \vec{0})$ de coordonnées x et y vérifiant : $\varphi(\vec{u}) = \lambda \vec{u}$ $(\lambda \in \mathbb{R})$.

Montrer que le couple (x, y) des coordonnées de $\vec{u}$ est solution du système

$$\begin{cases} (1 - \lambda)x + 2y = 0 \\ 2x + (1 - \lambda)y = 0. \end{cases}$$

Montrer que le système admet des solutions autres que la solution nulle (0, 0) si et seulement si λ est solution de l'équation :

$$(1 - \lambda)^2 - 4 = 0$$

Déterminer λ, puis les vecteurs $\vec{u}$.

3) Soit $\vec{u_1}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ et $\vec{u_2}\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$ deux vecteurs rapportés à la base B. Montrer que $(\vec{u_1}, \vec{u_2})$ est une base de E_2. (En utilisant la question 2), exprimer $\varphi(\vec{u_1})$ et $\varphi(\vec{u_2})$ dans la base $(\vec{u_1}, \vec{u_2})$. Ecrire la matrice de φ dans la base $(\vec{u_1}, \vec{u_2})$.

2.14 *ELECTRONIQUE 79 (10 points)*

L'espace vectoriel réel E de dimension 3 est rapporté à une base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On considère la matrice :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -12 \\ 2 & 0 & -8 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \qquad \text{On notera } I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

la matrice unité.

1 - Calculer le déterminant de M. La matrice M est-elle inversible ?
Calculer la matrice inverse M^{-1}.

2 - Soit le système :

$$\begin{cases} x + 3y - 12z = 2 \\ 2x - 8z = -4 \\ x - y - 2z = 6 \end{cases}$$

Ce système est-il de Cramer ? Résoudre ce système (on pourra utiliser les résultats du 1 -).

3 - Calculer le déterminant de la matrice $M - \lambda I$.
On obtiendra un polynome du 3e degré en λ dont $\lambda_1 = -1$ est une racine.

Calculer les autres racines λ_2 et λ_3. Que représentent ces valeurs

4 - f étant l'application linéaire associée à M, et $\vec{V}(x, y, z)$ un vecte
résoudre : $f(\vec{V}) = \lambda\vec{V}$ pour : $\lambda = \lambda_1$, $\lambda = \lambda_2$, $\lambda = \lambda_3$. On obtien
sous espaces vectoriels propres F_1 , F_2 , F_3 de dimension 1 et on d
une base simple de chacun d'eux.

5 - Soit les vecteurs $\vec{u}_1(3, 2, 1)$, $\vec{u}_2(12, 8, 1)$ et $\vec{u}_3(2, 2, 1)$ de E. La
$\{\vec{u}_1 , \vec{u}_2 , \vec{u}_3\}$ est-elle une base de E ? Si oui, déterminer la matr
de l'application f dans cette base.

2.15 ELECTRONIQUE 80 (10 points)

Soit E un espace vectoriel dont une base est B = $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$
On appelle f l'application linéaire de E vers E, dont la matrice, d
la base B, est :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

1 - a) - Démontrer que 2 est la seule valeur propre de f.

b) - Déterminer le sous-espace propre F associé à cette valeur

c) - On pose $\vec{v} = \vec{i} + 2\vec{j}$. Démontrer que $(\vec{v}, \vec{k})$ est une base de

2 - a) - Démontrer que $B' = (\vec{i}, \vec{v}, \vec{k})$ est une base de E.

b) - Quelle est la matrice N de f dans la base B' ?

3 - a) - On appelle $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ la matrice de passage de la
à la base B'.
Calculer P^{-1}.

b) - Vérifier que $M = PNP^{-1}$.

4 - a) - Démontrer par récurrence sur n que :

$$\forall n \in N^* \quad , \qquad N^n = 2^n \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -n & 1 & 0 \\ -n & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

b) - En déduire l'expression de :

Soit E un espace vectoriel rapporté à une base $\mathcal{B} = (i,j)$ et f l'application linéaire de E vers E dont la matrice est :

$$A = \begin{pmatrix} a & 3 \\ -4 & d \end{pmatrix} \qquad \text{avec } a < 0 \text{ et } d > 0$$

On posera si nécessaire :

$$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{et } I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1 - Soit $p(\lambda) = 0$ l'équation caractéristique de la matrice A. Ecrire cet équation et déterminer a et d pour que 3 et 2 en soiént les solutions. Dans toute la suite du problème, a et d auront les valeurs trouvées.

2 - Trouver deux vecteurs propres V_1 et V_2, respectivement associés aux valeurs propres 3 et 2 (on choisira pour coordonnées des entiers naturels non nuls les plus petits possibles).

3 - Montrer que (V_1, V_2) constitue une base $\mathcal{B}'$ de E ; quelle est la matrice D de l'application f dans cette base ? Calculer D^n.

4 - On appelle P la matrice $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$. Vérifier que $A = P\,D\,P^{-1}$; calculer A^8.

5 - Deux suites numériques (u_n) et (v_n) satisfont aux relations :

$$\begin{cases} u_n = -u_{n-1} + 3\,v_{n-1} \\ v_n = -4\,u_{n-1} + 6\,v_{n-1} \end{cases}$$

5-1 - Montrer, que si l'on pose $U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$, ces relations sont équivalentes à la relation unique :

$$U_n = A.U_{n-1} \quad ; \quad \text{A étant la matrice précédente.}$$

5-2 - Evaluer U_n en fonction de $U_0 = \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}$; en déduire les valeurs numériques de u_8 et de v_8 pour $u_0 = 5$ et $v_0 = 4$.

2.17 *ASSISTANT(E) D'INGENIEUR 79 (durée :3 heures)*

(10 points)

Soit E un espace vectoriel réel de dimension 3 rapporté à une base $B = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ et soit f_m un endomorphisme de E représenté dans la base la matrice :

$$A_m = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -1 & m & 1 \\ 1 & 1 & m \end{pmatrix}$$

où m est un réel quelconque.

- On considère le vecteur $\vec{u}$ de E défini par : $\vec{u} = \vec{i} + m\vec{j} - m\vec{k}$
  Trouver tous les vecteurs $\vec{V}$ de $E(\vec{V} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k})$ tels que $f_m(\vec{V}) =$
  Discuter suivant les valeurs de m.

- 2.1. - Déterminer les valeurs propres de l'endomorphisme f_m. (On dé minera leur nombre et leurs valeurs suivant le paramètre m). vérifiera que le réel $m + 1$ est valeur propre.

  2.2. - Démontrer que pour une certaine valeur α de m que l'on calcu f_α possède une valeur propre triple que l'on précisera.
  Trouver alors l'ensemble des vecteurs propres de f_α.

- Calculer $(A_0 - I_3)^2$. En déduire $(A_0)^n$ où n est un entier positif. (I_3 est la matrice de l'application identique notée I_d).

- 4.1. - Démontrer que l'image de E par $(f_0 - I_d)$ est un espace vecto à une dimension dont on déterminera une base $\vec{e}_2$.

  4.2. - Déterminer un vecteur $\vec{e}_3$ tel que $f_0(\vec{e}_3) = \vec{e}_3 + \vec{e}_2$.

  4.3. - Si $\vec{e}_1$ est un vecteur propre de f_0 non colinéaire à $\vec{e}_2$ (on do $\vec{e}_1$) on considère la famille $B' = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$.
  Montrer que B' est une base de E.
  Quelle est la matrice B_0 représentant f_0 dans cette nouvelle base ?

2.18 *ASSISTANT D'INGENIEUR 81 (10 points)*

: - Soit f l'application linéaire du R espace vertoriel R^3 dans lui-même qui dans la base orthonormée directe $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ a pour matrice :

$$M = \frac{a}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad a \in R^*$$

1 - Montrer que f admet une seule valeur propre réelle et déterminer les vecteurs propres associés.

2 - 2-1 - Déterminer le vecteur $\vec{u} \in R^3$ tel que :

$$\begin{cases} f(\vec{i}) = \vec{u} \wedge \vec{i} \\ f(\vec{j}) = \vec{u} \wedge \vec{j} \\ f(\vec{k}) = \vec{u} \wedge \vec{k} \end{cases}$$

("$\wedge$" désigne le symbole du produit vectoriel).

2-2 - $\vec{v}$ étant un vecteur quelconque de R^3, exprimer $f(\vec{v})$ en fonction de $\vec{u}$ et de $\vec{v}$.

2-3 - On donne $\vec{I} = \frac{1}{\sqrt{3}}(\vec{i} + \vec{j} + \vec{k})$ et $\vec{J} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{i} - \vec{j})$. Déterminer $\vec{K}$ tel que $(\vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$ soit une base orthornomée directe et démontrer que dans la base $(\vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$ la matrice de f est

$$M' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a \\ 0 & a & 0 \end{pmatrix}$$

3 - Soit $\vec{V} \in R^3$ $\vec{V} = X\vec{I} + Y\vec{J} + Z\vec{K}$. On définit par récurrence une suite de vecteurs $\vec{V}_n$ par $\vec{V}_0 = \vec{V}$ et pour tout n entier strictement positif $\vec{V}_n = f\left(\vec{V}_{n-1}\right)$

3-1 - Calculer les coordonnées de $\vec{V}_n$ en distinguant les deux cas : n pair et n impair.

3-2 - On pose $\vec{W}_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\vec{V}_k$. Montrer que $\vec{W}_n$ admet, quand $n \longrightarrow +\infty$ un vecteur limite $\vec{W}$ que l'on définira.

2.19 ASSISTANT D'INGENIEUR 82 (6 points) corrigé

Soit E un espace vectoriel de dimension 3, sur $\mathbb{R}$, et soit f_m un endomorphisme de E défini la base $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ par sa matrice

$$A_m = \begin{pmatrix} 0 & m & m+1 \\ 1 & 1-m & 2 \\ 2 & 2 & -m \end{pmatrix} \qquad (m \in \mathbb{R})$$

1 - Determiner, suivant les valeurs de m, le noyau de l'application f_m ; dans chacun des cas préci nature, sa dimension et en donner, quand cela est possible, une base.

2 - Démontrer que, pour m = 1, f_1 est bijective. Déterminer la matrice de son application réciproque f
En déduire le vecteur $\overrightarrow{V_1}$ de E tel que $f_1(\overrightarrow{V_1}) = 3(\vec{i} + \vec{j} + \vec{k})$. Que peut-on dire de $\overrightarrow{V_1}$?

3 - Pour quelles valeurs de m la matrice A_m est-elle diagonalisable ?
On remarquera que 3 est une valeur propre de toutes les matrices A_m.

4 - Lorsque m = 1, déterminer une base $\mathcal{B}'$ de vecteurs propres.
Ecrire la matrice A'_1 de f_1 dans cette base.

2.20 ASSISTANT D'INGENIEUR 83 (8 points)

On désigne par M_3 l'ensemble des matrices (3, 3) à coefficients réels, et par $\mathcal{E}$ le sous-ensemble de M_3 par :

$$\mathcal{E} = \left\{ M(a, b, c) = \begin{pmatrix} a & b & b \\ 0 & a & c \\ 0 & c & a \end{pmatrix} / (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \right\}.$$

1. Montrer que $\mathcal{E}$, muni des lois habituelles d'addition des matrices et de multiplication d'une matrice pa nombre réel, est un sous-espace vectoriel de M_3.
Déterminer une base de $\mathcal{E}$, et en déduire sa dimension.

2. Trouver la condition nécessaire et suffisante liant les trois nombres réels a, b, c pour que $M(a, b, c)$ soit sible. Cette condition étant réalisée, calculer $M^{-1}(a, b, c)$, matrice inverse de $M(a, b, c)$.

3. Déterminer les valeurs propres de $M(a, b, c)$.
Dans le cas où $M(a, b, c)$ possède trois valeurs propres λ_1, λ_2, λ_3 deux à deux distinctes, déterminer les ve propres qui leur sont respectivement associés.

4. Soit f l'application linéaire de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ dans lui-même, dont la matrice dans la base canonique est $M(a, b, c)$.

Trouver la condition nécessaire et suffisante pour que les trois vecteurs

$$\vec{u}_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{u}_2 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \vec{u}_3 \begin{pmatrix} 2b \\ c \\ c \end{pmatrix}$$

forment une base de $\mathbb{R}_3$.

Dans ce cas, écrire la matrice de f dans la base $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$.

2.21 *ASSISTANT D'INGENIEUR 84 (8 points)* *corrigé*

Le plan P est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unité : 1 cm). E est le plan vectoriel associé à P.

On considère :

– d'une part, l'ensemble (C) des points de P admettant pour équation cartésienne dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$:

$$5x^2 + 4xy + 2y^2 + 4x - 8y - 2 = 0$$

– d'autre part l'application linéaire f de E dans E admettant pour matrice dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

1. a) Montrer que f admet deux valeurs propres λ_1, λ_2 $(\lambda_1 < \lambda_2)$.

Déterminer les vecteurs propres associés respectivement à λ_1 et à λ_2. On appellera $\vec{V}_1$ le vecteur propre associé à λ_1 et dont la première coordonnée dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$ est 1.

On appellera $\vec{V}_2$ le vecteur propre associé à λ_2 et dont la deuxième coordonnée dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$ est 1.

b) Montrer que $(\vec{V}_1, \vec{V}_2)$ est une base orthogonale de E.

Donner la matrice A' de f dans cette base.

c) On désigne par e l'application identique dans E.

Montrer que $f^2 = f\circ f$ et $f^3 = f^2 \circ f$ sont des combinaisons linéaires de f et e.

2. Un point M de P a pour coordonnées (x, y) dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ et (X, Y) dans le repère $(O, \vec{V}_1, \vec{V}_2)$.

a) Calculer x et y en fonction de X et Y.

b) Montrer que l'équation

$$5 X^2 + 30 Y^2 + 20 X - 2 = 0$$

est une équation cartésienne de (C) dans le repère $(O, \vec{V_1}, \vec{V_2})$

c) Déterminer la nature de (C). Trouver les coordonnées de son centre de symétrie dans $(O, \vec{V_1}, \vec{V_2})$ puis dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Tracer (C) avec précision ; les résultats numériques seront donnés avec deux décimales.

2.22 *ASSISTANT D'INGENIEUR 85 (10 points)*

$\wedge$ est le symbole du produit vectoriel.

On considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ sur $\mathbb{R}$, $B = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ sa base canonique orthonormée directe,

$\vec{A} = \vec{i} + \vec{j}$, $\vec{B} = \vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}$.

Soit $V = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ un vecteur quelconque de $\mathbb{R}^3$ et soit f l'application de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$:

$\vec{V} \xmapsto{f} \vec{W} = \vec{A} \wedge (\vec{B} \wedge \vec{V})$

1. Montrer que f est une application linéaire.

2. Etablir que f admet pour matrice dans B : $M = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & 3 & -3 \end{pmatrix}$

3. Déterminer la noyau et l'image de f ; donner une base de chacun d'eux.

   Soit $\vec{W} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$; trouver les vecteurs $\vec{V}$ tels que $f(\vec{V}) = \vec{W}$

   Discuter suivant les valeurs de a, b et c.

4. n étant un élément de $\mathbb{N}$, calculer M^n et les coordonnées de $f^n(\vec{V})$ en fonction de x,

5. Trouver l'ensemble des valeurs propres et des vecteurs propres de f. Construire dans $\mathbb{R}^3$ un velle base B' constituée de vecteurs propres et dont on précisera la matrice des coordonné rapport à B. Quelle est la matrice de f dans B' ?

CHAPITRE III : ALGEBRE DE BOOLE

3.1 SERVICES INFORMATIQUES 83 (durée : 3 heures) (6 points)

Monsieur X, commerçant accepterait de travailler avec la société Y à l'une ou l'autre des sept conditions suivantes :

- si cette société lui impose du personnel, elle doit lui faire une ristourne de 20 %, et lui agrandir son magasin ;
- si cette société lui impose du personnel, elle lui agrandit son magasin et lui fait une campagne publicitaire ;
- si cette société lui impose un chiffre de ventes, elle lui fait une remise de 20 % et une campagne publicitaire ;
- si cette société lui impose un chiffre de ventes, elle lui fait une remise de 20 % et agrandit son magasin ;
- si cette société lui impose un chiffre de ventes, elle lui fait une campagne publicitaire et agrandit son magasin ;
- la société Y lui fait une campagne publicitaire, sans lui imposer ni chiffre de ventes ni personnel ;
- la société Y lui fait une remise de 20 % sans lui imposer ni chiffre de ventes ni personnel.

1 - En appelant A, B, C, D, E les cinq variables booléennes dans l'ordre où le texte les propose, écrire la fonction f de ces cinq variables, associée au choix de Monsieur X.

2 - La société Y impose à Monsieur X du personnel. La fonction f est alors une fonction de 4 variables. L'exprimer sous forme canonique disjonctive.

3 - La société Y propose à Monsieur X le contrat suivant : elle impose du personnel, elle impose un chiffre de ventes, elle fait une ristourne de 20 % et fait une campagne publicitaire.
Monsieur X a-t-il intérêt à signer ce contrat ?

3.2 SI 84 (10 points)

Soit un ensemble B, muni :

- De deux opérations internes, notées $+$ et $\bullet$, appelées addition et multiplication.
- D'une application qui à tout élément x de B, associe un élément de B , noté $\overline{x}$ e complémentaire de x.

On suppose que l'ensemble B a une structure d'algèbre de Boole. (L'élément neutre de $+$ es celui de $\bullet$ est noté 1)

Soient dans B les deux opérations internes définies pour tous éléments a, b de B :

- Somme disjonctive, notée $\oplus$, définie par : $a \oplus b = \overline{a}\, b + a\, \overline{b}$
- Equivalence, notée $\longleftrightarrow$, définie par : $a \longleftrightarrow b = ab + \overline{a}\, \overline{b}$

1 - Soient a et b deux éléments quelconques de B.

Prouvez l'égalité : $\overline{a \oplus b} = a \longleftrightarrow b$

en déduire l'égalité : $\overline{a \longleftrightarrow b} = a \oplus b$

2 - On rappelle que B muni de $\oplus$ est un groupe commutatif. Prouvez que B muni de $\longleftrightarrow$ es groupe commutatif.

3 - Soient a, b, c trois éléments quelconques de B. Prouvez l'égalité :

$$a \longleftrightarrow b \longleftrightarrow c = a \oplus b \oplus c$$

On remarquera que l'associativité de chaque opération permet de supprimer les parenthèses ; ain

$$(a \longleftrightarrow b) \longleftrightarrow c = a \longleftrightarrow (b \longleftrightarrow c) = a \longleftrightarrow b \longleftrightarrow c$$

4 - Soit la fonction booléenne f de quatre variables binaires définie par :

$$f(a, b, c, d) = a \longleftrightarrow b \longleftrightarrow c \longleftrightarrow d$$

4.1 Ecrire f(a, b, c, d) sous sa forme canonique disjonctive.

4.2 Dressez un diagramme de la fonction.

4.3 Donnez $\overline{f(a, b, c, d)}$ sous sa forme canonique disjonctive et indiquez comment est re cette expression sur le diagramme de la question précédente.

4.4 Exprimez $\overline{f(a, b, c, d)}$, uniquement à l'aide de l'opération $\oplus$

3.3 SI 85 (7 points)

Soit la fonction booléenne f de quatre variables binaires indépendantes définie par :

$$f(a, b, c, d) = a\,\bar{b}\,\bar{c}\,\bar{d} + a\,\bar{c}\,d + a\,b\,\bar{c}\,d + b\,\bar{c} + \bar{a}\,b\,c\,\bar{d} + \bar{a}\,\bar{b}\,\bar{d} + \bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c} + \bar{a}\,b\,\bar{c}$$

1) Simplifier f par une méthode graphique.

2) Donner les formes canoniques disjonctive et conjonctive de f.

3) On rappelle que l'opérateur NOR noté ↓ est défini par : x et y étant deux variables booléennes

$$x \downarrow y = \overline{x + y}$$

Ecrire la forme simplifiée de la fonction f à l'aide du seul opérateur NOR

3.4 SI 86 (6 points)

Soit la fonction booléenne de quatre variables binaires indépendantes définie par :

$$f(a, b, c, d) = b\,d + \bar{a}\,b\,c + a\,c\,\bar{d} + a\,\bar{b}\,\bar{c} + \bar{a}\,\bar{b} + \bar{b}\,c\,d + \bar{a}\,b\,\bar{c}$$

1 — Simplifier f.

2 — Donner la forme canonique disjonctive de $\bar{f}$ et la forme canonique conjonctive de f.

3 — On considère l'opérateur "Implication" noté → défini par $x \rightarrow y = \bar{x} + y$.

a) Calculer $x \rightarrow 0$.

b) Ecrire $x\,y$, $x + y$ et enfin f (a, b, c, d) à l'aide du seul opérateur implication.

CHAPITRE IV : SYSTEMES DE NUMERATION

SYSTEMES DE NUMERATION

4.1 ARCHITECTURE INTERIEURE 85 (durée : 2 heures)

(5 points)

Déterminer la base a du système de numération dans lequel la fraction $\frac{257}{17}$ s'écrit : $\frac{\overline{10001}}{\overline{101}}$

4.2 INDUSTRIES GRAPHIQUES 85 (durée : 4 heures)

(5 points)

1 - Ecrire en base 2 le nombre qui s'écrit 37 en base 10

2 - Ecrire en base 10 le nombre qui s'écrit 7C1 en base 16

3 - Ecrire en base 16 le nombre qui s'écrit 1372 en base 8

Pour écrire les nombres en base 16 on utilisera les éléments de l'ensemble
$A = \{0, 1, \ldots, 9, A, B, C, \ldots, F\}$

ANALYSE

CHAPITRE V : ETUDE D'UNE FONCTION NUMERIQUE

CALCUL D'AIRE

5 .1 ETUDES DE PRIX DU BATIMENT 80 *(durée : 4 heures)*
(5 points)

I - Soit $(o,\vec{i},\vec{j})$ un repère orthonormé du plan. $\|\vec{i}\|=\|\vec{j}\|= 2cm$

Soit C_1 la courbe représentative dans le repère $(o,\vec{i},\vec{j})$ de $y = x^2$, $x \geqslant o$

Soit C_2 la courbe représentative dans le repère $(o,\vec{i},\vec{j})$ de $x = y^2$, $y \geqslant o$

Trouver la mesure de l'aire de la portion de plan limitée par C_1 et C_2 par l'axe des y et la droite d'équation $x = 1$

FONCTIONS RATIONNELLES

5.2 COMPTABILITE ET GESTION 82

1 - Soit f la fonction numérique de la variable réelle x : $f : x \longmapsto \dfrac{(x+1)^3}{(x-1)^2}$

et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ unité de longueur : 0,5 cm.

1.1 - Quel est l'ensemble de définition D de f ? Calculer les 4 réels a, b, c, d tels que :

$$(\forall x \in D) \qquad f(x) = ax + b + \frac{c}{x-1} + \frac{d}{(x-1)^2}$$

1.2 - Montrer que (C) admet pour asymptote la droite d'équation $y = x + 5$

1.3 - Etudier les variations de f et tracer sa courbe représentative (C).

1.4 - Calculer l'aire $A(\lambda)$ de la portion finie de plan limitée par la courbe (C), et les droites d'équations

$$y = x + 5, \qquad x = 2, \qquad x = \lambda \qquad (\lambda \in]1, 2[)$$

1.5 - L'aire $A(\lambda)$ a-t-elle une limite quand λ tend vers 1 ?

5.3 COMPTABILITE ET GESTION 79

Soit f la fonction donnée par :

$$f(x) = \frac{1 + \text{Log } x}{x^2}$$

1 - Etudier f et construire sa représentation graphique (C) dans un repère normé.

2 - Vérifier que la fonction F telle que $F(x) = -\frac{2 + \text{Log } x}{x}$ est une foncti primitive de f.

En déduire l'aire S, du domaine plan limité par la courbe (C), l'axe x' les droites d'équation $x = \frac{1}{e}$ et $x = \alpha$ (α étant un nombre donné, strict supérieur à $\frac{1}{e}$).

Cette aire S, a-t-elle une limite quand α tend vers $+\infty$?

5.4 COMPTABILITE ET GESTION 81

1 - Soit la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto \frac{2x}{1 - x^2} + \text{Log}\left(\frac{1 + x}{1 - x}\right),$$ Log désigant la fonction logarithme népérien (également notée ln).

Etudier cette fonction :

- domaine de définition,
- sens de variation,
- limites aux bornes,
- graphe représentatif -courbe (C)- (repère orthonormé d'axes x'Ox, y'Oy),
- équation de la tangente à la courbe (C) au point d'abscisse
- recherche d'une éventuelle symétrie (à démontrer).

2 - Soit la fonction $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto x \text{ Log}\left(\frac{1 + x}{1 - x}\right)$$

a) Déterminer la dérivée de F.

b) En déduire l'aire $S(x_0)$ de la portion de plan comprise entre l'axe x'Ox et les droites d'équations $x = 0$ et $x = x_0$ ($0 < x_0 <$

c) Quelle est la limite de $S(x_0)$ quand x_0 tend vers 1 ?
(x_0 tend vers 1 par valeurs inférieures).

5.5 *EQUIPEMENTS TECHNIQUE DU BATIMENT 83* *(durée : 4 heures)*

(7 points)

Soit f la fonction numérique de la variable réelle x telle que :

$$f(x) = 4(\ln^2 x - 3\ln x + 2)$$

(le symbole ln désigne la fonction logarithme népérien).

1. Préciser l'ensemble de définition de f et étudier les variations de f sur son ensemble de définition.

2. On désigne par $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f dans un plan P rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ d'axes Ox et Oy (unité : 1cm).

   2.1. Etudier les branches infinies de $\mathcal{C}$.

   2.2. Déterminer les abscisses des points d'intersection de $\mathcal{C}$ et de l'axe des abscisses. Montrer que $\mathcal{C}$ admet un point d'inflexion I dont on donnera les coordonnées ainsi que le coefficient directeur de la tangente à $\mathcal{C}$ en I.

   2.3. Tracer la courbe $\mathcal{C}$ dans le plan P.

   2.4. Calculer la mesure, en cm^2, de l'aire de la portion de plan comprise entre $\mathcal{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=e$ et $x=e^2$; en donner la valeur décimale approchée à 0,01 près par défaut.

3. Ecrire le développement limité à l'ordre 2 de la fonction f au voisinage de x=1. En déduire la position de la courbe , par rapport à sa tangente au point d'abscisse x=1, au voisinage du point de $\mathcal{C}$ d'abscisse x=1.

5.6 *ELECTRONIQUE 82* *(durée : 2 heures)*

(6 points)

On considère la fonction numérique f de la variable réelle, telle que :

$$f(x) = \frac{\ln|x+1|}{(x+1)^2}$$

(Le symbole ln désigne la fonction logarithme népérien).

On désigne par C la courbe représentative de la fonction f dans un plan P rapporté au repère orthonormé (O,
(unité de longueur 4 cm).

1 - Démontrer que la droite d'équation $x = -1$ est un axe de symétrie de la courbe C.

2 - Etablir le développement limité à l'ordre 2 de la fonction f au voisinage de zéro.

En déduire une équation de la tangente à C au point d'abscisse zéro et la position de C par rapport tangente (au voisinage de zéro).

3 - Dresser le tableau de variation de la fonction f. Tracer la courbe C dans le plan P.

5.7 INDUSTRIES DU BOIS 76 (durée : 3 heures)

(8 points)

- Soit la fonction numérique de la variable réelle x définie par $f(x) = 2x - \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$ (ln u signifie logarithme népérien de u

a) - Etudier le sens de variation de f et tracer sa courbe représentative C dans le plan muni d'un repère orthonormé d'axes x'Ox, y'Oy. On appelle Δ son asymptote oblique. O précisera la position de C par rapport à Δ .

b) - A l'aide d'une intégration par parties, calculer :

$$\int_1^{\lambda} \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) dx \qquad \text{où} \quad \lambda \in \mathbb{R} \text{ et } \quad \lambda > 1$$

en déduire l'aire du domaine plan compris entre C, Δ et l droites d'équations $x = 1$ et $x = 5$.

5.8 ELECTRONIQUE 80 (2 heures)

(10 points)

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. prendra pour unité de longueur 2 cm. Log t désigne le logarithme rien du réel t.

1 - a) - Soit g la fonction de R dans R définie par $g(t) = \frac{2t}{1+t} - \text{Log}(1+t)$. Etablir le tableau de variat g. Il n'est pas demandé de courbe représentative.

b) - En déduire l'existence d'un seul nombre réel $\alpha \in]1, +\infty[$ $g(\alpha) = 0$ (Une valeur approchée de α est $\alpha = 3,9$).

c) - En déduire le signe de $g(t)$ sur $[0, +\infty[$

2 - Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = \dfrac{\text{Log}(1 + e^{2x})}{e^x}$

a) - Montrer que $f'(x)$ a le même signe que $g(e^{2x})$ et s'annule pou
la valeur $\frac{1}{2}$ Log α.

b) - Etudier f et tracer sa courbe représentative $\mathcal{C}$ dans le repèr
$(0, \vec{i}, \vec{j})$.

3 - Soit $\mathcal{A}(\lambda)$ le nombre qui mesure en cm^2 l'aire du domaine plan limi
par $\mathcal{C}$ et les droites d'équation $y = 0$; $x = 0$ et $x = \lambda$ $(\lambda > 0)$.

a) - Calculer $\mathcal{A}(\lambda)$ (On pourra utiliser une intégration par partie

b) - Montrer que $\mathcal{A}(\lambda)$ a une limite lorsque λ tend vers $+\infty$.

PROLONGEMENT PAR CONTINUITÉ EN UN POINT

5.9 INDUSTRIES GRAPHIQUES 85 (durée : 4 heures)
(10 points)

Soit f la fonction réelle de la variable réelle x donnée par : $f(x) = \dfrac{x \ln x - x}{x + 1}$
où ln désigne la fonction logarithmique népérien.

1 - Préciser D_f, ensemble de définition de f.

2 - Etudier les limites de f aux bornes de D_f.

3 - Montrer que f peut être prolongée par continuité au voisinage de zéro.

4 - Etudier le comportement de f au voisinage de l'infini.

5 - Etudier les variations de f sur D_f. On calculera, à 10^{-2} près le nombre α solution de l'équation $f'(x) = 0$ et on montrera que $f(\alpha) = -\alpha$.

6 - a - Montrer que l'équation $f''(x) = 0$ peut se mettre sous la forme $\ln x = g(x)$ où g est une fonction rationnelle.

b - Etudier les variations de g et en déduire le signe de f'' dans D_f.

c - Calculer à 10^{-2} près le nombre β, solution de l'équation $f''(x) = 0$.

7 - Le plan étant rapporté à un repère orthogonal $(0, \vec{i}\ \vec{j})$ $(\|\vec{i}\| = 5$ cm ; $\|\vec{j}\| = 10$ cm$)$, tracer la courbe représentative C de f sur l'intervalle $[0 ; 4]$.

On précisera les tangentes à C aux points d'abscisses respectives 0, α, β et e. (e est la base des logarithmes népériens).

8 - Utiliser la méthode des trapèzes pour trouver un encadrement d'amplitude 10^{-2} de l'intégrale :

$$I = \int^1 f(x)\,dx$$

5.10 *SERVICES INFORMATIQUES 83* *(durée : 3 heures)*

(10 points)

1 - On considère la fonction g de la variable réelle x définie s
$\mathbb{R}^+$ par : $\begin{cases} g(x) = x - 1 - x \ln x & \text{si } x \neq 0 \\ g(0) = 1 \end{cases}$

1.1.- Etudier la continuité et la dérivabilité de g sur $\mathbb{R}^+$

1.2 - Etudier le sens de variation de g. En déduire le signe
g(x), pour x réel positif ou nul.

2 - Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie
$\mathbb{R}^{+*}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{\ln x}{x - 1} & \text{si } x \neq 1 \text{ et } x > 0 \\ f(1) = 1 \end{cases}$$

On désigne par $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f dans le plan P
rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unité : 2 cm).

2.1 - Etudier la continuité de la fonction f sur son ensemble
définition.

2.2 - En utilisant un développement limité, au voisinage de 0
à l'ordre 2, de ln (1 + h), démontrer que f est dérivat
$x_0 = 1$.

2.3 - Etudier les variations de la fonction f.

2.4 - Tracer $\mathcal{C}$ dans le plan P. On précisera la tangente à $\mathcal{C}$ a
point A(1,1).

3 - 3.1 - Démontrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}^{+*}$ sur un int
le J de $\mathbb{R}$ que l'on précisera.

3.2 - f^{-1} étant la fonction réciproque de f, donner son ensem
de définition et son sens de variation.

3.3 - Tracer, dans le plan P, la courbe Γ représentative de f
précisant sa tangente au point A.

FONCTIONS CONTENANT LA FONCTION EXP

5.11 COMPTABILITE 86 (durée : 1 h 30)

(10 points)

Soit la fonction numérique f définie sur R par :

$$f(x) = x - 2 + 2\,e^{-\frac{1}{2}x}$$

Soit C la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unité : 2 cm).

1 – Etudier les variations de f. Indiquer les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$.

2 – Montrer que la droite D d'équation $y = x - 2$ est asymptote à C.

Préciser la position de C par rapport à D.

3 – Existe-t-il un point M de C tel que la tangente à C en M soit parallèle à D ?

4 – Tracer C.

5 – Soit b un nombre réel strictement supérieur à 2. Calculer, en cm², l'aire A (b) de la partie du plan située entre les droites d'équations $x = 0$ et $x = b$, C et D. Calculer la limite de A (b) quand b tend vers $+\infty$.

5.12 COMPTABILITE 85 (durée : 1 h 30)

(10 points)

Soit f la fonction numérique définie dans l'intervalle $E = [-\frac{3}{2}, +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{2x^2 + 3x}{e^x}$

et C sa courbe représentative dans un repère d'axes x' Ox et y' Oy (unité de longueur : 1 cm)

1°/ Etudier f aux bornes de E (on admettra que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2}{e^x} = 0$)

En déduire que la courbe C admet une asymptote.

2°/ Etudier les variations de f et donner le tableau de variations.

3°/ Déterminer les points d'intersection de C avec les axes x'Ox et y'Oy.
Tracer la courbe C.

4°/ Vérifier que la fonction F définie par $F(x) = (-2x^2 - 7x - 7)e^{-x}$ est une primitive de f sur E.

5°/ Calculer l'aire de la partie du plan ensemble des points M de coordonnées x et y telles que

$$\begin{cases} 0 \leqslant x \leqslant 2 \\ 0 \leqslant y \leqslant f(x) \end{cases}$$

5.13 FONDERIE EN MOULES METALLIQUES 85

Soit l'application f de $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} - \{o\}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \frac{e^x}{e^x - 1}$$

2.1 Donner le tableau de variation de f, portant l'indication des limites aux bornes des interva d'étude.

2.2 On nomme (C) la courbe représentative de f dans le repère orthonormal $(0, \vec{i}, \vec{j})$ d'axes x'0 y'0y.
L'unité sur le graphique est représentée par 2 centimètres.
Tracer la courbe (C) en précisant ses branches infinies.

2.3 Calculer l'aire du domaine plan (D) ensemble des points u(x, y) tels que :

$$\begin{cases} 1 \leqslant x \leqslant 3 \\ o \leqslant y \leqslant f(x) \end{cases}$$

2.4 Calculer l'intégrale définie

$$\int_1^3 [\, f(x)\,]^2\, dx \qquad \text{(on pourra poser } u = e^x - 1)$$

et déduire du résultat la mesure, en centimètres-cubes, du volume du solide de révolution en dré par la rotation du domaine (D) autour de la droite x'0x.

5.14 ETUDES DE PRIX DU BATIMENT 84 (durée 4 heures) corrigé
(6 points)

Pour réaliser un motif décoratif devant un immeuble, le maître d'oeu a choisi comme profil d'une structure en béton une partie de la court (c), courbe représentative dans le plan rapporté au repère orthonormé $(o \; ; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ de la fonction

$$f = \begin{pmatrix} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto 2e^{2x}\,(1 - x) \end{pmatrix}$$

1. Etudier f. Préciser en particulier sa limite en $-\infty$
2. Construire (c). On précisera le point d'inflexion et la pente de l tangente à (c) en ce point.

3. Déterminer les réels a et b de telle sorte que la fonction

$$F = \begin{pmatrix} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto (ax + b)e^{2x} \end{pmatrix}$$ soit une primitive de f.

4. En déduire la mesure de l'aire de la partie du plan comprise entre la courbe (c), l'axe (ox), l'axe (oy) et la droite d'équation $x = \alpha$ (où α est un réel négatif).

Cette mesure d'aire admet-elle une limite lorsque α tend vers $-\infty$?

5.15 COMPTABILITE 83

---

2 - Soit f la fonction numérique de la variable réelle x :

$$f : x \longrightarrow 2x + \frac{1}{2}\,\frac{e^x + 1}{e^x - 1}$$ (C) sa courbe représentative.

2.1 - Préciser l'ensemble de définition $\mathcal{D}$ de cette fonction.

Montrer que f est impaire.

En déduire l'existence d'un intervalle d'étude réduit sur lequel on étudiera la fonction.

2.2 - 2.2.1 - Montrer que $\forall x \in \mathcal{D}$, $f(x) = 2x + a + \dfrac{b}{e^x - 1}$

où a et b sont deux constantes réelles que l'on déterminera.

En déduire l'existence d'une asymptote à la courbe (C) au voisinage de $+\infty$.

2.2.2 - Déterminer l'asymptote à (C) au voisinage de $-\infty$.

2.2.3 - Préciser l'allure de la courbe au voisinage de zéro.

2.3 - Etudier les variations de f. Tracer la courbe (C) dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unité 2 cm).

2.4 - 2.4.1 - Montrer que $\forall x \in \mathcal{D}$, $f(x) = 2x - \dfrac{1}{2} + \dfrac{e^x}{e^x - 1}$

2.4.2 - En déduire l'ensemble des primitives de f sur $\mathcal{D}$.

2.4.3 - Calculer l'aire de la partie du plan limitée par la courbe (C), la droite d'équation $y = 2x + \dfrac{1}{2}$ et les droites d'équations $x = \text{Log } 2$ et $x = \text{Log } 4$.

5.16 FORGE ET ESTAMPAGE 85 (durée : 2 heures)

(16 points)

1ère partie : Soit la fonction

$$f = \begin{pmatrix} \mathbb{R} - \{-1\} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \dfrac{e^x}{x+1} \end{pmatrix}$$

1) Etudier cette fonction.

2) Soit (C) sa courbe représentative dans un plan rapporté à un repère orthonormé : $R = (0; \vec{i},$
(unité : 1 cm).

Montrer que (C) admet une branche parabolique de direction asymptotique l'axe $(0 ; \vec{j}\,)$. Déterr
les asymptotes de (C). (C) admet-elle des tangentes horizontales ? Tracer (C).

3) Etudier graphiquement, suivant les valeurs du paramètre réel m, le nombre de racines de l'équat
$e^x - m(x+1) = 0$, en précisant la position de ces racines éventuelles par rapport aux nomb
-1 et 0.

2ème partie ;

Soit la famille de droites Dm définie par la relation : $y = mx + m$ avec m appartenant à : $\mathbb{R}^* - \{$

1) Démontrer que toutes les droites Dm passent par un point fixe dont on déterminera les co
données.

2) Soit (C_1) la courbe représentant la fonction $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
$x \mapsto e^x$

Déterminer graphiquement la position de (C_1) par rapport aux droites Dm. On envisagera les cas
$m < 0$, $0 < m < 1$, $m > 1$. Lorsque (C_1) coupe Dm, on ne cherchera pas la valeur numérique
l'abscisse du , ou des points d'intersection; on la désignera, suivant le cas, par x_1 si elle est négativ
x_2 si elle est positive.

3ème partie :

Soit la famille de fonctions g_m telles que :

$$g_m(x) = \frac{xe^x}{e^x - m} \qquad m \in \mathbb{R}^* - \{1\}$$

1) Déterminer l'ensemble de définition des fonctions g_m.

2) Calculer les limites des fonctions g_m aux bornes de leur ensemble de définition.

3) Calculer $g'_m(x)$. Pour étudier son signe, on distinguera 3 cas :

$$m < 0 \quad , \quad 0 < m < 1 \quad , \quad m > 1.$$

En déduire le sens de variation des fonctions g_m.

4) Soit (Γ_m) les courbes représentant les fonctions g_m dans un plan rapporté à un repère orth
normé $R' = (0; \vec{i}, \vec{j})$. Montrer que, pour tout m élément de $\mathbb{R}^* - \{1\}$, (Γ_m) admet une asym
tote oblique Δ dont l'équation ne dépend pas de m. Etudier la position des courbes (Γ_m) p
rapport à la droite Δ.

5) Préciser les allures des courbes (Γ_m) suivant les valeurs de m dans trois repères R' distinc

5.17 *ADJOINT TECHNIQUE D'ENTREPRISES de Tp 85* (*durée : 4 heures*)

(*10 points*)

A — On considère la fonction $g = \begin{pmatrix} \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto (5-x)\,e^x - 5 \end{pmatrix}$

1. Étudier la fonction g et donner l'allure de sa courbe représentative.

2. Prouver qu'il existe un réel strictement positif x_0 tel que $g(x_0) = 0$.

3. Déterminer, en indiquant la méthode utilisée, une valeur approchée de x_0 (qu'on notera $\overline{x}_0$) de telle sorte que $|g(\overline{x}_0)| \leqslant 2.10^{-2}$.

B — On considère la fonction $f = \begin{pmatrix} \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \dfrac{x^5}{e^x - 1} \end{pmatrix}$

1. En utilisant les résultats de la partie A, étudier le sens de variation de f.

2. Montrer qu'il existe des réels a et b et une fonction ϵ tels que, pour tout réel positif x, on ait

$$f(x) = ax^4 + bx^5 + x^5\,\epsilon(x)$$

et $\lim\limits_{x \to 0} \epsilon(x) = 0$.

3. En déduire la position de la courbe (Γ) d'équation $y = f(x)$ par rapport à la courbe (H) d'équation $y = x^4$.

4. Donner l'allure générale de la courbe (Γ) (on rappelle que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$).

PROLONGEMENT PAR CONTINUITÉ EN UN POINT

5.18 *FROID ET CLIMATISATION 80* (*durée : 1 heure*)

(*15 points*)

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$\begin{cases} x \longmapsto e^{\frac{1}{1+x}} & \text{lorsque } x \neq -1 \\ -1 \longmapsto 0 \end{cases}$$

1 - La fonction f est-elle continue pour x = -1 ?

2 - Etudier les variations de f.

3 - Soit C la courbe représentative de f dans un repère orthonormé
Préciser les asymptotes de C.

4 - Déterminer la limite de $\dfrac{f(x)}{x+1}$ quand x tend vers -1 par valeurs inférieures.
(On pourra poser : $\dfrac{1}{x+1} = u$).

5 - Préciser les coordonnées du point d'inflexion de la courbe C a que l'équation de la tangente à C en ce point.

6 - Tracer la courbe C.

5.19 ELECTRONICIEN 85 (drée : 2 heures)

(8 points)

Soit f la fonction de la variable réelle x définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\begin{cases} f(x) = (x^2 + x)\, e^{1/x} & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

Soit C sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unité : 2 cm)

1°) Etudier la continuité et la dérivabilité de f en O.

2°) Déterminer les limites de la fonction f en $+\infty$ et $-\infty$
En utilisant un développement limité à l'ordre 3 de $e^{1/x}$ en $+\infty$ et $-\infty$, montrer que la courbe (
d'équation $y = x^2 + 2x + \dfrac{3}{2}$ est une asymptote à la courbe C.

3°) Etudier les variations de la fonction f.
Tracer la courbe C et la courbe C_1 dans le même repère.

5.20 SERVICES INFORMATIQUES 84

Soit la fonction f définie sur R par

$$f(x) = \frac{1}{x^2}\, e^{1+\frac{1}{x}} \qquad \text{pour } x \neq 0$$

et

$$f(0) = 0$$

(Le nombre e désigne la base du logarithme népérien.)

1 - La fonction f est-elle continue sur R* ?
Est-elle continue en zéro ?

2 - La fonction f est-elle dérivable à droite du point 0 ? à gauche du point 0 ?
Est-elle dérivable au point 0 ?

S'il existe une tangente ou des demi-tangentes à la courbe représentative de f au point d'abscisse :
precisez leur équation

3 - **Etudiez les variations de la fonction f.**

4 - On désigne par C la courbe représentative de f. dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(o,\vec{i},\vec{j})$ (unité 2 cm).

4.1 Déterminez les abscisses des points d'inflexion de C.

4.2 Tracez C.

5 - Déterminez une primitive de f sur R^*.

6 - Soit λ un nombre réel strictement négatif.

6.1 Déterminez, l'aire $\mathcal{A}(\lambda)$ (en cm^2) du domaine plan limité par l'axe des abscisses, la courbe C et les droites d'équations respectives $x = -\frac{1}{2}$ et $x = \lambda$ $(\lambda > 0)$.

6.2 Calculez les limites suivantes :

$$\lim_{\substack{\lambda \to 0 \\ \lambda < 0}} \mathcal{A}(\lambda) \quad \text{et} \quad \lim_{\lambda \to -\infty} \mathcal{A}(\lambda)$$

5.21 *ETUDES DE PRIX DU BATIMENT 85 (durée : 3 heures)*

(10 points)

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(0; \vec{i}, \vec{j})$ (unité : 2 cm), on désigne par Γ la courbe représentative de la fonction f donnée par :

$$f(x) = \frac{(x-1)^2 e^{\frac{1}{x}}}{2x+1}$$

1. Déterminer D_f, ensemble de définition de f.

2 Dériver $\varphi : x \longmapsto \varphi(x) = \ln|f(x)|$ où ln désigne la fonction logarithme népérien.

En déduire le signe de f' (x) suivant les valeurs de x dans D_f.

3. Etudier

$$\lim_{x \to 0} f(x)$$

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} \frac{f(x)}{x}$$

4. Pour étudier la fonction f pour les valeurs infinies de la variable x, on pose $u = \frac{1}{x}$

a) Donner, pour des valeurs infiniment petites de u, un développement limité à l'ordre 2 de uf (x).

b) En déduire qu'on peut écrire f(x) sous la forme $f(x) = ax + b + \frac{c}{x} + \frac{\epsilon(x)}{x}$

où a, b, c sont trois réels que l'on déterminera et ϵ est une fonction de x telle que $\lim\limits_{x \to \infty} \epsilon(x) = 0$.

c) Que peut-on en déduire pour la courbe Γ ?

5. Achever l'étude de f et construire la courbe Γ.

5.22 *COMPTABILITE 81*

Soit la fonction numérique f de la variable réelle x définie par

$$f(x) = x \operatorname{Log} 2 + 2^{-x}$$

Log 2 désignant le logarithme népérien de 2.

2.1. - Etudier les variations de f. On rappelle que :

$$\lim_{x \to -\infty} x\, 2^{x} = 0^{-}$$

2.2. - Tracer sa courbe représentative C dans un repère orthono mé d'axes $\vec{Ox}$ $\vec{Oy}$, unité de longueur = 2 cm.
Démontrer que C admet une asymptote "oblique" et une bra parabolique de direction Oy.

2.3. - Calculer la dérivée de la fonction G définie par
$G(x) = \dfrac{-1}{2^{x} \operatorname{Log} 2}$. En déduire les primitives de f.
Calculer, en cm^2, l'aire du domaine plan limité par la cour be C, la droite d'équation $y = (\operatorname{Log} 2)x$, l'axe des y et la droite d'équation $x = 2,5$. (On donne $\operatorname{Log} 2 \approx 0,693$)

5 .23 *MICROMECANIQUE 77* *(durée : 3 heures)*
(15 points)

Soit t un nombre réel quelconque. On considère la fonction nu rique f_t définie sur $\mathbb{R}^t$ par : $f_t(x) = x^{tx}$ si $x \neq 0$ et $f_t(0) = 1$

1. - 1.1. Si l'on pose $u_t(x) = tx \operatorname{Log} x$ (Log x désigne le logarithme népé rien de x), vérifier que :

$$f_t(x) = e^{u_t(x)}$$

1.2. Montrer que f_t est continue en 0 à droite, pour tout t réel.

1.3. Etudier, suivant les valeurs du paramètre t les variations de l fonction f_t.

2. - On pose $\varphi(x) = x(1 + \text{Log } x)^2$.

2.1. Calculer la dérivée seconde de f_t et montrer que si t est différent de 0, $f_t''(x)$ et $\varphi(x) + \frac{1}{t}$ s'annulent pour les mêmes valeurs de x et ont le même signe sur l'ensemble des réels strictement positifs.

2.2. Etudier la fonction φ et tracer sa courbe représentative (Γ) dans son repère orthonormé $(0, \vec{i}, \vec{j})$ d'axes x'Ox, y'Oy (unité de longueur : 10 cm).

2.3. En déduire graphiquement le nombre de valeurs de x pour lesquelles $f_t''(x) = 0$ suivant les valeurs de t.
Préciser dans chaque cas le nombre de points d'inflexion de la courbe représentative (C_t) de la fonction f_t.

3. - 3.1. Montrer que toutes les courbes (C_t) passent par les points A(0, 1) et B(1, 1). Calculer le coefficient directeur de la tangente à (C_t) en B (en fonction de t).
Préciser la tangente à (C_t) au point A.

3.2. Tracer dans un repère orthonormé d'axes x'Ox, y'Oy (unité de longueur 5 cm) les courbes C_0 , C_e et C_{-e} , en faisant apparaître les points d'inflexion.

3.3. Tracer de même C_{-e^2} et $C_{-\frac{e^3}{4}}$ dans un autre repère (unité de longueur : sur l'axe des abscisses 5 cm, sur l'axe des ordonnées : 1 cm).

FONCTIONS IRRATIONNELLES

5.24 INDUSTRIES DU BOIS 80 (durée: 3 heures)

(9 points)

I - Soit la fonction numérique f de la variable réelle x définie par :

$$f(x) = \frac{x}{2} + \frac{2\,x}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

1 - Etudier les variations de f et tracer sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé d'axes x'Ox, y'Oy.

2 - Déterminer les coordonnées des points d'intersection de C a la droite d'équation y = x. On appelle A le point d'inters d'abcisse positive.

3 - Calculer l'aire du domaine plan compris entre le segment d droite OA et l'arc de courbe OA.

5.25 *ADJOINT TECHNIQUE DES ENTREPRISE DU BATIMENT 84 (durée : 3 heure)*

(10 points) *corrigé*

Soit la fonction g de la variable réelle x telle que

$$g(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x}}$$

1. Étudier la variation de g et tracer sa courbe représentative (C) dans un plan rapporté à un repı orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ d'axes 0x et 0y (unité : 2 cm).

2. Soit f la fonction de la variable réelle x telle que

$f(x) = \ln(1 + x)$ (ln désigne la fonction logarithme népérie

2.1 Étudier la variation de f.

2.2 Donner les développements limités à l'ordre 3 de g(x), f(x) et f(x) − g(x) pour x voisin de

3. Tracer dans le plan, rapporté au même repère orthonormé qu'à la première question, la co représentative (Γ) de F. Préciser la position relative des courbes (C) et (Γ) au voisinage de l'ori Démontrer que les deux courbes admettent le même centre de courbure au point d'abscisse x donner ses coordonnées.

4. Calculer, en cm², la mesure de l'aire de la portion de plan comprise entre la courbe (C), l'axe (les droites d'équation respective x = 0 et x = 3.

5.26 *TRANSFORMATION DES PLASTIQUES 85 (durée : 2 heures)*

(9 points)

On considère la fonction numérique f définie par $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}\ \ln x}$

(où lnx désigne le logarithme népérien de x).

1. a) Etudier la fonction f.

b) Etablir la représentation graphique (Γ) de f par rapport à un repère orthonormé d'axe x'Ox, y'Oy (unité : 3 cm).

c) Donner les équations des tangentes à (Γ) avec points d'abscisses e^{-2} et e.

2. Pour tout nombre $k \in]1, e[$, déterminer la mesure V_k du volume du solide de révolution engendré par la rotation autour de l'axe x'Ox de la partie du plan ensemble des points M de coordonnées (x, y) tels que :

$$k \leqslant x \leqslant e \qquad \text{et} \qquad 0 \leqslant y \leqslant f(x)$$

5.27 ADJOINT TECHNIQUE D' ENTREPRISES DU BATIMENT 80 (durée : 3 heures)

(10 points)

On considère, relativement à un repère orthonormé, le cercle C d'équation $x^2 + y^2 = 1$, le point A de coordonnées (1;0) et la corde MN du cercle C, perpendiculaire à la droite (OA) au point H. On pose $\overline{OH} = x$.

A - 1 L'aire du triangle MAN est une fonction f de x.

Montrer que $f(x) = (1 - x) \times \sqrt{1 - x^2}$.

2 Etudier les variations de la fonction f.

Calculer les limites de f'(x) quand x tend vers -1, quand x te vers 1.

3 Tracer la courbe Γ représentative de la fonction f relativeme à un repère orthonormé (unité de longueur = 10 cm).

Calculer f(x) pour les valeurs suivantes de x :

-0,8 ; -0,6 ; -0,4 ; -0,2 ; 0 ; 0,2 ; 0,4 ; 0,6 ; 0,8

4 Déterminer, à 0,001 près, les valeurs de x pour lesquelles $f(x) = 1$.

B - Calculer, en cm^2, l'aire de la portion de plan limitée par la cour Γ et l'axe x'Ox.

1. En posant $x = \cos t$ $(t \in [0, \pi])$.

2. En faisant une évaluation graphique de l'aire.

5.28 *INDUSTRIES DU BOIS 83 (durée : 3 heures)*

(8 points)

Soit f la fonction numérique de la variable réelle x donnée par :

$$f(x) = \sqrt{1 + x} \ \ln(1 + x)$$

(ln désigne la fonction logarithme népérien).

1. Étudier la fonction f.

2. Le plan étant rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on désigne par (C) la courbe représentative de l
tion f.
En utilisant un développement limité à l'ordre trois de la fonction f au voisinage de O, préciser la tang
O à (C), ainsi que la position de la courbe (C) par rapport à cette tangente.

3. Tracer la courbe (C).

5.29 *INDUSTRIES CEREALIERES 85 (durée : 2 heures)*

(6 points)

On considère l'application f de $\mathbb{R}^+ = [0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$, définie par

$$f(x) = x^{\frac{1}{3}} - \frac{x}{45}$$

où x représente la variable réelle positive.
$\mathbb{R}^+$ désigne l'ensemble des nombres réels positifs.

1. Etudier, sur un tableau, la variation de f, ainsi que le signe de f(x).
Déterminer les limites de $\frac{f(x)}{x}$ et de f(x) lorsque x tend vers zéro, et lorsque x tend vers +

2. Représenter graphiquement la fonction f sur l'intervalle où elle est monotone croissante.
On choisira le repère rectangulaire d'axes x'Ox, y'Oy de sens direct et sur les axes, les graduatio
suivantes :

pour x'Ox : Deux millimètres pour une unité.

pour y'Oy : Deux centimètres pour une unité.

5.30 FONDERIE SUR MODELE 85 (durée : 4 heures)

(7 points)

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(0; \vec{i}, \vec{j})$ – (on prendra 3 cm pour unité). On désigne par (C) la courbe représentative de la fonction f telle que :

$$f(x) = \sin 3x.\ \sin^3 x$$

1) Préciser l'ensemble de définition de f. Etudier la parité de f.
   Comparer pour tout réel x les nombres $f(\pi + x)$ et $f(x)$.
   Quelles conclusions peut-on en déduire pour la courbe (C) ?

2) Calculer la fonction f' dérivée première de f. Montrer que l'on a :

$$f'(x) = 3\sin^2 x.\ \sin 4x$$

3) Etudier le signe de $f'(x)$ sur $[0 ; \frac{\pi}{2}]$

4) Terminer l'étude de f puis construire (C).

5.31 GEOLOGUE PROSPECTEUR 85 (durée : 1 h 30)

1-a) Soit la fonction polynôme g : $\mathbb{R} \xrightarrow{g} \mathbb{R}$

$$y \xrightarrow{g} g(y) = 8y^3 - 8y + 3$$

Vérifier que $g\left(\frac{1}{2}\right) = 0$.

Déterminer les réels a, b, c de façon à écrire g(y) sous la forme du produit de facteurs :

$$(2y - 1)(ay^2 + by + c)$$

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $g(y) = 0$.

b) On pose $y = \sin x$, avec $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Résoudre, dans $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, l'équation :

$$h(x) = g(\sin x) = 8\sin^3 x - 8\sin x + 3 = 0.$$

2-a) Soit la fonction f : $\left[0, \frac{\pi}{2}\right] \xrightarrow{f} \mathbb{R}$

$$x \xrightarrow{f} f(x) = 3\,\mathrm{tg}x + 8\cos x$$

Calculer la dérivée f'(x), et montrer que : $f'(x) = \dfrac{h(x)}{\cos^2 x}$

Construire la courbe représentative de f, soit C_f, dans un plan rapporté à un repère orthono
$(0 ; \vec{i}, \vec{j})$.

b) Calculer en unités d'aire, la mesure de l'aire de la portion de plan S comprise entre C_f, la dr
$(0, \vec{i})$, et les droites d'équations $x = 0$ et $x = \frac{\pi}{3}$

c) Calculer en unités de volume, la mesure du volume du solide de révolution engendré par la r
tion de la surface S autour de $(0, \vec{i})$.

5.32 ADJOINT TECHNIQUE D' ENTREPRISES DU BATIMENT 77 *(durée : 3 heures*
(6 points)

On donne la fonction f définie par $f(x) = \frac{3 \sin x}{2 + \cos x}$

1 - Déterminer son développement limité, à l'ordre 6, au voisinage
$x = 0$.

2 - Si (C) est la courbe représentant les variations de f, précise
est la position de (C) par rapport à la droite d'équation y =
au voisinage du point d'abscisse $x = 0$.

3 - Calculer l'aire du domaine plan, ensemble des points M (x,y)
$0 \leqslant x \leqslant \pi$ et $0 \leqslant y \leqslant f(x)$.

N.B. : Le plan est rapporté à un repère orthonormé d'axes x'Ox, y'
ne demande pas de construire (C).

FONCTIONS RECIPROQUES DES FONCTIONS CIRCULAIRES ET HYPERBOLIQUES

5.33 ELECTRONIQUE 76 (durée :2 heures)

(10 points)

a) Etudiez la fonction $y = f(x) = \text{Arc tg}\sqrt{x}$. Tableau de variation cette fonction et courbe représentative dans un repère orthormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

b) Montrez que la fonction $g(x) = \text{Arc sin}\dfrac{2\sqrt{x}}{1+x}$ n'est pas dérival $x = 1$. Dérivée de $g(x)$ sur l'intervalle $[0, 1[$ et sur l'interv $]1, +\infty[$

c) En déduire sur les deux intervalles $[0, 1[$ et $]1, +\infty[$ une r entre $g(x)$ et $f(x)$. Construire la courbe représentative de g

5.34 CONSTRUCTION METALLIQUE 77

2 - On note $\text{sh } x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$

2.1. - On rappelle que la fonction sinus hyperbolique admet sur $\mathbb{R}$ un tion réciproque h telle que $h(x) = \text{Arg sh } x$.

2.1.1. - Montrer que pour tout x réel, la dérivée de h' est t que $h'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

2.1.2. - Représenter graphiquement la fonction h dans un repè orthonormé d'axes x'Ox, y'Oy (unité : 1 cm).

2.2. - Déterminer, en intégrant par parties, une primitive de la fo En déduire l'aire du domaine plan, ensemble des points M(x, y) que $0 \leqslant x \leqslant 1$ et $0 \leqslant y \leqslant \text{Arg sh } x$

2.3. - 2.3.1. - En utilisant le développement limité de $(1 + x)^\alpha$ au ge de 0, trouver un développement limité de $\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ voisinage de 0, à l'ordre 5.

2.3.2. - En déduire un développement limité de Arg sh x au vo de 0 à l'ordre 5.

CHAPITRE VI: CALCULS D'INTEGRALES

INTEGRATION PAR PARTIES

6.1 INDUSTRIES DU BOIS 81 (durée :3 heures)

(3 points)

Calculer : $I = \int_0^{\frac{3\pi}{4}} e^x \cos x \, dx$

6.2 FABRICATIONS MECANIQUES 85 (durée : 3 heures)

(6 points)

Pour tout entier naturel $n \neq o$ on considère l'intégrale :

$$I_n = \int_{-2}^{0} x^n \sqrt{x+2} \, dx \text{ et on pose } I_0 = \int_{-2}^{0} \sqrt{x+2} \, dx.$$

1. Calculer I_0.

2. A l'aide d'une intégration par parties, calculer :

$$I_1 = \int_{-2}^{0} x\sqrt{x+2} \, dx$$

3. Par la méthode d'intégration par parties établir la relation :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, I_n = -\frac{4n}{3+2n} \quad I_{n-1}$$

En déduire la valeur exacte de I_7; donner la valeur décimale approchée de I_7 à 10^{-2} près par

6.3 ASSISTANT D' INGENIEUR 82 (durée : 3 heures)

(4 points)

Soient f une fonction réelle continue sur l'intervalle $[0, \pi]$ et n un entier strictement positif. On co
l'intégrale :

$$f_1(n) = \int_0^{\pi} f(x) \cos nx \, dx .$$

Calculer $f_1(n)$ dans les cas suivants :

1 - $f(x) = \sin kx$, où k est un entier strictement positif.
On distinguera les deux cas : $k = n$ et $k \neq n$

2 - $f(x) = x^2 - 2\pi x$.

INTEGRATION PAR CHANGEMENT DE VARIABLE

6.4 INDUSTRIE DU BOIS
(3 points)

Calculer :

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos^3 x}{\sin^2 x}\, dx.$$

6.5 MICROMECANIQUE 76 (4 heures)
(6 points)

Si f est une fonction numérique de la variable réelle défini et intégrable sur l'intervalle $[a, b]$, montrer par un changement de va ble que

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^b f(a + b - x)\, dx$$

<u>Applications</u> :

a) - Calculer en utilisant la formule précédente puis en faisant le changement de variable $t = \cos x$

$$\int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x}\, dx$$

b) - Calculer :

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{Log}(1 + \mathrm{tg}\, x)\, dx$$

(On rappelle que $\mathrm{tg}(a - b) = \dfrac{\mathrm{tg}\, a - \mathrm{tg}\, b}{1 + \mathrm{tg}\, a\, \mathrm{tg}\, b}$).

6.6 *INDUSTRIES DU BOIS 83 (durée : 3 heures)*

(4 points)

Calculer l'intégrale

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{x^2 + x + 1}$$

6.7 *INSTRUMENTS D'OPTIQUE DE PRECISION 81 (4 heures)*

(3 points)

corri

Calculer $\displaystyle\int_0^{\text{Log}\sqrt{3}} \frac{\text{ch } x + 1}{\text{ch } x}\, dx$ en faisant le changement d

variable : $t = e^x$

(Log est le logarithme népérien et $\text{ch } x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$)

$\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\text{ch } x + 1}{\text{ch } x}\, dx$ est-elle définie ?

6.8 *BUREAU D'ETUDES 79 (durée : 4 heures)*

(6 points)

cor

1 - Construire la courbe (C) d'équation $y = \sqrt{\dfrac{1 - x}{1 + x}}$ dans un repère ortho-normé.

2 - Calculer l'aire de la portion de plan comprise entre la courbe (C) et les deux axes de coordonnées.

- Première méthode : En calculant l'intégrale $I_1 = \displaystyle\int_0^1 \sqrt{\frac{1 - x}{1 + x}}\, dx$. (On peut y faire le changement de variable défini par $x = \cos\varphi$).
- Deuxième méthode : En démontrant que cette aire est également mesuré par l'intégrale $I_2 = \displaystyle\int_0^1 \frac{1 - y^2}{1 + y^2}\, dy$ et en calculant I_2.

INTEGRATION DES FRACTIONS RATIONNELLES

6.9 FABRICATIONS MECANIQUES 82 (durée : 3 heures)

(6 points)

Soit à calculer $$J = \int_{-4}^{-2} \frac{2x^2 - 4}{(x-1)(x+1)^2}\, dx$$

1.1 - Déterminer les réels a, b, c tels que, $\forall x \in \mathbb{R} - \{-1, +1\}$

$$\frac{2x^2 - 4}{(x-1)(x+1)^2} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{(x+1)^2}$$

1.2 - En déduire sur $\mathbb{R} - \{-1, +1\}$ une primitive de $f : x \longmapsto \dfrac{2x^2 - 4}{(x-1)(x+1)^2}$

1.3 - Calculer alors J.

(On en donnera la valeur décimale approchée à 10^{-2} près par défaut).

6.10 FROID ET CLIMATISATION 83 (1 H 15)

(8 points)

1. On considère les fonctions u et v de la variable réelle t données par

$$u(t) = \frac{t(t+2)}{(t+1)^2} \qquad \text{et} \qquad v(t) = \frac{2}{1-t^2}$$

1.1. Déterminer leurs ensembles de définition D_u et D_v .

1.2. Déterminer les réels A et B tels que, pour tout réel t de D_u , l'on ait :

$$u(t) = A + \frac{B}{(t+1)^2}$$

1.3. Déterminer les réels C et D tels que, pour tout réel t de l'on ait :

$$v(t) = \frac{C}{1 + t} + \frac{D}{1 - t}$$

2. En déduire :

2.1. La primitive f de u qui prend la valeur $\frac{1}{2}$ pour t = 1 .

2.2. La primitive g de v qui s'annule pour t = 0 .

6.11 ELECTROTECHNIQUE 81 (durée : 3 heures)
(4 points)

. Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle :

$$f(x) = \frac{x + 2}{x^2(x-1)^2} .$$

. Calculer $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{x + 2}{x^2(x-1)^2}\,dx$

6.12 ELECTROTECHNIQUE 86 (4 points)

---

1 – Déterminer les réels a, b, c, d tels que pour tout t différent de – 1 :

$$f(t) = \frac{2}{(1 + t)^2 \; (1 + t^2)} = \frac{a}{(1 + t)^2} + \frac{b}{1 + t} + \frac{ct + d}{1 + t^2}$$

2 – Calculer l'intégrale

$$I(x) = \int_0^x f(t)\; dt.$$

Déterminer la limite de I (x) quand x tend vers + ∞.

6.13 FABRICATIONS TEXTILES 85 (durée : 4 heures)
(8 points)

---

1. Trouver les complexes a et b pour que le polynôme P défini sur $\mathbb{C}$ par

$P(z) = z^4 + az + b$

admette les racines $z_1 = -1 + i$ et $z_2 = 1 - i$.

3. Trouver les réels A, B, C, D pour lesquels on a, pour tout réel x :

$$\frac{8}{x^4+4} = \frac{Ax+B}{x^2+2x+2} + \frac{Cx+D}{x^2-2x+2}$$

4. Trouver des primitives sur $\mathbb{R}$ de chacune des fonctions f et g définies par :

$$f(x) = \frac{x+2}{(x+1)^2+1} \text{ et } g(x) = \frac{x-2}{(x-1)^2+1}$$

En déduire, pour tout réel α, la valeur de

$$F(\alpha) = \int_0^{\alpha} \frac{dx}{x^4+4}$$

$F(\alpha)$ a-t-il une limite lorsque α tend vers $+\infty$?

6.14 MICROMECANIQUE 84 (durée : 3 heures)

(6 points)

On considère les fonctions f et g définies par :

$$f(x) = \frac{x^3-2x^2+1}{x^2(x^2+1)^2} \qquad g(x) = \frac{3x^2+2x-3}{2(x^2+1)^2}$$

1. Montrer qu'il existe des réels A et B tels que pour tout réel non nul x on ait :

$$f(x) = \frac{A}{x^2} + \frac{B}{x^2+1} + g(x)$$

2. Trouver une fonction affine h telle que la fonction H qui au réel x associe $\frac{h(x)}{x^2+1}$ soit une primitive de g.

3. Calculer, pour tout réel strictement positif α ,

$$I(\alpha) = \int_1^{\alpha} f(x)\,dx$$

4. $I(\alpha)$ admet-elle une limite lorsque α tend vers $+\infty$?

6.15 CONSTRUCTION METALLIQUE 77

(6 points)

1 - On considère la fraction rationnelle $F(x) = \dfrac{5x^2}{(x-1)^2(x^2+4)}$

1.1. - Déterminer les quatre réels a, b, c, d pour qu'on ait quand F(x) définie :

$$F(x) = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{(x-1)^2} + \frac{cx+d}{x^2+4}$$

1.2. - En déduire une primitive de F(x) dans chacun des intervalles où est définie. (On rappelle que pour tout x réel la dérivée de la tion g telle $g(x) = \text{Arc tg } x$ est la fonction g' définie par $g'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$).

6.16 MICROMECANIQUE 80 (durée: 3 heures)

(5 points)

1 - Déterminer les réels a, b, c, tels que pour tout t différent

$$\frac{3}{1+t^3} = \frac{a}{1+t} + \frac{bt+c}{t^2-t+1}$$

2 - Calculer $f(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{3}{1+t^3}\,dt$. Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)$

EXERCICES FAISANT INTERVENIR PLUSIEURS PROCEDES D' INTEGRATION

6.17 BUREAU D'ETUDES 77 (durée : 4 heures)
(4 points)

I - 1 - Calculer $A = \displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x^2+x+1}$ (on pourra poser $x + \frac{1}{2} = u$)

2 - Décomposer en éléments simples $f(x) = \dfrac{x^3+3x^2+1}{(x+1)(x^2+x+1)}$

3 - Calculer alors $I = \displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$

6.18 *INDUSTRIES DU BOIS 76 (durée : 3 heures)*

(3 points)

II - 1° - Calculer les intégrales suivantes :

$$A = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1 + \sin x}{\cos^2 x}\, dx \qquad B = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{x\, dx}{\cos^2 x}$$

$$C = \int_3^4 \frac{2x - 5}{x^2 - 6x + 10}\, dx$$

6.19 *INDUSTRIES DU BOIS 82*

(4 points)

I - Calculer les intégrales définies suivantes :

$$A = \int_3^5 \frac{x^4 + x + 1}{x^3 - 3x^2 + 2x}\, dx \qquad B = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1 + \sin x + \cos x} \qquad C = \int_0^1 x \arctan x \, dx$$

(arctan désigne la fonction arc tangente).

6.20 *INDUSTRIES DU BOIS 85*

(3 points)

Calculer

$$I = \int_1^{e^2} x \ln x \, dx \qquad \text{et} \qquad J = \int_{-2}^{0} \frac{x^2 - 2x + 6}{(1 - x)(x^2 + 4)}\, dx$$

6.21 *CHAUDRONNERIE INDUSTRIELLE 85 (durée : 4 heures)*

(4 points)

Calculer les intégrales définies suivantes :

$$I = \int_1^2 \frac{x \ln x}{(1 + x^2)^2}\, dx \qquad K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{2 + \cos x}\, dx$$

($\ln$ désigne la fonction logarithme népérien).

(6 points) *corrigé*

1) Calculer les intégrales :

$$J = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\, dx \quad ; \quad I_2 = \int_0^{\frac{1}{2}} (\arcsin x)^2\, dx$$

2) n désignant un entier naturel supérieur ou égal à 2, on pose :

$$I_n = \int_0^{\frac{1}{2}} (\arcsin x)^n\, dx$$

Trouver une relation entre I_n et I_{n-2}.

6.23 ELECTROTECHNIQUE 77 (durée : 3 heures)

(4 points)

2.2. - 2.2.1. Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle

$$\frac{t}{(t+1)^2}$$

2.2.2. Démontrer que :

$$\int \frac{e^t}{t+1}\, dt = \frac{e^t}{t+1} + \int \frac{e^t}{(t+1)^2}\, dt$$

2.2.3. Calculer :

$$g(t) = \int_{-\infty}^{t} \frac{ue^u}{(u+1)^2}\, du$$

6.24 FABRICATIONS MECANIQUES 80 (durée : 3 heures)

(7 points)

1\. 1.1. Calculer $I_1 = \int_3^5 \frac{dt}{(t+1)(t-2)}$

On pourra déterminer les réels A et B tels que pour tout t réel différent de -1 et 2, on ait :

$$\frac{1}{(t+1)(t-2)} = \frac{A}{t+1} + \frac{B}{t-2}$$

1.2. Calculer $I_2 = \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{5}} \frac{x\, dx}{x^4 - x^2 - 2}$ (on pourra poser : t =

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^3 x}{\cos^3 x + \sin^3 x}\, dx \,.$$

2.1. Si f est une fonction numérique continue sur l'intervalle $[0,a]$ montrer que :

$$\int_0^a f(x)\,dx = \int_0^a f(a-x)\,dx \quad \text{(on pourra poser } u = a-x\text{).}$$

En déduire que si $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^3 x}{\cos^3 x + \sin^3 x}\, dx$ alors $I = J$.

2.2. Calculer $I + J$. En déduire I.

APPLICATION DU CALCUL INTEGRAL

6.25 FABRICATIONS MECANIQUES 84 (durée : 3 heures)
(3 points)

On considère la courbe dont l'équation dans un repère orthonormé est $y = \ln x$. On appelle A le point d'abscisse $\sqrt{3}$ et B celui d'abscisse $\sqrt{8}$. L'unité de longueur étant 1 cm, calculer la longueur de l'arc (AB). On pourra effectuer dans l'intégrale le changement de variable $u = \sqrt{x^2 + 1}$.

CHAPITRE VII : EQUATIONS DIFFERENTIELLES DU PREMIER ORDRE

EQUATIONS SANS SECOND MEMBRE

7.1 FROID ET CLIMATISATION 79 (durée : 1 h 15)
(8 points)

1 - a - Résoudre l'équation différentielle :

$$(y - 1)^2 + y' = 0$$

b - Déterminer la solution particulière dont la courbe représentative contient le point A (2 ; 2)

7.2 EXPLOITATION DES VEHICULES A MOTEUR 82 (durée : 2 heures)
(4 points)

1 - Résoudre l'équation différentielle $y' + (2x + 1)y^2 = 0$
où y représente une fonction numérique de la variable réelle x.

2 - Déterminer la solution particulière de cette équation différentielle qui prend la valeur $\frac{1}{2}$ pour x = 1.

7.3 CONSTRUCTION METALLIQUE 80 (durée : 3 heures)

(8 points)

1 - Déterminer les constantes réelles A, B, C telles que pour tout réel u différent de -1 on ait :

$$\frac{1}{(1 + u)(1 + u^2)} = \frac{A}{1 + u} + \frac{Bu + C}{1 + u^2}$$

2 - Déterminer une primitive de la fonction $u \longmapsto \dfrac{1}{(1 + u)(1 + u^2)}$

3 - Déterminer une primitive de la fonction : $t \longmapsto \dfrac{e^t}{(1 + e^t)(1 + e^{2t})}$

4 - Résoudre l'équation différentielle (E) :

$$(1 + e^t)(1 + e^{2t})\, y' - 2\, e^t\, y = 0$$

7.4 *FONDERIE EN MOULES METALLIQUE 85 (4 points)*

1.1 Résoudre l'équation différentielle du premier ordre :

$$(e^x - 1)\, y' + y = o$$

Pour l'intégration on pourra poser $u = e^x - 1$ et utiliser une identité de la forme

$$\frac{1}{(u+1)u} = \frac{A}{u+1} + \frac{B}{u}$$

1.2 Déterminer la solution particulière y_1 de l'équation différentielle, qui prend la valeur 2 pour x (ln : logarithme népérien).

7.5 *INDUSTRIES CERAMIQUES 85 (durée : 3 heures) (8 points)*

Soit l'équation différentielle du premier ordre :

$$\text{(E)} \qquad x\,(1+t^2) = t(1-t^2)\,x'$$

dans laquelle x désigne une fonction de la variable réelle t et x' sa dérivée première.

1. Vérifier que la fonction constante $x = o$ est une solution de (E).
   Déterminer les nombres réels A, B et C tels que l'on ait l'identité :

$$\frac{1+t^2}{t\,(1-t^2)} = \frac{A}{t} + \frac{B}{1-t} + \frac{C}{1+t}$$

et résoudre (E).

2. Déterminer la solution particulière x_1 de (E) telle que :

$$x_1(2) = -\frac{2}{3}$$

On considère le réel α qui satisfait, pour chaque t, différent de 1 et de −1 aux conditions su

$$\begin{cases} \tan \alpha = t & \text{(tan : tangente)} \\ -\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \dfrac{\pi}{2} \\ \alpha \neq \dfrac{\pi}{4} \\ \alpha \neq -\dfrac{\pi}{4} \end{cases}$$

Exprimer simplement $x_1(t)$ en fonction de α.

7.6 CONSTRUCTION METALLIQUE 85 (durée : 1 h 30)

1°) Résoudre l'équation différentielle :

(E_1) : $y' - y = t$
où y est une fonction de la variable t.
Donner la solution particulière g de (E_1) telle que $g(0) = 0$.

2°) Soit l'équation différentielle :

(E_2) : $x' = x - g(t) - t - 2$

où g est la fonction trouvée au 1° et x une fonction de la variable t.

Résoudre l'équation différentielle (E_2).
Donner la solution particulière f de cette équation différentiell[e] telle que $f(0) = 0$.

7.7 FABRICATION INDUSTRIELLE DU MOBILIER 84 (durée : 2 heures)
(4 points)

Résoudre l'équation différentielle

$$y' - y = \frac{1}{2}\left[e^{x} + e^{-x}\right].$$

7.8 EXPLOITATION DES VEHICULES A MOTEURS 83 (durée : 2 heures)
(5 points)

1. A l'aide d'une intégration par parties calculer l'intégrale :

$$I = \int_1^x \frac{\ln t}{t^2}\, dt, \quad \text{avec} \quad x \in \mathbb{R}^+ / \{0\}.$$

(le symbole ln désigne la fonction logarithme népérien).

2. Résoudre l'équation différentielle $xy' - y = -\ln x$ où y représente une fonction numérique de la variable réelle x.

Donner la solution particulière de cette équation différentielle qui s'annule pour $x = 1$.

7.9 BUREAU D'ETUDES 84 (durée : 4 heures)

(5 points) corrigé

1. Montrer que la fonction f définie pour tout x réel par :

$$f(x) = e^{-x} \ln (1 + e^{x})$$

est une solution de l'équation différentielle :

$$y' + y = \frac{1}{1 + e^{x}}$$

La notation ln représente le logarithme népérien.

2. Résoudre cette équation différentielle.

3. a) Calculer $\displaystyle\int_0^x \frac{dt}{1 + e^t}$ en remarquant que :

$$\frac{1}{1 + e^t} = 1 - \frac{e^t}{1 + e^t}$$

b) En déduire en utilisant une intégration par parties :

$$\int_0^x f(t)\, dt.$$

7.10 BLANCHIMENT 85 (durée : 2 heures)

(8 points)

1. Chercher les primitives de la fonction $f = \begin{pmatrix} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \longmapsto \dfrac{x^2}{1 + x^2} \end{pmatrix}$

2. Résoudre l'équation différentielle $xy' + 2y = 0$. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $xy' + 2y = \dfrac{x}{1 + x^2}$

Trouver la solution particulière f de $xy' + 2y = \dfrac{x}{1 + x^2}$ qui vérifie $f(-1) = \dfrac{\pi}{4}$.

7.11 EQUIPEMENTS TECHNIQUES DU BATIMENT 85 (durée : 4 heures)
(4 points)

1 - Résoudre l'équation différentielle :

$$y' + y \tan x = \sin x$$

où y est une fonction de la variable réelle x. (tan désigne la fonction tangente).

2 - Calculer une primitive de la fonction

$$h : x \longrightarrow \cos(\ln x)$$

(ln désigne la fonction logarithme népérien).

En déduire une primitive de la fonction

$$k : x \longrightarrow \sin(\ln x)$$

7.12 BUREAU D' ETUDES 82 (4 points) corrigé

1. Déterminer les constantes réelles A,B,C, telles que l'on ait sur $\mathbb{R}^*$:

$$\frac{1 - x^2}{x(x^2 + 1)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{x^2 + 1} .$$

2. Résoudre l'équation différentielle :

$$x(x^2 + 1)y' + (x^2 - 1)y = x^3.$$

7.13 INSTRUMENTS D'OPTIQUE DE PRECISION 82 (durée : 4 heures) corrigé
(5 points)

Déterminer les fonctions réelles de la variable réelle x solutions de l'équation différentielle :

$$x(x^3 - 1)y' + 3y = -x^2 e^{\frac{1}{x}}$$

où $x \in]1, +\infty[$.

7.14 ADJOINT TECHNIQUE D'ENTREPRISE DU BATIMENT 81 (durée : 3 heures)
(10 points) corrigé

1 - Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle

$$\frac{x - 2}{x(x - 1)}$$

Déterminer une primitive de la fonction $x \longmapsto \frac{x - 2}{x(x - 1)}$

2 - Calculer $J = \int_2^t \frac{x - 2}{x^3} \text{Log} \frac{x - 1}{x} dx$ où t est un réel tel que t

(on pourra intégrer par parties, en posant $u = \text{Log} \frac{x - 1}{x}$).

3 - On considère l'équation différentielle linéaire du 1er ordre :

$$x(x - 1)y' - (x - 2)y = 1 - (x - 2) \text{Log} \frac{x - 1}{x}.$$

Déterminer les fonctions définies et dérivables sur l'intervall $]1, +\infty[$, solutions de cette équation différentielle.

7.15 INSTRUMENTS D'OPTIQUE DE PRECISION 85 (6 points)

---

x est une variable réelle ; ln désigne la fonction logarithme népérien.

1. Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle :

$$\frac{x - 2}{x(x - 1)}$$

2. On veut calculer $I = \int_{3/2}^{2} \frac{x - 2}{x^3} \ln \frac{x - 1}{x} dx$

Pour cela on utilisera une intégration par parties en posant :

$u(x) = \ln \frac{x - 1}{x}$ et $v'(x) = \frac{x - 2}{x^3}$

3. y est une fonction numérique de la variable réelle x, définie et dérivable sur $]1 + \infty[$.
Résoudre l'équation différentielle suivante :

$x(x - 1)y' - (x - 2)y = 1 - (x - 2) \ln \frac{x - 1}{x}$ (Equation linéaire du premier ordre).

7.16 ELECTRONIQUE 82 (durée: 2 heures) (6 points)

On considère l'équation différentielle :

$$(E) \quad : \quad 2xz + x^2(x + 1)z' = 10 - 6x$$

dans laquelle z désigne une fonction inconnue de la variable réelle x et z' sa fonction dérivée.

1 - Déterminer la solution générale de l'équation différentielle (E).

2 - On envisage l'équation différentielle

$$(F) \quad : \quad xy^2 + x^2(x + 1)yy' = 5 - 3x$$

On effectue dans l'équation (F) le changement de fonction inconnue défini par $y^2 = z$. En déduire une équation des courbes intégrales de l'équation (F) de la forme $y^2 = f(x)$.

3 - Trouver une équation de la courbe intégrale de (F) passant par le point A de coordonnées (1,0).

7.17 CHAUDRONNERIE INDUSTRIELLE 85 (durée : 4 heures)

(3 points)

Soit l'équation différentielle (E) :

$$x(x^2 + x + 1)\,y' - (x^2 - 1)\,y = \frac{3\,(x+1)}{\sqrt{x^2 + 2x + 3}}$$

où y représente une fonction numérique de la variable réelle x.

a) Donner la solution générale de l'équation différentielle :

$$x(x^2 + x + 1)\,y' - (x^2 - 1)\,y = 0$$

b) Vérifier que la fonction g telle que $g(x) = \sqrt{x^2 + 2x + 3}$ est une solution particulière de (E). En déduire la solution générale de (E).

7.18 ELECTROTECHNIQUE 76 (durée :3 heures) corrigé

II - Soit l'équation différentielle

(1) $e^y(1 - xy') = 1 - \ln x$

la variable x est strictement positive, et ln signifie "logarithme népérien".

1°/ Former l'équation différentielle (2), déduite de (1) en posant $Y = e^y$, la variable restant x.

2°/ Calculer l'intégrale $\displaystyle\int \frac{1 - \ln x}{x^2}\,dx$

3°/ Intégrer l'équation différentielle (2), et en déduire l'intégrale générale de (1).

CHAPITRE VIII : APPLICATIONS DES EQUATIONS DIFFERENTIELLES DU PREMIER ORDRE

8.1 INDUSTRIES CEREALIERES 85 (2 heures)
(10 points)

Une péniche contenant 225 tonnes de blé se présente sous le portique de déchargement. Sa masse à vide est de 75 tonnes.

On admet qu'elle a la forme d'un parallélépipède rectangle de dimensions : hauteur 3 mètres ; longueur 30 mètres ; largeur 5 mètres.

L'épaisseur des parois est considérée comme négligeable.

On rappelle que la masse volumique du blé est de 0,75 tonne par mètre cube. Le débit d'aspiration du blé, lors du déchargement est de 200 tonnes par heure.

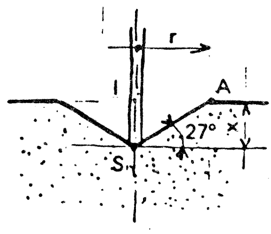
L'opération commence à l'instant $t = o$.

A chaque instant t, la péniche est alors en équilibre sous l'action de son poids et de la poussée d'Archimède, égale au poids du volume d'eau déplacé.

On note h la hauteur de péniche immergée, exprimée en mètres (m) à l'instant t considéré, exprimé en minutes (min).

1. Calculer en fonction de h la masse du volume d'eau déplacé à l'intant t.
   Calculer en fonction de t la masse totale de la péniche (péniche et blé restant en charge) à l'instant t.
   Exprimer h en fonction de t. Donner h à l'instant $t = o$.

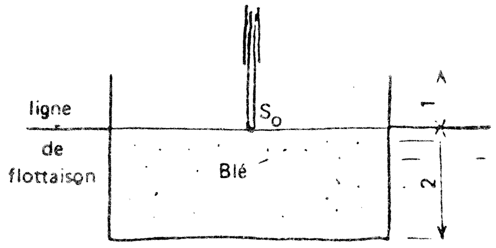
2. Le tube télescopique d'aspiration pénètre verticalement dans le produit, dont la surface libre est horizontale, et creuse un cône d'aspiration (figure ci-contre).
   L'angle de pente du talus naturel du blé est de 27 degrés.
   On note x (en m) la hauteur du cône à l'instant t (en min), et r (en m) le rayon de base au même instant.



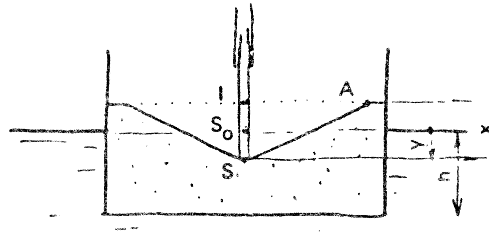
   2.1. Pour le débit considéré, calculer $\frac{dx}{dt}$, la "vitesse d'allongement" du cône d'aspiration, en fonction de x.

   2.2. Résoudre l'équation différentielle obtenue pour exprimer x, la hauteur du cône à l'instant t, en fonction de t. (ne pas tenir compte des parois).

3. Les dessins suivants représentent la péniche à $t = o$, et à l'instant t du déchargement.
   Le tube télescopique d'aspiration a du effectuer un mouvement de descente selon la verticale (défini par rapport à un repère fixe).
   On considère la distance y (en m) parcourue par son extrémité entre les dates $t = o$ et t.



t = o



A l'instant t

3.1. Trouver la relation qui existe entre z, y et h à l'instant t, tant que le cône d'aspiration ne rencontre pas les parois.

3.2. Utiliser cette relation, et les résultats trouvés précédemment, pour exprimer y en fonction de t et $\frac{dy}{dt}$ en fonction de x , toutes les hypothèses faites restant vraies.

8.2 ANALYSES BIOLOGIQUES 79 (durée :3 heures) *corrig*

Pour une substance radioactive donnée A, soit y le nombre des ato présents au temps t.

Au temps t = 0 le nombre d'atomes présents est y_0.

1 - Sur $\mathbb{R}^+$ la fonction $f : t \longmapsto y$ est solution de l'équation différentie $\frac{dy}{dt} = - \lambda y$ où λ est une constante strictement positive relative à la su A considérée.

Déterminer en fonction du temps t le nombre y d'atomes de A prés

2 - On appelle période de l'élément radioactif A le temps T au bout duquel moitié des atomes présents au temps t = 0, a été désintégrée.

Déterminer la constante λ en fonction de la période T.

Pour n, entier naturel non nul, déterminer le nombre d'atomes de présents au temps nT.

3 - On considère deux substances radioactives A_1 et A_2 de périodes respect T_1 = 1 jour et T_2 = 5 jours.

Au temps t = 0 :

- le nombre d'atomes de A_1 présents est 4.10^5,
- le nombre d'atomes de A_2 présents est 10^5.

3.1. - Déduire des questions précédentes les nombres y_1 et y_2 d'atomes substances A_1 et A_2 présents au temps t.

3.2. - Construire sur une feuille de papier semi-logarithmique les représentations graphiques des fonctions $f_1 : t \longmapsto y_1$ et $f_2 : t \longmapsto y_2$.

3.3. - Déterminer par le calcul et vérifier graphiquement :

- le temps t_0 au bout duquel les nombres y_1 et y_2 d'atomes des substances A_1 et A_2 présents, sont égaux.
- le temps t' au bout duquel il reste mille atomes de A_1.
- les nombres d'atomes de A_1 et A_2 présents au temps t = 5 jours.

4 - Au temps t = 0 on mélange les atomes de A_1 et A_2 présents. Les deux substances se désintègrent suivant les lois déterminées à la question 3.1.

Sur la même feuille de papier semi-logarithmique que précédemment représenter graphiquement la fonction $g : t \longmapsto y_1 + y_2$.

Déterminer par le calcul le temps au bout duquel le mélange est compos de 50 % d'atomes de A_2 et 50 % d'atomes de A_1.

Déterminer par le calcul le temps au bout duquel le mélange est compos de 90 % d'atomes de A_2 et 10 % d'atomes de A_1.

8.3 ANALYSES BIOLOGIQUES 83 (15 points) *corrigé*

---

1. α et μ étant deux nombres réels strictement positifs, on considère l'équation différentielle :

(1) $$y' + \alpha y = \mu t$$

où y est une fonction de la variable réelle t et y' la fonction dérivée de y par rapport à t.

1.1. Intégrer l'équation (1) [on pourra chercher une solution particulière de la forme $y = at + b$ où a et b sont deux constantes à déterminer en fonction des données].

1.2. Déterminer la solution particulière de l'équation (1) qui prend la valeur 0 pour $t = 0$.

2. β étant un nombre réel positif, on considère l'équation différentielle :

(2) $$y' + \alpha y = \beta$$

2.1. Intégrer l'équation (2).

2.2. Déterminer la solution de (2), qui prend la valeur λ pour $t = \dfrac{1}{\alpha}$ (λ est un réel donné).

3. Un produit S passe, sans être altéré, d'un milieu A dans un milieu B. A l'instant t, la concentration de S dans A est notée x, celle de S dans B est notée y. La variation instantanée de concentration dans B est $\dfrac{dy}{dt}$. Nous nous plaçons dans le cas où il existe une constante k, strictement positive, telle que :

$$\frac{dy}{dt} = k\,(2x - y)$$

A l'instant $t = 0$, on a $x = y = 0$.

On procède à une injection régulière de S dans A, de façon à avoir :

$$\forall t \ (t > 0) \quad , \quad x + y = 3\,kt$$

3.1. Écrire l'équation différentielle liant y, $y' = \dfrac{dy}{dt}$, et t.

En utilisant les résultats de la question 1, exprimer y en fonction de t et de k.

3.2. A l'instant $t_1 = \dfrac{1}{3k}$, on arrête l'injection du produit S.

Calculer la valeur λ de y à cet instant t_1.

3.3. A partir de l'instant t_1, on a donc :

$$x + y = 3kt_1 = 1, \qquad \text{et toujours} \qquad \frac{dy}{dt} = k(2x - y).$$

Écrire l'équation différentielle liant y, y' et t pour $t \geqslant t_1$.

En utilisant les résultats de la question 2, exprimer y en fonction de t et de k pour $t \geqslant t_1$.

4. k est toujours un nombre réel strictement positif.

4.1. Étudier la fonction φ définie sur $[0, t_1]$ par :

$$\varphi(t) = \frac{2}{3}\,[3\,kt - 1 + e^{-3kt}]$$

où e est la base des logarithmes népériens.

4.2. Étudier la fonction ψ définie sur $[t_1, +\infty[$ par :

$$\psi(t) = \frac{2}{3}\,[1 + (1 - e)\;e^{-3kt}]$$

5. Dans le plan rapporté à un repère orthonormé (unité : 6 cm), représenter les variations de la concentration y en fonction du temps t ($t \in \mathbb{R}^+$). On pourra choisir $k = \dfrac{1}{24}$.

8.4 ANALYSES BIOLOGIQUES 85 (15 points)

A — La destruction d'un corps radioactif se traduit par la formule

$$\frac{dN}{dt} = -\lambda N,$$

où t est le temps compté en jours,
N le nombre d'atomes du corps radioactif à l'instant t,
et λ la constante radioactive de ce corps.

**1 - Soit N_0 le nombre d'atomes du corps à l'instant $t = 0$.
Calculer N en fonction de N_0, t et λ.**

2 - On appelle "période" ou "demi-vie" de ce corps radioactif le temps $T_{\frac{1}{2}}$ au bout duquel le nombre d'atomes de ce corps a diminué de moitié. Calculer $T_{\frac{1}{2}}$ en fonction de λ.

3 - Application - Calculer :

a - la constante radioactive du Radium sachant que sa période est de 11,7 jours.

b - la constante radioactive du Thorium sachant que sa période est de 18,2 jours.

B — On considère la désintégration radioactive du Thorium et on se propose de calculer expérimentalement sa période.

Les mesures, à différents instants, de $\dfrac{N}{N_0}$ ont donné les résultats suivants :

temps t (jours)	0	5	10	15	20	25	30
$\frac{N}{N_o}$	1	0,83	0,67	0,57	0,46	0,38	0,32

1 - On considère la quantité $y = -\ln \frac{N}{N_o}$ (ln désigne la fonction logarithme népérien).
Calculer l'équation de la droite de régression de y par rapport à t.

2 - En déduire la valeur de la constante radioactive du Thorium et la période en jours.

C — A l'instant $t = 0$, on isole N_o atomes de Thorium. Le Thorium donne par désintégration du Radium, qui se désintègre à son tour pour donner du Radon. On se propose d'étudier l'évolution au cours du temps des quantités de Thorium et de Radium.

Soit N le nombre d'atomes de Thorium à l'instant t et n le nombre d'atomes de Radium à l'instant t. On a :

$$\frac{dN}{dt} = -\lambda_1 N \qquad \text{et} \qquad \frac{dn}{dt} = \lambda_1 N - \lambda_2 n$$

λ_1 et λ_2 étant les constantes radioactives du Thorium et du Radium trouvées à la question A–3.

1 - Calculer N en fonction de λ_1, t, N_o.

2 - Calculer n en fonction de λ_1, λ_2, t, N_o.

3 - Etudier les variations des fonctions f et g avec :

$$f = \frac{N}{N_o} \qquad \text{et} \qquad g = \frac{n}{N_o}$$

4 - Le plan étant rapporté à un repère $(0, \vec{i}, \vec{j})$, représenter graphiquement les fonctions f et g.
On prendra pour unités : 10 cm sur $(0, \vec{j})$ et 0,5 cm sur $(0, \vec{i})$.

8.5 ANALYSES BIOLOGIQUES 86 (12 points)

I. L'injection d'un produit X dans une substance S provoque aussitôt l'apparition d'un second produit Y. On a mesuré les vitesses des intéractions de ces produits et on a obtenu les résultats suivants :

$$\frac{dx}{dt} = \alpha \quad (1) \qquad\qquad \frac{dy}{dt} = \alpha^2 y + \alpha(\alpha + 1)e^{-x} \quad (2)$$

où x (resp. y) représente la quantité de produit X (resp. Y) à l'instant t (en cg), et où α est une constante strictement positive.

1 - En utilisant les deux équations différentielles (1) et (2), exprimer $\frac{dy}{dx}$ en fonction uniquement de x, y, α.

2 - Intégrer l'équation différentielle obtenue, sachant qu'à l'instant $t = 0$ on avait $x = y = 0$.

II. Soit f la fonction de la variable réelle x définie sur $I = [1\,;10]$ par :

$$f(x) = e^{0,1\,x} - e^{-x}$$

1 - Etudier la fonction f.

Le plan étant rapporté à un repère $(O\,;\vec{i},\vec{j})$, tracer la courbe représentative de f.

2 - Afin d'essayer de simplifier la relation existant entre x et $f(x)$, on va tenter d'approcher f par une fonction g plus simple, de la forme :

$$g(x) = Be^{Ax}, \text{ où } A \text{ et } B \text{ sont des constantes.}$$

On pose $y = \ln f(x)$ (ln représente la fonction logarithme népérien). On considère les points M_i de coordonnées $(x_i\,, y_i)$ où x_i prend les valeurs entières de l'intervalle $I = [1\,;10]$, et où $y_i = \ln f(x_i)$.

Représenter le nuage de points correspondant et déterminer par la méthode des moindres carrés l'équation de la droite de régression de y par rapport à x.

(On indiquera les détails des calculs et on donnera les résultats à 10^{-2} près).

3 - Calculer le coefficient de corrélation linéaire et justifier l'hypothèse de simplification émise au 2.

En déduire les valeurs des coefficients A et B.

CHAPITRE IX : EQUATIONS DIFFERENTIELLES DU PREMIER ORDRE ET COURBES INTEGRALES D'EQUATION Y = F (X)

9.1 ANALYSES BIOLOGIQUES 81 (durée : 3 heures)

1 - Résoudre l'équation différentielle suivante :

$$(E) \qquad 2\,y' - 3\,y = -\,3\,x^3 + 15\,x^2 - 12\,x$$

2 - Construire la courbe intégrale de (E) passant par l'origine des coordonnées dans le plan rapporté à repère orthonormé. Soit C c courbe.

3 - La droite D d'équation $y = x - 3$ coupe cette courbe C en trois A, B, C (les points B et C ont des ordonnées non nulles). Calculer l'aire du domaine plan limité par l'arc de courbe BOC le segment $[B, C]$.

9.2 BIOTECHNOLOGIES 86 (durée : 1 h 30)

(10 points)

1 – Intégrer l'équation différentielle (1)

$$(1) \qquad \frac{dy}{dt} = \frac{-\,a\,y}{b + y}$$

où y est une fonction numérique de la variable réelle t .

Déterminer la solution particulière de cette équation telle que pour $t = 0$, $y = y_0$.

Pour la suite de cette partie I, nous prendrons les valeurs numériques suivantes :

$$a = 10^3 \qquad b = 5\,10^{-4} \qquad y_0 = 10^{-3}$$

2 – Soit f la fonction qui à y réel fait correspondre le nombre réel t défini par :

$$t = f(y) = \frac{-1}{a}\left[b\,\ell n\,\left(\frac{y}{y_0}\right) + y - y_0\right]$$

Le symbole ℓn désigne la fonction logarithme Népérien.

a. Etudier les variations de la fonction f.

b. Tracer sa courbe représentative (C) dans un repère orthogonal, pour les valeurs de y dans l'intervalle $]0, y_0]$.

unités sur l'axe des abscisses : 2 cm pour 0,0001

unités sur l'axe des ordonnées : 1 cm pour 0,0000001

c. Démontrer que f est une application bijective de $]0, y_o]$ dans $[0, +\infty[$.

d. Soit f^{-1} la fonction réciproque de f.
Démontrer que f^{-1} est solution de l'équation différentielle (1).

e. Tracer la courbe (G) représentant f^{-1}.

f. Calculer la valeur t_1 de la variable t pour laquelle $y = \dfrac{y_o}{10}$.

9.3 FROID ET CLIMATISATION 85 (durée : 1 heure)

I – On considère l'équation différentielle notée (E) définie par :

$$(E) \quad \begin{cases} x \in \left]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right[\\ f'(x).\cos x - f(x)\sin x = 2x - 1 \end{cases}$$

où f désigne une fonction de la variable réelle x.

On note (E*) l'équation sans second membre associée, c'est-à-dire :

$$(E^*) \quad \begin{cases} x \in \left]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right[\\ \varphi'(x).\cos x - \varphi(x)\sin x = o \end{cases}$$

1. Déterminer la solution générale de (E*).

2. On appelle φ_o la solution de (E*) telle que $\varphi(o) = 1$. Déterminer les fonctions notées u, telles que $f = u\,\varphi_o$ soit solution de (E). En déduire la solution générale de (E).

II – Soit f la fonction définie par :

$$f : \left]-\frac{\pi}{2} ; +\frac{\pi}{2}\right[\longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto f(x) = \frac{x^2 - x}{\cos x}$$

1. Vérifier que f est une solution de (E).

2. Démontrer que, si x_o est un nombre de l'intervalle $I = \left]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right[$, alors

$$f'(x_o) = o \Longleftrightarrow \tan x_o = \frac{1 - 2x_o}{x_o^2 - x_o}$$

(tan désigne la fonction tangente).

3. On se propose de déterminer le nombre de solutions de l'équation $f'(x) = o$, dans l'intervalle I.

Le plan P étant rapporté à un repère orthonormé $R = (O, \vec{i}, \vec{j})$, on appelle γ_1 la courbe représentative de la fonction tan : $I \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto y = \tan x$$

et γ_2 la courbe représentative de la fonction :

$$g : I \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto g(x) = \frac{1-2x}{x^2 - x}$$

Construire γ_1 et γ_2 dans le plan P.

En déduire que l'équation $f'(x) = 0$ a une unique solution x_0 dans I. Donner une valeur déc male approchée de x_0 à 0,05 près par défaut.

Dresser le tableau des variations de f et tracer sa courbe représentative dans le plan P.

9.4 CHIMISTE 85 (durée : 1 h 3o)

(15 points)

Soit l'équation différentielle :

$$\text{(E)} \quad y'(x+1)^3 + 2y(x+1)^2 = 1$$

où y représente une fonction numérique de la variable réelle x.

1. Résoudre l'équation différentielle (E) et déterminer parmi les courbes intégrales, celle qui passe pa le point de coordonnées (0,0).

2. Soit g la fonction numérique de la variable réelle x telle que $g(x) = \dfrac{\ln|1+x|}{(1+x)^2}$ (le symbole ℓ désigne la fonction logarithme népérien). On désigne par G sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthogonal ; on prendra 1 cm d'unité sur l'axe des abscisses et 4 cm sur celu des ordonnées.

   a) Etudier la fonction g et donner son tableau des variations.

   b) Démontrer que la droite d'équation $x = -1$ est un axe de symétrie de la courbe G.

   c) Donner une équation de la tangente ou point de coordonnées (0,0) à la courbe G. Préciser, e utilisant un développement limité d'ordre 2 de la fonction g au voisinage de zéro, la positio de la courbe G par rapport à cette tangente.

   d) Construire la courbe G dans le plan P.

Le but de l'exercice est l'étude d'une fonction solution particulière d'une équation différentielle.

1 – Résoudre l'équation différentielle du premier ordre linéaire :

$$x\,y' - 2\,y = -\frac{x^2}{x+2}$$

2 – Soit g la fonction numérique de la variable réelle x, définie par :

$$g(x) = \ln\left(\frac{x+2}{x}\right) - \frac{1}{x+2}$$

a) Déterminer l'ensemble de définition D de la fonction g.
Etudier les limites de la fonction g en $-\infty$, -2, 0 et $+\infty$.

b) Déterminer le sens de variation de la fonction g.
En déduire l'existence d'un unique réel α tel que $g(\alpha) = 0$.
En précisant la méthode utilisée, donner une valeur approchée de α à $0{,}1$ près par défaut.

c) Déterminer le signe de $g(x)$ selon les valeurs de x.

3 – Soit f la fonction numérique de la variable réelle x, définie par :

$$f(x) = \frac{1}{2}\,x^2 \,.\, \ln\left(\frac{x+2}{x}\right)$$

On désigne par (C) la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unité : 1 cm).

a) Donner le développement limité à l'ordre 2 au voisinage de 0 de la fonction

$$u \longrightarrow \ln(1+u)$$

En posant $u = \frac{2}{x}$, démontrer qu'il existe deux réels a et b que l'on déterminera et une fonction φ ayant une limite nulle en $-\infty$ et $+\infty$, tels que :

$$f(x) = a\,x + b + \varphi(x)$$

b) Etudier les limites de la fonction f en $-\infty$, -2, 0 et $+\infty$.

c) Déterminer le sens de variation de la fonction f.

d) Tracer la courbe (C) et ses asymptotes.

9.6 BUREAU D'ETUDES 85 (9 points)

A – Soit (E) l'équation différentielle $x y' + (x - 1) y = x^2$
Intégrer (E).
On considère désormais pour λ réel les fonctions f_λ définies sur $\mathbb{R}$ par $f_\lambda(x) = x + \lambda x e^{-x}$

B – On suppose dans cette partie $\lambda = 1$

1. Faire l'étude du signe de la dérivée $f_1'(x)$ (on pourra utiliser $f''_1(x)$).
   En déduire l'étude des variations de f_1.

2. Soit Γ_1 la courbe représentative de f_1 dans le repère orthonormé $(o, \vec{i}, \vec{j})$ (unité de longueur : 2 cm
   et P la parabole d'équation $y = 2x - x^2$.

   Préciser la position de Γ_1 par rapport à P au voisinage de l'origine, puis celle de Γ_1 par rapport à l
   droite D d'équation $y = x$ au voisinage de $+\infty$
   Construire P, D et Γ_1.

3. Quelle est l'aire $a(\alpha)$ de la partie du plan, ensemble des points M (x, y) tels que $0 \leqslant x \leqslant \alpha$ et
   $x \leqslant y \leqslant f_1(x)$. $(\alpha > o)$.
   Etudier la limite de $a(\alpha)$ quand α tend vers $+\infty$

C – On suppose maintenant que $\lambda = e^3$ (où e est la base des logarithmes népériens).
Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x + e^3 . x e^{-x}$

1. Montrer que l'équation $g'(x) = 0$ admet deux racines α_1 et α_2 $(\alpha_1 < \alpha_2)$. (Citer des théorèm
   qui justifient le résultat).

2. En justifiant la méthode utilisée, donner un intervalle de longueur inférieure à 10^{-1} contenant α_1
   (Les calculs intermédiaires devront figurer sur la copie).

9.7 ELECTRONIQUE 78 (10 points)

1 - Résoudre l'équation différentielle $x^2 y' + y = x^2 e^{\frac{1}{x}}$.
Déterminer l'équation de la courbe intégrale de l'équation différentie
précédente passant par le point de coordonnées (1, 3 e).

2 - Déterminer les développements limités à l'ordre 2, au voisinage de $+\infty$
voisinage de $-\infty$ de la fonction $x \longmapsto f(x) = e^{\frac{1}{x}}$. (On pourra poser t =

3 - En déduire l'équation de l'asymptote oblique de la courbe d'équation
$y = f(x) = (x + 2) e^{\frac{1}{x}}$.

4 - Dresser le tableau de variation de la fonction f.

5 - Que se passe-t-il au voisinage de x = 0 ? (Asymptote, demi-tangente év
tuelles).

- Construire la courbe d'équation $y = f(x)$. (On ne cherchera pas à déterminer le point d'inflexion).

9.8 ETUDES DE PRIX DU BATIMENT 77 (durée : 4 heures)
(10 points)

---

3 - 3.1. - Soit l'équation différentielle (1)

$$(1) : \quad (1 + x^2)y' - xy = 1 - x$$

3.1.1. - Montrer que l'on peut trouver une solution particulière de (1) sous la forme $y = ax + b$.

3.1.2. - Trouver la solution générale de (1).

3.2. - Soit f_k une fonction numérique de variable réelle telle que :

$$f_k(x) = k(1 + x^2)^{\frac{1}{2}} + x + 1 \qquad (k \in \mathbb{R})$$

3.2.1. - Déterminer en discutant suivant les valeurs de k les limites suivantes :

α) $\lim\limits_{x \to +\infty} f_k(x)$; β) $\lim\limits_{x \to -\infty} f_k(x)$

3.2.2. - Dans la suite du problème on considère seulement les fonctions f_k où k est une constante positive ou nulle.

Montrer que le graphe (C_k) de f_k admet une asymptote quand x tend vers $+\infty$ et une asymptote quand x tend vers $-\infty$

Donner pour chaque valeur de k $(k \geqslant 0)$ l'équation de cette asymptote.

3.2.3. - Déduire de l'équation de C_k et de la question précédente que C_k est une partie d'hyperbole que l'on précisera.

3.2.4. - Etudier f_1 et construire son graphe dans un repère orthonormé.

A - Intégrer l'équation différentielle :

$$x^2y' + y(1 - y) = 0 \quad (I).$$

B - Soit (f_λ) la famille de fonctions réelles de la variable réelle x dé
du paramètre λ réel définie par :

$$f_\lambda (x) = 1 + \frac{\lambda}{e^{\frac{1}{x}} - \lambda}$$

On désigne par C_λ la courbe représentative de f_λ par rapport à un rep
ortnonormé d'axes x'Ox, y'Oy.
Montrer que f_λ vérifie l'équation différentielle (I). Pour $\lambda \neq 0$, cal
$f_\lambda (x) + f_{\frac{1}{\lambda}} (- x)$. En déduire que les courbes C_λ et $C_{\frac{1}{\lambda}}$ sont symétriqu
rapport à un point A que l'on précisera.

C - On suppose dans cette partie $|\lambda| \leqslant 1$ et $\lambda \neq 0$.

1 - Préciser suivant les valeurs de λ l'ensemble de définition de la
tion f_λ.

2 - Etudier les variations de f_λ dans les cas suivants :

$- 1 < \lambda < 0$; $0 < \lambda < 1$; $\lambda = 1$.

3 - Montrer que pour $\lambda = 1$, la courbe C_1 admet une asymptote non pa
aux axes que l'on précisera.

4 - Montrer que les points d'inflexion des courbes C_λ appartiennent à
droites.

D - Tracer dans un même repère les courbes C_λ correspondant à $\lambda = - \frac{1}{2}$ pui
Tracer dans un même repère les courbes C_λ correspondant à $\lambda = \frac{1}{2}$ puis
On pourra pour ces tracés utiliser la symétrie envisagée à la questio
Tracer la courbe C_1.

9.10 ETUDES DE PRIX DU BATIMENT 83 (8 points)

1. Intégrer l'équation différentielle (E) :

$$y' - y = e^x$$

où y représente une fonction numérique de la variable réelle x.

2. On considère les fonctions numériques f_n de la variable réelle x, dépendant du paramètre entier relatif n, telles que :

$$f_n(x) = (x + n)e^x.$$

2.1. Calculer les fonctions dérivées premières et secondes de f_o Dérivée d'ordre p ($p \in \mathbb{N}^*$) de f_o.

2.2. Etudier les variations de la fonction f_n, n étant un entier relatif donné. Préciser le comportement de f_n quand x tend vers $+\infty$ puis quand x tend vers $-\infty$.

3. On désigne par C_n la courbe représentative de f_n dans le plan P rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

3.1. Etudier les branches infinies de C_n.

3.2. Préciser à quelle courbe Γ appartiennent les extrema et à quelle courbe Γ_1 appartiennent les points d'inflexion.

9.11 INSTRUMENTS D' OPTIQUE DE PRECISION 81 (durée : 4 heures) (14 points)

Soit P le plan affine rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

- y étant une fonction de la variable réelle x, résoudre les équations différentielles suivantes :

$$2xy - y'(x^2 + 1) = 0 \qquad (1)$$

$$2xyy' + x^2 + 1 = 0 \qquad (2)$$

(équations à variables séparables).

- Faire l'étude de la fonction f définie par :

$$f(x) = \sqrt{-\frac{x^2}{2} - \text{Log}\ |x| + \frac{1}{2}}$$

Tracer sa courbe représentative dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ (unité 6 cm).

- En déduire la courbe (Γ), ensemble des points M dont les coo

données vérifient :

$$y^2 + \frac{x^2}{2} + \text{Log } |x| = \frac{1}{2}$$

Vérifier que (Γ) est une des courbes intégrales de (2).

4 - Soit (C_m) la courbe représentative de la fonction f_m définie par

$f_m(s) = m(x^2 + 1)$.

Tracer (C_1) , $(C\frac{1}{4})$ et $(C - \frac{1}{2})$ sur le même dessin que (Γ).

5 - m est un réel fixé non nul.

Soit (x_o, y_o) les coordonnées d'un point d'intersection de (Γ) e
(C_m) .

Exprimer y_o en fonction de m et de x_o .

Calculer en fonction de m et de x_o les pentes des tangentes à (
à (C_m) au point de coordonnées (x_o, y_o) .

En déduire que ces tangentes sont orthogonales.

6 - Montrer qu'en un point d'intersection d'une courbe intégrale de
et d'une courbe intégrale de (2) quelconques, les tangentes à ce
courbes sont orthogonales.

7 - Soit A le point de (Γ) qui a pour abscisse $\frac{1}{2}$ et une ordonnée po
Calculer le volume engendré par la rotation autour de l'axe Ox
surface limitée par la courbe (Γ), l'axe Ox et la droite parall
à Ox passant par A. Donnez le résultat en cm^3.

CHAPITRE X : EQUATIONS DIFFERENTIELLES DU SECOND ORDRE

EQUATIONS SANS SECOND MEMBRE

10.1 ELECTROTECHNIQUE 83 *(durée : 3 heures)* *corri*

(4 points)

1. Résoudre l'équation différentielle : $y'' + 4y = 0$ où y représente fonction numérique de la variable réelle x.

2. Déterminer la solution particulière f, de cette équation, dont courbe représentative dans le plan $\mathcal{P}$ rapporté au repère orthonormé $(O,\vec{u},\vec{v})$ passe par le point de coordonnées $(0,1)$ et admet en ce poi une tangente de coefficient directeur 2.

3. Déterminer les réels a, b et c tels que pour tout réel x on ait

$$f(x) = a\cos(bx+c).$$

Résoudre successivement les deux équations :

$$x\in\mathbb{R}\,,\ f(x) = 0 \quad ; \quad x\in\mathbb{R}\,,\ f'(x) = 0.$$

10.2 ADJOINT TECHNIQUE D'ENTREPRISES DES TP 80 (durée : 3 heures)
(8 points)

1 - Soit l'équation différentielle

(E) $\quad y'' + my' + py = 0$

Déterminer dans chacun des cas suivants la solution particuli f de l'équation (E) telle que $f(0) = 10$ et $f'(0) = 0$.
(f' désigne la fonction dérivée de f).

a) $m = 4$ et $p = 5$

b) $m = 4$ et $p = 4$

c) $m = 4$ et $p = 3$.

2 - Le point A de coordonnées ($x = 0$; $y = 10$) appartient aux cou représentatives des trois fonctions précédemment obtenues.

Déterminer la position relative de ces trois courbes au voisi de A. (On pourra utiliser les développements limités).

EQUATIONS AVEC SECOND MEMBRE

10.3 CONSTRUCTIONS METALLIQUES 82 (durée : 3 heures)

(4 points)

I - Résoudre l'équation différentielle (E_1) :

$$u'' + 9u = -9t$$

où u est une fonction inconnue de la variable réelle t.

10.4 FABRICATIONS TEXTILES 85 (durée : 4 heures)

(3 points)

Résoudre l'équation différentielle :

$$y'' + 2y' + 5y = x\,e^x$$

On cherchera une solution particulière de cette équation sous la forme $y = (ax + b)\,e^x$, où a et b sont des réels.

10.5 FABRICATION DU MOBILIER 85 (durée : 2 heures)

(4 points)

---

y étant une fonction de la variable réelle x , résoudre les équations différentielles :

a – $y'' - 3y' + 2y = 0$

b – $y'' - 3y' + 2y = x + 1$

c – $y'' - 3y' + 2y = e^x$

10.6 TRANSFORMATION DES PLASTIQUES 85 (durée : 2 heures)

(5 points)

---

1. Résoudre l'équation différentielle

$$(E) : \quad y'' - 2y' + 2y = x^2 + 1$$

2. Déterminer la solution de l'équation (E) satisfaisant aux conditions initiales

$y = 1$ pour $x = 0$

$y' = 2$ pour $x = 0$

10.7 ELECTROTECHNIQUE 79 (durée : 3 heures)

(3 points) *corrigé*

2 - Résoudre l'équation différentielle du second ordre :

$$y'' - y' - 6y = e^{3x} + x + 1$$

où y est fonction de la variable réelle x .

10.8 INDUSTRIES GRAPHIQUES 85 (durée : 5 points)

(5 points)

1 - Résoudre l'équation différentielle (E) :

$$(E) \qquad y'' + y' - 6y = e^{x}(2x^2 - x + 1)$$

dans laquelle y est une fonction de la variable réelle x.

2 - Déterminer la solution de (E) satisfaisant aux conditions : $\begin{cases} y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$

10.9 ADJOINT TECHNIQUE D'ENTREPRISES DU BATIMENT 80 (durée : 3 heures)

(8 points) corrigé

1 - Intégrer l'équation différentielle :

$$y'' - 3y' + 2y = 0 \quad (E')$$

2 - Soit (E) l'équation différentielle :

$$y'' - 3y' + 2y = x\,e^{x}$$

Chercher une intégrale particulière de l'équation (E) sous la $y = u\,e^{x}$, u étant une fonction de x que l'on déterminera.
En déduire l'intégrale générale de l'équation (E).

3 - On considère la fonction f, solution de (E) qui vérifie f(O) f'(O) = O. Montrer que pour x infiniment petit principal, f(x un infiniment petit du 3e ordre.

10.10 INSTRUMENTS D'OPTIQUE DE PRECISION 82 (durée 4 heures)

(5 points) corrigé

Déterminer suivant les valeurs du paramètre réel ω les fonctions réelles de la variable réelle x solutions de l'équation différentielle :

$$y'' - 2y' + 2y = e^{x} \cos \omega x$$

---

10. 11 ELECTROTECHNIQUE 84 (durée 3 heures)

(5 points) corrigé

---

1) Résoudre l'équation différentielle, appelée E_m :

$$y'' - (m-3)\, y' + m^2\, y = 0$$

(on discutera suivant les valeurs du nombre réel m)

2) Résoudre l'équation différentielle F :

$$y'' + 9\, y = 8 \cos t$$

3) Déterminer la solution particulière f de l'équation F telle que :

$$f\,(0) = \frac{2}{3} \quad \text{et} \quad f\,(\frac{\pi}{2}) = 0$$

10.12 ELECTROTECHNIQUE 77 (durée : 3heures)

(6 points)

---

2 - 2.1. - On se propose de résoudre l'équation différentielle :

$$x'' + \frac{x'}{t+1} - \frac{x}{(t+1)^2} = e^{t} \qquad (E)$$

où x" et x' sont respectivement les dérivées seconde et première de x par rapport à t.

2.1.1. Résoudre l'équation différentielle :

$$\frac{u'}{t+1} - \frac{u}{(t+1)^2} = e^{t} \qquad (F)$$

où u' est la dérivée première de u par rapport à t.

2.1.2. Ecrire l'équation différentielle (E') obtenue à partir de (E en effectuant le changement de variable défini par :

$$x = \frac{W}{t + 1}$$

où W est une fonction de t.

En déduire l'expression de W'.

Déterminer W puis l'intégrale générale de l'équation (E).

2.1.3. Déterminer l'intégrale particulière f de (E) telle que $f(0) = 0$ et $f'(0) = 1$.

10.13 BUREAU D'ETUDES 78 (durée : 4 heures)

(10 points) corrigé

On considère l'équation différentielle

$$(1) \qquad y'' - y = \frac{1}{ch^3 x}$$

où chx est le cosinus hyperbolique de x

1°) Intégrer l'équation différentielle: (2) $y''-y = 0$

2°) Montrer que les fonctions cosinus hyperbolique et sinus hyper que sont deux solutions particulières de l'équation différent (2)

3°) Soient u et v deux fonctions numériques de la variable réelle u' et v' leurs dérivées premières. Nous nous proposons de dét miner u et v de manière que les deux conditions suivantes soi satisfaites

* $\forall x \in \mathbb{R} \quad u'(x)\, chx + v'(x)\, shx = 0$
* la fonction $x \longmapsto u(x)\, chx + v(x)\, shx$ est solution de (1)

a) Montrer que pour qu'il en soit ainsi u'(x) et v'(x) doivent vérifier le système

$$\begin{cases} u'(x)\, chx + v'(x)\, shx = 0 \\ u'(x)\, shx + v'(x)\, chx = \dfrac{1}{ch^3 x} \end{cases}$$

b) Calculer u'(x) et v'(x) puis u(x) et v(x), en déduire la solut générale de (1).

c) Déterminer la solution particulière de (1) prenant la valeur — pour $x = 0$ et telle que sa dérivée soit nulle pour $x = 0$.

10.14 MICROMECANIQUE 85 (durée : 3 heures)

(3 points)

1.1 Résoudre l'équation différentielle

$$(E) \quad y'' + 4\, y' + 5\, y = 8 \cos 2x + \sin 2x$$

Déterminer l'intégrale particulière f(x) de (E) qui vérifie les conditions initiales $f\,(0) =$!

$f\,(\frac{\pi}{\ }) = 0$

1.2 Etudier la limite, lorsque x tend vers $+\infty$, de

$$f(x) - \sin 2x$$

1.3 On considère la suite (u_k) définie pour $k \in \mathbb{N}$ par

$$u_k = |f(k\pi)|$$

Vérifier que $u_k = 5\, e^{-2k\pi}$

Déterminer k pour que $u_k \leqslant 0{,}0001$

EQUATIONS AVEC COURBES INTEGRALES D'EQUATION DE LA FORME Y= F(X)

10.15 INSTRUMENTS D'OPTIQUE DE PRECISION 85 (durée : 4 heures)

(6 points)

On considère l'équation différentielle (E) : $y'' + 2y' + 4y = 0$ où y désigne une fonction numérique de la variable réelle x deux fois dérivable sur R.

1. Déterminer la solution générale de (E).

2. Soit f la fonction numérique de la variable réelle x, solution de (E) et vérifiant les conditions : $f(0) = 0$ et $f'(0) = 6$.

   Déterminer l'expression de f (x) et construire le courbe (C) représentative de f dans un plan rapporté à un repère orthonormé $(o, \vec{i}, \vec{j})$ (unité 6 cm.), x variant entre 0 et π.

10.16 ADJOINT TECHNIQUE D'ENTREPRISES DU BATIMENT 82 (durée : 3 heures)

(10 points) corrigé

On considère l'équation différentielle (E) : $y'' + 2y' + 2y = 0$ où y désigne une fonction de la variable réelle x, deux fois dérivable sur R.

1 - Déterminer la solution générale de (E).

2 - On appelle f celle des solutions particulières de (E) qui vérifie les conditions $\begin{cases} f(o) = 0 \\ f'(o) = 10 \end{cases}$

2.1 - Donner l'expression de f(x)

2.2 - Construire la courbe (C) d'équation $y = f(x)$ ($0 \leqslant x \leqslant$ π
dans un plan rapporté à un repère orthonormé (unité :

3 - 3.1 - Donner un développement limité à l'ordre 3 de la foncti
au voisinage de 0.

3.2 - En déduire l'équation de la tangente à (C) à l'origine O (c
et la position de (C) par rapport à cette tangente.

4 - Déterminer, à 1 mm^2 près, l'aire du domaine plan délimité par
courbe (C) et l'axe des abscisses.

10.17 SERVICES INFORMATIQUES 85 (durée : 1 h 30)

(9 points)

A) Soit l'équation différentielle $y'' - 2y' + y = 1$

1) Déterminer l'ensemble des solutions

2) Trouver la solution particulière g qui vérifie

$$g(o) = o \quad \text{et} \quad g'(o) = o$$

B) Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie sur l'ensemble des réels $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{e^x - x - 1}{x} & \text{si } x \neq o \\ f(o) = o \end{cases}$$

1) Etudier la continuité de la fonction f sur $\mathbb{R}^*$ puis en o.

2) Etudier la dérivabilité de f sur $\mathbb{R}^*$ puis en o.

3) Soit g la fonction numérique de la variable réelle x définie par

$$g(x) = x\,e^x - e^x + 1$$

Etudier les variations de la fonction g.

En déduire le signe de g.

4) Etudier les variations de la fonction f.

Tracer la courbe représentative C de f dans un repère orthogonal. On donnera une équation d
la tangente à C au point d'abscisse o et l'on tracera cette tangente.

10.18 MAINTENANCE 84 (durée : 3 heures)

(12 points)

1. Intégrer l'équation différentielle : $y'' + 2y' + 2y = 0$.

Trouver la solution particulière dont la courbe représentative passe par les points O (o,o) et B $\left(\frac{\pi}{2}, e^{-\frac{\pi}{2}}\right)$

2. Soit $I = \int_0^{\pi} e^{-x} \cos x \, dx$ et $J = \int_0^{\pi} e^{-x} \sin x \, dx$.

En intégrant I et J par parties on obtient un système linéaire à deux équations et deux inconnues I et J ; en déduire les valeurs de I et J ; calculer $K = \int_0^{\pi} e^{-2x} \cos 2x \, dx$.

3. On considère l'application f de $[0, \pi]$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = e^{-x} \sin x$$

a) Étudier les variations de f et tracer sa courbe représentative C dans un repère orthogonal d'axes x'0x, y'0y ; on prendra comme unités 5 cm sur 0x et 10 cm sur 0y. Montrer que C admet un point d'inflexion A et qu'en ce point A, elle est tangente à la courbe d'équation $y = e^{-x}$.

b) Calculer l'aire du domaine plan D limité par C et l'axe 0x.

c) Calculer le volume du solide de révolution engendré par la rotation de D autour de 0x.

10.19 MICROMECANIQUE 78 (durée : 3 heures)

(10 points)

On considère l'équation différentielle :

$$(E_1) \qquad x^2y'' - 5xy' + 9y = x^4 \quad \text{ou} \quad x^2 \frac{d^2y}{dx^2} - 5x\frac{dy}{dx} + 9y = x^4$$

x étant une variable réelle strictement positive.

1 - 1.1. - Trouver un polynôme du 3e degré solution de l'équation différentiel

$$(E_2) \qquad x^2y'' - 5xy' + 9y = 0$$

1.2. - Montrer que, pour que la fonction qui à x associe $x^3u(x)$ soit solution de (E_1) il faut et il suffit que u soit solution de l'équation différentielle

$$(E_3) \qquad xu'' + u' = 1$$

1.3. - Trouver la solution générale de (E_3) et en déduire la solution
rale de (E_1).

2 - On propose dans cette question une autre méthode pour trouver la solu
générale de (E_1).

2.1. - On effectue le changement de variable $x = e^t$.
Montrer que l'équation différentielle transformée de (E_1) à l'
ce changement de variable est :

$$(E_4) \qquad \frac{d^2y}{dt^2} - 6\,\frac{dy}{dt} + 9\,y = e^{4t}$$

2.2. - Trouver la solution générale de (E_4) et en déduire celle de (E

3 - Soit f la solution particulière de (E_1) telle que $f(1) = 0$ et $f'(1) =$

3.1. - Etudier les variations de f définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par $f(x) = x^3(x -$
Construire la représentation graphique (C) de f dans un repère
normé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ $\quad (\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 5$ cm).
(On ne cherchera pas à déterminer les coordonnées du maximum l
on n'étudiera pas la concavité de (c)).

3.2. - Calculer $I = \int_\alpha^1 f(x)\,dx \qquad \alpha \in]0, 1[$. En déduire l'aire du

plan compris entre l'axe Ox, la courbe (C) et les droites d'éq
$x = 0$ et $x = 1$.

Remarque : les questions 1, 2, 3 sont indépendantes.

10.20 ETUDES DE PRIX DU BATIMENT 80 (durée : 4 heures)

(8 points) corrigé

A) On se propose de résoudre par étapes l'équation différentielle (1)

$$(1) : \quad y'' = 1 - y'^2$$

1) On prend comme nouvelle fonction inconnue $Y = y'$; don
la nouvelle équation différentielle (2) obtenue .

2) Montrer qu'il existe une fonction de la forme $Y = y_o$ so
tion de (2) où y_o est un réel positif.

3) On pose $Y = y_o + Z$; Donner l'équation différentielle (3) vérifiée par Z

4) Soit $u = \frac{1}{Z}$; on obtient alors une équation différentielle d'inconnue u . Résoudre cette dernière équation et trouver successivement les solutions générales de (3), (2), (1).

B) 1) Vérifier que $f(x) = \text{Ln}\,(\text{Ch}x)$ est une solution particulière de (1)

2) Etudier avec soin $f(x) = \text{Ln}(\text{Ch}x)$ et tracer son graphe (on étudiera en particulier les branches infinies).

CHAPITRE XI : COURBES EN PARAMETRIQUES

X ET Y SONT DES FONCTIONS POLYNOMES OU RATIONNELLES DE T

11.1 EXPLOITATION DES VEHICULES A MOTEURS 83 (durée : 2 heures) (9 points)

On considère les fonctions f et g de la variable réelle t telles que :

$$f(t) = \frac{t^3}{t^3 - 1} \qquad g(t) = \frac{t^2}{t^3 - 1}.$$

On désigne par C la courbe d'équations paramétriques

$$\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}$$

dans un plan rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ d'axes Ox et Oy (unité : 3 cm).

1. Étudier les variations des fonctions f et g et rassembler les résultats dans un tableau unique.

2. Déterminer une équation cartésienne de l'asymptote oblique Δ et préciser la position de C par rapport à son asymptote Δ . Calculer les coordonnées du point d'intersection de C et de Δ .

3. Étudier les tangentes à C aux points remarquables révélés par le tableau de variation. Tracer la courbe C.

11.2 EXPLOITATION DES VEHICULES A MOTEURS 82 (10 points)

On considère les fonctions numériques f et g de la variable réelle t telles que :

$$f(t) = \frac{t(t-2)}{t-1} \qquad g(t) = \frac{t^3}{t^2 - 1}$$

On désigne par C la courbe d'équations paramétriques $\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}$ dans un plan rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, (unité : 1 cm).

1 - Etudier les variations des fonctions f et g et rassembler les résultats dans un tableau unique.

2 - Déterminer une équation cartésienne de chacune des asymptotes.

3 - Après avoir précisé les tangentes aux points remarquables, tracer la courbe C.

11.3 INDUSTRIES CERAMIQUES 85 (durée : 3 heures) (10 points)

Soit la courbe (C) définie, dans le repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, d'axes x'Ox et y'Oy par le système paramétrique :

$$\begin{cases} x = \dfrac{t}{1-t^2} \\ y = \dfrac{t^2}{1-t} \end{cases} \qquad \text{lorsque } t \in \mathbb{R} - \{-1\,;1\}$$

1. Etudier conjointement les variations de x et de y en fonction de t.

2. Trouver la limite de $\dfrac{y}{x}$ lorsque t tend vers 1.
   Préciser les branches infinies de (C) en donnant les équations des asymptotes.

3. Déterminer l'ensemble des points doubles de (C) et calculer les coordonnées, ainsi que les c
   ficients directeurs des tangentes en ces points.

4. Utiliser les résultats précédents pour construire (C) avec ses éléments remarquables.

11.4 *INDUSTRIES DU BOIS 85 (durée : 3 heures)*

(8 points)

On considère la courbe C définie par ses équations paramétriques :

$$x = f(t) = \frac{t^2}{t-1} \qquad y = g(t) = \frac{(t-1)^2}{t-2}$$

1. Etudier les fonctions f et g.

2. Démontrer l'existence d'une asymptote oblique dont on déterminera l'équation.

3. Tracer la courbe C.

11.5 *FABRICATIONS TEXTILES 85 (durée : 4 heures)*

(6 points)

Dans le plan, rapporté au repère $(o\,;\vec{i},\vec{j})$, la courbe (C) est l'ensemble des points de coordonnées

$x(t) = t + \dfrac{1}{t}$ et $y(t) = \dfrac{t^2+1}{t^2}$, où t est un paramètre réel non nul.

1. Étudier les variations des fonctions x et y.

2. Étudier les branches infinies de (C).

3. Tracer la courbe (C).

11.6 *BUREAU D'ETUDES 86 (durée : 4 heures)*

(10 points)

On se propose d'étudier et de construire la courbe (C) définie par ses équations paramétriques :

$$\begin{cases} x = f(t) = \dfrac{1}{t^2} - 2t \\ y = g(t) = 2t^2 + 4t \end{cases}$$

dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ dont l'unité de longueur sera le centimètre.

1 — Etudier le sens de variation des fonctions f et g.

2 — Préciser la nature des branches infinies de la courbe (C) en justifiant vos réponses.

3 — Déterminer une équation de la tangente (D) à la courbe (C) au point A de coordonnées (3 ; –2).

Etudier la position de la courbe (C) par rapport à la droite (D) au voisinage du point A.

4 — Montrer que (C) admet un point double B dont on calculera les coordonnées.

5 — Préciser les coordonnées des points d'intersection de la courbe (C) avec les axes du repère.

Tracer la courbe (C).

11.7 MICROMECANIQUE 85 (durée : 3 heures)
(7 points)

On appelle (C) la courbe définie, dans le plan rapporté à un repère orthonormé, par le système d'équations paramétriques

$$\begin{cases} x = \dfrac{3}{t^2 - 2t} \\ y = t - \dfrac{3}{t} \end{cases} \qquad t \in R,\ t \neq 0,\ t \neq 2$$

1. Construire la courbe (C) en précisant les branches infinies.

2. Déterminer les coordonnées du point double de (C).

11.8 INDUSTRIES DU BOIS 79 (durée : 3 heures)

(6 points)

Étudier et représenter graphiquement la courbe définie par les équations paramètriques suivantes :

$$x = f(t) = \frac{(t+1)^2}{t+2} \qquad\qquad y = g(t) = \frac{(t-1)^2}{t-2}$$

Montrer que la courbe admet un point double que l'on déterminera.

---

11. 9 *CONSTRUCTION NAVALE 85 (durée : 2 heures)*

(8 points)

Dans un plan muni d'un repère orthonomé $(0, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, on considère la courbe (C) définie paramétriquement par :

$$\begin{cases} x = f(t) = 4\,(t^2 - t^4) \\ y = g(t) = \dfrac{3\sqrt{3}}{2}(t^3 - t) \end{cases} \qquad (t \in \mathbb{R})$$

1) Démontrer que la courbe (C) possède un axe de symétrie.

2) Etudier les variations des fonctions f et g, les branches infinies de (C). Préciser les tangentes au point 0 à la courbe (C).

3) Tracer la courbe (C).

11.10 *MICROMECANIQUE 76 (durée : 3 heures)*

(7 points)

Le plan affine est rapporté au repère orthonormé d'axes x' y'Oy (unité de longueur : 1 cm).

1° - Tracer la courbe (Γ) définie par la représentation paramétrique

$$\begin{cases} x = \dfrac{3}{2}t^4 + 2t^3 - 3t^2 - 6t \\ y = 4t^3 + 6t^2 \end{cases}$$

On placera avec précision sur le dessin, les points A, B, C, co respondant respectivement aux valeurs 1, - 1 et - 2 du paramètr Déterminer les coefficients angulaires des tangentes à la courb aux points A, B et C.

Quelle est la nature du point B ?

2° - Calculer la longueur de l'arc AC de la courbe (Γ).

3° - Calculer l'aire de la surface plane limitée par le segment AB e l'arc AB de la courbe (Γ).

4° - Exprimer en fonction de t une mesure de l'angle de l'axe Ox ave tangente à (Γ) en un point M quelconque.

11.11 MICROMECANIQUE 78 (10 points)

Le plan affine est rapporté à un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, (Γ) est la cour[be] définie par la représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = \dfrac{t^2 - t + 1}{t - 1} = f(t) \\ y = \dfrac{t^3}{1 - t} = g(t) \end{cases}$$

1 - Déterminer le sens de variation de f et g en fonction de t.
Préciser les tangentes aux points de paramètres $t = 0 \quad t = \frac{3}{2} \quad t = 2$
Quelle est la nature du point de paramètre $t = 0$?

2 - Etudier les branches infinies de (Γ). Préciser la position de (Γ) par rap[port] à l'asymptote oblique et les coordonnées du point d'intersection de (Γ) a[vec] l'asymptote.

3 - Montrer que (Γ) admet un point d'inflexion dont on calculera les coordon[nées] et le coefficient directeur de la tangente en ce point.
Etudier la concavité de (Γ).

4 - Construire (Γ) dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$. (On prendra $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1$ cm).

5 - Calculer la longueur du rayon de courbure de (Γ) au point de paramètre t
et les coordonnées du centre de courbure en ce point.

11.12 ADJOINT TECHNIQUE L 'ENTREPRISES DU BATIMENT 77 (durée : 3 h) (12 points)

Le plan est rapporté à un repère orthonormé d'axes x'Ox, y'Oy (unité de longueur 1,5 cm).

1 - Tracer la courbe (C) dont les équations paramétriques sont :

$$x = t^2 - 2t$$
$$y = \frac{1}{t + 1}$$

2 - Déterminer une équation cartésienne de (C) dans ce repère.

3 - Déterminer une équation de la tangente à (C) au point A de paramètre $t = \frac{1}{3}$

4 - Préciser au voisinage de A, la position de (C) par rapport à la tan

5 - On donne la fonction numérique f définie par :

$$f(x) = \frac{3x^2 - 4x + 1}{x^2}$$

5-1- Etudier les variations de f.

5-2- Tracer la courbe (Γ), représentation graphique de f.

5-3- En supposant (C) et (Γ) tracées dans un même repère, par quell transformation géométrique passe-t-on de l'une à l'autre ? Justifier.

11.13 CONSTRUCTIONS METALLIQUES 76 (durée : 1 h 30)
(14 points)

On considère les fonctions numériques f et g de la variab réelle t, telles que :

$$f(t) = 1 + t^2$$
$$g(t) = \frac{t - 1}{t + 1}$$

1° - Etudier et tracer dans le plan muni d'un repère orthonormé d'a x'Ox, y'Oy, la courbe représentée par les équations paramétriq

$$\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}$$

2° - Calculer l'intégrale définie :

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(t)\, g'(t)\, dt$$

où g' représente la dérivée de la fonction g.
En déduire l'aire du domaine plan fini limité par la courbe et droite d'équation $x = \frac{5}{4}$

3° - Donner un développement limité à l'ordre 5, au voisinage de 0 de la fonction h définie par :

$$h(t) = g(t).\mathrm{Log}(1 + t)$$

On considère les fonctions numériques f et g de la variable réelle éfinies par :

$$f(t) = \frac{2(t - 1)}{t + 1} \quad ; \quad g(t) = \frac{2t(t - 1)}{t + 1}$$

On désigne par C la courbe définie paramétriquement, dans le plan apporté au repère orthonormé d'axes x'Ox et y'Oy (unité de longueur cm), par :

$$\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}$$

- Etudier les variations des fonctions f et g ; rassembler les résultats dans un tableau unique.
- Calculer les coordonnées des points d'intersection de C et de l'axe des abscisses.
- Déterminer les équations des asymptotes à la courbe C.
- Tracer la courbe C.
- On considère la fonction rationnelle h de la variable réelle t définie par :

  $$h(t) = \frac{8t(t - 1)}{(t + 1)^3}$$

  Déterminer les constantes réelles A, B, C telles que pour tout t différent de -1 on ait :

  $$h(t) = \frac{A}{t + 1} + \frac{B}{(t + 1)^2} + \frac{C}{(t + 1)^3}$$

- Calculer l'intégrale :

  $$\int_0^1 g(t)\, f'(t)\,dt$$

  En déduire l'aire de la portion finie de plan limitée par la courbe C et l'axe x'Ox.

11.15 MICROMECANIQUE 79 (drée : 3 heures)

(15 points)

Le plan affine étant rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unité 1 cm et t étant un paramètre réel quelconque, on se propose d'étudier la courbe C, ensemble des points M_t du plan dont les coordonnées dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ sont définies par :

$$x = \frac{1}{t^2} + t^2 - 2$$

$$y = \frac{1}{t^2} + 2t - 2$$

a) Etudier les fonctions numériques $(t \mapsto x)$ et $(t \mapsto y)$.
Préciser la nature des branches infinies et déterminer une équation de la tangente au point A de la courbe correspondant au paramètre $t = 1$.
Montrer qu'il existe un point double B dont on calculera les coordonnées.
Tracer la courbe C.

b) Déterminer graphiquement le nombre de points d'intersection de la courbe C avec la droite D d'équation : $x = m$; m étant un réel quelconque.

c) Montrer que si t_0 est un réel non nul, les points M_{t_0} , M_{-t_0} , $M_{\frac{1}{t_0}}$ et $M_{-\frac{1}{t_0}}$ appartiennent à une même droite d'équation : $x = m$. (On exprimera m en fonction de t_0).

d) Montrer que la droite Δ d'équation $x = 4$ contient le point B.
Soit E et F les deux autres points d'intersection de Δ avec C.
Déterminer les valeurs de t pour lesquelles M_t est en E et en F.
Calculer en cm^2 l'aire de la partie du plan limitée par le segment [BE] et l'arc $\widehat{BE}$ de la courbe C.
Calculer en cm^2 l'aire de la partie du plan limitée par le segment [BF] et les arcs $\widehat{BA}$ et $\widehat{AF}$ de la courbe C.
(Le point E a une ordonnée négative et F une ordonnée positive).

11.16 EQUIPEMENTS TECHNIQUES DU BATIMENT 84 (durée : 4 heures)

(13 points)

Le plan P est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$ d'axes Ox et Oy (unité : 2 cm). On appelle (C) le cercle passant par O et ayant pour centre le point I (1, 0).

Un point variable M de (C) est défini par : mesure de l'angle $(\vec{OI}, \vec{IM}) = \theta + 2k\Pi$ $(k \in \mathbb{Z})$. Lorsque la tangente en M à (C) coupe les axes, on désigne par P son point d'intersection avec l'axe des abscisses et par Q son point d'intersection avec l'axe des ordonnées.

1. - 1.1 Donner une équation du cercle (C).

 1.2 Déterminer une équation de la tangente en M à (C).

 1.3 Lorsque θ est différent de $k\dfrac{\Pi}{2}$ $(k \in \mathbb{Z})$ calculer les coordonnées des points P et Q.

 1.4 Soit K le quatrième sommet du rectangle O P K Q.

 Exprimer en fonction de $t = \operatorname{tg}\dfrac{\theta}{2}$ les coordonnées de K.

2. On considère les fonctions numériques u et v de la variable réelle t telles que :

$$u(t) = \frac{2}{1 - t^2} \qquad \text{et} \qquad v(t) = \frac{1}{t}$$

On désigne par (Γ) la courbe d'équations paramétriques $\begin{cases} x = u(t) \\ y = v(t) \end{cases}$ dans le plan P rapporté au repère initial.

 2.1 Démontrer que la courbe (Γ) admet un axe de symétrie que l'on précisera. En déduire une réduction de l'intervalle d'étude.

 Étudier les variations des fonctions u et v correspondantes et rassembler les résultats dans un tableau unique. Tracer la courbe (Γ).

 2.2 Soient K_1 et K_2 les points de (Γ) d'abscisse (-1). A quelles valeurs du paramètre t correspondent-ils ?

 Calculer, en cm^2, la mesure de l'aire de la portion de plan limitée par (Γ), la droite d'équation $x = -1$ et la parallèle à l'axe des ordonnées menée par le point K de (Γ) de paramètre t_0, tel que $t_0 > \sqrt{3}$. Ce nombre a-t-il une limite lorsque t_0 tend vers $+\infty$? Interprétation géométrique.

11.18 ELECTROTECHNIQUE 82 (durée : 3 heures)

(10 points)

1/ Construire, dans le plan rapporté au repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$, unité : 1 cm, la courbe C définir paramétriquement par :

$$\begin{cases} x = 2t - \dfrac{1}{t^2} \\ y = 2t + t^2 \end{cases}$$

Démontrer que C présente un point de rebroussement.
Déterminer une équation de la tangente à C en ce point.
Démontrer que C admet aussi un point double dont on déterminera les coordonnées.

2/ Soit M_1 le point de C correspondant à la valeur 1 du paramètre t
Déterminer le rayon de courbure R et les coordonnées du centre de courbure Ω au point M_1.

11.19 BLANCHIMENT 85 (durée : 2 heures)

(12 points)

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $-8\,t^4 + 12\,t^2 - 3 = 0$.
En déduire le signe de : $-8\,t^4 + 12\,t^2 - 3$ selon les valeurs de la variable réelle t.

2. On considère les fonctions f et g de la variable réelle t, élément de l'intervalle $]-1, 1[$, définies par $f(t) = \dfrac{4\,t^3 - 3\,t}{\sqrt{1-t^2}}$, $g(t) = 4\,t^2 - 1$.

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}\ \vec{j})$, on désigne par (C) la courbe, ensemble des points de coordonnées $\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}$

2.1 Montrer que la courbe (C) est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

2.2 Etudier les variations des fonctions f et g.

2.3 Tracer soigneusement la courbe (C). On fera en particulier une étude des branches infinies et on donnera les coordonnées de son point double et des points d'intersection avec les axes de coordonnées.

11.20 FABRICATION MECANIQUE 78 (durée : 3 heures)

(12 points)

1°) Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ on considère la courbe (C) d'équations paramétriques :

$$\begin{cases} x = \dfrac{t^2}{1 + t^2} \\ y = \dfrac{t^3}{1 + t^2} \end{cases}$$ t étant le paramètre réel

Montrer que la courbe (C) admet un axe de symétrie.

Construire la courbe, en précisant la nature du point O.

2°) a - Développer le produit $(t^2 + 1)^2(t^2 + 4)$

b - Trouver des constantes réelles a, b, c telles que,

pour $u \in \mathbb{R} - \{-\sqrt{3}, \sqrt{3}\}$:

$$\frac{u^2}{u^2 - 3} = a + \frac{b}{u - \sqrt{3}} + \frac{c}{u + \sqrt{3}}$$

c - Application : Calculer la longueur l de l'arc de la courbe (C) orien dans le sens des t croissants, limité par le point O et le point $A\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$. On effectuera le changement de variable $u = \sqrt{t^2 + 4}$.

3°) a - On considère les intégrales de la forme :

$$I_n = \int_0^1 \frac{dt}{(1 + t^2)^n}$$ n entier supérieur ou égal à 1.

En intégrant I_n par parties montrer que :

$$2n \cdot I_{n+1} = (2n - 1)I_n + \frac{1}{2^n}$$

On démontre et on admettra que $I_1 = \frac{\pi}{4}$.

Calculer I_2 et I_3.

b - Trouver des constantes réelles A, B, C telles que :

$$\frac{2t^4}{(1 + t^2)^3} = \frac{A}{1 + t^2} + \frac{B}{(1 + t^2)^2} + \frac{C}{(1 + t^2)^3}$$

c - Application : Calculer l'aire S du domaine plan limité par la courb la droite d'équation $x = \frac{1}{2}$.

X OU Y CONTIENNENT LN

11.21 FROID ET CLIMATISATION 83 (durée : 1 h 15)
(12 points)

On considère les fonctions numériques f et g de la variable t telles que $f(t) = \frac{t^2}{t+1}$ et $g(t) = \ln \frac{1+t}{1-t}$ (le symbole ln désigne la fonction logarithme népérien). On désigne par $\mathcal{C}$ la courbe d'équations paramétriques $\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}$ dans un plan rapporté à un repère orthonormé d'axes Ox et Oy (unité : 2 cm).

1. Pour quelles valeurs de t les fonctions f et g sont-elles définies ?
2. Etudier les variations des fonctions f et g et rassembler les résult dans un tableau unique.
3. Préciser les branches infinies et tracer la courbe $\mathcal{C}$. Donner une éq tion de la tangente à $\mathcal{C}$ au point O, origine du repère.

11.22 ADJOINT TECHNIQUE D'ENTREPRISES DU BATIMENT 81
(10 points) corrigé

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé d'axes x'Ox, y'Oy, or considère la courbe C de représentation paramétrique :

$$x = \frac{t^2}{t-1} \qquad y = \operatorname{Log} \frac{t-1}{t}$$

1 - Etudier les variations des fonctions : $t \longmapsto \frac{t^2}{t-1}$; $t \longmapsto \operatorname{Log} \frac{t-1}{t}$

2 - Etudier les branches infinies de C.

2-1 - Préciser la position de C par rapport aux asymptotes parall aux axes.

2-2 - Pour l'étude de la branche infinie correspondant à t = 1, o pourra utiliser l'un des changements de variable défini pa $\frac{t-1}{t} = \frac{1}{\theta}$ où $t = 1 + h$.

3 - Tracer la courbe C.
Préciser en particulier les tangentes aux points de C correspondа à $t = -1$, $t = \frac{3}{2}$, $t = 2$, $t = 3$.

11.23 FABRICATION MECANIQUE 84 (durée : 4 heures)
(9 points)

Soit (C) la courbe définie par ses équations paramétriques

$$\begin{cases} x = f(t) = \ln |t^2 - 1| \\ y = g(t) = t(t^2 - 1) \end{cases}$$

dans le repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On prendra 2 cm pour unité de longueur. La notation ln re
sente le logarithme népérien.

1. Montrer que la courbe possède un axe de symétrie.

2. Étudier les fonctions f et g. Tracer la courbe (C).

3. Il existe deux points de (C) d'abscisse nulle en dehors de l'origine du repère. Calculer les ordon
de ces points ; soit A celui d'ordonnée positive.

   Il existe deux points de (C) d'abscisse ln3. Calculer l'ordonnée de ces points ; soit B celui d'or
née positive.

4. Soit (P) la surface plane limitée par l'axe $(O, \vec{i})$, les droites d'équations $x = 0$ et $x = \ln 3$, et
(AB) de (C). Calculer en cm^3 la mesure du volume engendré par la rotation de (P) autour de l
des abscisses.

11.24 CHAUDRONNERIE ET TUYAUTERIE INDUSTRIELLE 85 (durée: 4 heures)
(13 points)

Dans un plan affine euclidien P muni d'un repère orthonormé $(0, \vec{i}, \vec{j})$ d'axes Ox et Oy (unité : 1 cm
on définit la courbe (C) par les équations suivantes :

$$\begin{cases} x = f(t) = t^2 \\ y = g(t) = \dfrac{t^4}{4} - \ln t \end{cases}$$

(le symbole $\ln$ désigne la fonction logarithme népérien).

1) Etudier les variations des fonctions f et g et rassembler les résultats dans un tableau.

2) Etudier les branches infinies de (C) et construire (C) dans le plan P.

3) Déterminer une équation cartésienne de (C).

4) On désigne par A et B les points de (C) correspondant respectivement à $t = 1$ et $t = 2$.

   a) Calculer en cm la mesure de la longueur de l'arc (AB) de (C) ; on en donnera la valeur décimale
   approchée à 10^{-2} près par défaut.

b) Calculer en cm^2 la mesure de l'aire du domaine plan limité par l'arc (AB) de (C), l'axe Ox et les droites d'équation $x = 1$ et $x = 4$.

Donner la valeur décimale approchée à 10^{-2} près par excès du résultat.

5) a) Déterminer le rayon de courbure ainsi que les coordonnées du centre de courbure ω en A à la courbe (C).

b) Calculer la mesure (en radians) α de l'angle saillant des vecteurs $\overrightarrow{\omega A}$ et $\overrightarrow{\omega B}$ (on pourra faire appel au produit scalaire des vecteurs $\overrightarrow{\omega A}$ et $\overrightarrow{\omega B}$). Donner la valeur décimale approchée à 10^{-3} près par excès du résultat.

11.25 EQUIPEMENTS TECHNIQUES DU BATIMENT 86 (4 heures)

(7 points)

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ dont l'unité de longueur est 2 cm.

1 - Soit la courbe (Γ) d'équation :

$$y^3 - 6y^2 + 9y - x^2 = 0.$$

Déterminer l'intersection de (Γ) et de l'axe de repère $(O, \vec{i})$.

Ecrire une équation de la tangente à (Γ) en ce point.

2 - Soit (G) la courbe d'équations paramétriques :

$$\begin{cases} x = \ln^3 t - 3\ln t = f(t) \\ y = \ln^2 t \qquad\qquad = g(t) \end{cases}$$

(ln désigne la fonction logarithme népérien).

2-1 - Montrer que (G) est une partie de (Γ).

2-2 - Etudier les fonctions f et g et rassembler les résultats dans un tableau de variations.

Etudier les branches infinies de (G).

Déterminer l'intersection de (G) et de l'axe de repère $(O, \vec{j})$ et la tangente à (G) en chacun des points trouvés.

2-3 - Construire (G), ses tangentes parallèles aux axes de coordonnées et les tangentes aux points d'intersection précédemment trouvés.

2-4 - Calculer en cm^2 la mesure de l'aire du domaine plan limité par la boucle de la courbe (G).

11.26 CONSTRUCTIONS METALLIQUES 85 (1 h 30)

(10 points)

Le plan étant muni du repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ d'axes Ox et Oy, (unité 4 cm), on définit la courbe (C) par les équations suivantes :

$$\begin{cases} x = f(t) = 1 - e^t (t + 1) \\ y = g(t) = e^t - (t + 1) \end{cases}$$

1° - Etudier les variations des fonctions f et g. Rassembler dans un tableau unique l'étude des variations de f et g.

2° - Etudier les branches infinies de la courbe (C).
Construire soigneusement la courbe (C).

3° - a) Calculer, en utilisant par exemple la méthode d'intégration par parties, les intégrales définies :

$$I = \int_{-1}^{0} e^{2t} (t + 2)\, dt \quad \text{et} \quad J = \int_{-1}^{0} e^t (t^2 + 3t + 2)\, dt$$

11.27 ELECTRONIQUE 84 (durée : 2 heures)

(6 points)

Étudier la courbe définie par ses équations paramétriques.

$$(1) \qquad \begin{cases} x(t) = (t + 2)\, e^{1/t} \\ y(t) = t\, e^{1/t} \end{cases}$$

Préciser les variations des fonctions x et y de la variable réelle t ;
la nature des branches définies ;
les points où les tangentes sont parallèles aux axes du repère.

[On admettra que la courbe admet un point d'inflexion pour la valeur $t = \frac{1}{2}$ du paramètre].

Construire la courbe représentative de (1). (unité 1/2 cm sur les 2 axes).

11.28 ELECTROTECHNIQUE 77 (durée : 3 heures)

(6 points)

2.3. - Dans un plan rapporté à un repère orthonormé, construire la courbe (C) d'équations paramétriques :

$$x = \frac{te^t}{t+1}$$

$$y = \frac{e^t}{t+1}$$

On étudiera avec soin les branches infinies et on calculera les coordonnées du point d'inflexion.

11.29 ELECTROTECHNIQUE 84 durée : 3 heures)

(10 points) *corrigé*

---

1) Construire dans le plan rapporté au repère orthonormé $(o, \vec{i}, \vec{j})$, unité 5 cm, la courbe (c) définie par les équations paramétriques :

$$x = f(t) = 1 - (t+1)\,e^t$$

$$y = g(t) = e^t - (t+1)$$

t étant une variable réelle.

On précisera :

a) les branches infinies

b) le point d'intersection de (c) avec l'asymptote

c) l'équation de la tangente à (c) en $A\left(1, \frac{1}{e}\right)$.

2) Déterminer :

a) l'aire du domaine plan compris entre la courbe (c), l'axe des abscisses et la droite d'équation $x = 1$

b) l'aire $S(\alpha)$ du domaine plan limité par :

- la courbe (c)
- la droite d'équation $x = 1$
- la droite d'équation $y = g(\alpha)$, avec $\alpha < -2$. L'aire $S(\alpha)$ a-t-elle une limite quand $\alpha \to -\infty$?

11.30 FABRICATIONS MECANIQUES 76 (durée : 3 heures)

(7 points)

- Dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ d'axes Ox, Oy (unité 2 cm) on considère la courbe C définie paramétriquement par :

$$\begin{cases} x = e^t \\ y = te^t \end{cases}$$

1) L'étudier et la représenter graphiquement. Préciser les tangentes à C aux points O et A d'ordonnée nulle et la branche infinie

2) Soit M le point de la courbe (C) correspondant à une valeur θ, inférieure à -1, du paramètre t.
Calculer en centimètres carrés, l'aire S (θ) de la surface limitée par x'Ox, l'arc MA de la courbe (C), et la droite parallèle à y'Oy passant par M, et la mesure en centimètres cubes V (θ) du volume engendré par la révolution de cette surface autour de x'Ox.
Montrer que S (θ) et V (θ) admettent des limites respectives S et V quand θ tend vers $-\infty$.

11.31 FROID ET CLIMATISATION 81 (durée : 1 H 15)

---

1 - Dans le plan rapporté à un repère orthonormé d'axes x'Ox, y'Oy, on considère la courbe C d'équations paramétriques :

$$\begin{cases} x = f(t) = \frac{1}{2}(e^t - e^{-t}) \\ y = g(t) = e^t \end{cases}$$

Déterminer une équation cartésienne de C.

2 - On pose $h(x) = x + \sqrt{x^2 + 1}$

Montrer que h(x) peut s'écrire sous la forme :

$$h(x) = 2x + \varphi(x) \quad \text{avec} \quad \lim_{+\infty} \varphi_{(x)} = 0$$

Que peut-on en déduire pour la courbe d'équation $y = h(x)$?

3 - Etudier les variations de la fonction h.

4 - Tracer la courbe C dans un repère cartésien orthonormé.

5 - Déterminer une équation différentielle du premier ordre que vé[rifie] la fonction h.

X OU Y SONT DES FONCTIONS TRIGONOMETRIQUES

11.32 MAINTENANCE 85 (durée : 3 heures) *corrigé*

(6 points)

Relativement à un repère orthonormé $(o, \vec{i}, \vec{j})$ (on prendra 4 cm comme unité de longueur), on donne la courbe C d'équations paramétriques :

$x = 3\cos t - \cos 3t$

$y = 3\sin t - \sin 3t$

1. Etudier les variations des fonction $t \mapsto x$, et $t \mapsto y$
   Représenter C avec soin, en précisant les tangentes aux points remarquables.

2. Calculer en cm la longueur totale de la courbe C.

   N.B. : On rappelle les formules

$$\begin{cases} \sin p - \sin q = 2\sin\dfrac{p-q}{2}\cos\dfrac{p+q}{2} \\ \cos p - \cos q = -2\sin\dfrac{p+q}{2}\sin\dfrac{p-q}{2} \end{cases}$$

11.33 FABRICATIONS MECANIQUES 85 (durée : 3 heures)

(6 points)

On considère dans un plan rapporté à un repère orthonormé $(o, \vec{i}, \vec{j})$ la courbe (C) d'équations paramétriques :

$$\begin{cases} x = f(t) = 2\sin t - \sin 2t & t \in \mathbb{R} \\ y = g(t) = 2\cos t - \cos 2t \end{cases}$$

1. Démontrer que l'on peut réduire l'intervalle d'étude des fonctions f et g à $[o ; \pi]$.

2. Étudier les variations des fonctions f et g.

3. Préciser les tangentes aux points de paramètres : $o, \frac{\pi}{3} ; \frac{2\pi}{3} ; \pi$.
   Construire (C) (unité : 2 centimètres).

4. Calculer en cm la mesure de la longueur L de la courbe (C).

   On rappelle que : $\cos p - \cos q = -2\sin\dfrac{p+q}{2}\sin\dfrac{p-q}{2}$

   $\sin p - \sin q = 2\cos\dfrac{p+q}{2}\sin\dfrac{p-q}{2}$

11.34 BUREAU D'ETUDES 84 (durée : 4 heures) *corrigé*

(11 points)

Soit la courbe (C) définie en coordonnées paramétriques par :

$$\begin{cases} x(t) = 4\sin t - \sin 4t \\ y(t) = 4\cos t - \cos 4t \end{cases}$$

dans un repère orthonormé (O, i, j) du plan (unité 1 cm sur chaque axe) ; t est une variable réelle

1. Après avoir étudié la période et la parité de chacune des fonctions x et y, montrer que l'intervall d'étude se réduit à l'intervalle $[0, \pi]$. On précisera comment on obtient toute la courbe.

2. Calculer les dérivées x' et y' et les mettre sous forme de produit de facteurs, en utilisant les formules :

$$\cos p - \cos q = -2 \sin \frac{p+q}{2} \sin \frac{p-q}{2}$$

$$\sin p - \sin q = 2 \sin \frac{p-q}{2} \cos \frac{p+q}{2}$$

3. En déduire le tableau des variations pour t appartenant à $[0, \pi]$

– préciser au dixième près les coordonnées des points de (C) pour les valeurs suivantes du paramètre t :

$$0, \frac{\pi}{5}, \frac{2\pi}{5}, \frac{3\pi}{5}, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{5}, \pi$$

– on déterminera le coefficient directeur des tangentes à (C) aux points correspondant aux valeur $0, 2\pi/3, \pi$, du paramètre t.

4. Tracer la courbe (C) et les tangentes citées à la question précédente.

5. Calculer en centimètres la longueur de l'arc de courbe correspondant à t variant de 0 à $\frac{2\pi}{3}$

11.35 MAINTENANCE 83 (durée : 3 heures) corrigé

(5 points)

Dans le plan rapporté au repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ d'axes Ox et (unité : 1 cm), on considère la courbe (γ) d'équations paramétriqu

$$x = f(t) = 2(3 \sin t - \sin 3t)$$
$$y = g(t) = 2(3 \cos t - \cos 3t)$$

1 - 1.1 - Déterminer la période des fonctions f et g. Montrer que l'étude peut se réduire à $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$; on note (γ_1) l'ar courbe correspondant.

1.2 - Etudier les variations des fonctions f et g et rassembl résultats dans un tableau unique. Construire l'arc de courbe (γ_1). En déduire (γ).

2 - Calculer, en centimètres, la mesure de la longueur de la courbe (γ

11.36 MAINTENANCE 82 (durée : 3 heures) corrigé

(8 points)

Dans un plan muni d'un repère orthonormé (unité : 3 cm), d'axes Ox et Oy, on considère la courbe (C) définie par les équations paramétriques :

$$\begin{cases} x = 2\cos t \\ y = \sin 2t \end{cases}$$

1 - Montrer que l'on peut réduire l'intervalle d'étude à $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ étudier les variations des fonctions : $t \longmapsto x$ et $t \longmapsto y$ dans cet intervalle. Tracer la courbe (C). On précisera les tangentes à (C) aux points de paramètres $t = 0$ et $t = \frac{\pi}{2}$.

2 - Calculer, en cm^2, la mesure de l'aire du domaine fermé limité par la courbe (C).

11.37 FABRICATIONS MECANIQUES 82 (durée : 3 heures)

(7 points)

On veut construire dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ d'axes Ox et Oy, unité 10 cm, la courbe Γ d'équations paramétriques :

$$\begin{cases} x = f(t) = \sin 3t.\cos t = \frac{1}{2}\,[\sin 4t + \sin 2t] \\ y = g(t) = \cos 3t.\cos t = \frac{1}{2}\,[\cos 4t + \cos 2t] \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}$$

2.1 - Déterminer la période des fonctions f et g. Démontrer que l'étude des fonctions f et g peut être réduite à l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Soit Γ_1 l'arc de la courbe Γ correspondant à l'intervalle précédent.

. Indiquer la transformation géométrique permettant de construire Γ à partir de Γ_1.

2.2 - Etudier les variations de f et g. Construire Γ_1 puis Γ.

11.38 MAINTENANCE D'EXPLOITATION DES MATERIELS AERONAUTIQUES 85 (durée : 3 H

(5 points)

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé, d'axes x'Ox et y'Oy, on considère la courbe (H) de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = 2\,(2\cos t + \cos 2t) \\ y = 2\,(2\sin t - \sin 2t) \end{cases} \qquad (t \in \mathbb{R})$$

1) Tracer (H) après avoir construit les points et tangentes remarquables.

2) Calculer la longueur de la courbe obtenue (soit : la longueur de la courbe fermée).

11.39 INDUSTRIES DU BOIS 82 (durée : 3 heures)

(8 points)

---

2 - On considère les fonctions numériques f et g de la variable réelle t définies par

$f(t) = 2\cos t + \cos 2t \quad , \quad g(t) = \sin 2t.$

On désigne par C la courbe d'équations paramétriques $\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}$ dans un plan rappc

repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, d'axes Ox et Oy (unité : 5 cm).

2.1 - Après avoir démontré que l'intervalle d'étude peut être réduit à $[0, \pi]$, étudier les varia fonctions f et g et rassembler les résultats dans un tableau.

2.2 - Préciser les points de C où la tangente à C est parallèle à Ox ou Oy. Déterminer les é des tangentes à C au point d'abscisse $x = -1$.

2.3 - Construire l'arc C_1 de C correspondant à l'intervalle d'étude. Indiquer comment on peut o à partir de C_1 et construire C.

11.40 ETUDES DEPRIX DU BATIMENT 79 (durée : 4 heures)

(6 points)

L'extrémité d'une aiguille à vibrer le béton a pour trajectoire la définie par les équations suivantes :

$$\begin{cases} x = \cos t + \sin t \\ y = \cos 3t \end{cases}$$

Tracer la courbe ainsi définie et déterminer ses points doubles dan muni d'un repère orthonormé d'axes x'Ox, y'Oy (unité : 5 cm).

---

11. 41 ADJOINT TECHNIQUE D'ENTREPRISES DU BATIMENT 78 (durée : 3 heures

(10 points)

Soit la courbe (C) donnée par la représentation paramétriq

$$\begin{cases} x = \cos t \\ y = 4\left(\cos \frac{t}{2} + \sin \frac{t}{2}\right) \end{cases}$$

1 - Tracer l'arc (Γ) de (C) obtenu en faisant varier le réel t dans l'i
tervalle $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, dans le plan muni d'un repère d'axes x'Ox, y

2 - Montrer que l'on peut déduire (C) de (Γ).
Tracer (C).

3 - Calculer la longueur de l'arc Γ .

4 - Montrer que le point O est un point d'inflexion de (C). La courbe (
admet-elle d'autres points d'inflexions ?

11.42 ADJOINT TECHNIQUE D'ENTREPRISES DES TP 80 (durée : 3 heures)
(8 points)

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé d'axes x'Ox, y'Oy on considère la courbe Γ, définie paramétriquement par :

$$x = \sin t \qquad ; \qquad y = \cos \frac{t}{4}$$

1 - Soit C la partie de Γ correspondant à $t \in [0\ 2\pi]$. Représenter C ; préciser les points d'intersection de C avec les axes de coordonnées ainsi que les tangentes en ces points.

2 - Déterminer les symétries qui permettent d'obtenir la courbe Γ à partir de la courbe C. Tracer Γ.

11.43 ADJOINT TECHNIQUE D'ENTREPRISES DU BATIMENT 79 (durée : 3 heures)
(10 points)

On considère, dans le plan rapporté à un repère orthonormé d'axes x'Ox, y'Oy, la courbe C d'équations paramétriques :

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$$

a est un réel positif ; t appartient à l'intervalle $[0, 2\pi]$.

1 - Construire la courbe C.

2 - Calculer la longueur de C.

3 - Calculer l'aire du domaine limité par la droite Ox et la courbe C.

4 - Calculer le rayon de courbure en chaque point de la courbe C.

11. 44 FABRICATIONS MECANIQUES 80 (durée : 3 heures) corrigé

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé d'axes x'Ox, y'Oy or considère la courbe définie paramétriquement par :

$$\begin{cases} x = \cos^2 t \\ y = \frac{2\sqrt{3}}{3} \cos^3 t \sin t \end{cases}$$

1. Montrer qu'on peut réduire l'intervalle d'étude à $[0, \frac{\pi}{2}]$; étud les variations des fonctions $t \mapsto x$ et $t \mapsto y$ dans cet intervall
2. Déterminer le point de Γ correspondant à $t = \frac{\pi}{3}$. Tracer Γ (unité longueur des axes : 10 cm).
3. Calculer le volume engendré par la courbe Γ tournant autour de l'axe x'Ox.
   (Pour calculer l'intégrale, on pourra poser $u = \cos t$.)

11.45 ETUDES DEPRIX DU BATIMENT 76 (durée 4 heures)

(8 points)

Sous l'action d'un vent violent une benne pendue à un treui se déplace suivant une courbe (C) que l'on considère comme plane, déf nie par les équations paramétriques suivantes :

$$x = 2 \sin t - \sin^3 t$$

$$y = \cos t - \cos^3 t$$

1° - Construire la courbe (C) en repère orthonormé (unité 10 cm).

2° - Calculer en centimètres la longueur de la courbe (C).
On demande une représentation graphique soignée.
On prendra : Arc sin $\sqrt{\frac{2}{3}} = 55°$

11.46 ASSISTANT(E) D'INGENIEUR 84 (durée : 3 heures) corrigé

(10 points)

B — On désigne par (Γ) la courbe du plan P d'équations paramétriques :

$$\begin{cases} x(t) = 2 \sin t + \sin 2t \\ y(t) = 2 \cos t - \cos 2t \end{cases}$$

et par M(t) le point de coordonnées $\big(x(t), y(t)\big)$

1. Montrer que la courbe (Γ) admet un axe de symétrie.
   Étudier les variations des fonctions $t \longmapsto x(t)$ et $t \longmapsto y(t)$ pour t appartenant à l'inter

[0, π]

2. a) Montrer que les points $S = M(\frac{\pi}{3})$, $T = M(\pi)$ et $U = M(-\frac{\pi}{3})$ sont des points stationnaires (ou singuliers). Former des équations des tangentes à (Γ) en ces points et tracer ces tangentes. Préciser la nature de ces points stationnaires S, T et U.

b) Vérifier que les courbes (Γ) et (γ) sont tangentes en $M(o)$, $M(\frac{2\pi}{3})$ et $M(-\frac{2\pi}{3})$.

3. Tracer avec soin la courbe (Γ).

4. a) Calculer le rayon de courbure de (Γ) au point $B = M(O)$, et les coordonnées du centre I du cercle de courbure (C) au point B.

b) Calculer en fonction de t la distance d(t) du point I au point M(t) $(M(t) \in (\Gamma))$.

Donner le développement limité de $d^2(t)$ à l'ordre 4 au voisinage de $t = 0$. En déduire la position de (Γ) par rapport au cercle (C) au voisinage de B.

11.47 FABRICATIONS MECANIQUES 81 (durée : 3 heures)

(10 points)

On considère les fonctions numériques f et g de la variable réelle t définies par :

$$f(t) = 4 \cos t \qquad g(t) = \sqrt{2} \text{ sint } t \cos t$$

On se propose d'étudier dans le plan rapporté au repère ort. normé d'axes x'Ox, y'Oy (unité de longueur : 2 cm) la courbe C d'équations paramétriques :

$$\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}$$

1. - Montrer que l'on peut réduire l'intervalle d'étude à $I = \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$
Dans cet intervalle :

1.1. - Etudier les variations des fonctions f et g.

1.2. - Déterminer les coefficients directeurs des tangentes aux points obtenus pour $t = 0$, $t = \frac{\pi}{2}$

1.3. - Tracer l'arc OA correspondant à l'intervalle I.

1.4. - Comment peut-on obtenir toute la courbe C ? La tracer.

2. - 2.1. - Calculer le volume de révolution engendré par la rotatio autour de l'axe x'Ox de la plaque limitée par l'arc OA e l'axe x'Ox. On donnera le résultat à un millimètre cube près.

2.2. - Exprimer g'(t) uniquement en fonction de sin t. Calculer la longueur de l'arc OA. On donnera le résultat à un millimètre près.

I - Dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$, d'axes Ox, Oy (unité 5cm) on considère les points variables avec le paramètre réel t : M_1, M M définis par :

$$M_1 \left| \begin{array}{l} x = \cos 2t \\ y = \sin 2t \end{array} \right. \qquad M_2 \left| \begin{array}{l} x = \cos t \\ y = -\sin t \end{array} \right. \qquad 3\,\vec{OM} = \vec{OM}_1 + 2\,\vec{O}$$

relation (A)

1°) Montrer que les points M_1 et M_2 appartiennent à un même cercle (C) que l'on dessinera dans le repère.
Montrer que la relation (A) équivaut à la relation (B) :
$\vec{MM}_1 + 2\,\vec{MM}_2 = \vec{0}$.
En déduire, pour une même valeur du paramètre t, la disposition des trois points M_1, M_2, M ; en particulier faire le graphique pour $t = \frac{\pi}{6}$.

2°) 2.1 Montrer que les coordonnées de M sont :

$$M \begin{cases} x = \frac{1}{3}(\cos 2t + 2\cos t) \\ y = \frac{1}{3}(\sin 2t - 2\sin t) \end{cases}$$

2.2 On appelle (H) l'ensemble des points M.
Déterminer la période des fonctions $t \longmapsto x$ et $t \longmapsto y$
En faisant apparaître une symétrie de la courbe (H) montrer que l'on peut réduire l'intervalle d'étude à $t \in [0,\pi]$
Montrer que les dérivés peuvent s'écrire :

$$\begin{cases} x' = -\frac{4}{3}\sin\frac{3t}{2}\cos\frac{t}{2} \\ y' = -\frac{4}{3}\sin\frac{3t}{2}\sin\frac{t}{2} \end{cases}$$

Etudier les fonctions $t \longmapsto x$ et $t \longmapsto y$ quand t décrit [

2.3 Montrer que pour tout t appartenant à l'intervalle $]0,\pi]$, privé de $\frac{2\pi}{3}$, la droite M_1M_2 est orthogonale à la tangente en M à (H).

Donner l'équation de la tangente à (H) en M correspondant $t = \frac{2\pi}{3}$; tracer cette tangente sur le graphique.

2.4 Construire la courbe (H).

3°) Calculer la longueur de l'arc de (H) correspondant à t apparte à l'intervalle $[o, \frac{2\pi}{3}]$.

11.49 ADJOINT TECHNIQUE D'ENTREPRISES DU BATIMENT 84 (durée : 3 heures) (10 points) corrigé

---

1. Démontrer que pour t appartenant à $\mathbb{R} - \left\{ \frac{\Pi}{2} + k\Pi \right\}$, $(k \in Z)$,

$$\sin 2t - \operatorname{tg} t = \cos 2t \cdot \operatorname{tg} t$$

2. Dans le plan affine euclidien rapporté au repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ d'axes Ox et Oy, (unité : 4 cm) on considère :

le cercle (U) de centre 0, de rayon 1.

l'axe 0z, d'origine 0 et de vecteur unitaire $\vec{u}$, défini par une mesure t de l'angle $(\vec{i}, \vec{u})$,

$(t \in \left] -\frac{\Pi}{2}, +\frac{\Pi}{2} \right[)$.

le point P de (U) tel que $(\vec{0x}, \vec{0p}) = 2t$; on désigne par M le point d'intersection de la droite (0z) et de la perpendiculaire à 0x passant par P.

2.1 Construire les points M_0, M_1, M_2, M_3 correspondant respectivement à

$$t_0 = 0, \ t_1 = \frac{\Pi}{6}, \ t_2 = \frac{\Pi}{4}, \ t_3 = \frac{\Pi}{3}$$

2.2 Déterminer pour une valeur quelconque de t les coordonnées du point M.

3. Soient f et g les fonctions de la variable réelle t définies par

$$f(t) = \cos 2t \qquad\qquad g(t) = \sin 2t - \operatorname{tg} t$$

3.1 Étudier les variations des fonctions f et g pour t appartenant à $\left[0, \frac{\Pi}{2} \right[$ et rassembler les résultats dans un tableau unique.

3.2 Tracer la courbe (C) définie paramétriquement par $\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}$ dans le plan rapporté au repère orthonormé de la deuxième question. Démontrer que les points M définis à la deuxième question appartiennent à (C).

4. La courbe (C) comporte une boucle. Calculer, en cm^2, la mesure de l'aire de cette boucle.

11.50 FABRICATIONS MECANIQUES 83 (durée : 3 heures)
(10 points)

On considère les fonctions f et g définies par :

$$f(t) = 10.e^{-t}.\cos t \qquad g(t) = 10.e^{-t}.\sin t$$

et dans un plan rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{i},\vec{j})$ d'axes Ox et Oy, unité 1 cm, on désigne par

$(\mathscr{C})$ la courbe définie paramétriquement par $\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}$

1. On appelle M le point variable de paramètre t décrivant la courbe $(\mathscr{C})$.

   1.1. Calculer la mesure l de longueur du segment [OM] en fonction de t .
   Représenter graphiquement les variations de l en fonction de t dans un plan rapporté à un repère orthogonal $(\Omega;\vec{u},\vec{v})$, unités : 1 cm en abscisse, 0,1 cm en ordonnée.

   1.2. Calculer en fonction de t une mesure de l'angle orienté $(\widehat{\vec{i},\vec{OM}})$

   1.3. Par quelle transformation géométrique dont on précisera les caractéristiques peut on faire correspondre au point M de la courbe $(\mathscr{C})$ de paramètre t le point M' de la courbe $(\mathscr{C})$ de paramètre $(t + \pi)$ et cela quel que soit t ?

2. Etudier les variations des fonctions f et g pour t appartenant à l'intervalle $[0,\pi]$ et rassembler les résultats dans un tableau unique.

3. 3.1. Calculer en fonction de t le coefficient directeur m de la tangente Δ en M à $(\mathscr{C})$. Démontrer que m s'exprime simplement à partir de $\tan\left(t - \dfrac{\pi}{4}\right)$ et en déduire une mesure de l'angle orienté (OM,Δ) des droites OM et Δ (la notion tan désigne la fonction tangente).

3.2. Tracer l'arc (Γ) de $(\mathscr{C})$ correspondant à $t \in [0,\pi]$

4. Calculer la mesure exacte de la longueur de l'arc (Γ). En donner la valeur décimale approchée à 10^{-2} près par défaut.

5. Calculer la mesure exacte de l'aire du domaine plan limité par l'arc (Γ) et l'axe des abscisses. En donner la valeur décimale approchée à 10^{-2} près par défaut.

11.51 CONSTRUCTION METALLIQUE 80 (durée : 1 h 30)
(10 points)

On se propose d'étudier dans le plan rapporté à un repère orthonormé d'axes x'Ox, y'Oy la courbe C d'équations paramétriques :

$$\begin{cases} x = f(t) = t\,(1 - e^{t}) \\ y = g(t) = \ln(\operatorname{Ch} t) \end{cases}$$

Le symbole ln signifie la fonction logarithme népérien.

- 1 - Calculer la dérivée f' de la fonction f.

2 - Etudier les variations de la fonction f' et calculer f'(0). En déduire le signe de f'(t).

3 - Calculer la dérivée g' de la fonction g et étudier les variation: de g.

11.52 EQUIPEMENTS TECHNIQUES DU BATIMENT 82 (durée : 4 heures)
(12 points)

---

1 - 1.1 - Intégrer l'équation différentielle :

$$\text{(E)} \quad z' + z \operatorname{th} t = 0,$$

où z est une fonction de la variable réelle t et th t la tangente hyperbolique de t (th $t = \frac{e^t -}{e^t +}$

Trouver la solution z_1 de cette équation, telle que $z_1(0) = 1$.

1.2 - Intégrer l'équation différentielle

$$\text{(E')} \quad z' + z \operatorname{th} t = t.\operatorname{th} t,$$

trouver la solution z_2 de cette équation qui s'annule pour $t = 0$.

2 - Soit la courbe (C) définie paramétriquement dans un plan P rapporté au repère orthonormé $(O, \vec{i},$
(unité 2 cm), par le système :

$$\begin{cases} x = t - \operatorname{th} t \\ y = \dfrac{1}{\operatorname{ch} t} \end{cases} \qquad t \text{ paramètre réel}$$

2.1 - Démontrer que (C) admet un axe de symétrie.

2.2 - Etudier les branches infinies de (C).

2.3 - Etudier les variations de x et de y ; faire un tableau.

2.4 - Préciser la nature du point A d'abscisse 0 ainsi que la tangente à (C) en ce point.

2.5 - Calculer ch t et th t lorsque sh t = 1. Calculer la valeur de t correspondante.

2.6 - Trouver le point B de (C) où la tangente a pour coefficient directeur − 1 ; déterminer une équat
cartésienne de la tangente en B à (C).

2.7 - Tracer la courbe (C) dans le plan P.

3 - Calculer la longueur de l'arc $\widehat{AB}$ de (C) ; donner une valeur approchée de cette longueur, en cm.

4 - On pose $I_n = \displaystyle\int_0^t \frac{dx}{\operatorname{ch}^n x}$

4.1 - Calculer I_1 (on pourra, par exemple, faire le changement de variable : $u = e^x$).

Calculer I_2.

En intégrant par parties et en remarquant que

$$\frac{1}{\operatorname{ch}^n x} = \frac{1}{\operatorname{ch}^{n+1} x} \cdot \operatorname{ch} x, \quad \text{démontrer la relation : } (n+1)\, I_{n+2} = \frac{\operatorname{sh} t}{\operatorname{ch}^{n+1} t} + n I_n$$

En déduire I_3 et I_4 (on pourra utiliser les résultats obtenus dans les questions suivantes).

4.2 - Calculer l'aire du domaine plan limité par l'axe x'x, la courbe (C), l'axe y'y et la parallèle
passant par B ; donner une valeur approchée de cette aire, en cm^2.

4.3 - Calculer le volume du solide engendré par la rotation, autour de Ox, du domaine plan précé
donner une valeur approchée de ce volume, en cm^3.

CHAPITRE XII : EQUATIONS DIFFERENTIELLES DU PREMIER ORDRE ET COURBES EN PARAMETRIQUES

12.1 MOTEURS A COMBUSTION INTERNE 85 (durée : 3 heures)
(10 points)

x et y sont deux fonctions de la variable réelle t.

1. Déterminer la solution de l'équation différentielle :

$$x \sin \frac{t}{2} + 2x' \cos \frac{t}{2} = 1 \quad \text{telle que } x(0) = 0.$$

2. Déterminer la solution de l'équation différentielle :

$$y'' + \frac{1}{9} y = 0 \quad \text{telle que } y(0) = 2 \text{ et } y'(0) = 0.$$

3. Calculer $\lim\limits_{t \to 3\pi} \dfrac{\sin \frac{t}{3}}{\cos \frac{t}{2}}$ (on pourra poser : $\theta = 3\pi - t$).

4. Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$ d'axes Ox et Oy (unité : 2 cm).
Etudier et représenter la courbe (C) définie par les équations paramétriques : $\begin{cases} x = \sin \frac{t}{2} & (t \in \mathbb{R} \\ y = 2\cos \frac{t}{3} \end{cases}$

12.2 BUREAU D'ETUDES 81 (durée : 4 heures) *corrigé*
(16 points)

1/ On considère l'équation différentielle :

$$(E) \quad x'' - 2x' + x = 2e^t.$$

1.1. Vérifier que la fonction u telle que : $u(t) = t^2 e^t$ est un solution particulière de (E).

1.2. Résoudre l'équation différentielle : $x'' - 2x' + x = 0$.
En déduire la résolution de (E).

1.3. Déterminer la solution particulière f de (E) telle que :
$$f(0) = 1 \quad \text{et} \quad f'(2) = 0.$$

1.4. Calculer :
$$\int_0^1 (t^2 - 3t + 1)e^t \, dt.$$

2/ On considère les fonctions numériques f et g définies par :

$$\begin{cases} f(t) = (t^2 - 3t + 1)e^t \\ g(t) = t + \dfrac{1}{t} \end{cases}$$

On désigne par Γ la courbe d'équations paramétriques :

$$\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}$$

dans le plan rapporté au repère orthonormé d'axes x'Ox, y'Oy (unité : 1cm).

2.1. Etudier les variations des fonctions f et g.

2.2. Etudier les branches infinies de la courbe Γ.

2.3. Déterminer une équation de la tangente Δ à Γ au point de paramètre $t = -1$.

(On ne précisera pas la position de Γ par rapport à Δ).

2.4. Montrer que Γ a un point double sur Oy.

2.5. Déterminer les points de Γ, à 0,01 près, correspondant à $t = -1,5$; $t = -0,5$; $t = 2,5$; $t = 2,8$.

2.6. Tracer Γ.

12.3 FROID ET CLIMATISATION 82 (durée : 1 heure)

corrigé

---

1 - Résoudre le système en u et v

$$(S) \quad \begin{cases} u + v = e^{-x}(1 + e^{2x}) \\ \ln u + \ln v = 0 \end{cases}$$

(ln désigne le logarithme népérien)

2 - 2.1 - Déterminer la fonction de la variable réelle x solution de l'équation différentielle :

$$\frac{dv}{dx} + 2v^2 = 0$$

2.2 - Montrer qu'un couple solution de (S) vérifie l'équation différentielle :

$$v' + 2v^2 = \frac{2-u}{u^2}$$

3 - On pose $u = e^x$ et $v = e^{-x}$ et on considère les fonctions f, g et h de la variable réelle x définies par :

$$f(x) = \ln(u + 2v) \ ; \qquad g(x) = \ln u + \ln\left(1 + \frac{2v}{u}\right) \ ; \qquad h(x) = \ln 2v + \ln\left(1 + \frac{u}{2v}\right)$$

3.1 - Calculer f(x), g(x) et h(x) en fonction de x. Comparer les fonctions f, g et h.

3.2 - Déterminer :

$$\lim_{x \to -\infty} \ln\left(1 + \frac{2v}{u}\right) \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \to -\infty} \ln\left(1 + \frac{u}{2v}\right)$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \to -\infty} f(x)$$

3.3 - Etudier la fonction f et tracer sa courbe représentative $\mathcal{C}$ dans le plan $\mathcal{P}$ rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unité 3 cm).

Montrer que $\mathcal{C}$ possède un axe de symétrie et que $\mathcal{C}$ admet deux asymptotes que l'on déterminera.

3.4 - En déduire la représentation dans $\mathcal{P}$ de la courbe d'équations paramétriques.

$$\begin{cases} x = \ln t \\ y = \ln\left(t + \dfrac{2}{t}\right) \end{cases} \qquad (t \in \mathbb{R}_+^*)$$

12.4 ELECTROTECHNIQUE 81 (durée : 3 heures) *corrigé*

(11 points)

---

1. Résoudre l'équation différentielle :

$$(2t + 1)y' + \frac{1}{t}y = -\frac{(2t + 1)^2}{t^3}.$$

Donner la solution particulière qui prend la valeur $\frac{5}{4}$ pour $t = 2$.

2. On considère les fonctions numériques f et g de la variable réell[e] t définies par :

$$f(t) = \frac{2t}{t^2 - 1} \quad ; \quad g(t) = \frac{2t + 1}{t^2}.$$

On appelle C la courbe définie paramétriquement, dans le plan rappor[té] au repère orthonormé d'axes $x'Ox$, $y'Oy$ (unité de longueur : 2 cm), pa[r]

$$x = f(t) \quad ; \quad y = g(t).$$

2.1. Etudier les variations des fonctions f et g.

2.2. On admettra que le point O appartient à la courbe C.

Calculer :

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{g(t)}{f(t)} \quad ; \quad \lim_{t \to -\infty} \frac{g(t)}{f(t)}$$

Interpréter géométriquement les résultats.

On pose $u = \frac{1}{t}$. Exprimer $g(t) - f(t)$ en fonction de u et donner [le] développement limité à l'ordre 2 au voisinage de $u = 0$.

En déduire la position de C par rapport à la tangente en O à [C].

2.3. Démontrer que la courbe C admet un point double dont on préci[sera] les coordonnées. Donner les coefficients directeurs des tange[ntes] à C en ce point double.

2.4. Préciser les branches infinies de C.

2.5. Tracer la courbe C.

12.5 EXPLOITATION DES VEHICULES A MOTEURS 85 (durée : 2 heures)

(15 points)

1ère partie

1. Résoudre l'équation différentielle $x'' + 2x' + x = 0$ dans laquelle x est une fonction numérique de la variable t.

   Déterminer la solution particulière qui vérifie $x(0) = 1$ et $x'(0) = 0$.

2. Résoudre l'équation différentielle $y' + y = 2\,t\,e^{-t}$ dans laquelle y est une fonction numérique de la variable réelle t.

   Déterminer la solution particulière qui vérifie $y(0) = 0$.

2ème partie :

Soient f et g les fonctions de la variable réelle t définies par :

$$f(t) = (t + 1)\,e^{-t} \qquad\qquad g(t) = t^2\,e^{-t}$$

On désigne par C la courbe ensemble des points M (x, y) tels que : $\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}$

dans le plan rapporté au repère orthonormé $(0, \vec{i}, \vec{j})$.
L'unité sur le graphique sera représentée par 4 cm.

1. Etudier les variations de f et de g.

2. Vérifier que C passe par 0. Préciser la tangente à C en 0.

3. Soit A le point de C de paramètre $t = 0$. Préciser la tangente à C en A.

4. Tracer la courbe C.

3ème partie :

1. Déterminer les nombres réels a, b, c, d de façon que la fonction F définie par

$$F(t) = (at^3 + bt^2 + ct + d)\,e^{-2t}$$

   soit une primitive de la fonction h définie par $h(t) = t^3\,e^{-2t}$.

2. Soit C_1 la partie de C correspondant à $t \geqslant 0$. Calculer une mesure, en cm^2, de l'aire du domaine plan limité par C_1 et l'axe $(0, \vec{i})$.

Nota : les 1ère et 2ème parties du problème sont indépendantes.

12.6 ELECTRONIQUE 83 (durée : 2 heures)

(6 points)

1. Résoudre l'équation différentielle :

$$xy' - y = x(1 - e^{-\frac{y}{x}})$$

où y représente une fonction numérique de la variable réelle x. Déterminer la solution particulière telle que $y(1) = \ln 2$ (le sy bole ln désigne la fonction logarithme népérien).

2. On considère les fonctions numériques f et g de la variable rée le t telles que :

$$f(t) = e^t - 1 \quad \text{et} \quad g(t) = t(e^t - 1).$$

On désigne par C la courbe d'équations paramétriques $\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}$ dans un plan P rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$ [unité : 2cm].

Etudier les variations des fonctions f et g correspondantes et rassembler les résultats dans un tableau unique. Préciser les branches infinies et tracer la courbe C dans le plan P.

12.7 ELECTROTECHNIQUE 79 (durée : 3 heures) *corrigé*

(13 points)

---

3 - 3.1. -

3.1.1. Décomposer en éléments simples dans l'ensemble des réel les fractions rationnelles :

$$\frac{2t}{(1+t)^3} \quad \text{et} \quad \frac{2t+3}{t(t+1)}$$

3.1.2. Calculer $2\int \frac{t\,dt}{(1+t)^3}$ et $\int \frac{(2t+3)dt}{t(t+1)}$

3.1.3. Résoudre l'équation différentielle (E_1) :

$$(1+t)x' - x = \frac{2t}{1+t}$$

où x est fonction de la variable réelle t.
Déterminer <u>la</u> solution particulière de cette équation v rifiant $x(0) = 0$.

3.1.4. Résoudre l'équation différentielle (E_2) :

$$t(1 + t)y' - (2t + 3)y = 0$$

où y est fonction de la variable réelle t .
Déterminer la solution particulière de cette équation vérifiant $y(1) = \frac{1}{2}$.

3.2. Dans le plan affine euclidien, rapporté au repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$, on se propose de construire la courbe (C) défin en fonction du paramètre réel t par :

$$\begin{cases} x = \dfrac{t^2}{1 + t} \\ \\ y = \dfrac{t^3}{1 + t} \end{cases}$$

3.2.1. Etudier les variations de x et de y en fonction de t .

3.2.2. Etudier les branches infinies de (C) et préciser la posi tion de (C) par rapport à son asymptote .

3.2.3. Etudier la courbe (C) au voisinage de l'origine O .

3.2.4. Déterminer les coordonnées du point d'inflexion de (C) ainsi que le coefficient directeur de la tangente à la courbe (C) en ce point .

3.2.5. Déterminer le rayon de courbure R de la courbe (C) au point correspondant à $t = -2$. Tracer le cercle de courbure en ce point .

3.2.6. Construire la courbe (C) .

12.8 ASSISTANT(E) TECHNIQUE D'ingenieur 85 (durée :3 heures)
(10 points)

---

1. x étant une fonction de la variable réelle t,

a) résoudre l'équation différentielle $(\cos t).\frac{dx}{dt} + 2(\sin t).x = 0$

b) déterminer la solution vérifiant $x(0) = 2$

2. y étant une fonction de la variable réelle t

a) résoudre l'équation différentielle

$$(\cos t).\frac{dy}{dt} + 4(\sin t).\ y = 4\cos^3 t$$

b) déterminer la solution vérifiant $y(o) = o$

3. Le plan étant rapporté à un repère orthonormé $(o\ ;\ \vec{i}, \vec{j})$, construire la courbe (C) définie par la représentation parmétrique :

$$\begin{cases} x = 2\cos^2 t \\ y = 4\cos^3 t.\sin t \end{cases}$$

4. Calculer, en unités d'aire, la mesure de l'aire du domaine plan limité par la courbe (C).

5. Soit M un point quelconque de (C) et Δ la droite d'équation $x = 1$. La droite (OM) coupe Δ en N, soit P le point d'intersection de la parallèle à x'x menée par N et de la parallèle à y'y menée par M.

   Déterminer et construire la courbe (Γ) décrite par P lorsque M décrit (C).

6. a) Déterminer l'application f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ sachant que

$$df = (4x^3 - 6x^2)\,dx + 2y\,dy \qquad \text{et que } f(o, o) = o$$

   b) Montrer que l'équation $f(x, y) = o$ représente l'équation cartésienne de la courbe (C).

12.9 BUREAU D'ETUDES 80 (durée : 4 heures) corrigé
(10 points)

---

1 - Déterminer l'ensemble E des nombres réels x tels que cos x soit strictement positif.
Calculer une primitive de la fonction $x \longmapsto \sin x.\ln(\cos x)$.
On pourra utiliser le changement de variable : $u = \cos x$.

2 - Résoudre l'équation différentielle du premier ordre :

$$y'\cos x - y\sin x = \sin x.\ln(\cos x)$$

Déterminer la solution particulière de cette équation différentielle prenant la valeur 1 pour $x = 0$.

3 - Etudier la fonction numérique f définie par : $f(x) = 1 - \ln(\cos x)$.
Tracer la courbe C représentative de f dans un repère orthonormé d'axes x'Ox, y'Oy.

4 - Déterminer une équation cartésienne de la normale à la courbe C en un point de C.

Donner une représentation paramétrique de l'enveloppe de l'ensemble de ces normales.

5 - Tracer la courbe d'équations paramétriques :

$$\begin{cases} x = t - \operatorname{tg} t \\ y = 2 - \ln(\cos t) \end{cases}$$

12.10 BUREAU D'ETUDES 83 (durée :4 heures) corrigé
(16 points)

A

1. Soit φ l'application de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$$\varphi(t) = e^t - \frac{t}{2} - 1 .$$

Démontrer que l'équation $\varphi(t) = 0$ admet exactement deux solutions, dont l'une, notée α, est strictement néga tive. Donner la valeur décimale approchée, à 0,1 près par défaut, de α.

2. Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ [unité : 5 cm].

2.1. On considère les fonctions numériques f et g de la variable réelle t données par :

$$f(t) = e^t , \quad g(t) = e^{2t} - (t+1)\,e^t .$$

On désigne par (Γ^*) la courbe d'équations paramétriques :

$$\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}$$

puis par (Γ) la courbe (Γ^*) à laquelle on adjoint l'origine O du repère.

Étudier les fonctions f et g et tracer la courbe (Γ).

On précisera la branche infinie et l'allure de la courbe au voisinage de l'origine.

2.2. On pose $\vec{F}(t) = f(t)\,\vec{i} + g(t)\,\vec{j}$. Pour quelle valeur t_0 de la variable t, les vecteurs $\vec{F}'(t)$ et $\vec{F}''(t)$ sont-i colinéaires? Déterminer l'équation de la tangente à (Γ) au point M de paramètre t_0.

3. Calculer la mesure, en cm^2, de l'aire du domaine plan limité par la courbe (Γ), l'axe des abscisses et les droit d'équation $x = 1$ et $x = a$ $(0 < a < 1)$. Ce nombre a-t-il une limite quand a tend vers zéro?

B

1. On considère l'équation différentielle linéaire du second ordre :

(E_1) $$x^2 y'' - xy' + y = x^n .$$

où x est un réel strictement positif, n un entier naturel supérieur ou égal à 2, et y une fonction inconnue de variable réelle x.

1.1. Résoudre l'équation différentielle sans second membre :

(E_0) $$x^2 y'' - xy' + y = 0 .$$

On pourra poser $y(x) = x.z(x)$ où z est une fonction inconnue de la variable x que l'on déterminera.

1.2. Montrer qu'on peut trouver un nombre réel A tel que la fonction $\varphi : x \longrightarrow Ax^n$ soit une solution particuliè de l'équation (E_1). En déduire l'intégrale générale de (E_1).

2. Soit f_μ l'application de $\mathbb{R}_+^*$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$$f_\mu(x) = x(\mu - \ln x) + x^2$$

(ln désigne la fonction logarithme népérien).

On désigne par $\mathscr{C}_\mu$ la courbe représentative de la fonction f_μ, dans le plan rapporté au repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ de partie A.

Montrer que l'ensemble des points d'inflexion des courbes $\mathscr{C}_\mu$, quand μ décrit $\mathbb{R}$, est une droite dont on déte minera une équation.

Montrer que les tangentes en ces points d'inflexion passent par un point indépendant de μ, dont on détermine les coordonnées.

3. Déterminer μ pour que $\mathscr{C}_\mu$ passe par le point de coordonnées $(1, 0)$.

On pose $x = e^t$; exprimer y en fonction de t. Que peut-on en conclure pour la courbe $\mathscr{C}_\mu$?

EQUATIONS HOMOGENES

12.11 ELECTROTECHNIQUE 82 (durée : 3 heures) *corrigé*
(6 points)

1/ Intégrer l'équation différentielle :

$$(x^2 - 2xy - y^2)y' = x^2 + 2xy - y^2.$$

(On pourra poser $y = tx$.)

2/ Montrer qu'une équation cartésienne des courbes intégrales est de la forme

$$(x - \frac{\lambda}{2})^2 + (y - \frac{\lambda}{2})^2 = \frac{\lambda}{2}^2 \qquad (\lambda \in \mathbb{R})$$

Ces courbes intégrales étant représentées dans un plan rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, déterminer leur nature et montre qu'elles sont tangentes en un même point à une même droite.

12.12 ETUDE DE PRIX DU BATIMENT 81 (durée : 4 heures)
(7 points)

1 - Résoudre l'équation différentielle :

$$(1) \quad 4\,x\,yy' = 2\,y^2 + x^2$$

2 - Tracer dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ la courbe C d'équati paramétriques :

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{2\,t^2 - 1} \\ y = \dfrac{t}{2\,t^2 - 1} \end{cases}$$

3 - Donner une équation cartésienne de C et préciser la nature de l courbe.

12.13 ADJOINT TECHNIQUE D'ENTREPRISES DU BATIMENT 83 (durée : 3 heures)
(10 points) corrigé

1. Déterminer les primitives de la fonction φ de la variable réelle u telle que :

$$\varphi(u) = \frac{1}{u(u-1)}$$

2. On considère l'équation différentielle (E) :

(E) $$x^2y' + y(y - 2x) = 0$$

où y est une fonction de la variable réelle x.

On pose $y(x) = x.t(x)$. Former l'équation différentielle (E') liant x, la fonction t et sa fonction dérivée t

Intégrer l'équation différentielle (E'). En déduire les solutions de l'équation différentielle (E). Parmi ces soluti déterminer celle qui vérifie la condition : $y(2) = 4$.

3. On considère les fonctions f et g de la variable réelle t données par :

$$f(t) = \frac{t}{t-1} \qquad \text{et} \qquad g(t) = \frac{t^2}{t-1}$$

Le plan étant rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$, on appelle $\mathscr{C}$ la courbe définie paramétriquement p

$$\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}$$

3.1. Étudier les variations de f et g en fonction de t, et dresser un tableau des résultats.

3.2. Déterminer les asymptotes de $\mathscr{C}$. On précisera la position de la courbe $\mathscr{C}$ par rapport à ses asymptc

3.3. Tracer la courbe $\mathscr{C}$.

4. Déterminer une équation cartésienne de $\mathscr{C}$. Quelle est la nature de cette courbe ?

12.14 ADJOINT TECHNIQUE D'ENTREPRISES DU BATIMENT 86 (10 points) (corrigé)

---

1. Déterminer les primitives de la fonction φ de la variable réelle u définie par :

$$\varphi(u) = \frac{2}{u(u+2)}.$$

2. Intégrer l'équation différentielle homogène (E) : $2x^2y' - y^2 = 4xy$.

   Déterminer la solution dont la courbe intégrale passe par le point A de coordonnées $x =$ et $y = 1$.

3. Le plan étant rapporté à un repère orthogonal $(O; \vec{i}, \vec{j})$, construire la courbe (H) définie para métriquement par :

$$x = \frac{3t}{t+2}$$

$$y = \frac{3t^2}{t+2}$$

   Préciser les asymptotes et indiquer la position de la courbe par rapport à celles-ci.

4. Donner une équation cartésienne de la courbe (H). Préciser la nature de la courbe.

12.15 MAINTENANCE D'EXPLOITATION DES MATERIELS AERONAUTIQUES 85

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O\,;\vec{i},\vec{j})$. L'unité de longueur est : 1 cm.

A – On considère l'équation différentielle homogène

$$(E) \quad 2\,x\,(y - x)\,y' = y\,(3\,y - 4\,x)$$

1. Montrer que deux droites passant par 0 sont des courbes intégrales de (E).

2. Intégrer (E). On donnera des équations paramétriques des courbes intégrales obtenues.

3. Déterminer la courbe intégrale qui passe par le point de coordonnées -1 et -1. Donner une équation cartésienne de cette courbe.

B – Soit (C) la courbe ensemble des points dont les coordonnées s'écrivent :

$$x = t^2 - 2\,t \qquad y = t^3 - 2\,t^2,$$

où t est un paramètre réel.

1. Étudier les fonctions f et g définies par :

$$f(t) = t^2 - 2\,t \qquad g(t) = t^3 - 2\,t^2$$

2. Montrer que (C) a un point double. Préciser les tangentes en ce point et la position de la courbe par rapport à ces tangentes.

3. Construire (C).

12.15 ADJOINT TECHNIQUE D'ENTRPRISES DE TP (durée : 3 heures)

(10 points)

On considère l'équation différentielle

$$(E) \quad 2\,x^3\,y' - y^3 - 3\,y\,x^2 = 0$$

1. Montrer que cette équation différentielle est homogène et la résoudre. On exprimera x et y en

2. Soit (C) la courbe définie paramétriquement par

$$x = x(t) = \frac{t^2}{1 + t^2}$$

$$y = y(t) = \frac{t^3}{1 + t^2}$$

Étudier la courbe (C) et la construire avec précision dans un repère orthonormé (unité : 4 cm).

Préciser la tangente au point de paramètre $t = 0$.

3. Pour tout réel α on pose :

$$F(\alpha) = \int_0^{\alpha} y(t)\, x'(t)\, dt$$

Calculer F (α). On pourra utiliser le changement de variable $t = \operatorname{tg} \theta$ et les résultats de la deuxiè question de l'exercice.

Montrer que F (α) a une limite quand α tend vers $+\infty$

4. En interprétant géométriquement le calcul précédent déterminer en cm^2 la mesure de l'aire de l portion de plan limitée par la courbe (C) et son asympote.

5. Donner un développement limité à l'ordre 4 de $x(t)$ et $y(t)$ pour $t = 0$ et retrouver les résultats c la deuxième question.

12.17 ASSISTANT(E) D'INGENIEUR 82 (durée : 3 heures)

(10 points)

Soit l'équation différentielle (E) : $(2xy + 3x^2)\, y' = y^2 + 2xy$, où y représente une fonction numériq de la variable réelle x.

1 - Résoudre l'équation différentielle (E) et déterminer, parmi les courbes intégrales, celle qui passe par point A de coordonnées (2, 2).

2 - On considère les fonctions numériques f et g de la variable réelle t définies par :

$$f(t) = \frac{t+1}{t^3} \quad \text{et} \quad g(t) = \frac{t+1}{t^2}$$

On désigne par (C) la courbe d'équations paramétriques $\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}$ dans un plan affine euclidi muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ d'axes Ox et Oy (unité : 12 cm).

2.1 - Etudier les variations des fonctions f et g et rassembler les résultats dans un tableau.

2.2 - Préciser les branches infinies, les points de (C) où la tangente à (C) est parallèle à Ox ou à Oy a que les tangentes à (C) à l'origine. Construire (C).

3 - Calculer, en cm^2, la mesure de l'aire de la portion de plan limitée par la boucle de (C).

4 - Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Etudier la convergence des séries (x_n) et (y_n) de termes généraux :

$$x_n = \frac{n+1}{\quad} \quad ; \quad y_n = \frac{n+1}{\quad}$$

12.18 ELECTROTECHNIQUE 85 (durée : 3 heures)
(8 points)

1. Résoudre l'équation différentielle homogène

$(x - 2\sqrt{x\,y})\,dy - y\,dx = o$

2. On considère les fonctions numériques f et g de la variable t définies par

$f(t) = \frac{1}{t} e^{-\frac{1}{\sqrt{t}}}, \quad g(t) = e^{-\frac{1}{\sqrt{t}}}$

Soit (C) la courbe définie paramétriquement, dans un repère $(o, \vec{i}, \vec{j})$, orthonomé (unité de longueur 10 cm) par

$$\begin{cases} x^2 = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}$$

a) étudier les variations de f et g

b) construire la courbe (C)

3. a) déterminer l'équation cartésienne de (C) sous la forme $x = h(y)$

b) déterminer l'aire du domaine limité par la courbe (C) et l'axe $(o, \vec{j})$. (On sera amené à effectue successivement deux intégrations par parties).

CHAPITRE XIII : COURBES EN POLAIRES

13.1 ETUDES DE PRIX DU BATIMENT 86 (durée : 4 heures)

(5 points)

Le plan est rapporté au repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unité : 3 cm).

La courbe (C) est donnée par son équation polaire :

$$r = f(\theta) = \cos\frac{\theta}{2} \qquad (\theta \in \mathbb{R})$$

(Si M est un point de (C), θ est la mesure de l'angle $(\widehat{\vec{i}, \overrightarrow{OM}})$).

1. Déterminer les éléments de symétrie de la courbe (C). En déduire qu'on peut réduire l'intervalle d'étude de la fonction f à $I = [0, \pi]$.

2. Etudier la fonction f dans I et tracer la courbe (C). On précisera les tangentes aux points correspondants à $\theta = 0$; $\theta = \frac{\pi}{2}$; $\theta = \pi$.

3. La courbe (C) délimite quatre surfaces planes deux à deux de même mesure d'aire. Calculer, en cm^2, et à 10^{-2} près, la mesure d'aire de chacune de ces surfaces.

13.2 BUREAU D'ETUDES 80 (durée : 4 heures)

(8 points) corrigé

Dans le plan affine euclidien de repère orthonormé (O, d'axes x'Ox, y'Oy, on considère :

- le point A de coordonnées (x = 4, y = 0)
- le point B de coordonnées (x = - 2, y = 0)
- le cercle C de centre A et passant par le point O,
- la droite D d'équation x = - 2,
- une droite variable Δ de vecteur directeur unitaire $\vec{u}$ passa l'origine coupant la droite D au point R et le cercle C au
- M milieu du segment [Q, R]
  θ est une mesure de l'angle $(\vec{i}, \vec{u})$. $((\widehat{\vec{i}, \vec{u}}) = \theta)$

1 - Calculer $\overline{OQ}$, $\overline{OR}$ et $\overline{OM}$ en fonction de θ.

2 - Tracer la courbe Γ d'équation polaire $\rho = 4\cos\theta - \frac{1}{\cos\theta}$
On précisera l'asymptote de Γ.

3 - Calculer l'aire de la partie de plan limitée par la boucle de Γ.

13.3 FROID ET CLIMATISATION 79 (durée : 1 h 15)

(12 points)

2 - On considère la courbe (C) qui en représentation polaire a pour équation :

$$\rho = \frac{1}{\cos\theta} + \frac{1}{\sin\theta}$$

a - Montrer que (C) admet pour équations paramétriques :

$$x = 1 + \operatorname{cotg}\theta \qquad\qquad y = 1 + \operatorname{tg}\theta$$

b - En utilisant l'un ou l'autre mode de représentation construire la courbe (C).

3 - Déterminer une équation cartésienne de (C).

13.4 ETUDE DE PRIX DU BATIMENT 81 (durée : 4heures)

(7 points)

1 - Soit Γ la courbe dont l'équation en coordonnées polaires est :

$\rho = \dfrac{\cos\theta}{1 + \sin\theta}$. Tracer Γ ; on étudiera avec soin les branches infinie

2 - Déterminer les points de Γ pour lesquels la tangente à la courbe est parallèle à l'axe des x.

3 - Déterminer graphiquement, suivant les valeurs de λ, le nombre de points d'intersection de Γ et de la droite d'équation $y = \lambda$.

4 - Déterminer, par le calcul, suivant les valeurs de μ, le nombre de points d'intersection de Γ et de la droite d'équation $x = \mu$. Justifier graphiquement les résultats trouvés par le calcul.

13.5 ADJOINT TECHNIQUE D'ENTREPRISES DE TP 83 (durée :3 heures)

(10 points)

Soit un plan affine euclidien orienté muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{i}, \vec{j})$ d'axes Ox et Oy (unité : 3 cm) ; O étant le pôle et Ox l'axe polaire, on désigne par (E) la courbe d'équation polaire :

$$r = f(\theta) \text{ où } f(\theta) = \frac{6 \sin\theta}{1 + 2\sin^2\theta}$$

1. Démontrer que la courbe (E) admet un axe de symétrie. Établir que pour tracer (E) il suffit de connaître les variations de f pour θ appartenant à l'intervalle $A = \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

2. Étudier les variations de f pour θ appartenant à A.

3. Déterminer les points de (E) où la tangente à (E) est, soit perpendiculaire au rayon vecteur, soit perpendi à l'axe polaire. Tracer (E).

4. Calculer, en cm, la mesure du rayon de courbure de la courbe (E) au point d'angle polaire $\theta = 0$.

5. Déterminer une équation cartésienne de la courbe (E). En déduire la nature de (E).

13.6 MOTEURS A CMOMBUSTION INTERNE 85 (durée : 3 heures)

(10 points)

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$ d'axes Ox et Oy (unité : 1 cm). O est le pôle et Ox l'axe polaire. Soit (C) la courbe qui a pour équation polaire :

$$\rho = 4\frac{\sin^2\theta}{\cos\theta} \qquad (\theta \in \mathbb{R})$$

1. Etudier la variation de ρ en fonction de θ dans l'intervalle $[0, \frac{\pi}{2}[$. Tracer l'arc (C_1) correspondant.

   Montrer que pour obtenir (C) il suffit de compléter (C_1) par un arc symétrique. Tracer (C). Déterminer son asymptote Δ.

   Etudier (C) au voisinage de O.

2. On nomme respectivement (Γ_1) et (Γ_2) les courbes d'équations polaires $\rho_1 = \dfrac{4}{\cos\theta}$ et $\rho_2 = 4\cos\theta$, dans le repère précédent.

   Reconnaître les courbes (Γ_1) et (Γ_2).

   En déduire une construction géométrique d'un point de (C).

3. Soit M (ρ, θ) un point de (C). On définit le point M' de la droite OM, lorsque M est distinct de O, par la relation $\overline{OM} \times \overline{OM'} = 16$.

   Déterminer l'équation polaire de la courbe (C'), décrite par M' quand M décrit (C).

4. Donner les coordonnées cartésiennes du point M', dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ en fonction de ses coordonnées polaires.

   Déterminer une équation cartésienne de (C').

   Reconnaître la nature de (C') et construire ses éléments géométriques associés : foyer, directrice.

13.7 ADJOINT TECHNIQUE D'ENTREPRISES DU BATIMENT 86 (durée : 3 heures)

(10 points) corrigé

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$, (unité : 2 cm), on considère la courbe (Σ) d'équation polaire :

$$r = \frac{\cos 2\theta}{\cos\theta}$$

(le repère polaire étant défini par O et $(O;\vec{i})$)

1. Démontrer que (Σ) admet un axe de symétrie. Calculer $r(\pi - \theta)$; en déduire un intervalle d'étude.

2. Démontrer que (Σ) admet une asymptote (D) dont on donnera une équation cartésienne.

3. Etudier les variations de r en fonction de θ sur $[0, \frac{\pi}{2}[$.

   Préciser les points et les tangentes à (Σ) correspondant à $\theta = 0$ et $\theta = \frac{\pi}{4}$.

4. Tracer la courbe (Σ).

5. Exprimer en cm^2 la mesure de l'aire intérieure de la boucle formée par (Σ).

6. Déterminer une équation cartésienne de (Σ).

13.8 MICROMECANIQUE 84 (durée : 3 heures)

(8 points)

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{i}, \vec{j})$, on considère la courbe (C) d'équation polaire :

$$r = f(\theta) = \frac{\cos \theta/2}{\sqrt{1 + \sin \theta}}$$

1. Montrer que, pour construire la courbe (C), il suffit d'étudier la fonction f sur un sous-ensemble de $[0, 2\pi]$

2. Étudier les asymptotes de (C).

3. Construire (C).

13.9 BUREAU D'ETUDES 85 (durée :4 heures)

(7 points)

On suppose le plan rapporté à un repère orthonormé $(o, \vec{i}, \vec{j})$. Soit C la courbe plane définie par la représentation polaire :

$$r = \frac{1}{\sin 2\theta}$$ lorsque θ appartient à l'intervalle $]\,o, \pi\,[$.

1. Monter comment à partir de l'étude de la fonction : $\theta \mapsto \frac{1}{\sin 2\theta}$, sur $]\,o, \frac{\pi}{2}\,[$ on peut obtenir toute la courbe C.

   Préciser le signe de r sur $]\,o, \frac{\pi}{2}\,[$

2. Déterminer les asymptotes de la courbe C et tracer C.

3. Déterminer une équation de la tangente à C au point A défini par $\theta = \frac{\pi}{4}$.

4. Déterminer une équation cartésienne de C.

13.10 ELECTROTECHNIQUE 86 (durée : 3 heures)

(12 points)

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ [unité de longueur : 2 cm], on appelle (C) la courbe d'équation polaire :

$$r = g(\theta) = \frac{2}{1 + \tan\theta}$$

1 – a) Montrer que (C) a un centre de symétrie.

b) Etudier le sens de variation de la fonction g sur l'ensemble $D = \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[- \left\{-\frac{\pi}{4}\right\}$.

Etudier les limites de g en $-\frac{\pi}{2}$, $-\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{2}$.

c) Soit (C_1) la partie de la courbe (C) lorsque θ appartient à D. Comment obtient-on la courb (C) à partir de (C_1) ?

2 – a) Montrer que si h est élément de $E = \left]-\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right[- \{0\}$ on a :

$$\sin h \times g\left(h - \frac{\pi}{4}\right) = \cos h\,(1 + \tan h)$$

b) En déduire l'existence d'une droite asymptote à (C_1).

Préciser la position de (C_1) par rapport à cette droite.

3 – Soit le point A de la courbe (C) obtenu pour $\theta = \frac{\pi}{4}$.

a) Montrer que la tangente à (C) au point A est parallèle à l'axe $(O, \vec{i})$.

b) Déterminer le rayon de courbure de la courbe (C) en A.

4 – Tracer avec soin la courbe (C).

5 – On appelle (F) l'ensemble des points du plan d'abscisses positives et limité par la courbe (C) et l'axe $(O, \vec{i})$.

Calculer l'aire de (F). (On pourra utiliser les résultats de l'exercice II).

13.11 ETUDE DE PRIX DU BATIMENT 85 (durée : 4 heures)

(10 points)

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$, (unité : 2 cm).

On désigne par C la courbe ensemble des points M de coordonnées (x, y) liées par la relation :

$$(x^2 + y^2)^3 = (x + y)^4$$

1. Démontrer que le point O est un centre de symétrie de la courbe C.

2. Démontrer qu'en choisissant pour axe polaire l'axe $(O, \vec{i})$ et θ pour mesure de l'angle $(\widehat{\vec{i}, \overrightarrow{OM}})$, une équation polaire de C est :

$$r = f(\theta) = 1 + \sin 2\theta$$

3. a) Démontrer que l'axe $(O, \vec{k})$ tel qu'une mesure de l'angle $(\widehat{\vec{i}, \vec{k}})$ soit $\frac{\pi}{4}$ est un axe de symétrie de C.

   b) En déduire, en tenant compte de la question 1, l'intervalle d'étude le plus réduit possible de la fonction f.

   c) Etudier f sur l'intervalle $\left[\frac{\pi}{4} ; \frac{3\pi}{4}\right]$ et tracer la courbe C.

4. La courbe C est formée de deux boucles, chacune inscrite dans un rectangle dont un côté est parallèle à l'axe $(O, \vec{k})$. Rechercher, en cm, à 1/10^e près par excès la mesure des côtés du rectangle.

5. Calculer, en cm^2, la mesure de l'aire de chacune des boucles et en donner la valeur décimale approchée à $\frac{1}{10}$ près par défaut.

13.12 ELECTROTECHNIQUE 83 (durée : 3 heures)

(8 points)

On désigne par (Γ) la courbe du plan $\mathcal{P}$ d'équation polaire : $\rho = f(\theta)$ où $f(\theta) = \cos 2\theta + \sin 2\theta$.

1. Démontrer que l'étude de f peut être réduite, par exemple, à l'intervalle $[\frac{\pi}{8}, \frac{3\pi}{8}]$. Soit (Γ_1) l'arc de la courbe (Γ) correspondant à l'intervalle précédent. Indiquer les transformations géométriques permettant de construire (Γ) à partir de (Γ_1).

2. Etudier les variations de la fonction f lorsque θ appartient à l'intervalle $[\frac{\pi}{8}, \frac{3\pi}{8}]$. Construire (Γ_1) puis (Γ). On mettra en évidence les points de (Γ) et les tangentes en ces points situés sur les trois cercles de centre O et de rayons respectifs : 0, 1 et $\sqrt{2}$.

3. Déterminer la valeur exacte, en cm^2, de la mesure de l'aire de la portion de plan $\mathcal{P}$ limitée par (Γ) ...

13.13 ADJOINT TECHNIQUE D'ENTREPRISES DE TP 84 (durée : 3 heures)

(8 points)

Dans le plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormé direct $(o, \vec{i}, \vec{j})$ d'axes ox et oy (unité 1 centimètre) on considère le cercle (c) de centre A (a, o) et de rayon R (a est un réel strictemen positif). Pour tout point M de (c) on appelle θ l'angle $(\vec{ox}, \vec{AM})$; on désigne par P la projection ortho gonale de l'origine o sur la tangente (MT) en M à (c).

1. Le pôle étant o et ox l'axe polaire, déterminer les coordonnées polaires de P en fonction de a, θ e R. En déduire l'équation polaire de la courbe décrite par P lorsque M décrit le cercle (c).

2. On considère les courbes (Γ_1) d'équation polaire $\rho = f_1(\theta)$ où $f_1(\theta) = 1 + 2\cos\theta$ et (Γ_2) d'équa tion polaire $\rho = f_2(\theta)$ où $f_2(\theta) = 2 + 2\cos\theta$.

   Démontrer que (Γ_1) et (Γ_2) font partie de la famille des courbes trouvées à la première question

3. Étudier les variations des fonctions f_1 et f_2. Déterminer les points doubles ou les points de rebrous sement éventuels de (Γ_1) et (Γ_2) et les tangentes en ces points ; préciser les points de (Γ_2) où l tangente est soit parallèle soit perpendiculaire à l'axe polaire. Tracer (Γ_1) et (Γ_2).

4. Calculer, en cm, la mesure de la longueur de (Γ_2). Déterminer, en cm^2, la mesure de l'aire de l portion de plan intérieure à (Γ_2).

13.14 BUREAU D'ETUDES 82 (durée : 4 heures)

(12 points) *corrigé*

Soit E la courbe d'équation polaire $\rho = f(\theta) = \dfrac{1}{\sin^3 \dfrac{\theta}{3}}$

dans le plan orienté rapporté au repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, unité 1,5 cm, et d'axe polaire $(O, \vec{i})$.

1 - 1.1 - Quel est l'ensemble de définition de la fonction f ? Déterminer la période de f. Déduire du calcul d $f(\theta + 3\pi)$ et de l'étude de la parité de f que l'on peut réduire l'intervalle d'étude à

$$\left]0, \frac{3\pi}{2}\right]$$

1.2 - Sur cet intervalle :

1.2.1 - Etudier les variations de f.

1.2.2 - Etudier la branche infinie de E.

1.2.3 - Déterminer les points d'intersection de E avec les axes de coordonnées. Préciser les tangent en ces points.

1.3 - Construire E.

2 - 2.1 - Calculer une primitive de $\dfrac{1}{\sin^2 t}$.

2.2 - En déduire par intégration par parties la valeur de l'intégrale :

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{\sin^4 t}$$

2.3 - Calculer, en cm, la longueur de la boucle de E.

13.15 MICROMECANIQUE 76 (durée : 3 heures)

(9 points)

Le plan affine euclidien orienté est rapporté à un repère or thonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$. (C) est la courbe d'équation polaire :

$$r = \frac{1}{(\cos\theta)^3} \qquad \text{avec} \quad -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$$

1° - Déterminer l'axe de symétrie de (C).
Etudier les branches infinies de (C).

2° - Déterminer les points d'inflexion de (C) ; calculer leurs coordon nées cartésiennes. Préciser la tangente en chaque point d'inflexi

3° - I étant le point de (C) de coordonnées cartésiennes (1 ; 0), déte miner la tangente en I. Calculer la longueur du rayon de courbure de (C) en I.

4° - On prend $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 3$ cm. Tracer la courbe (C) ; on placera I, l points d'inflexion, les tangentes en ces points, ainsi que les points d'intersection de (C) avec la courbe d'équation polaire $r = 2\sqrt{2}$.

13.16 EQUIPEMENTS TECHNIQUES DU BATIMENT 85 (durée : 4 heures)

(9 points)

---

1 - Soit f la fonction numérique de la variable réelle x donnée par :

$$f(x) = \ln \frac{1}{|\cos x|}$$

On désigne par (Γ) la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (unité : 2 cm).

Etudier f, ses symétries et ses branches infinies.

Tracer avec soin la courbe (Γ).

2 - (θ, r) étant les coordonnées polaires d'un point ...

$$r = f(\theta) = \ln \frac{1}{|\cos \theta|}$$

Utiliser les résultats de la **1ère question** pour construire la courbe (C). On étudiera en part les branches infinies, la tangente en 0, et on calculera les coordonnées polaires des poi (C) admettant une tangente perpendiculaire à l'axe polaire origine $(0, \vec{i})$.

Construire soigneusement la courbe (C).

3 - On désigne par (G) la courbe d'équations paramétriques :

$$\begin{cases} x = f(t) = \ln \dfrac{1}{|\cos t|} \\ y = g(t) = e^{\tan t} \end{cases}$$

t étant un paramètre réel et (x, y) les coordonnées d'un point du plan rapporté au repère (0;

Utiliser les résultats de la **1ère question** et étudier la fonction g pour déterminer les cara tiques de la courbe (G).

Etudier les branches infinies de (G) et tracer la courbe (G).

13.17 *MICROMECANIQUE 85 (durée : 3 heures)*

(7 points)

Soit (S) la spirale logarithmique dont l'équation, en coordonnées polaires est $r = 3\,e^{\theta}$.

On note 0 le pôle, 0x l'axe polaire, M un point de la courbe de coordonnées (r, θ), et respe vement A et B les points obtenus pour $\theta = 0$ et $\theta = \pi/2$

1. Déterminer la mesure V de l'angle que fait la droite MT, tangente en M à (S) avec la dr 0M.

   Ebaucher la représentation graphique de l'arc de (S) obtenu lorsque $0 \leqslant \theta \leqslant \dfrac{\pi}{2}$.

2. Calculer la longueur de l'arc AB de (S).

3. Calculer l'aire du domaine plan limité par (S) et les rayons-vecteurs 0A et 0B.

CHAPITRE XIV : COURBES INTEGRALES EN POLAIRES

14.1 EQUIPEMENTS TECHNIQUES DU BATIMENT 83 (durée : 4 heures)

(10 points)

1. Dans tout ce problème le plan P est rapporté à un repère orthc normé direct $(O,\vec{i},\vec{j})$ d'axes Ox et Oy (unité : 2 cm).

1.1. Intégrer l'équation différentielle (E) :

$$2xy'y - (x^2 + y^2) = 0$$

où y représente une fonction numérique de la variable x.

1.2. Déterminer les équations cartésiennes des courbes intégra Préciser la nature des supports des courbes intégrales ai que les éléments géométriques remarquables (notamment les axes, les asymptotes et les sommets).

2. On considère les fonctions numériques f et g de la variable réelle θ telles que :

$$f(\theta) = \frac{1}{\mathrm{sh}^2\theta} \quad \text{et} \quad g(\theta) = \frac{\mathrm{ch}\,\theta}{\mathrm{sh}^2\,\theta} .$$

On désigne par (Γ) la courbe d'équations paramétriques $\begin{cases} x = f(\theta) \\ y = g(\theta) \end{cases}$ dans le plan P.

2.1. Démontrer que la courbe (Γ) est portée par une courbe in grale de l'équation différentielle (E).

2.2. Après avoir justifié que l'on peut réduire l'intervalle d'étude à $]0,+\infty[$, étudier les variations des fonctions f et g et rassembler les résultats dans un tableau unique.

2.3. Etudier la branche infinie de (Γ) et préciser la place d (Γ) par rapport à la droite Δ d'équation $y=x+\frac{1}{2}$.
Construire dans le plan P la courbe (Γ).

3. Dans le plan P, où O est le pôle et Ox l'axe polaire, on dési par r le rayon polaire et par α l'angle polaire (exprimé en radi d'un point du plan. On note (H) la courbe d'équation polaire r = où $h(\alpha) = \frac{\cos\alpha}{\cos 2\alpha}$.

3.1. Etablir que pour tracer (H) il suffit de connaître les variations de h pour α appartenant à $E = [0,\frac{\pi}{4}[\cup]\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}]$.

3.2. Etudier les variations de h pour α appartenant à E.

3.3. Etudier les branches infinies et préciser les tangentes à (H) aux points remarquables.
Construire la courbe (H).

14.2 ETUDES DE PRIX DU BATIMENT 84 (durée : 4 heures)
(14 points)

---

1. Soit l'équation différentielle (E) $(x^4 + 4x^2 y^2 - y^4)y' = 4xy^3$.

   Ecrire toute solution de (E) sous la forme

$$P(x,y,\lambda) = 0, \text{ où } \lambda \text{ est un réel arbitraire.}$$

2. Dans le plan rapporté au repère orthonormé $(o,\vec{i},\vec{j})$ on désigne par (Σ) la courbe d'équation $P(x,y,\lambda) = 0$ qui passe par le point de coordonnées 0 et -1. Montrer que (Σ) admet la représentation paramétrique

$$x = \frac{t^3 - 1}{t^2 + 1} \qquad\qquad y = \frac{t^2 - 1}{t^2 + 1}$$

3. Représenter la courbe (Σ).

4. Indiquer une équation polaire de (Σ).

5. On pose, pour tout entier naturel non nul n

$$I_n = \int_0^1 \frac{dt}{(t^2 + 1)^n} \qquad \text{et} \quad J_n = \int_0^1 \frac{t^2}{(t^2 + 1)^n}\, dt$$

   a) Calculer I_1 et J_1.

   b) Montrer que pour tout n : $I_n + J_n = I_{n-1}$

   c) A l'aide d'une intégration par parties, établir une relation entre n, J_n et I_{n-1}

   d) En déduire J_2, I_2, J_3, I_3.

14.3 ADJOINT TECHNIQUE D'ENTREPRISES DU BATIMENT 85 (durée :3 heure)

(10 points)

---

1) Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(0; \vec{i}, \vec{j})$ (unité : 2 cm), tracer la courbe (C) définie paramétriquement par :

$$x = \frac{t^2 - 1}{t^3} \qquad y = \frac{t^2 - 1}{t^2}$$

2) Déterminer les primitives de la fonction φ de la variable réelle t telle que : $\varphi(t) = \dfrac{3 - t^2}{t(t^2 - 1)}$

3) On considère la famille (C_λ) de courbes définies par $y^3 = \lambda(y^2 - x^2)$. Montrer que l'équation différentielle de la famille (C_λ) s'écrit (E) : $(3x^2 - y^2)\,y' = 2xy$.

Intégrer l'équation différentielle homogène du 1er ordre (E).

En déduire que la courbe (C) appartient à la famille (C_λ).

4) Former l'équation différentielle (E') des trajectoires orthogonales des courbes intégrales de (E). Intégrer (E') en posant $Y = y^2$. Reconnaître les courbes obtenues.

14.4 ELECTRONIQUE 76 (durée : 2 heures)

(10 points)

---

1 - Soit f la fonction définie par $f(t) = \dfrac{1 + t^2}{t(1 - t^2)}$

Déterminer trois réels a, b et c tels que $f(t) = \dfrac{a}{t} + \dfrac{b}{1 - t} + \dfrac{c}{1 +}$

En déduire les primitives de la fonction f.

2 - Intégrer l'équation différentielle $y' = \dfrac{2xy}{x^2 + y^2}$

3 - Montrer que les équations paramétriques : $x = \dfrac{t}{1 - t^2}$; $y = \dfrac{t^2}{1 - t^2}$ et

quation polaire $r = \dfrac{\sin\theta}{\cos 2\theta}$ représentent la même courbe (C).

4 - 4.1. - Etudier et tracer la courbe (C).

(On pourra utiliser la représentation paramétrique ou l'équati

laire. On étudiera avec soin les branches infinies).

4.2. - Déterminer l'équation cartésienne de la courbe (C) sous forme

te.

14.5 BUREAU D'ETUDES 79 (durée : 4 heures)
(14 points)

<u>Les parties I et II sont indépendantes</u>

I) 1°) Construire la courbe (C) d'équation $y = \frac{1 - x}{1 + x}$ dans un repère orthonormé.

2°) Calculer l'aire de la portion de plan comprise entre la courbe (C) et les deux axes de coordonnées.

. <u>Première méthode</u> : En calculant l'intégrale $I_1 = \int_0^1 \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\, d$

(On peut y faire le changement de variable défini par $x = \cos \phi$).

. <u>Deuxième méthode</u> : En démontrant que cette aire est égaleme mesurée par l'intégrale $I_2 = \int_0^1 \frac{1 - y^2}{1 + y^2}\, dy$ et en calcular I_2 .

II) A - On considère l'équation différentielle :

$$y'' + y = -3 \cos 2x \qquad (1)$$

1°) Intégrer l'équation différentielle $y'' + y = 0$

2°) Déterminer une solution particulière de l'équation (1) et en déduire la solution générale de cette équation (1).

3°) Soit g la fonction solution de l'équation (1) telle que $g(0) = 2$ et $g(\frac{\pi}{2}) = -1$.

Résoudre sur R l'équation $g(x) = 0$.

B -

1°) Soit f une fonction numérique de la variable réelle θ , deux fois dérivable sur son ensemble de définition, non nulle et définie par $r = f(\theta)$. On note $r' = f'(\theta)$ et $r'' = f''(\theta)$.

On se propose de résoudre l'équation différentielle (2) :

$$r^2 - rr'' + 2r'^2 = -3 \cos 2\theta \; r^3 .$$

On pose $\rho = \frac{1}{r}$. Calculer ρ' et ρ'' en fonction de r, r' et r''

(ρ' désigne $\frac{d\rho}{d\theta}$ et ρ'' désigne $\frac{d^2\rho}{d\theta^2}$). Etablir que la résolution de l'équation (2) se ramène à celle de : $\rho'' + \rho = -3 \cos 2\theta$

En déduire la solution générale de l'équation (2).

2°) On considère la solution particulière de l'équation (2) telle que $f(0) = \frac{1}{2}$ et $f(\frac{\pi}{2}) = -1$. Démontrer qu'elle est définie par $r = \frac{1}{\cos 2\theta + \cos \theta}$

C - Un axe Ox étant choisi comme axe polaire dans le plan, soit (Γ) la courbe d'équation, en coordonnées polaires ,

$$r = \frac{1}{\cos 2\theta + \cos \theta} = f(\theta) .$$

1°) Déterminer l'ensemble de définition D de la fonction f. Démontrer que pour construire (Γ) il suffit d'étudier les variation de la fonction f sur l'intersection de D et de l'intervalle $[0,\pi]$. Etudier les variations de la fonction f sur cet ensemble.

2°) Déterminer les points M de la courbe (Γ) tels que la tangente en M à (Γ) soit perpendiculaire à la droite (O,M) .

3°) Démontrer que (Γ) a deux points doubles qu'on déterminera.

4°) Déterminer les points d'inflexion de (Γ). Pour chacun de ces points on construira la tangente d'inflexion.

5°) Etudier les branches infinies de (Γ). Si (Γ) a une ou plusieur asymptotes, étudier la position de la courbe par rapport à chacune d'elles. (On sera amené à étudier :

14.6 ASSISTANT(E) TECHNIQUE D'INGENIEUR 83 (*durée : 3 heures*)

(*12 points*)

On considère l'équation différentielle du premier ordre :

$$r' + r \operatorname{tg} \theta = - \frac{2 \sin \theta}{\cos^2 \theta}$$

où r est une fonction de la variable réelle θ.

1. Intégrer cette équation différentielle.
   Déterminer la solution particulière, qui prend la valeur 3 pour $\theta = 0$.

2. Dans le plan P rapporté à un repère orthonormé direct $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ [unité : 2 cm], on considère le système de coordonnées polaires d'origine O, d'axe $(O, \vec{i})$, et dans ce système, la courbe Γ d'équation polaire :

$$r(\theta) = 4 \cos \theta - \frac{1}{\cos \theta}$$

   Étudier la fonction r du réel θ.

   2.1. Montrer qu'on peut prendre comme intervalle d'étude $I = \left[0, \frac{\pi}{2} \right[$. On appellera Γ_1 la partie de Γ correspondant à cet intervalle.

   2.2. Étudier la branche infinie de Γ_1.

   2.3. Préciser la tangente à Γ_1 aux points correspondant à $\theta = 0$ et $\theta = \frac{\pi}{3}$.

   2.4. Tracer Γ_1 puis Γ.

3. Calculer, en cm², la mesure de l'aire de la portion de plan limitée par la boucle de Γ.

4. Déterminer une équation cartésienne de Γ.

5. Dans le plan P, on considère la droite D d'équation $x = -2$ et le cercle $\mathscr{C}$ de centre $\omega(4, 0)$ et passant par l'origine O du repère.
   Une droite variable Δ, passant par O, coupe D en M et $\mathscr{C}$ en N. Déterminer l'ensemble des points I, milieux des segments [M N], quand Δ varie en pivotant autour de O.

14.7 MICROMECANIQUE 80 (*durée : 3 heures*)

(*15 points*)

On considère l'équation différentielle du 1er ordre :

$$\text{(E)} \quad r' \cos \frac{\theta}{3} - r \sin \frac{\theta}{3} + \frac{r^2}{3} \cos^2 \frac{\theta}{3} = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{dr}{d\theta} \cos \frac{\theta}{3} - r \sin \frac{\theta}{3} + \frac{r^2}{3} \cos^2 \frac{\theta}{3}$$

1 - Montrer que, pour que la fonction $r : \theta \longmapsto r(\theta)$ soit solution non nulle de (E) il faut et il suffit que la fonction $z : \theta \longmapsto \frac{1}{r(\theta)}$ soit solution d'une équation différentielle du 1er ordre linéaire que l'on

En déduire la solution générale de (E).

2 - α désignant un réel ($0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$), on considère la famille des courbes (C_α) définies par l'équation polaire :

$$r = \frac{\cos \alpha}{\cos^2 \frac{\theta}{3} \sin\left(\frac{\theta}{3} - \alpha\right)} = f_\alpha(\theta) \text{ dans le repère polaire } (O,\vec{i})$$

Montrer que les courbes (C_α) sont des courbes intégrales de (E).

Dans quel intervalle faut-il faire varier θ pour obtenir (C_α) en entier une seule fois ?

3 - Tracer (C_0). Etudier avec soin ses branches infinies. Construire les tangentes aux points d'intersection de (C_0) avec l'axe polai[re.] Trouver les coordonnées cartésiennes du point double et constru[ire] les tangentes en ce point.

4 - Construire ($C_{\frac{\pi}{6}}$). Etudier avec soin ses branches infinies. Constr[uire] les tangentes aux points d'intersection de ($C_{\frac{\pi}{6}}$) avec l'axe polai[re.]

REMARQUES :

1 - On notera $(O,\vec{i},\vec{j})$ le repère orthonormé associé au repère polaire $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1$

2 - On construira (C_0) et ($C_{\frac{\pi}{6}}$) sur deux feuilles séparées.

14.8 EQUIPEMENTS TECHNIQUES DU BATIMENT 86 (durée : 4 heures)
(5 points)

---

1 - Soit l'équation différentielle :

(E) $$3r'' + r' + 12\cos 2\theta + 2\sin 2\theta = 0$$

dans laquelle θ désigne la variable et r est fonction de θ.

1-1 Résoudre l'équation (E) .

1-2 - Déterminer la solution particulière de l'équation (E) prenant la valeur $\frac{5}{2}$ pour $\theta = 0$ et la valeur $\frac{1}{2}$ pour $\theta = \frac{\pi}{2}$.

2 - Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$ dont l'unité de longueur est 2 cm.

Soit la courbe (C) d'équation :

$$r = f(\theta) = \frac{3}{2} + \cos 2\theta,$$

(θ, r) désignant les coordonnées polaires d'un point dans le repère $(O,\vec{i})$.

2-1 - Etudier la fonction f.

2-2 - Construire la courbe (C).

2-3 - Calculer en cm^2 la mesure de l'aire du domaine plan limité par la courbe (C).

14.9 ELECTROTECHNIQUE 80 (durée : 3 heures)

(11 points)

III - 1) On donne l'équation différentielle :

$$\sin\theta \frac{dr}{d\theta} - r\cos\theta = -2\sin^2\theta \sin 2\theta$$

Intégrer cette équation et chercher la solution particulière q prend la valeur zéro pour $\theta = \frac{\pi}{4}$.

2) Dans le plan rapporté à un repère orthonormé d'axes x'Ox, y'Oy (unité de longueur : 2cm), on considère la courbe C définie en coordonnées polaires par

$$r = \sin\theta \cos 2\theta$$

a) Etudier la fonction $\theta \mapsto \sin\theta\cos 2\theta$

b) Préciser :

- l'axe de symétrie de la courbe C ;
- les tangentes à la courbe C au point O ;
- les points de la courbe C où la tangente est parallèle aux axes .

c) Tracer la courbe C .

3) Déterminer une équation cartésienne de la courbe C .

4) Calculer l'aire de la surface limitée par la boucle C_1 , ensemble des points M(x,y) de la courbe C, tels que $x \geqslant 0$ et $y \geqslant 0$

CHAPITRE XV : FONCTIONS DE PLUSIEURS VARIABLES

DERIVEES PARTIELLES

15.1 INDUSTRIES DU CUIR 85 (durée : 3 heures)

(7 points)

a étant un réel strictement positif on pose $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ x^2 + y^2 = 2a^2\}$

Soit $f : C \to \mathbb{R}$
$(x, y) \mapsto x \cdot y$

1) Exprimer

a) $f(x, y)$ en fonction de $x + y$ et de a

b) $f(x, y)$ en fonction de $x - y$ et de a

2) En utilisant les expressions précédentes de $f(x, y)$ déterminer

$$E = \left\{(x, y) \in C \ / \ \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0\right\}$$

3) Déterminer les valeurs extrémales de f et les points en lesquels ces valeurs sont atteintes.

15.2 EQUIPEMENTS TECHNIQUES DU BATIMENT 81 (durée : 4 heures)

(10 points)

Le plan est rapporté à un repère orthonormé d'axes x'Ox, y'
dont la longueur unité est 2 cm.

A - Soit (C) la courbe d'équation (E) : $y^2(x + 1) + x^2(x - 1) = 0$.
On pose $F(x, y) = y^2(x + 1) + x^2(x - 1)$.

1 - Calculer les dérivées partielles du premier ordre :

$$\frac{\partial F(x, y)}{\partial x} \quad \text{et} \quad \frac{\partial F(x, y)}{\partial y}$$

2 - Déterminer les points d'intersection de la courbe (C) et de Ox.

3 - Déterminer le point où la courbe (C) admet une tangente para
à Oy.

4 - On coupe la courbe (C) par la droite (D) d'équation $y = tx$.
miner en fonction de t les coordonnées x et y du point d'int
tion M, distinct en général de O.

B - Soit la courbe définie par les équations paramétriques

$$x = \frac{1 - t^2}{1 + t^2} = f(t)$$

$$y = \frac{t(1 - t^2)}{1 + t^2} = g(t)$$

1 - Etudier les variations des fonctions f et g.
Tracer la courbe.

2 - Utiliser l'équation (E) de cette courbe pour calculer en cm^3 l volume du domaine engendré par la rotation autour de l'axe Ox la boucle de cette courbe.

C - 1 - Résoudre l'équation différentielle linéaire du premier ordre :

$$y - t\frac{dy}{dt} = \frac{4t^3}{(1 + t^2)^2}$$

Déterminer la solution particulière qui s'annule pour $t = 1$.

2 - Résoudre l'équation différentielle linéaire du second ordre :

$$\frac{d^2x}{du^2} - 2\frac{dx}{du} + 2x = -2\cos 2u + 4\sin 2u$$

Déterminer la solution particulière correspondant à

$$x = 0 \text{ et } \frac{dx}{du} = -2 \text{ pour } u = \frac{\pi}{4}$$

Exprimer cette solution particulière à l'aide de $t = \mathrm{tg}\, u$.

<u>NOTA</u> : Les parties A, B et C sont indépendantes

15.3 *ELECTRONIQUE 76 (durée : 1 h 30)*

(10 points)

1) On pose :

$$\begin{cases} X = 2y + \dfrac{y^2}{x} \\ Y = x + 2y \end{cases} \qquad (x,\ y) \in \mathbb{R}^2$$

L'expression $\omega_1 = Xdx + Ydy$ est-elle une différentielle totale ?

2) Quelle condition doit vérifier la fonction u de la variable x pour que l'expression $\omega_2 = u(x)\,Xdx + u(x)\,Ydy$ soit une différentielle totale ?
Déterminer les fonctions u répondant à la question.

3) L'une des solutions est $u(x) = x$. Déterminer la fonction f des deu variables x et y telle que :

$$\omega_3 = (2xy + y^2)\,dx + (x^2 + 2xy)\,dy$$ soit la différentielle totale

4) Résoudre l'équation différentielle (E)

$$(x^2 + 2xy)\,y' + 2xy + y^2 = 0$$

15.4 *FROID ET CLIMATISATION 80 (durée : 1 h 15)*

(5 points)

Soit la forme différentielle :

$$\omega = 2\,x\,y^2\,dx + (2\,x^2\,y + 3\,y^2)dy$$

1 - Démontrer que ω est une différentielle totale.

2 - Déterminer les fonctions U des deux variables x et y telles q $dU = \omega$.

15.5 *ELECTROTECHNIQUE 85 (durée : 3 heures)*

(5 points)

Soit la formule $Z = R + j\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)$ où j est le nombre complexe de module 1, d'argument $\frac{\pi}{2}$.

1. Déterminer $|Z|$, module de Z.

2. Calculer la différentielle totale de $|Z| = f(R, L, C)$

   avec $\omega = 300$ radian/s.

3. En déduire une limite supérieure de l'erreur commise sur $|Z|$ pour les données suivantes :

   $R = 200\ \Omega \pm 5\ \Omega$

   $L = 0{,}4\ H \pm 0{,}01\ H$

   $C = 0{,}04 \times 10^{-6}\ F \pm 2 \times 10^{-9}\ F$

SYSTEMES DIFFERENTIELS - TRANSFORMEE DE LAPLACE

15.6 *ELECTRONIQUE 78 (durée : 2 heures)*
(10 points)

1 - Résoudre le système :

$$(1)\quad \begin{cases} (p-1)X + (p+2)Y = \dfrac{p^2+p-1}{p^2-p} \\ (p+2)Y + (p+1)Z = \dfrac{2\,p^2+p-2}{p^2-p} \\ (p-1)X + (p+1)Z = \dfrac{3\,p^2+p-3}{p^2-p} \end{cases}$$

dans le seul cas où le système est régulier (formules de Cramer), c'est-à-d.
$p \in \mathbb{R} - \{0, -1, 1, -2\}$
On calculera X ; pour Y et Z on admettra les résultats suivants (sans les vérifier) :

$$Y = \frac{1}{2(p-1)(p+2)} \qquad \text{et} \qquad Z = \frac{4p^2+p-4}{2p(p-1)(p+1)}$$

2 - Décomposer en éléments simples les fractions suivantes :

$$A = \frac{2p^2+p-2}{2\,p(p-1)^2} \qquad B = \frac{1}{2(p-1)(p+2)} \qquad C = \frac{4\,p^2+p-4}{2\,p(p-1)(p+1)}$$

3 - Soit le système différentiel :

$$(2)\quad \begin{cases} x'(t) - x(t) + y'(t) + 2\,y(t) = 1 + e^t \\ y'(t) + 2\,y(t) + z'(t) + z(t) = 2 + e^t \\ x'(t) - x(t) + z'(t) + z(t) = 3 + e^t \end{cases}$$

où $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ sont trois fonctions de la variable t réelle positive, $x'(t)$, $y'(t)$, $z'(t)$ leurs dérivées respectives par rapport à t.
On se propose de chercher la solution $(x(t), y(t), z(t))$ du système (2) vé: fiant $x(0) = 1$, $y(0) = 0$ et $z(0) = 2$.
Notons $X(p)$, $Y(p)$, $Z(p)$ les transformées de Laplace respectives des foncti $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$.
Montrer que $X(p)$, $Y(p)$, $Z(p)$ sont solutions du système (1). En déduire leu: valeurs, puis le calcul de $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$. (Dans cette question on ne de- mande pas d'étude sur les conditions d'existence portant sur p).
On rappelle que les transformées de Laplace de 1, e^{at}, te^{at} sont respectivement $\dfrac{1}{p}$, $\dfrac{1}{p-a}$, $\dfrac{1}{(p-a)^2}$

On considère le système différentiel

$$(1)\quad \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y + z \\[2ex] \dfrac{dy}{dt} = x + z \\[2ex] \dfrac{dz}{dt} = x + y \end{cases}$$

où x, y, z sont trois fonctions de la variable t
avec $x(0) = 0$; $y(0) = 0$; $z(0) = 3$

A – Résoudre ce système en utilisant la transformation de Laplace si $t \in \mathbb{R}^{+*}$. On ne demande pa d'étude sur les conditions d'existence des transformées de Laplace de x(t) y(t), z(t). On rappel que la transformée de Laplace de e^{-at} est $\dfrac{1}{p+a}$

B – 1. Déterminer la matrice carrée d'ordre 3, A, telle que le système (1) soit équivalent à l'équati matricielle :

$$(2)\quad \begin{pmatrix} \dfrac{dx}{dt} \\[2ex] \dfrac{dy}{dt} \\[2ex] \dfrac{dz}{dt} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

2. On considère l'application linéaire f de $\mathbb{R}^3$ vers $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base $B = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ est :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Déterminer les valeurs propres de A et les vecteurs propres associés.

3. On définit les vecteurs $\vec{u_1}$, $\vec{u_2}$ et $\vec{u_3}$ par leurs composantes sur la base B

$\vec{u_1}$: $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\vec{u_2}$: $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ $\vec{u_3}$: $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Montrer que $(\vec{u_1}, \vec{u_2}, \vec{u_3})$ sont trois vecteurs propres de f.

Montrer que $B_1 = (\vec{u_1}, \vec{u_2}, \vec{u_3})$ est une base de $\mathbb{R}^3$

4. Soit la matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

Déterminer la matrice $D = P^{-1} A P$

5. Soit X le vecteur de composantes (x, y, z) dans B et (x_1, y_1, z_1) dans B_1 ;

soit $\dfrac{dX}{dt}$ le vecteur de composantes $\dfrac{dx}{dt}, \dfrac{dy}{dt}, \dfrac{dz}{dt}$ dans B et $\dfrac{dx_1}{dt}, \dfrac{dy_1}{dt}, \dfrac{dz_1}{dt}$ dans B_1

Sachant que $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$

Montrer que $\begin{pmatrix} \dfrac{dx}{dt} \\ \dfrac{dy}{dt} \\ \dfrac{dz}{dt} \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} \dfrac{dx_1}{dt} \\ \dfrac{dy_1}{dt} \\ \dfrac{dz_1}{dt} \end{pmatrix}$

et que l'équation (2) est équivalente à (3) $\begin{pmatrix} \dfrac{dx_1}{dt} \\ \dfrac{dy_1}{dt} \\ \dfrac{dz_1}{dt} \end{pmatrix} = D \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$

6. De l'équation matricielle (3) déduire les fonctions x_1, y_1, z_1 de la variable t. En déduire les solutions du système (1).

L'usage de la calculatrice programmable autonome sans imprimante et des tables numériques est autori

Exercice I (7 points)

1°) Calculer $I(x) = \int_0^x t\,e^{-(p+1)t}\,dt$ sachant que p est un réel positif.

En déduire que la transformée de Laplace de te^{-t} est $\dfrac{1}{(p+1)^2}$

2°) Résoudre le système différentiel :

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dt} = -y_1 + 3y_2 \\[2ex] \dfrac{dy_2}{dt} = 2y_2 \\[2ex] \dfrac{dy_3}{dt} = 2y_1 + y_2 - y_3 \end{cases}$$

où y_1, y_2, y_3 sont trois fonctions de la variable réelle t positive telles que $y_1(o) = 1$, $y_2(o) = -1$ et $y_3(o) = o$. On ne demande pas d'étude sur les conditions d'existence des transformées de Laplace de $y_1(t)$, $y_2(t)$, $y_3(t)$.

On rappelle que la transformée de Laplace de e^{-at} est $\dfrac{1}{p+a}$

CHAPITRE XVI : SERIES ENTIERES

SERIES ENTIERES

16.1 *ELECTRONIQUE 77 (durée : 2 heures)*
(10 points)

1 - Donner le développement limité, à l'ordre 3, au voisinage de $u = 0$, de $g(u) = \text{Log}(1 + u)$
Log(1 + u) désigne le logarithme népérien de 1 + u.

2 - Calculer $\lim_{x \to +\infty} (1 + \frac{1}{x})^x$

3 - Etudier les variations de la fonction $h : x \longmapsto h(x) = \text{Log}(1 + \frac{1}{x}) - \frac{1}{1 + x}$
On ne déterminera pas les limites suivantes $\lim_{x \to -1^-} h(x)$ et $\lim_{x \to 0^+} h(x)$
On ne tracera pas la courbe représentative de la fonction h.

4 - Soit f la fonction $f : x \longmapsto f(x) = (1 + \frac{1}{x})^x$. Etudier les variations de l fonction f et en tracer la courbe représentative. (On déduira le signe dérivée de f de l'étude faite à la question 3). On justifiera avec soin les résultats concernant les limites (notamment pour la demi-tangente au point d'arrêt).

5 - Soit la série entière de terme général $U_n = (1 + \frac{1}{n})^n x^n$, $n \in \mathbb{N}^*$, $x \in \mathbb{R}$.
Quel est le rayon de convergence ? Que se passe-t-il si $|x| = 1$?

16.2 *ELECTRONIQUE 81 (11 points)*

Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$f(x) = 4 \text{ Log } (1 + x) - \frac{x(2 + x)}{1 + x}$ (Log x désigne le logarithme népérien du nombre réel x).

1 - Etablir le tableau de variation de la fonction f . On se limite ce qui concerne les extrema, à donner des valeurs approchées à 1 près.

2 - Donner un développement limité à l'ordre 3 de la fonction f au voisinage de zéro. En déduire la position de la courbe $\mathcal{C}$ d'équation $y = f(x)$ par rapport à la tangente à l'origine à cette courbe.

3 - Construire la courbe $\mathcal{C}$ dans un repère orthonormé (Unité : 2 cm)

4 - Soit la série numérique de terme général $U_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n \left(\frac{n-4}{n}\right)$ pour $n \geqslant 1$. Etudier la convergence de cette série.

5 - Développer f en série entière, en précisant le rayon de convergen

6 - Calculer $S = \sum_{n=2}^{+\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n \left(\frac{n-4}{n}\right)$. On pourra remarquer que $S = f(a)$ - pour une valeur bien choisie de a.

16.3 ELECTRONIQUE 83 (4 points) *corrigé*

---

1. **Donner le développement en série entière de $\frac{1}{1-x}$. En déduire le développement en série entière de la fonction f telle que $f(x) = \frac{x}{(1-x)^2}$; quel est le rayon de convergence de la série obtenue ?**

2. Utiliser les résultats précédents pour calculer la somme de la série numérique de terme général $\frac{n}{2^n}$.

16.4 ELECTRONICIEN 85 (5 points)

1°) Etudier la nature de la série numérique de terme général

$$u_n = \frac{1}{2^n\,(2n+1)}$$

2°) Soit la fonction numérique définie sur l'intervalle $]-1, 1[$ par

$$f(x) = \ln \frac{1+x}{1-x}$$

(la notation ln désigne le logarithme népérien).

Déterminer le développement en série entière de f. Préciser le rayon de convergence de la série obtenue et l'intervalle de convergence.

3°) Utiliser les résultats du 2° pour calculer la somme de la série numérique de terme général

$$u_n = \frac{1}{2^n\,(2n+1)} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

CHAPITRE XVII : SERIES DE FOURIER

17.1 *CHIMISTE 85 (durée : 1 h 5)*

(5 points)

Développer en série de Fourier la fonction périodique f, de période 2π, définie par $f(x) =$ si $x \in [0, \pi]$ et $f(x) = 0$ si $x \in [\pi, 2\pi]$.

17.2 *ELECTROTECHNIQUE 80 (durée : 3 heures)* *co.*

(5 points)

I - Développer en série de Fourier la fonction f, paire, de pério définie dans l'intervalle $[o,\pi]$ par $f(x) = x$.

En déduire que : $\dfrac{\pi^2}{8} = 1 + \dfrac{1}{3^2} + \dfrac{1}{5^2} + \dfrac{1}{7^2} + \ldots + \dfrac{1}{(2p+1)^2} + \ldots$

17.3 *ELECTROTECHNIQUE 85 (7 points)*

On considère la fonction numérique, périodique de période $T = 2\pi$, définie par :

$$\begin{cases} -\pi \leqslant x \leqslant o & f(x) = \sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) \\ o \leqslant x \leqslant \pi & f(x) = \cos\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) \end{cases}$$

1. Montrer que f est une fonction paire

2. a) f est-elle dérivable sur $[-\pi, \pi]$?

   b) représenter graphiquement f dans un repère $(o, \vec{i}, \vec{j})$.

3. a) déterminer les coefficients a_o, a_1, a_n, b_n du développement en série de Fourier de f, (on compte de la parité de n).

4. Utiliser le développement en série de Fourier de f pour vérifier l'égalité :

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{15} + \frac{1}{35} + \frac{1}{63} + \cdots + \frac{1}{4p^2 - 1} + \cdots$$

où p est élément de $\mathbb{N}^*$

17.4 ELECTRONIQUE 77 (durée : (2 heures)
(10 points)

1 - Calculer les intégrales :

$$I = \int_a^b x \cos n\omega x \, dx$$

$$\text{et} \quad J = \int_a^b x \sin n\omega x \, dx$$

2 - Soit la fonction f, périodique, de période $T = \pi$, définie par :
si $0 \leqslant x \leqslant \frac{2\pi}{3}$ $\quad f(x) = \frac{3}{4} x$; si $\frac{2\pi}{3} \leqslant x \leqslant \pi$ $\quad f(x) = \frac{3}{2} (\pi - x)$

2.1. - Tracer le graphe de la fonction f.

2.2. - Calculer la valeur moyenne de la fonction f sur l'intervalle $[0, \pi]$

3 - Soit $a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega x + b_n \sin n\omega x)$ le développement de la fonction en série de Fourier.

3.1. - Calculer ω et a_0.

3.2. - Montrer que, pour $n \geqslant 1$, $a_n = \frac{-9}{8 n^2 \pi} (1 - \cos \frac{4 n\pi}{3})$ et

$$b_n = \frac{9}{8 n^2 \pi} \sin \frac{4 n \pi}{3}$$

3.3. - Que deviennent les coefficients a_n et b_n lorsque $n = 3p$, $n = 3p$
$n = 3p + 2$?

17.5 ELECTRONIQUE 79 (10 points)

1 - Soit la série numérique de terme général :

$$n \geqslant 1 \qquad u_n = \frac{(-1)^n e^{-\pi} - 1}{1 + n^2}$$

Montrer que $|u_n|$ est majorée par une expression simple de n^2 et en dédui que la série de terme général u_n est convergente.

2 - Calculer les intégrales

$$\int_0^{\pi} e^{-x} \cos n x \, dx \qquad \text{et} \qquad \int_0^{\pi} e^{-x} \sin n x \, dx$$

3 - Soit la fonction f, périodique de période 2π définie par :

$$\begin{cases} x \in [0, \pi[& f(x) = 1 - e^{-x} \\ x \in [\pi, 2\pi[& f(x) = 0 \end{cases}$$

3.1. - Tracer la courbe représentant f pour $x \in [-\pi, +3\pi]$

3.2. - f est-elle développable en série de Fourier ? Préciser la valeu la somme de la série de Fourier associée à f pour $x \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$

3.3. - En se servant des résultats du 2 -, calculer les coefficients d Fourier. On donnera les résultats en distinguant n impair et n

4 - Donner la valeur de la somme de la série de Fourier pour $x = 0$. En déd la somme de la série numérique de terme général u_n proposée au 1 -.

17.6 ELECTRONIQUE 82 (8 points)

On considère la fonction numérique de la variable réelle x, de période 2π, définie sur $]-\pi, +\pi[$ par f(

1 - Préciser pourquoi cette fonction est développable en série de Fourier.

2 - Déterminer le développement en série de Fourier de f. Que vaut ce développement pour $x = \pi$?

3 - Démontrer que la série de terme général $u_n = \dfrac{(-1)^n}{2n+1}$, ($n \in \mathbb{N}$), est convergente.

4 - En faisant $x = \dfrac{\pi}{2}$ dans le développement en série de Fourier de f, déterminer la valeur de la somm

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$$

17.7 ELECTRONICIEN 86 (6 points) *corr*

Le but de l'exercice est le calcul de la somme d'une série numérique, en utilisant le développement e série de Fourier d'une fonction.

1 – Soit la série numérique dont le terme général est $u_n = \dfrac{1}{n^2}$.

(n est un entier naturel non nul).

Cette série est-elle convergente ?

Justifier brièvement la réponse.

2 — Calculer les intégrales définies suivantes :

$$I_n = \int_0^{\pi} (x - \pi) \sin (nx)\, dx$$

$$J_n = \int_0^{\pi} (x - \pi)^2 \cos (nx)\, dx$$

(n est un entier naturel non nul).

3 — Soit f la fonction paire, périodique, de période 2π définie par :

$$x \in [0, \pi] \quad : \quad f(x) = (x - \pi)^2$$

Donner le développement de la fonction f en série de Fourier.

4 — En utilisant le résultat précédent, calculer la somme $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

CHAPITRE XVIII : INTEGRALES DOUBLES

18.1 *INDUSTRIES DU BOIS 78 (durée : 3 heures)*

(3 points)

Calculer $\iint_{\mathcal{D}} (xy + 1)dxdy$ où le domaine $\mathcal{D}$ est défini par :

$$x \geqslant 0$$
$$y \geqslant 0$$
$$x^2 + y^2 \leqslant 1$$

18.2 *ELECTRONIQUE 79 (durée : 2 heures)*

(10 points)

1 - Déterminer la solution $y = f(x)$ de l'équation différentielle :

$$2(x - 2)y - (x - 2)^2y' = 6 + 4(x - 2) \log(x - 2)$$

telle que $f(3) = 3$.

2 - Tracer la courbe C_f représentative en repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ de fonction f :

$$x \xrightarrow{f} f(x) = 2 \operatorname{Log}(x - 2) + \frac{x}{x - 2}$$

3 - Soit (D) le domaine plan délimité par C_f , l'axe des abscisses et le tes d'équations $(x = + 3)$ et $(x = + 4)$.

Calculer l'intégrale double :

$$I = \iint_{(D)} x \, dxdy$$

4 - 4.1. - En utilisant la courbe C_f , montrer que :

$$\forall x \in \left]+ 3, + \infty\right[, \qquad f(x) < x$$

4.2. - On considère la série (u_n) de terme général $u_n = \frac{1}{f(n)}$, avec rieur ou égal à 4.

Démontrer qu'elle est divergente.

18.3 *INDUSTRIES DU CUIR 85 (durée : 3 heures)*

(6 points)

Le plan P étant rapporté au repère orthonormé $(o\ ;\ \vec{i}, \vec{j})$, soit D l'ensemble des points M du plan de coordonnées x, y tels que :

$x\,(x-2) < 0$ et $(y-x)\,(y-x^2) < 0$

1) Représenter D dans P.

2) Calculer les intégrales :

$$A = \iint_D dx\,dy$$

$$I = \iint_D x\,e^y\,dx\,dy$$

CHAPITRE XIX : CINEMATIQUE

19.1 *INDUSTRIES DU CUIR 85 (durée : 3 heures)*
(7 points)

Dans le plan P rapporté au repère orthonormé $(0 ; \vec{i}, \vec{j})$, (unité : 1 cm), on considère le point mobile M tel que $\overrightarrow{OM} = 4 \operatorname{ch} t \, \vec{i} - \operatorname{sh}^2 t \, \vec{j}$, avec $t \in \mathbb{R}_+$

1) Déterminer une équation cartésienne de la trajectoire de M et représenter cette trajectoire dans le plan P rapporté au repère indiqué.

2) Déterminer le vecteur vitesse $\overrightarrow{V(t)}$ et le vecteur accélération $\overrightarrow{A(t)}$ du mobile M à l'instant t

3) Déterminer l'allure du mouvement. Est-il accéléré ? Est-il retardé ?

4) Déterminer à quel instant on a $\|\overrightarrow{V(t)}\| = 2$ et donner une valeur approchée de cet instant avec une erreur inférieure à $\frac{1}{2} . 10^{-2}$.

GEOMETRIE

CHAPITRE XX : GEOMETRIE ANALYTIQUE

DANS LE PLAN

20.1 BUREAU D'ETUDE 84 (durée : 4 heures)

(4 points)

Dans un repère plan orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on considère les points A et B de coordonnées respectiv
(6,0) et (1,5).

1. Déterminer les équations cartésiennes :

   – des hauteurs du triangle OAB, passant respectivement par A et B ;

   – des médiatrices des côtés [O,A] et [O,B]

2. Calculer les coordonnées :

   du point O' intersection des médiatrices ;

   du point H, intersection des hauteurs ;

   et du point H' symétrique du point H par rapport à la droite OA.

3. Déterminer une équation cartésienne du cercle C, circonscrit au triangle OAB et vérifier que H appartient à C.

DANS L'ESPACE

20.2 FORGE ET ESTAMPAGE 85 (durée : 2 heures)

(5 points)

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, (unité : 1 cm).

On donne les points A (2,2,6), B (1,-2,2), C (3,5,-1), D (-2,3,1).

1) Calculer l'angle des arêtes [AB] et [AC] du tétraèdre ABCD. On donnera une mesure de cet angle en degrés à 10^{-2} près.

2) Calculer la distance de A à la droite (BC). Elle sera donnée en cm, à 10^{-2} près.

20.3 BUREAU D' ETUDES 81 (durée : 4 heures)

(4 points)

Dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on considère les trois points

$A(1,2,2)$; $B(2,3,2)$; $C(2,-1,0)$.

Dans le plan défini par ces trois points, on considère le triangle ABC.

1/ Calculer le produit vectoriel $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$.

2/ En déduire l'aire du triangle ABC.

3/ Calculer la distance du point A au côté BC du triangle.

20.4 BUREAU D'ETUDES 83 (durée : 4 heures)

(4 points) *corrigé*

L'espace affine étant rapporté au repère orthonormé direct $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on considère les trois points :

$A(1, 2, 3)$ $B(2, 3, 1)$ et $C(3, 1, 2)$.

1. Calculer les composantes du vecteur $\vec{u} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$. En déduire la mesure, en unités d'aire, de l'aire du triangle (A, B, C).

2. $M(x, y, z)$ étant un point quelconque de l'espace, calculer les composantes du vecteur $\vec{v} = \overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{MB}$, puis calculer le produit scalaire $\vec{v}.\overrightarrow{MC}$. En déduire une équation cartésienne du plan (A, B, C).

20.5 FABRICATIONS MECANIQUES 76 (durée : 3 heures)

(6 points)

Dans un repère orthonormé $(O,\vec{i}, \vec{j}, \vec{k},)$ on donne les quatre points $A(2,1,-3)$ $B(1,-1,-1)$ $C(0,-3,1)$ $D(-4,1,3)$.

1) Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{CB}.\overrightarrow{CD}$; en déduire la mesure de l'angle $\widehat{BCD}$.

2) Calculer les composantes du vecteur $\vec{W} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD}$ puis le produit scalaire $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}$; en déduire :

a) $\cos \widehat{BAD}$, $\sin \widehat{BAD}$, puis la mesure de l'angle $\widehat{BAD}$.

b) L'aire du triangle ABD.

3) Calculer le produit scalaire $\vec{W}.\overrightarrow{CD}$. Que peut-on en déduire pour les quatre points A, B, C, D, ?

20.6 *FONDERIE SUR MODELE 85 (durée : 4 heures)*

(9 points)

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ (unité : 1 cm), on considère les points :

A $(2, -2, 3)$, B $(4, -6, -1)$ et C $(0, -1, 5)$

1) Déterminer les coordonnées des vecteurs $\vec{AB}$, $\vec{AC}$ et $\vec{BC}$.

2) Calculer en cm les mesures des longueurs de chacun des côtés du triangle ABC.

3) Calculer les coordonnées du vecteur $\vec{AB} \wedge \vec{AC}$.

4) Déterminer en cm^2 la mesure de l'aire du triangle ABC.

5) Calculer la distance du point A à la droite (BC).

6) Calculer les produits scalaires $\vec{OA} \cdot \vec{AB}$ et $\vec{OA} \cdot \vec{AC}$. En déduire la position de la droite (OA) par rapport au plan (ABC).

20.7 *BUREAU D'ETUDES 86 (durée :4 heures)*

(5 points)

On considère un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de l'espace euclidien de dimension 3.

1 – Déterminer une équation cartésienne de la sphère S de centre I $(1, 1, -1)$ et de rayon 3

2 – Soit P le plan dont une équation cartésienne est $2x + y + z = 0$.

Vérifier que le plan P contient les points O, A $(-1; 0; 2)$ et B $(-1; 2; 0)$.

3 – Soit Δ la droite passant par I et orthogonale au plan P. Déterminer les coordonnées d[u point] d'intersection E de la droite Δ avec le plan P.

4 – En déduire que l'intersection de la sphère S et du plan P est un cercle $\mathscr{C}$ dont on donn[era le] centre et le rayon.

5 – Calculer les coordonnées des points d'intersection M et N de la droite Δ et de la sphè[re S.] Déterminer les équations cartésiennes des plans tangents en M et N à la sphère S.

CHAPITRE XXI: CONIQUES

21.1 BUREAU D'ETUDES 82 (durée : 4 heures)

(4 points) corrigé

Le plan P est rapporté au repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On considè
la parabole $\mathcal{C}$ d'équation : $y^2 = 4x$.

1. Soit M le point de $\mathcal{C}$ d'ordonnée 2λ $(\lambda \in \mathbb{R})$, trouver en foncti
de λ une équation de la normale à $\mathcal{C}$ en M.

2. Déterminer les équations paramétriques de l'enveloppe Γ de l
famille de normales à $\mathcal{C}$.

3. Tracer $\mathcal{C}$ et Γ dans le plan P.

21.2 ADJOINT TECHNIQUE D'ENTREPRISES DU BATIMENT 79 (durée : 3 heures)

(10 points) corrigé

Le plan euclidien est rapporté au repère orthonormé d'axes
y'Oy.

1 - Soit la famille de conique (C_λ) d'équations :

$$(y - 2x)^2 = \lambda(1 - x^2)$$

1.1. Montrer que chacune de ces coniques passe par deux points dont on déterminera les coordonnées.

1.2. Etudier la fonction numérique f définie par :
$f(x) = 2x + 2\sqrt{1 - x^2}$
Tracer sa courbe représentative.
En déduire le tracé de la courbe (C_4).

2 - Soit l'équation différentielle du 1er ordre :

$$(1 - x^2)y' + xy = 2$$

2.1. Déterminer une solution particulière de la forme y = ax
Résoudre l'équation différentielle sans second membre pu
l'équation différentielle proposée.

2.2. Les courbes intégrales sont-elles les coniques de la fam
(C_λ) ?

2.3. Déterminer la courbe intégrale Γ qui contient le point A
coordonnées (x = 2, y = 1). Tracer Γ .

21.3 ADJOINT TEHNIQUE D'ENTREPRISES DES TP 83 (durée : 3 heures)

(10 points)

Dans le plan affine euclidien rapporté au repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$, (unité : 1 cm), on considère la fam de courbes $(\mathcal{C}_\alpha)$ d'équation :

$$x^2 + 3y^2 - 6\alpha y = 0 \qquad \text{où } \alpha \text{ est un paramètre réel.}$$

1. Préciser la nature des courbes $(\mathcal{C}_\alpha)$ et représenter sur un même dessin $(\mathcal{C}_{-1})$, $(\mathcal{C}_1)$ et $(\mathcal{C}_2)$; on détermin dans chacun des cas les éléments remarquables.

2. Déterminer l'équation différentielle de la famille des courbes $(\mathcal{C}_\alpha)$.

3. Écrire l'équation de l'isocline relative à la pente m ($m \in \mathbb{R}$). Préciser et tracer l'isocline relative à $m = 0$ puis $m = 1$. Démontrer que dans le cas général les isoclines forment une double famille de droites.

4. Former l'équation différentielle des trajectoires orthogonales des courbes $(\mathcal{C}_\alpha)$. Intégrer cette dernière équati différentielle et donner sous forme paramétrique les équations des trajectoires orthogonales des courbes $(\mathcal{C}_\alpha)$.

5. On considère les fonctions numériques f et g de la variable réelle t telles que :

$$f(t) = t^2 - 1 \qquad \text{et} \qquad g(t) = t(t^2 - 1)$$

On désigne par (Γ) la courbe d'équations paramétriques :

$\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}$ dans un plan rapporté à un repère orthonormé d'axes Ox et Oy (unité : 3 cm).

5.1. Étudier les variations des fonctions f et g et rassembler les résultats dans un tableau unique.

5.2. Tracer la courbe (Γ). On étudiera les branches infinies et on précisera les points remarquables ainsi que le tangentes à (Γ) en ces points.

5.3. Calculer, en cm², la mesure de l'aire du domaine plan compris à l'intérieur de la boucle de (Γ).

21.4 OPTICIEN LUNETIER (durée : 2 heures)

(11 points)

Les parties II et III du problème sont indépendantes.

Dans le plan P rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ (unité : 2 cm), on considère la famille des coniques (Γ_λ) d'équation :

$$\lambda(y^2 - 2x) + x^2 - 5x + y^2 - \sqrt{2}\,y = 0$$

λ désignant un paramètre réel.
On note (Γ) la parabole d'équation $y^2 - 2x = 0$.

I

1. Pour quelles valeurs de λ (Γ_λ) est-elle une conique à centre ? Montrer alors que l'ensemble des centres de ces coniques est la courbe notée $(\mathcal{H})$ d'équation :

$y = \dfrac{\sqrt{2}}{2x-3}$. Quelle est la nature de $(\mathcal{H})$? Construire $(\mathcal{H})$ dans le plan P.

2. Pour quelle valeur de λ (Γ_λ) est-elle un cercle ? Trouver son centre et son rayon. Soit $A\left(\frac{5}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$; montrer que A appartient à $(\mathcal{H})$.

II – Dans cette seconde partie, on considère (Γ_1) obtenue pour $\lambda = 1$

1. Quelle est la nature de (Γ_1) ?

2. Ecrire l'équation d'une normale à (Γ_1) en un point quelconque M_0 (x_0, y_0) de (Γ_1).

3. Montrer que, pour qu'une normale à (Γ_1) passe par A, il faut et il suffit que le point d'incidence de cette normale appartienne à $(\mathcal{H})$.

III – Dans cette troisième partie, on considère la parabole (Γ)

1. Ecrire l'équation d'une normale à (Γ) en un point quelconque.

2. Montrer que, pour qu'une normale à (Γ) passe par A, il faut et il suffit que le point d'incidence de cette normale appartienne à $(\mathcal{H})$.

3. Ecrire l'équation aux abscisses des points d'intersection de (Γ) et $(\mathcal{H})$ et en déduire les coordonnées de ces points (on obtient 3 points M_1, M_2, M_3 en lesquels les normales à (Γ) passent donc par A). Montrer que les normales à (Γ) en deux de ces trois points sont orthogonales.

4. Montrer que la somme des ordonnées des 3 points M_1, M_2, M_3 est nulle et en déduire que le centre de gravité du triangle (M_1, M_2, M_3) appartient à l'axe de (Γ).

5. Construire, avec soin et en tenant compte des résultats obtenus, la courbe (Γ) dans le plan P.

STATISTIQUES ET PROBABILITES

CHAPITRE XXII : AJUSTEMENT AFFINE

22.1 *ARCHITECTURE INTERIEURE 85 (durée : 2 heures)*

(10 points)

Le mur d'une habitation est constitué par une couche de béton et couche de polystyrène d'épaisseur variable x (en cm).
On a mesuré la résistance thermique R de ce mur pour diverses va de x, et on a obtenu les résultats suivants :

X	2	4	6	8	10	12	15	20
R	0,83	1,34	1,63	2,29	2,44	2,93	4,06	4,48

1 - Représenter graphiquement cette série : x en abscisses
R en ordonnées

- Peut-on envisager un ajustement linéaire ?

2 - Calculer le coefficient de corrélation linéaire entre x et
Conclusion ?

3 - Déterminer, par la méthode des moindres carrés, une équation de la droite de régression de R en x.
Tracer cette droite sur le graphique.

4 - Quelle résistance thermique peut-on espérer obtenir avec un couche de polystyrène de 25 cm ?

22.2 *FABRICATIONS TEXTILES 85 (durée : 4 heures)*

(5 points)

Comme son chiffre d'affaires est connu avec retard, une entreprise choisit de l'estimer par l'inte diaire d'une autre grandeur dont la valeur peut être connue rapidement. Elle choisira celle qui avec le chiffre d'affaires le plus fort coefficient de corrélation linéaire.

On note :

X le chiffre d'affaires, mesuré en millions de francs,

Y les sorties de matières premières, mesurées en tonnes,

Z les salaires et primes, mesurés en millions de francs,

variables dont les mesures ont donné, sur 6 mois de l'année précédente, les résultats suivants :

numéro du mois	1	2	3	4	5	6
X	36	40	32	32	41	35
Y	0,9	1,2	0,6	0,5	1,4	1,0
Z	3,9	3,7	3,2	3,1	3,6	3,7

1. Calculer les coefficients de corrélation r_1 entre X et Y et r_2 entre X et Z.

2. Si les mesures du mois sont :

   — consommation de matières premières : 1,105 t
   — salaires et primes versés : 2, 99832 MF
   donner la meilleure approximation du chiffre d'affaires du mois.

22.3 *MATHEMATIQUES APPLIQUEES A L'INFORMATIQUE INDUSTRIELLE 85 (durée : 4 h)*

(10 points)

Dans une population on considère deux caractères statistiques quantitatifs strictement positifs X et Y. On considère également U = ln X et V = ln Y qui sont deux autres caractères statistiques quantitatifs de cette population. La notation ln signifie logarithme népérien.

On prélève huit individus témoins, numéroté de 1 à 8, dans la population. Sur chacun de ces huit échantillons témoins on effectue une mesure de X et de Y. Les résultats sont mentionnés dans le tableau suivant :

Tableau des résultats des mesures de X et de Y

N° de l'individu témoin	1	2	3	4	5	6	7	8
X	0,2	0,8	1,5	2,2	3,4	4,5	6,1	7
Y	0,035	0,11	0,7	4,1	5,8	12,9	21	22,5
U = ln(x)								
V = ln(y)								

1°) Reproduire sur la copie, en le complétant, le tableau précédent.

2°) On veut effectuer un ajustement linéaire de V en U, par la méthode des moindres carrés, sous la forme V = aU + b

a) calculer : la moyenne, la variance et l'écart-type de U et de V
la covariance du couple (U, V)
le coefficient de corrélation linéaire de U et V

Que peut-on déduire de la valeur de ce coefficient dans le cas présent ?

③ Des égalités $U = \ln(X)$ et $V = \ln(Y)$ et de l'ajustement linéaire de V en U précédent, déduire un ajustement de Y en X de la forme $Y = cX^d$ (on doit déterminer c et d)

④ Dans une population on considère deux caractères quantitatifs strictement positifs X et Y. On prélève un certain nombre N d'individus témoins dans cette population. Sur chaque individu témoin on effectue une mesure de X et de Y.

En s'inspirant de l'étude précédente, écrire un programme en langage évolué qui effectue un ajustement de Y en X sous la forme $Y = cX^d$ en fonction des résultats des N mesures conjointes de X et de Y effectuées.

22.4 ANALYSES BIOLOGIQUES 79 (durée : 3 heures)

(10 points)

On a administré une drogue à cinquante rats partagés en cinq grou
de dix rats chacun.

Pour le premier groupe la dose administrée est 1 unité, pour le s
2 unités, pour le troisième 3 unités, pour le quatrième 4 unités et pour le
cinquième 6 unités.

En mesurant les performances de ces rats sous l'influence des dos
administrées on obtient dans chaque groupe les résultats moyens suivants :

groupes i	1	2	3	4	
nombre d'unités administrées : u_i	1	2	3	4	
résultats moyens des mesures : y_i	9,4	13	16,9	20	2

1 - Dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ tracer les points M_i d'abscisse $x_i = \log u_i$ et d'ordonnée y_i pour $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$.
Le symbole log désigne le logarithme décimal.
<u>unités choisies</u> : en abscisse 15 cm pour une unité,
en ordonnée 1 cm pour une unité.

2 - La disposition du nuage de points permet de procéder à un ajustement l
Déterminer une équation dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ de la droite D d'ajus
(ou de régression) de y par rapport à x obtenue par la méthode des moi
carrés à partir des couples (x_i , y_i) où $x_i = \log n_i$ pour $i \in \{1, 2, 3$

Les valeurs de x_i utilisées pour les calculs seront données à 10^{-2} près.
Construire la droite D dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
Déduire de l'équation de D, le résultat moyen estimé, relatif à un groupe de dix rats, pour une dose administrée de 8 unités.
Vérifier graphiquement ce résultat.

22.5 ANALYSES BIOLOGIQUES 82

I - EXERCICE

On dispose d'un test biologique pour le diagnostic d'une maladie qui frappe trois pour cent d'une population. Ce test donne une réponse positive chez 98 % des malades alors que cette réponse est négative chez 95 % des non-malades.
Si l'on décidait d'un traitement pour les sujets ayant une réaction positive au test, quelle serait statistiquement la proportion, parmi les sujets traités, de ceux traités à tort ?

II - PROBLEME

1 - On considère la fonction numérique f de la variable réelle définie par :

$$f(x) = \ln \frac{x}{1-x}$$

(le symbole ln désigne la fonction logarithme népérien).

1.1 - Déterminer le domaine de définition de la fonction f. Etudier les variations de f et dresser un tableau de variation. Représenter f dans un plan rapporté à un repère orthogonal (on choisira convenablement les graduations sur les axes).

1.2 - Montrer que f est une bijection de $]0, 1[$ sur $\mathbb{R}$. Déterminer f^{-1}.

2 - On considère la série statistique double (T, X) dont les valeurs sont données par le tableau :

T	20	30	35	40	45	50	55	60	65	70	80
X	0,05	0,10	0,15	0,27	0,40	0,52	0,70	0,80	0,87	0,90	0,95

2.1 - Dresser un tableau des valeurs de la série (T, U) avec $U = \ln \frac{X}{1-X}$

2.2 - Représenter graphiquement la série (T, U).

2.3 - Déterminer par la méthode des moindres carrés, les coefficients a et b de l'équation de la droite d'ajustement linéaire : $U = aT + b$.

2.4 - En déduire une relation empirique entre X et T.

3 - Dans une réaction de destruction spontanée d'un solide, Δm représente la masse détruite, m_0 la n
initiale et $x = \dfrac{\Delta m}{m_0}$ le taux de destruction, fonction du temps.

On désigne par y le nombre de points où la réaction est amorcée, ce nombre est également fonctio
temps. Nous admettons les relations :

$$(R_1) \quad \frac{dy}{dt} = \alpha(1 - 2x)\,y \qquad\qquad (R_2) \quad \frac{dx}{dt} = \beta y$$

où α et β sont des constantes. On suppose que y s'annule pour $x = 0$ sans être identiquement nul.

3.1 - Déterminer $\dfrac{dy}{dx}$ à partir de (R_1) et (R_2) et intégrer l'équation différentielle obtenue.

3.2 - Intégrer l'équation (R_2) pour $x \in]0, 1[$ sachant que $x = 0,5$ pour $t = 50$.

3.3 - Sachant en outre que $x = 0,1$ pour $t = 30$, déterminer l'expression de x en fonction de t.

Quelle relation peut-on établir avec la partie 2 ?

22.6 *ANALYSES BIOLOGIQUES 84 (12 points)*

Les questions 3 et 4 sont indépendantes des questions 1 et 2 .

Soit la réaction chimique A + B $\longrightarrow$ «Produits». A l'instant $t = 0$, les concentrations [A], [
[Produits] sont respectivement a, b et o.

A un instant t quelconque ($t > 0$), ces concentrations sont respectivement : $(a - y)$, $(b - y)$

La vitesse de réaction est proportionnelle au produit [A]. [B] :

$$V = \frac{dy}{dt} = k\,(a - y)\,(b - y)$$

Question 1 On sait que $k = A.\,e^{-\frac{E_a}{RT}}$

(NB : k est mesuré en $min^{-1} . mol^{-1} . dm^3$; E_a en $J. mol^{-1}$;

R en $J.K^{-1} . mol^{-1}$, et on sait que $R \cong 8,316$; T en °K)

à la température $T_1 = 300$, on a $k_1 = 2,5$.

à la température $T_2 = 400$, on a $k_2 = 10$.

1. a) En déduire la valeur de E_a, puis celle de A.

1. b) Exprimer $y = \ln k$ en fonction de $x = \dfrac{1}{T}$ et représenter graphiquement la fonction $y = f(x)$ pour T variant de 250 à 400 (ln désigne la fonction logarithme népérien).

Question (2) On veut déterminer expérimentalement les valeurs de Ea et de A à partir du tableau de résultats suivant :

T	250	300	350	400	500	(en °K)
k	0,23	1,4	5,5	15	60	(en $min^{-1} . mol^{-1} . dm^3$

2. a) Représenter graphiquement $y = \ln k$ en fonction de $x = \dfrac{1}{T}$

2. b) Déterminer, par la méthode des moindres carrés, l'équation de la droite $y = \alpha x + \beta$ passant au plus près de l'ensemble des 5 points.

2. c) En déduire l'expression de k en fonction de T, et la valeur de E_a.

Question (3) A température constante, la vitesse de réaction est

$$V = \frac{dy}{dt} = k\,(a - y)\,(b - y) \quad \text{où k est constante } (k > 0).$$

Cette équation différentielle peut s'écrire :

$$\frac{y'}{(a - y)\,(b - y)} = k,$$ où y' est la dérivée de y par rapport au temps t, c'est-à-dire la vitesse V.

3. a) Vérifier que $\dfrac{1}{(a - y)\,(b - y)} = \dfrac{1}{a - b}\left[\dfrac{1}{b - y} - \dfrac{1}{a - y}\right]$

3. b) Résoudre alors l'équation différentielle, sachant que l'on a $y = 0$ pour $t = 0$.

Question 4 Soit la fonction $y = ab \cdot \dfrac{e^{k(a-b)t} - 1}{a \cdot e^{k(a-b)t} - b}$

(Cette fonction est d'ailleurs la solution de l'équation différentielle de la question 3).

On donne $k = 1{,}7 \times 10^{-3}$; $a = 0{,}1$; $b = 0{,}05$.

Étudier la fonction $y = f(t)$ et en donner une représentation graphique pour $0 < t < 500$ (t en minutes).

22.7 BIOTECHNOLOGIE 86 (durée : 1 h 30)
(10 points)

: CINETIQUE ENZYMATIQUE

1 – Dans la relation (2) suivante :

$$(2) \qquad V = \frac{V_m \cdot S}{K + S}$$

On pose $X = \dfrac{1}{S}$ et $Y = \dfrac{1}{V}$

a. Démontrer qu'il existe deux nombres réels A et B tels que si V et S vérifient la relation (2), Y et X sont liés par la relation (3) :

$$(3) \qquad Y = AX + B$$

b. Calculer A et B en fonction des constantes V_m et K.

c. Calculer V_m et K en fonction de A et B.

2 – Les mesures de V en fonction de S ont donné le tableau suivant :

S_i :	0,0001	0,0002	0,0003	0,0004	0,0005	0,0006	0,0007	0,0008	0,0009	0,001
V_i :	171	294	385	461	512	572	615	636	676	701

a. Etablir le tableau des valeurs X_i et Y_i obtenues par :

$$X_i = \frac{1}{S_i} \qquad Y_i = \frac{1}{V_i}$$

b. Représenter les points de coordonnées X_i et Y_i dans le plan rapporté à un repère orthogonal

(unités sur l'axe des abscisses : 2 cm pour 1000 ;

unités sur l'axe des ordonnées : 2 cm pour 0,001)

c. Calculer les moyennes des valeurs de X et Y ainsi obtenues.

Calculer la variance de X ainsi que la covariance du couple (X, Y).

d. Déterminer les coefficients de la droite de régression linéaire de Y par rapport à X. (Méthode des moindres carrés).

e. Déterminer les valeurs des constantes K et V_m de cette expérience.

CHAPITRE XXIII: PROBABILITES

VARIABLES ALEATOIRES

23.1 *FONDERIE SUR MODELE 85 (durée : 4 heures)*

(4 points)

Deux machines A et B produisent respectivement 100 et 200 objets. La machine A sort 5 %
déchets (objets défectueux), la machine B en sort 6 %.

1) On considère un objet de la production, quelle est la probabilité pour qu'il soit défectueux

2) On considère un objet défectueux, quelle est la probabilité qu'il ait été fabriqué par machine A ?

23.2 *ARCHITECTURE INTERIEURE 85 (durée : 2 heures)*
(5 points)

Une urne contient 3 boules rouges, 2 boules blanches et n boules noires ($n \geqslant 2$), toutes indiscernables au toucher.
On tire simultanément 2 boules de l'urne.

1 - Calculer, en fonction de n, la probabilité p d'avoir deux boul de même couleur.

2 - Pour quelle valeur de n a-t-on $p = \frac{1}{4}$?

23.3 *MAINTENANCE DES MATERIELS AERONAUTIQUES 85 (durée : 3 heures)*

(6 points)

1) Un circuit électronique particulier est formé de 10 éléments identiques installés en série. Chaqu élément a une probabilité égale à 0,02 de tomber en panne pendant les 1000 premières heur de fonctionnement.

   Quelle est la probabilité pour que le circuit tombe en panne pendant les 1000 premières heures

2) Un autre circuit est composé de n cellules ($n \geqslant 1$) formées de deux éléments identiques au précédents et montés en parallèle (si bien que le circuit fonctionne dès qu'un élément de chaqu cellule fonctionne).

   a) Quelle est la probabilité pour qu'une cellule tombe en panne pendant les 1000 premièr heures ?

   b) Quelle est la probabilité pour que le circuit tombe en panne pendant les 1000 premières heure

3) A partir de quelle valeur de l'entier naturel n le second circuit serait moins fiable que le pi mier ?

23.4 MECANIQUE AUTOMATISMES 83 (durée : 1 heures)

(10 points)

On considère la fonction F telle que :

$$\begin{cases} F(x) = 0 & \text{si} \quad x < 0 \\ F(x) = A - e^{-x} & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}$$ où A est une constante réelle donnée

1. Déterminer A pour que F soit la fonction de répartition d'une variable aléatoire x. Quelle est alors la densité de probabilité de l'aléa x ?

2. Calculer l'espérance m et la variance σ^2 de cet aléa x.

23.5 MECANIQUE AUTOMATISMES 82 (durée :1 heure)

corrigé

A - PREMIERE PARTIE

Pour chaque valeur de n, entier positif non nul, on considère une population de 100 n pièces parmi lesquelles se trouvent exactement 95 n pièces sans défaut.

On prélève, au hasard et multanément, n pièces dans la population considérée, et on appelle P_n la probabilité de l'événement : "Toutes les pièces prélevées sont sans défaut". Le tableau suivant résume la situation.

	Effectif de la population	Nombre de pièces sans défaut	Nombre de pièces prélevées
n = 1	100	95	1
n = 2	200	190	2
n = 3	300	285	3
cas général $n \in \mathbb{N}^*$	100 n	95 n	n

A.1. - Calculer dans l'ordre les probabilités P_1, P_2 et P_3 corres respectivement à $n = 1$, $n = 2$, $n = 3$.

A.2. - Dans le cas général, calculer P_n en fonction de n .

B - DEUXIEME PARTIE

B.1. - Calculer l'intégrale :

$$I = \int_0^1 [\ln(95 - x) - \ln(100 - x)]dx$$

dans laquelle ln désigne la fonction logarithme népérien. pourra utiliser une intégration par parties).

B.2. - Etudier les variations de la fonction f définie par :

$$f(x) = e^{-\frac{52x}{1000}}$$

Construire la représentation graphique de f sur l'intervalle [0 ; 15] dans le plan rapporté à un repère orthogona (unités choisies : 1 cm sur l'axe des abscisses ; 10 cm sur l'axe des ordonnées).

B.3. - On admet qu'une valeur approchée de P_n est $e^{I.n}$, où I désigne l'intégrale calculée au B.1. Déduire de ce qui précède, l'effectif de la population considérée dans la première partie, telle que P_n soit voisine de 0,50.

23.6 MECANIQUE AUTOMATISMES 85

(14 points)

On considère la fonction numérique de variable réelle f définie comme suit :

si $x \in]-\infty, 0[$ $\quad f(x) = 0$

si $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ $\quad f(x) = a \sin 2x$

si $x \in]\frac{\pi}{2}, +\infty[$ $\quad f(x) = 0$

1. Déterminez a pour que f soit la fonction de densité de probabilité d'un certain aléa numériq

2. a) calculez en utilisant une intégration par parties l'espérance mathématique E (X) de l'aléa X.
   b) tracez la courbe représentative de f dans un repère orthonormal.

3. Calculez $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 f(x)\,dx$ par deux intégrations par parties successives puis l'écart-type σ(X l'aléa X.

23.7 INDUSTRIES DU BOIS 85 (durée :3 heures)

(5 points)

Un étang contient un nombre inconnu N de poissons. On prélève 20 poissons que l'on marque et que l'on remet vivants dans l'étang.

Quelques jours plus tard, on prélève 50 poissons. Le prélèvement est fait avec remise, c'est-à-dire qu'un poisson est remis à l'eau après avoir été pris. On suppose qu'il y a équiprobabilité de sortie pour les N poissons, et que ce nombre n'a pas varié entre temps.

1. Quelle est la loi de probabilité de X, si X désigne le nombre de poissons marqués dans le prélèvement de 50.

2. Soit la fonction f définie par

$$f(x) = \left(\frac{20}{x}\right)^4 \left(1 - \frac{20}{x}\right)^{46} \quad \text{pour } x > 20$$

Montrer que cette fonction atteint un maximum pour une valeur a de x. Calculer a.

3. On suppose que lors du second prélèvement, on a trouvé 4 poissons marqués. Déterminer la valeur de N qui donne à l'événement X = 4 la probabilité maximum.

23.8 MECANIQUE AUTOMATISMES 83 (durée : 1 heure)
(10 points)

On considère trois machines A, B et C qui produisent le même type de pièces ; elles produisent respectivement 20 % , 30 % et 50 % du nombre total des pièces.

On constate que le pourcentage des pièces défectueuses est de 5 % pour la machine A, 4 % pour la machine B et 3 % pour la machine C.

1. Première question
   1.1. On prélève au hasard une pièce dans la production totale. Calculer la probabilité pour qu'elle soit défectueuse.
   1.2. On considère une pièce défectueuse. Calculer la probabilité pour qu'elle provienne de la machine C.

2. Deuxième question
   A la sortie de la machine A, on prélève un échantillon de taille n, dans lequel on dénombre k pièces défectueuses.
   2.1. Quelle est la loi de probabilité de la variable aléatoire x telle que x=k ?
   2.2. Si n=10, calculer la probabilité pour qu'il n'y ait aucune pièce défectueuse, puis la probabilité pour que toutes les

23.9 FONDERIES EN MOULES MECANIQUES 85 (durée : 3 heures)

(6 points)

Un chef d'entreprise a réalisé une étude sur l'absentéisme dans son équipe de 50 employés.

La statistique porte sur une année de travail comptant 11 mois de 20 jours chacun.

Il a obtenu les résultats suivants :

Nombre d'absents x_i	0	1	2	3	4	5	6
Nombre de jours d'absence n_i	16	44	57	50	30	16	7

(Par exemple, dans l'année, il y a 50 jours pendant lesquels 3 employés sont absents).

3.1. Soit X la variable aléatoire égale au nombre d'employés absents un certain jour de travail.

Définir par un tableau la loi de probabilité de X.

Calculer l'espérance mathématique, la variance et l'écart-type de X.

En déduire le pourcentage moyen d'absents par journée de travail (pour l'effectif total de l'équip

3.2. La probabilité, pour un employé, de manquer une journée de travail est $p = 0{,}05$. Calcule probabilité qu'il ne soit pas absent au cours d'un mois de travail (20 journées).

3.3. Dans la même hypothèse, $p = 0{,}05$, on note Y la variable aléatoire égale au nombre de jo d'absence d'un employé donné, durant un mois de travail (20 journées).

Quelle est la loi de Y ?

Calculer la probabilité $P(Y = 3)$.

LOI NORMALE

23.10 ANALYSES BIOLOGIQUES 86 (durée : 3 heures)
(8 points)

Dans la population française, 15 personnes sur 100 ont un facteur rhésus négatif.

1 - Un laboratoire d'analyses médicales a contrôlé le facteur rhésus de 459 personnes.

Exprimer la loi de probabilité de la variable aléatoire X : nombre de personnes ayant un facteur rhésus négatif.

Calculer l'espérance mathématique et l'écart type de X.

2 - Par quelle loi normale peut-on approcher la loi de probabilité de X ?

3 - En déduire la probabilité d'avoir :

a) $X \leqslant 50$

b) $60 \leqslant X \leqslant 80$.

4 - En fait, parmi les 459 personnes examinées, le laboratoire a constaté que 75 avaient un facteur rhésus négatif. Ce résultat est-il compatible avec l'hypothèse de départ, au risque de 5 % ?

11 ANALYSES BIOLOGIQUES 81 (10 points)

Au cours d'un test d'alcoolémie effectué auprès des automobi-.stes, on a relevé qu'une personne sur 10 avait un test positif.

- Sachant que l'on a contrôlé 400 personnes en une semaine, quelle est la loi de probabilité de la variable aléatoire X : nombre de personnes ayant un test positif ?
  Calculer l'espérance mathématique de X et sa variance.
- Par quelle loi normale peut-on approcher la loi de X ?
- En déduire la probabilité d'avoir
  a) $X < 35$
  b) $32 < X < 44$
  c) $X > 45$

23.12 ANALYSES BIOLOGIQUES 84 (8 points)

On tire au hasard d'une population P un échantillon E de 100 sujets et on mesure la glycém chacun d'entre eux par une méthode déterminée. On obtient le tableau suivant :

Glycémie comprise entre : (unité : mg/100 ml)	Effectif
[75,80 [	5
[80,85 [	10
[85,90 [	20
[90,95 [	36
[95,100 [	15
[100,105 [	8
[105,110 [	6

1. Calculer la moyenne $\overline{x}$ et l'écart-type σ de la glycémie pour cet échantillon E.

2. Estimer à partir des résultats obtenus pour l'échantillon E la moyenne μ et l'écart-type s glycémie dans la population P.

   Donner l'intervalle de confiance de la glycémie moyenne μ dans la population au risque de

3. En supposant que l'écart-type s estimé précédemment est l'écart-type réel de la population, (devrait être la taille de l'échantillon pour connaître avec un risque de 5 %, la glycémie moye à 0,5 mg/100 ml près ?

4. Soit X la variable aléatoire représentant la glycémie d'un individu quelconque appartenant population P ; X suit une loi normale de moyenne μ et d'écart-type s – quel est le pource d'individus dans la population P dont la glycémie est supérieure à 105 mg/100 ml ?

N.B.

Les résultats numériques sont demandés avec une précision de 10^{-2} .

Annexe

Une table de la fonction de répartition de la loi de Laplace-Gauss.

23.13 ANALYSES BIOLOGIQUES 85 (5 points)

La concentration du sang en hémoglobine suit chez la femme "en bonne santé" une loi normale de moyenne 14,3 g/100 ml et d'écart-type 1,1 g/100 ml.

On a relevé sur un échantillon de 100 femmes les résultats suivants :

Concentration en hémoglobine (g/100 ml)	[5 ; 7[	[7 ; 9[	[9 ; 11[	[11 ; 13[	[13 ; 15[	[15 ; 17[	[17 ; 19[	[19 ; 21[
effectifs	1	5	10	18	25	31	8	2

1 - Calculer la moyenne m_e et l'écart-type σe de l'échantillon

2 - L'hypothèse suivant laquelle cet échantillon provient d'une population de femmes "en bonne santé" est-elle justifiée au coefficient de risque de 5 % ?

3 - Quel est le pourcentage de femmes "en bonne santé" dont la concentration en hémoglobine est comprise entre 13 g/100ml et 15 g/100ml ?

23.14 FABRICATION INDUSTRIELLE DU MOBILIER 84 (durée : 2 heures)

(6 points)

Une usine comporte 1000 postes de travail; chacun équipé d'un moteur de 1 kW. Chaque moteur fonctionne en moyenne un quart du temps. Soit X la variable aléatoire prenant pour valeur le nombre de moteurs en fonctionnement. Quelle est la loi de X ?

Calculer une valeur approchée de la probabilité $P(200 < X < 300)$ au moyen de l'approximation gaussienne usuelle.

Quelle puissance à installer doit-on prévoir pour que la probabilité de bon fonctionnement de l'ensemble soit 0,99 ?

23.15 CONSTRUCTION NAVALE 85 (durée : 2 heures)

(6 points)

On a mesuré les longueurs en mm d'un échantillon de 100 tiges d'acier à la sortie d'une machine automatique :

Longueurs	Effectifs
[132 ; 134 [	2
[134 ; 136 [	5
[136 , 138 [	13
[138 ; 140 [	24
[140 ; 142 [	19
[142 ; 144 [	14
[144 , 146 [	10
[146 ; 148 [	8
[148 , 150 [	3
[150 , 152 [	2

1) Calculer la moyenne et l'écart-type σ du caractère observ dans cet échantillon.
(on choisira une moyenne provisoire et un changemen d'échelles pour simplifier les calculs).

2) En supposant que la variable aléatoire "longueur d'une tige suive une loi normale dont l'écart-type est celui de l'échar tillon, donner un intervalle de confiance à 99 % de l longueur moyenne des tiges.

3) Quelle doit être la taille d'un échantillon extrait de la popul tion pour que la moyenne des longueurs des tiges soit estimé à 10^{-1} près, avec 95 % de certitude.

Extrait de la table de Gauss $\pi(t) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^{t} e^{-1/2\, t^2}\, dt$

t	1,96	2,6
π (t)	0,975	0,995

23.16 MAINTENANCE 84 (8 points) corrigé

Une machine automatique fabrique des pièces dont les poids se répartissent suivant la loi nor autour de la valeur moyenne 0,90 g avec un écart type de 0,06 g.

1. Quelle est la probabilité pour que le poids d'une pièce soit compris entre 0,84 g et 0,99 g ?

2. Combien peut-on présumer qu'il y aura de pièces dont le poids soit inférieur à 0,81 g dans un lc 5 000 pièces ?

3. Une autre machine met les pièces fabriquées en boîtes, à raison de 100 pièces par boîte ; on pr au hasard un certain nombre de boîtes et pour chaque boîte on mesure le poids moyen p c pièce (tirage non exhaustif).

   a) Quelle sera la valeur moyenne trouvée pour p et l'écart type de p ?

   b) Quelle est la probabilité pour qu'une mesure s'écarte de 1 % de cette valeur de p ?

   c) On prend au hasard une boîte de 100 pièces, déterminer les limites de confiance à 95 % du ţ moyen de cet échantillon.

   d) On prend au hasard une boîte de 100 pièces ; on pèse les pièces et on trouve une moyenr 0,88 g. Peut-on considérer qu'elle est représentative au seuil de 1 % ?

23.17 MAINTENANCE 85 (9 points)

Une usine fabrique des pièces en grande série, en deux phases indépendantes. La première phase est susceptible de faire apparaître un défaut A et la seconde un défaut B. L'expérience montre qu'une pièce peut présenter le défaut A dans 2 % des cas et le défaut B dans 8 % des cas.

1. Calculer les probabilités pour qu'une même pièce tirée au hasard :

   a) présente les deux défauts,

   b) présente l'un au moins des deux défauts,

   c) présente un et un seul des deux défauts,

   d) ne présente aucun des deux défauts.

2. On prélève $n = 200$ pièces dans le stock et on s'intéresse à la variable aléatoire X égale au nombre de pièces présentant le défaut A.

   . On admet que X suit une loi de Poisson. Pourquoi cela est-il légitime ? Quel est le paramètre de cette loi de Poisson ?

   . Quelle est la probabilité pour que parmi les 200 pièces, il y en ait 10 qui présentent le défaut A ?

3. On prélève $n = 300$ pièces dans le stock et on s'intéresse à la variable aléatoire Y égale au nombre de pièces présentant le défaut B.

   . On admet que Y suit une loi de Laplace Gauss. Pourquoi cela est-il légitime ? Quels sont les paramètres de cette loi ?

   . Calculer Prob $(Y < 24)$

   Prob $(20 < Y < 35)$

   Prob $(Y < 30$ sachant $Y > 24)$

23.18 FABRICATIONS MECANIQUES 81 (durée : 3 heures) (10 points)

On considère un lot de pièces usinées (barres de métal) dont la distribution des longueurs suit une loi normale.

A l'aide d'un même appareil on effectue une série de 20 mesures et on obtient les résultats suivants :

76,5	76,3	76,4	76,8	76,2
76,6	76,5	76,1	76,5	76,7
76,8	76,5	76,4	76,7	76,3
76,7	76,2	76,6	76,5	76,7

1. - Etablir, à partir de ces renseignements le tableau statistique (x_i , n_i) où x_i est la valeur du caractère observée et n_i son effectif.

2. - Calculer la moyenne $\bar{x}$ et l'écart-type σ de cet échantillon

3. - Déduire des résultats une estimation de la moyenne m du lo un intervalle de confiance à 98 %. (On admettra que l'écar type σ du lot est égal à $\sqrt{\frac{n}{n-1}}\,\sigma$).

4. - Le fabricant affirme que la moyenne m du lot est 76,5 et l type du lot est 0,2.
Quelle est alors la probabilité pourqu'une barre du lot ai longueur inférieure à 76,25 ?

On donne $\pi(1,25) = 0,8944$

$\pi(2,33) = 0,9901$

On rappelle que $\pi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{t} e^{-\frac{u^2}{2}}\, du$

Remarque : la question n° 4 peut être traitée indépendamment des au questions.

23.19 FABRICATIONS MECANIQUES 82 (7 points)

Une société veut sous-traiter un rigoureux marché d'aménagement électronique de véhicules. Pour sav si elle doit accepter ce marché, elle établit une statistique de production sur 100 jours.

Le nombre de véhicules équipés journellement se répartit comme suit :

Production journalière de véhicules équipés	Nombre de jours
95	1
96	3
97	6
98	8
99	10
100	13
101	18
102	14
103	9
104	8
105	6
106	2
107	2
	100

3.1 Etablir la moyenne de production journalière et l'écart-type de cette production.

3.2 · La production exigée par contrat est de 100 véhicules équipés au moins par jour, pendant 100 jours de travail consécutifs. Quelle est la probabilité de réussite du contrat par la société ? (On considèrera la production journalière comme suivant une loi normale).

3.3 · En 50 jours, la production a été de 5 200 véhicules, mais une panne de la chaîne de montage arrête la production pendant 4 jours, quelle est alors pour la société la probabilité de réaliser le contrat souscrit ?

Extraits de la table de la loi de Laplace-Gauss.

$$\Pi(t < 1{,}27) \approx 0{,}90$$

$$\Pi(t < 0{,}386) \approx 0{,}65$$

23.20 *FABRICATIONS MECANIQUES 83 (10 points) corrigé*

Les questions 1 et 2 sont indépendantes.

Une fabrication de pièces en grande série est telle que leur cote x suit une loi de Laplace-Gauss. (Un extrait de la table des valeurs numériques de la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite est donné à la fin de l'énoncé).

1. Dans cette première partie l'intervalle de tolérance pour x est [489, 75; 507, 05].

   1.1. Une étude statistique de la cote x faite après un premier réglage a donné les résultats suivants : moyenne 500; écart-type 5. Démontrer que le taux T des pièces valables es égal à 90% .

   1.2. Après un second réglage la moyenne prend la valeur 498,4. O veut conserver T = 90%. Quel doit être l'écart-type de la co te x ?

   1.3. T est maintenu à 90%. On effectue des contrôles de 4 pièces de cette fabrication. On désigne par y le nombre de celles sur les 4 qui sont hors de l'intervalle de tolérance.

1.3.1. Expliquer et déterminer la distribution de probabilité de y. Préciser son espérance mathématique.

1.3.2. Déterminer la probabilité qu'un contrôle puis un sec indépendant du précédent donnent tous deux $y = 0$.

2. Dans cette seconde partie, à chaque nouveau réglage, la fabricat a au départ une moyenne $m = 500$; cette moyenne varie en cours d fabrication. La fabrication est cette fois jugée valable si $m \in [490; 500]$.

Des contrôles effectués aux quatre premières heures de fonctionn ment ont donné le résultat suivant :

Heure (h)	0	1	2	3	4
Moyenne (m)...	500	499,81	499,62	499,46	499,20

Déterminer l'équation de la droite d'ajustement de m par rapport à (méthode des moindres carrés). En déduire la valeur maximum du temp séparant deux réglages successifs.

*

* *

Extrait de la table de Gauss : $\Pi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{t} e^{-\frac{t}{2} t^2} dt$

t.......	1,41	1,645	2,05
$\Pi(t)$....	0,9207	0,95	0,9798

23.21 *FABRICATIONS MECANIQUES 84 (8 points)*

Une usine produit de petites pièces destinées à la fabrication de jouets.

1. On mesure en millimètres le diamètre x de 100 pièces prises au hasard dans la production d'une machine ; on obtient les résultats suivants :

x en mm	16,0 à 16,1	16,1 à 16,2	16,2 à 16,3	16,3 à 16,4	16,4 à 16,5	16,5 à 16,6	16,6 à 16,7	16,7 à 16,8	16,8 à 16,9	16,9 à 17,0
nombre de pièces	1	4	4	10	17	20	20	14	8	2

1.1 Calculer la moyenne et l'écart type de cet échantillon.

1.2 Considérant que la distribution est normale, estimer pour un intervalle de confiance à 95 %, le diamètre moyen des pièces produites par la machine. (On prendra pour écart-type celui trouvé au 1.1).

1.3 Une pièce est acceptable si son diamètre est compris entre 16,30 mm et 16,90 mm. En adoptant 16,56 mm pour moyenne de la population de pièces produites par la machine et 0,19 mm pour écart-type, calculer le pourcentage de pièces acceptables.

2. Sur 20 machines que comporte l'atelier, soit y le nombre de machines en panne chaque jour.

2.1 Sachant que pour une machine la probabilité de tomber en panne au cours de la journée est p = 0,05, quelle est la loi de probabilité suivie par la variable y ?

2.2 Quel est le nombre de machines moyen fonctionnant chaque jour ?

3. En supposant que chacune des 20 machines produit le même pourcentage de pièces acceptables, et qu'une machine produit 750 pièces par jour, valables ou non, combien de jours faut-il à l'atelier pour produire 100.000 pièces acceptables ?

23.22 *FABRICATIONS MECANIQUES 85 (8 points)*

On considère une production en grande série de pièces mécaniques en acier traité (Trempe + Revenu) dont la distribution des duretés suit une loi normale. La mesure de ces duretés exprimée en unit HRc a donné, pour un échantillon de 30 pièces, les résultats suivants (résultats regroupés par clas d'amplitude 0,5 HRc) :

dureté	[52 - 52,5]	]52,5 - 53]	]53 - 53,5]	]53,5 - 54]	]54 - 54,5]
effectif	1	1	2	3	5
dureté	]54,5 - 55]	]55 - 55,5]	]55,5 - 56]	]56 - 56,5]	]56,5 - 57]
effectif	6	4	4	2	2

1. Calculer la dureté moyenne $\bar{x}$ et l'écart type σ de cet échantillon (on notera x_i la valeur observ du caractère et n_i son effectif et l'on pourra effectuer le changement de variable $u_i = \dfrac{x_i - 54{,}7}{0{,}5}$

2. En prenant pour écart type de la production l'écart type de l'échantillon, déterminer une estim tion de la dureté moyenne de la production par un intervalle de confiance à 95 %.

3. La dureté moyenne théorique m de la production est de 55 HRc et l'écart type σ' de 1,2 HR Quelle est la probabilité pour qu'une pièce ait une dureté inférieure à 56 HRc ?

4. A la réception d'un lot l'acheteur prélève un échantillon de 30 pièces. Il décide d'accepter le lot la dureté moyenne de cette échantillon est inférieure à 55,3 HRc.

   a) Quelle est la probabilité pour que la moyenne de l'échantillon prélevé soit supérieure à 55,4 HRc Donner une interprétation du résultat.

   b) L'acheteur veut se prémunir du risque : « La dureté moyenne du lot ne dépasse pas 55,9 HRc : Quel risque encourt-t-il ?

Ci-joint un extrait de la table de Gauss.

23.23 *MECANIQUE AUTOMATISMES 84 (durée : 1 heure)*
(10 points)

Lors du prélèvement de pièces fabriquées par une machine, on constate que 10 % pièces ont un diamètre supérieur à 155,3 mm et 20 % ont un diamètre inférieur à 154,2 mm.

En admettant que la variable aléatoire prenant pour valeurs les diamètres des pièces s une loi normale, calculez le pourcentage des pièces fabriquées dont le diamètre est compris dans l'ir valle [154 mm, 156 mm].

Document joint : Une table de la fonction de répartition de la loi normale réduite.

23.24 *MECANIQUE AUTOMATISMES 85 (6 points)*

La durée de vie, exprimée en heures, d'une ampoule électrique d'un certain type, est une variable aléatoire d'espérance mathématique M et d'écart type $\sigma = 20$.

Une étude sur un échantillon de 16 ampoules donne une moyenne de la durée de vie égale à 3000.

Déterminez l'intervalle contenant M avec une probabilité de 90 %.

23.25 *INDUSTRIES CEREALIERES 85 (durée : 2 heures) (4 points)*

Un groupe céréalier dispose d'un silo portuaire d'une capacité de 70 000 tonnes et doit satisfaire, chaque mois, à une demande aléatoire qui suit une loi normale, de moyenne 70 000 tonnes et d'écart-type 6 000 tonnes.

Pour satisfaire à une demande excédentaire, le groupe peut s'approvisionner dans ses silos de stockage intérieur.

Quel doit être le stock minimum supplémentaire prévu pour que la probabilité de défaillance ne soit pas supérieure à 0,025 ?

23.26 *INDUSTRIES DU BOIS 81 (durée 3 heures) (13 points)*

1 - Une secrétaire donne n coups de téléphone à n correspondants distinct
On admet que chaque appel est indépendant des précédents et qu'il y une probabilité p de l'obtenir. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de correspondants obtenus.

1.1. - Quelle est la loi de probabilité de X ? Déterminer son espérance mathématique E(X) et sa variance V(X).
Dans le cas où n = 6 et p = 0,8, calculer numériquement p(X = pour chaque valeur de k, E(X) et V(X).

1.2. - Après ses n recherches, la secrétaire demande une seconde foi dans les mêmes conditions, chacun des n - X correspondants qu'elle n'a pas pu joindre la première fois. Soit X' le nomb de correspondants obtenus dans cette seconde série d'appels. On appelle Z = X + X' le nombre total de correspondants obten

1.2.1. - Calculer p_0 = Prob(Z = 0)

1.2.2. - Calculer p_1 = Prob(Z = 1)

1.2.3. - Calculer $p_2 = \text{Prob}(Z = 2)$

1.2.4. - Exprimer en fonction de n, p et k : $\text{Prob}(Z = k)$

2 - On admet que le poids d'une grume est une variable aléatoire X su une loi normale de moyenne $\mu = 2$ tonnes et d'écart type $\sigma = 0,6$ t

2.1. - Calculer :

2.1.1. - $\text{Prob}(X > 3)$

2.1.2. - $\text{Prob}(1,5 < X < 2,5)$

2.2. - Soit $Y = X_1 + X_2 + \dots X_n$ la variable aléatoire égale au p de n grumes supposées indépendantes.
Quelle est la loi de probabilité suivie par Y ?

2.3. - Un transporteur accepte une charge maximum S = 25 tonnes.
Déterminer le nombre maximum de grumes que l'on peut charg ayant une probabilité de surcharge de 1 %.

Extrait de la table de la loi de Gauss :

t	0,82	0,83	0,84	1,67	2,33
$\pi(t)$	0,7939	0,7967	0,7995	0,9525	0,9901

avec $\pi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{t} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$

23.27 INDUSTRIES DU BOIS 83 (8 points)

- On considère une production en série de pièces dont on mesure un cote. Soit X la variable associée à cette mesure. On suppose que suit une loi normale (de paramètres m et σ). On prélève un premi échantillon :

X_1	220	222	224	226	228	230	232	234	236	23
Effectifs	1	3	6	11	30	48	35	10	5	1

1 - Estimer l'écart-type de la population et donner un intervall de confiance de m à 95 %.

2 - On prélève un deuxième échantillon postérieurement au premie

X_2	222	224	226	228	230	232	234	236	238	240
Effectifs	2	4	7	12	20	24	20	6	4	1

Quelle est la moyenne de cet échantillon ?
Peut-on affirmer au seuil de signification de 0,05 que le fonc-tionnement de la machine qui fabrique les pièces n'a pas vari

---

23.28 INDUSTRIES DU BOIS 85 (4 points)

- On suppose que le poids d'une personne suit une loi normale $\mathcal{N}(60,20)$ ($\mu = 60$; $\sigma = 20$). On prélève un échantillon de n personnes et on appelle $\overline{X}$ la moyenne d'échantillon.

1. Quelle taille d'échantillon doit-on choisir pour que la probabilité d'avoir $\overline{X}$ compris entre 55 et 65 soit 0,95 ?

2. Un ascenseur accepte une charge maximum de 350 kg. Combien peut-on mettre de personnes pour que la probabilité de bon fonctionnement (charge < 350 kg) soit 0,99 ?

23.29 ANALYSES BIOLOGIQUES 80 (durée : 3 heures) corrigé

(10 points)

---

270 porcs ont été soumis à des régimes destinés à les fai engraisser : 120 ont suivi le régime A, et 150 le régime B. On a observ les résultats suivants :

Gain de poids des porcs	Nombre de porcs Régime A	Nombre de porcs Régime B
moins de 10 kg	-	9
de 10 à 15 kg	2	10
de 15 à 20 kg	9	15
de 20 à 25 kg	28	19
de 25 à 30 kg	40	22
de 30 à 35 kg	29	22
de 35 à 40 kg	10	19
de 40 à 45 kg	2	14
de 45 à 50 kg	-	10
de 50 à 60 kg	-	10
	120	150

Première question :

Calculer la valeur moyenne et l'écart-type des gains de poids correspondant à ces deux échantillons.

Deuxième question :

Estimer la valeur la plus probable de la moyenne et de l'écart-type d'une population (supposée très grande) de porcs ayant sui le régime A ; ayant suivi le régime B.

Donner un intervalle de confiance de ces moyennes au seui risque de 5 %.

Troisième question :

Au seuil de risque de 5 %, peut-on considérer comme vrai l'hypothèse suivante : "les gains de poids moyens sont les mêmes pour les deux régimes" ?

N.B. : On rappelle que, si N suit une loi normale centrée et réduite, alors pr($|N| \leqslant 1{,}96$) = 0,95.

23.30 ANALYSES BIOLOGIQUES 83 (5 points)

Le service d'analyses d'un hôpital dispose de statistiques portant sur une *population de grand effectif.* cette population, sont extraits 2 échantillons :

— l'un, noté A, est constitué de 90 personnes dont le taux de glucose dans le sang est considéré com satisfaisant (entre 3,5 et 5,5 millimoles par litre);

— l'autre, noté B, est constitué de 140 personnes dont le taux de glucose est extérieur à l'interv [3,5; 5,5].

Pour chacun des échantillons ci-dessus, on dispose du taux d'acide urique, exprimé en micromoles/litre. obtient la répartition ci-dessous :

	Échantillon A						Échantillon B								
Effectifs	10	23	25	12	8	12	8	22	10	33	7	11	9	13	2'
Taux d'acide urique	210	270	420	450	600	660	170	200	260	400	510	560	350	700	31

1. Calculer la moyenne m_1 et l'écart type σ_1 de la série statistique A.

2. Calculer la moyenne m_2 et l'écart type σ_2 de la série statistique B.

3. Pour chacune des moyennes trouvées, déterminer un intervalle de confiance de cette moyenne au coeffici de risque 5 %.

4. L'hypothèse selon laquelle le taux de glucose (considéré ou non comme satisfaisant) n'a aucune influence sur c d'acide urique est-elle justifiée? (au coefficient de risque 5 %).

On précise que, si t est une variable aléatoire de loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$, on a :

$$p\,(|t| < 1{,}96) \approx 95\ \%$$

23.31 *BUREAU D'ETUDES 86 (durée : 4 heures)*

(5 points)

Une usine fabrique des plaquettes rectangulaires dont la longueur et la largeur sont usinées de manière indépendante.

On admet que la longueur L et la largeur ℓ d'une plaquette suivent des lois de Laplace-Gauss, de moyennes respectives 80,005 et 50,000 avec des écarts-types respectifs $\sigma_L = 0{,}005$ et $\sigma_\ell = 0{,}005$ (les dimensions étant exprimées en mm).

1 — Déterminer la probabilité $P(L \leqslant 80{,}01)$.

2 — Déterminer de même $P(\ell \geqslant 50{,}01)$.

3 — On impose les normes de fabrication suivantes :

$$L = 80 \pm 0{,}01 \qquad \text{et} \qquad \ell = 50 \pm 0{,}01 \ \text{(mm)}$$

Quel est alors le pourcentage de plaquettes à rejeter à la sortie de la chaîne de fabrication ?

NB - On donne la Table de la fonction de répartition de la loi normale :

$$P(0 \leqslant T \leqslant t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^t e^{-\frac{x^2}{2}} dx = G(t)$$

LOI DE POISSON

23.32 *BUREAU D'ETUDES 85 (durée : 3 heures) corrigé*

(4 points)

Pour contrôler une production de pièces dont le pourcentage de pièces défectueuses est de 1 % on fait régulièrement un prélèvement de 200 pièces tirées au hasard.

Justifier la loi de Poisson de paramètre $\lambda = 2$ pour déterminer le nombre de pièces défectueuses dans un prélèvement.

Calculer : – la probabilité p_1 pour qu'il n'y ait aucune pièce défectueuse dans un prélèvement de 200 pièces,
– la probabilité p_2 pour qu'il y en ait 4 au plus et la probabilité p_3 pour qu'il y en ait plus de 4.

23.33 *FABRICATIONS MECANIQUES 77 (durée : 3 heures)*

(8 points)

Une usine fabrique des pièces en grande série, en deux phases indépendantes. La première phase est susceptible de faire apparaître un défaut A, et la seconde un défaut B. L'expérience montre qu'en fabrication normale une pièce peut présenter le défaut A dans 2 p. 100 des cas et le défaut B dans 8 p.100 des cas.

1 - Calculer les probabilités pour qu'une même pièce tirée "au hasard" :

1-1- présente les deux défauts,

1-2- présente l'un au moins des deux défauts,

1-3- présente un et un seul des deux défauts,

1-4- ne présente aucun des deux défauts.

2 - On prélève n = 200 pièces dans le stock et on s'intéresse à la variable aléatoire X = nombre de pièces présentant le défaut A.

2-1- On admet que X suit une loi de Poisson. Pourquoi cela est-il légitime ?

2-2- Quel est le paramètre de cette loi de Poisson ?

2-3- Quelle est la probabilité pour que parmi les 200 pièces, il y en ait 10 qui présentent le défaut A ?

3 - Pour traiter cette question, on arrondira à $\overline{p} = 0{,}10$ la proportion trouvée au 1-2- en vue de simplifier les calculs. Un utilisateur qui ne peut employer les pièces que si elles ne présentent aucun défaut, ne peut accepter une livraison importante qui lui est proposée que si elle est conforme à cette proportion $\overline{p} = 0{,}10$ de pièces à rebuter.
Il prélève un échantillon de 400 pièces, et constate la présence de 50 pièces à rejeter. Doit-il ou non accepter la livraison, sachant qu'il se fixe un seuil de confiance de 95 p. 100 ?

---

23. 34 FABRICATIONS MECANIQUES 78 (8 points)

Des machines automatiques fabriquent, en grande série, dix objets d rents avec équiprobabilité d'obtention pour chacun d'eux. Ces objets sont, erreur, réceptionnés pêle-mêle.

Une autre machine en prélève, au hasard, des groupes de trois, pour constituer une nouvelle pièce M.

1°) Quelles sont les probabilités P_1, P_2, P_3 pour que M soit constitué

- de trois objets de nature différente ?
- de deux objets de même nature et un de nature différente des précédents?
- de trois de même nature ?

Calculer $P_1 + P_2 + P_3$; interpréter le résultat obtenu.

2°) On prend pour la suite du problème $P_3 = 0{,}01$. La pièce M est consic rée comme mauvaise si elle est constituée de trois objets de même r ture. On contrôle 100 pièces M et on appelle x le nombre de pièces mauvaises obtenues. Montrer que x obéit à une loi de Poisson que l' précisera. Quelle est la probabilité qu'a x de valoir au plus 3 ?

3°) Le contrôle de la longueur l d'un échantillon de 50 pièces, fabriqu en grande série, a donné le résultat suivant :

l	12,00	12,10	12,20	12,30	12,40	12,50	12,6C
n = effectif	2	6	10	15	9	5	3

3.1. Calculer la moyenne et l'écart-type de cet échantillon.

3.2. On prend pour valeur approchée de l'écart-type de la fabricati complète l'écart-type de l'échantillon.
Estimer la moyenne de la fabrication avec un seuil de confianc de 95 %.

II - Les trois parties du problème sont indépendantes. Le mot aléa est synonyme de variable aléatoire.

Extrait de la table de la fonction de répartition de la loi normale :

t	1,28	1,29	1,87	1,88	1,96
$\pi(t)$	0,8997	0,9015	0,9693	0,9699	0,9750

Une machine fabrique des tiges d'acier. La longueur x d'une tige, exprimée en millimètres, est un aléa normal (gaussien) de moyenne (espérance mathématique) : $m = 100$, et d'écart-type $\sigma = 0,16$.

1°) Quelle est la probabilité, à 0,01 près, que la longueur d'une tige prise au hasard ne soit pas comprise entre 99,7 et 100,3 ?

Déterminer le nombre a tel que la proportion de tiges ayant une longueur comprise entre $100 - a$ et $100 + a$ soit égale à 0,80.

2°) La proportion de tiges ayant une longueur trop grande ou trop petite pour être jugées bonnes est 0,06.

Disposant d'un lot comprenant un très grand nombre de tiges fabriquées, on fait l'épreuve suivante : on tire dans le lot n fois une tige au hasard. On appelle y l'aléa qui, à cette épreuve, associe le nombre de tiges mauvaises obtenues.

2.1 Montrer que y est un aléa binomial dont on précisera les paramètres.

2.2 Dans cette question, $n = 4$.

Ecrire la distribution de probabilité de l'aléa y, c'est-à-dire calculer la probabilité que y prenne la valeur k, k appartenant à l'ensemble $\{0, 1, 2, 3, 4\}$.

2.3 Dans cette question, $n = 50$.

Montrer que l'aléa y peut être approché par un aléa de Poiss

Calculer la probabilité que y prenne la valeur 0, et la probabilité que y prenne une valeur inférieure ou égale à 4.

3°) On prélève dans la production un échantillon de 100 tiges. La moyenne des longueurs des tiges de cet échantillon est 100,04 admet que l'écart-type de la production reste égal à 0,16.

Avec un risque de 0,05, peut-on rejeter l'hypothèse jusque là admise que la moyenne des longueurs des tiges de toute la fab cation est 100 ?

23.36 FABRICATIONS MECANIQUES 80 (6 points) corrigé

Une usine produit, grâce à des machines A, B, C des pièces qui ont

- pour la machine A le défaut X dans 5 % des cas,
- pour la machine B le défaut Y dans 3 % des cas,
- pour la machine C le défaut Z dans 2 % des cas.

Une machine D assemble une pièce provenant de A, une pièce provenan de B et une pièce provenant de C. Elle prend les pièces provenant d A, de B, de C au hasard.

1. Quelles sont les probabilités respectives pour qu'une pièce asse blée par D présente le défaut X seul, le défaut Y seul, le défaut Z seul, les défauts X et Y, les défauts X et Z, les défauts Y et Z, l défauts X, Y et Z.
(On pourra noter par $\overline{X}$, $\overline{Y}$, $\overline{Z}$ les pièces n'ayant pas les défauts X, et Z. On pourra considérer que D assemble d'abord les pièces proven de A et de B, puis celles provenant de C sur l'assemblage déjà réal

2. Les défauts X et Y étant seuls incompatibles à priori, les pièce présentant ces défauts communs sont automatiquement rejetées par D. On admet alors que sur 10 000 pièces fabriquées par D :

- 5 présentent les défauts Y et Z,
- 15 présentent les défauts X et Z,
- 200 présentent le défaut Z seul,
- 280 " " " Y "
- 500 " " " X "

2.1. Sur 10 pièces prises au hasard à la sortie de D, calculer :

2.1.1. la probabilité pour que deux pièces exactement présentent le défaut X,

2.1.2. la probabilité pour qu'une pièce au plus présente ce défaut.

2.2. Sur 1 000 pièces acceptées par D, prises au hasard, calcule (en justifiant l'emploi de la loi de Poisson que l'on utilisera) :

2.2.1. la probabilité pour que cinq pièces exactement présentent deux défauts simultanés,

2.2.2. la probabilité pour que au moins trois pièces présentent ces deux défauts.

3. La machine D, convenablement réglée, rejette toutes les pièces présentant le défaut Y ou le défaut Z.
Seules continuent à sortir les pièces ne présentant que le défaut X
On admet alors que le nombre de pièces assemblées présentant ce défaut suit la loi normale. Montrer en utilisant les résultats précédents que la probabilité pour qu'une pièce présente le défaut X est : 0,05.
Sur 200 Pièces prises au hasard à la sortie de D, calculer :

3.1. la probabilité pour que neuf pièces exactement présentent le défaut X,

3.2. la probabilité pour que au moins 5 pièces présentent ce défa

3.3. on constate que sur un lot de 1 900 pièces 1 788 pièces ne présentent pas le défaut X. La machine est-elle correctement réglée si l'on admet une marge de confiance de 95 % ?

Données : $\pi(t < 1{,}62) = 0{,}9474$

$f(t = 0{,}32) = 0{,}378$

$\pi(t < 1{,}96) = 0{,}9750$

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{t^2}{2}}$$

23.37 MECANIQUE AUTOMATISMES 79 (1 heure)

Une usine fabrique des pièces en grande série, en deux phases indépendantes. La première phase est susceptible de faire apparaître un défaut A avec une probabilité $p_A = 0{,}03$, la deuxième phase un défaut B avec une probabilité $p_B = 0{,}05$.

1 - A l'issue de cette chaîne de fabrication on tire "au hasard" une pièce. Calculer les probabilités p_1, p_2, p_3, p_4 pour que cette pièce :

1-1- présente les deux défauts,

1-2- présente l'un au moins des deux défauts,

1-3- présente un défaut et un seul,

1-4- ne présente aucun des deux défauts.

2 - On prélève 8 pièces dans le stock. On s'intéresse à la variabl aléatoire X égale au nombre de pièces présentant l'un au moins des deux défauts. Pour traiter cette question on prendra pour valeur approchée de p_2, p = 0,08.

Exprimer en fonction de k, la probabilité $p(X = k)$ pour que k pièces du prélèvement soient défectueuses.

Application : calculer $p(X = 2)$, $p(X \leq 2)$, donner le résulta avec deux décimales.

3 - On prélève 200 pièces dans le stock et on considère la variab aleatoire Y égale au nombre de pièces présentant le défaut A

3-1- Y suit une loi binomiale Bi(n,p). On admet que dans les conditions de l'énoncé la loi de Y peut être approchée p une loi de Poisson de même moyenne que la loi binomiale Bi(n,p). Déterminer le paramètre λ de cette loi Poisson. On considère désormais que Y obéit approximativement à c loi de Poisson. Donner en fonction de λ et k $p(Y = k)$.

3-2- Quelle est la probabilité $p(Y = 6)$ pour que parmi les 200 pièces il y en ait 6 qui présentent le défaut A ? Calculer $p(Y \leq 10)$. On donnera les résultats avec 2 déci males.

23.39 *TRANSFORMATION DES MATIERES PLASTIQUES 85 (durée : 2 heures)*

(6 points)

Un compteur Geiger, mesurant la radioactivité ambiante pendant une durée de 1 minute, a donné les résultats suivants pour une série de 10 mesures :

Nombre d'impulsions par minute	3	4	5	6	7	8	9
Nombre observé de mesures	3	2	0	2	1	1	1

1. On appelle X la variable aléatoire égale au nombre d'impulsions enregistrees en 1 minute :

   a) Donner la loi de X par un tableau numérique.

   b) Calculer son espérance mathématique $E(X)$, sa variance $V(X)$ et son écart-type $\sigma(X)$.

2. On admet que le phénomène précédent suit théoriquement une loi de Poisson Y de paramètre

$$a = \frac{E(X) + V(X)}{2}$$

Comparer la probabilité mesurée $p(X \leq 4)$ d'obtenir au plus 4 impulsions, et la probabilité théoriqOe $p(Y \leq 4)$.

23.40 FABRICATION DU MOBILIER 85 (durée : 2 heures)
(6 points)

Une entreprise fabriquant des meubles possède un parc de machines fonctionnant sans arrêt.

1- La probabilité pour une machine de tomber en panne au cours d'une journée est $p = \frac{1}{1000}$.

   a) Calculer la probabilité pour une machine déterminée de tomber en panne au moins une fois au cours d'un mois de 30 jours.

   b) Calculer la probabilité pour cette machine de tomber en panne plus d'une fois au cours d'un mois de 30 jours.

2 Le parc est composé de $n = 200$ machines et la probabilité pour une de ces machines de tomber en panne au moins une fois au cours du mois est de 0,03.

   Soit x le nombre de machines tombant en panne au moins une fois au cours du mois.

   a) Déterminer la loi de probabilité pour que $x = k$ $(k=0, 1, \ldots, 200)$

   b) Calculer cette probabilité pour $x = 0, 1, 2$.
   L'approximation par la loi de Poisson est-elle justifiée ?

   c) Quelle est la probabilité pour que x soit inférieur à 3 ?

   d) Déterminer l'espérance mathématique et la variance de x.

23.41 *MAINTENANCE 80 (durée : 3 heures)*

La firme qui vous emploie vient d'acquérir l'usine d'une entreprise concurrente qui, par suite de mauvaise gestion, est proche de la faillite.

Il a été notamment constaté qu'il n'y a pas de service de maintenance dans cette usine et que, si chaque ouvrier fait l'entretien minimum élémentaire de son outillage, aucune visite préventive du matériel n'est effectuée et que le dépannage est entièrement réalisé par une société spécialisée qui fournit, à la demande, le nombre d'ouvriers nécessaires.

PREMIERE PARTIE

Il vous est demandé de mettre en place une équipe d'entretien et de dépannage dont le personnel sera attaché à cette usine.

Afin d'en fixer l'effectif vous avez étudié les besoins pendant une période de cent jours en continuant à faire appel au personnel extérieur à l'entreprise.

La statistique suivante indique, pour chacun de ces cent jours, le nombre d'ouvriers employés :

3 4 2 3 4	1 5 4 4 2	5 5 3 4 5	2 4 3 3 4
3 5 5 5 5	4 3 5 5 3	2 5 6 4 3	3 4 4 5 1
2 4 4 7 4	6 5 4 5 8	4 3 7 6 3	6 4 5 4 2
3 4 2 4 6	4 3 2 4 6	3 4 3 2 4	2 6 4 5 4
4 5 3 4 3	5 6 2 3 4	4 1 4 5 3	3 1 3 4 4

1°) Dépouiller cette statistique.

2°) Vous faites l'hypothèse que cette distribution se poursuivra dans l'avenir et à chaque valeur i du nombre d'ouvriers nécessaires vous donnez pour probabilité la fréquence résultant de la statistique précédente. On note p(i) la probabilité d'avoir besoin d'une équipe de i membres un jour quelconque.

Soit P(i) la probabilité d'avoir besoin d'une équipe comprenant <u>au plus</u> i ouvriers.
Donner, dans un tableau, les valeurs de i, de p(i) et de P(i) après avoir expliqué comment on détermine les valeurs de P à partir de celles de p.

Soit P'(i) la probabilité d'avoir besoin d'une équipe comprenant <u>au moins</u> i ouvriers.
Donner la formule permettant de calculer P'(i) à l'aide des valeurs de P.

3°) Vous avez également constaté que le coût moyen d'un ouvrier de l'entreprise de dépannage est de 600 F par journée d'intervention.
Votre employeur vous a indiqué que, compte tenu des heures de travail de nuit et de week-end ainsi que des charges, le coût quotidien d'un agent de maintenance attaché à l'usine est, en moyenne, de 350 F par jour ouvré.

Chaque membre de l'équipe à créer permettra donc de réaliser une économie de 250 F chaque jour où il sera effectivement employé et occasionnera une perte de 350 F chaque jour où il n'aura pas à intervenir.

Montrer que si l'équipe est constituée de n membres, l'adjonction d'un membre supplémentaire entraîne une "économie algébrique" égale à 250 - 600 P(n). (Il y a économie si cette valeur est positive et perte si elle est négative).

Dans l'hypothèse, réelle où il sera toujours possible en ca de besoin de faire appel à du personnel complémentaire de la société de dépannage, quelle est la valeur de n pour laquelle il est économiquement intéressant d'ajouter un membre de plus à l'équipe ?

En déduire l'effectif de votre équipe de maintenance.

4°) Cet effectif étant fixé, on considère l'aléa numérique ayant pour valeurs les "économies algébriques" quotidiennes possibles (par exemple, si l'effectif est 2 : pour une journée où un seul ouvrier suffirait, l'un économise 250 F et l'autre coûte 350 F d'où une économie algébrique de -100 F ; pour toute journée où les besoins sont supérieurs ou égaux à deux l'économie réalisée est de 500 F)

Déterminer la loi de probabilité de cet aléa numérique.

En déduire quelles sont, en moyenne, l'économie quotidienne probable puis l'économie annuelle probable pour une année de 235 jours ouvr

DEUXIEME PARTIE

Vous avez également constaté que les machines d'un certain type sont souvent d'un emploi dangereux en raison de la défaillance d'un relais électrique ce qui rend inopérant le dispositif de sécurité.

Vous avez fait remplacer ces relais sur les douze machines de ce type afin d'étudier leur durée de bon fonctionnement. Les résultats constatés sont regroupés dans le tableau ci-dessous :

Repère	Durée en heures	Repère	Durée en heures	Repère	Durée en heures
R - 1	502	R - 5	901	R - 9	1253
R - 2	901	R - 6	151	R - 10	420
R - 3	1376	R - 7	578	R - 11	234
R - 4	901	R - 8	420	R - 12	1047

1°) Déterminer graphiquement les paramètres de la loi de Weibull ajustant cette distribution.

2°) Calculer le temps moyen de bon fonctionnement ainsi que la probabilité de bon fonctionnement jusqu'à cette date.

3°) Si vous faites remplacer le relais unique par trois relais identiques branchés en parallèle quelle sera alors la fiabilité du dispositif jusqu'à la date de bon fonctionnement déterminée à la question précédente ?

23.42 MAINTENANCE 81 (durée : 3 heures) corrigé

(15 points)

La société qui vous emploie posséde 30 engins de chantier. Vous avez constaté un coût important pour la maintenance de ce matériel. En effet, le convertisseur hydraulique qui équipe ces engins casse souvent. Voici le relevé du temps de bon fonctionnement de chacun des convertisseurs:

n° de machine	t
1	2142 h
2	
3	
4	
5	2200 h
6	
7	2594 h
8	
9	1880 h
10	

n° de machine	t
11	
12	
13	
14	1304 h
15	
16	
17	2249 h
18	
19	
20	1827 h

n° de machine	t
21	
22	2246 h
23	
24	
25	2422 h
26	
27	
28	1547 h
29	
30	

t représente la durée de bon fonctionnement avant rupture. Les machines, sans indication, ont déjà fonctionné plus de 2650 heures sans avarie.

Première partie:

1°) Dépouiller cette statistique et placer les résultats dans un tableau :

n°	t	F(t)	%

Dans lequel F(t) est l'effectif des machines dont le temps de bon fonctionnement est inférieur ou égal à t .

2°) En utilisant le papier de Weibull, déterminer les paramètres de la loi de Weibull susceptible de représenter la durée de vie de ce convertisseur.

Seconde partie: indépendante de la première.

On considère que la durée de vie du convertisseur suit une loi de Weibull de paramètres: $\gamma = 0$; $\eta = 3100$; $\beta = 3{,}8$.

Pour minimiser le coût d'entretien, on recherche le moment où il faut intervenir préventivement et remettre le matériel à neuf.

1°) Déterminer, pour chacunes des valeurs de t ci-dessous, la probabilité de la rupture du convertisseur entre t-500 et t .

$$t \in \{ 500 \ ; \ 1000 \ ; \ 1500 \ ; \ 2000 \ ; \ 2500 \ ; \ 3000 \}$$

On sait que le coût C d'entretien par heure de bon fonctionnement est :

$C = \dfrac{18000}{t - 250}$ si le matériel casse entre t-500 et t.

$C = \dfrac{6000}{t}$ si on remet à neuf le matériel avant qu'il ne casse et après t heures de fonctionnement.

2°) On étudie le coût moyen de maintenance par heure de bon fonctionnement dans l'hypothèse: "remise à neuf lors de la rupture ou sinon après 1500 heures de fonctionnement."

Soit la variable aléatoire discrète C_1 telle que :

$C_1 = \dfrac{18000}{t - 250}$ si le matériel casse entre t-500 et t; avec t égal à 500 ; 1000 ; 1500 .

$C_1 = \dfrac{6000}{1500}$ si on remet à neuf le matériel après 1500 heures de bon fonctionnement et avant qu'il ne casse.

Quelles sont les diverses valeurs de C_1 et les probabilités associées ? Déterminer alors l'espérance mathématique de C_1 .

3°) On étudie maintenant l'hypothèse : "remise à neuf lors de la rupture ou sinon après 2000 heures de fonctionnement."

Soit la variable aléatoire discrète C_2 telle que :

$C_2 = \dfrac{18000}{t - 250}$ si le matériel casse entre t-500 et t ; avec t égal à 500 ; 1000 ; 1500 ou 2000 .

$C_2 = \dfrac{6000}{2000}$ si on remet à neuf le matériel après 2000 heures de bon fonctionnement et avant qu'il ne casse.

Déterminer comme au 2° l'espérance mathématique de C_2 .

4°) On étudie maintenant l'hypothèse : "remise à neuf lors de la rupture ou sinon après 2500 heures de fonctionnement."

Soit la variable aléatoire discrète C_3 telle que :

$C_3 = \dfrac{18000}{t - 250}$ si le matériel casse entre t-500 et t ; avec t égal à 500 ; 1000 ; 1500 ; 2500 ; 2000 .

$C_3 = \dfrac{6000}{2500}$ si on remet à neuf le matériel après 2500 heures de bon fonctionnement et avant qu'il ne casse.

Déterminer comme au 2° l'espérance mathématique de C_3 .

<u>Conclusion</u>:

Quelle politique de maintenance appliqueriez-vous ?

document joint : papier Weibull

23.43 MAINTENANCE 82 (15 points)

Un atelier est constitué de 30 postes de travail identique Chaque poste est équipé d'une machine A et d'une machine B. Le trava effectué par une machine est totalement indépendant du travail effec par l'autre.

Les probabilités de défaillance pour une journée de foncti ment sont pour la machine A : $P_A = 0,1$ et pour la machine B : $P_B = 0$

1 - Au cours d'une journée de fonctionnement, on considère un poste d travail quelconque. Déterminer, pour une journée de fonctionnemen

1.1. - La probabilité P_1 pour que les deux machines A et B tombe en panne.

1.2. - La probabilité P_2 pour que l'une au moins des deux machin tombe en panne.

1.3. - La probabilité P_3 pour que la machine A seule tombe en pa

1.4. - La probabilité P_4 pour qu'une machine et une seule tombe en panne.

2 - Au cours d'une journée de fonctionnement, on considère 10 machines A quelconques de l'atelier.
Soit X la variable aléatoire (ou aléa numérique) prenant pour valeur le nombre de machines A qui tombent en panne.
Donner la loi de probabilité de X.

2.1. - Calculer la probabilité pour que parmi les 10 machines A, il y en ait 3 exactement qui tombent en panne.

2.2. - Calculer la probabilité pour que parmi ces 10 machines A, il en ait au plus une qui tombe en panne.

On donnera de ces probabilités des valeurs décimales approchées à 10^{-4} près par défaut.

3 - Soit Y la variable aléatoire prenant pour valeurs le nombre possible de postes de travail (parmi les 30) dans lesquels une machine et une seule est en panne au cours d'une journée.
En justifiant l'emploi de la loi de Poisson que l'on utilisera, calculer :

3.1. - La probabilité pour que parmi les 30 postes, il y en ait 4 qu comportent une machine et une seule en panne.

3.2. - La probabilité pour que parmi les 30 postes, il y en ait au moins 2 qui comportent une machine et une seule en panne

(Pour traiter cette question on prendra 0,12 comme valeur approchée de P_4)
On donnera de ces probabilités des valeurs décimales approchées à 10^{-2} près par défaut.

4 - Sur une pièce produite par un poste de travail, on contrôle deux dimensions x et y. Ces dimensions doivent être $x = 6 \pm 0{,}01$ et $y = 3 \pm 0{,}01$. On mesure les pièces produites par un poste de travai au cours d'une journée, on trouve que la moyenne de x est $E(x) = 6{,}003$ avec un écart type $\sigma_x = 0{,}005$, la moyenne de y est $E(y) = 3{,}002$ avec un écart type $\sigma_y = 0{,}005$.
Les distributions de x et y sont normales et indépendantes.
Quel est le pourcentage de rebut fait par ce poste au cours d'une journée ?

5 - On a constaté un coût important pour la maintenance des machines A. La direction de l'usine décide d'étudier la politique de maintenanc à appliquer. On relève le nombre de jours de bon fonctionnement des

30 machines au cours d'une année, cela a permis de constater que l
durée de vie de ces machines suit une loi de Weibull de paramètres
$\gamma = 80$; $\eta = 110$; $\beta = 2,2$
Soit t la variable aléatoire associée au nombre de jours de bon fonctionnement avant la première panne ; représenter graphiquement, sur papier de Weibull (document réponse), la fonction de répartition F cette variable aléatoire, pour $t \in [100, 250]$.
Déterminer le nombre moyen de jours de bon fonctionnement ainsi que la probabilité de survie durant cette période.
En utilisant la courbe représentative de F, déterminer graphiquement le nombre de jours au bout desquels 30 % des machines ont eu leur première panne.

N.B. : Les cinq questions sont indépendantes.

loi de Weibull
loi binomiale
loi de Poisson
fonction de répartition de la binomiale

... 4 pages de Tables
1 document réponse en 2 exemplaires dont un exemplaire à rendre en fin d'épreuve

---

23.44 MAINTENANCE 83 (15 points) corrigé

L'objet du problème est l'étude du fonctionnement d'un tour, élément du parc de machines de l'atelier de mécanique d'une entreprise. Les deux parties du problème sont indépendantes.

PARTIE I

Ce tour usine des axes au diamètre théorique de 24 mm ; on admet que le diamètre de ces axes est une variable aléatoire gaussienne de moyenne 24 mm d'écart type 0,02 mm. L'intervalle de tolérance imposé pour l'usage des pièces est $[23,95 ; 24,05]$.

1 - Déterminer le nombre de pièces bonnes sur un effectif de 1 000.

2 - On contrôle le fonctionnement de la machine, en prélevant un échantillon de 20 pièces, au hasard, dans la fabrication. Déterminer l'intervalle $[a, b]$ dans lequel doit être située la moyenne $\overline{x}$ de cet échantillon pour que la machine puisse être considérée comme bien réglée avec une probabilité de 0,99.

3 - Les mesures ont donné les résultats suivants :

Ø	de 23,93 à 23,95	de 23,95 à 23,97	de 23,97 à 23,99	de 23,99 à 24,01	de 24,01 à 24,03	de 24,03 à 24,05	de 24,05 à 24,07
n	1	1	1	7	8	2	0

3.1 - Calculer la moyenne et l'écart type de cette série statistic

3.2 - Que pouvez-vous conclure de ces résultats ?

PARTIE II : Etude de la fiabilité du tour

1 - Pendant une période s'étendant du 01.09.77 au 01.09.82 cette machine a subi 10 pannes pendant 1 205 jours de production. Les temps entre deux pannes (en jours) sont les suivants :

44 ; 68 ; 82 ; 39 ; 106 ; 299 ; 57 ; 255 ; 151 ; 49.

1.1 - Disposer les résultats de cette statistique dans un tableau faisant apparaître : le numéro d'ordre des pannes, les temps entre deux pannes classés par ordre croissant, les temps cumulés.

1.2 - On note R(t) la probabilité de survie du matériel à la date En utilisant du papier semi logarithmique, justifier l'appro ximation de R(t) par une loi exponentielle.

1.3 - Calculer le temps moyen de bon fonctionnement de la machine.

2 - On se propose d'utiliser les résultats obtenus pour prévoir une politique de maintenance pour l'année à venir comptée à 241 jours ouvrables. On note P(x, T) la probabilité pour que le tour tombe en panne, exactement x fois, pendant la période T (où T est exprim en jours). On considère que la variable aléatoire, nombre de panne pendant la période T suit une loi de Poisson de paramètre m = 2.

2.1 - Expliquer le choix de cette valeur du paramètre. Calculer le nombre moyen de pannes pendant l'année.

2.2 - Chaque panne coûte à l'entreprise 6 000 francs; on note A la variable aléatoire "coût des réparations du tour pou l'année".

- Quelle est la loi de probabilité de A ?
- Calculer son espérance mathématique.

3 - Afin de prévenir les pannes, on étudie la possibilité d'une vi préventive de la machine. Cette vérification représente un coû forfaitaire de 240 francs.

3.1 - Déterminer la périodicité des visites pour qu'avec une pr bilité de 0,95 on puisse assurer que le tour ne tombera en panne entre deux vérifications.

3.2 - Evaluer la dépense à prévoir si on adopte cette solution

3.3 - Quelle décision prendriez-vous ?

RAPPEL :

Si la variable aléatoire T suit une loi normale centrée réduite N(0,

$P(0 < t < 2,5) = 0,4938$
$P(0 < t < 2,57) = 0,495$

... Document joint : une feuille de papier semi-logarithmique

---

DES TABLES

Table des valeurs de la loi binomiale B (n; p)

n	k	p = 0,05	p = 0,1	p = 0,2	p = 0,3	p = 0,4	p = 0,5
2	0	0,902 5	0,810 0	0,640 0	0,490 0	0,360 0	0,250 0
	1	0,095 0	0,180 0	0,320 0	0,420 0	0,480 0	0,500 0
	2	0,002 5	0,010 0	0,040 0	0,090 0	0,160 0	0,250 0
3	0	0,857 4	0,729 0	0,512 0	0,343 0	0,216 0	0,125 0
	1	0,135 4	0,243 0	0,384 0	0,441 0	0,432 0	0,375 0
	2	0,007 1	0,027 0	0,096 0	0,189 0	0,288 0	0,375 0
	3	0,001 0	0,001 0	0,008 0	0,027 0	0,064 0	0,125 0
4	0	0,814 5	0,656 1	0,409 6	0,240 1	0,129 6	0,062 5
	1	0,171 5	0,291 6	0,409 6	0,411 6	0,345 6	0,250 0
	2	0,013 5	0,048 6	0,153 6	0,264 6	0,345 6	0,375 0
	3	0,000 5	0,003 6	0,025 6	0,075 6	0,153 6	0,250 0
	4		0,000 1	0,001 6	0,008 1	0,025 6	0,062 5
5	0	0,773 8	0,590 5	0,327 7	0,168 1	0,077 8	0,031 2
	1	0,203 6	0,328 0	0,409 6	0,360 2	0,259 2	0,156 2
	2	0,021 4	0,072 9	0,204 8	0,308 7	0,345 6	0,312 5
	3	0,001 1	0,008 1	0,051 2	0,132 3	0,230 4	0,312 5
	4		0,000 5	0,006 4	0,028 4	0,076 8	0,156 2
	5			0,000 3	0,002 4	0,010 2	0,031 2
6	0	0,735 1	0,531 4	0,262 1	0,117 6	0,046 7	0,015 6
	1	0,232 1	0,354 3	0,393 2	0,302 5	0,186 6	0,093 8
	2	0,030 5	0,098 4	0,245 8	0,324 1	0,311 0	0,234 4
	3	0,002 1	0,014 6	0,081 9	0,185 2	0,276 5	0,312 5
	4	0,000 1	0,001 2	0,015 4	0,059 5	0,138 2	0,234 4
	5		0,000 1	0,001 5	0,010 2	0,036 9	0,093 8
	6			0,000 1	0,000 7	0,004 1	0,015 6
7	0	0,698 3	0,478 3	0,209 7	0,082 0	0,028 0	0,007 8
	1	0,257 3	0,372 0	0,367 0	0,247 1	0,130 6	0,054 7
	2	0,040 6	0,124 0	0,275 3	0,317 6	0,261 3	0,164 1
	3	0,003 6	0,023 0	0,114 7	0,226 9	0,290 3	0,273 4
	4	0,000 2	0,002 6	0,028 7	0,097 2	0,193 5	0,273 4
	5		0,000 2	0,004 3	0,025 0	0,077 4	0,164 1
	6			0,000 4	0,003 6	0,017 2	0,054 7
	7				0,000 2	0,001 6	0,007 8
8	0	0,663 4	0,430 5	0,167 8	0,057 6	0,016 8	0,003 9
	1	0,279 3	0,382 6	0,335 5	0,197 7	0,089 6	0,031 2
	2	0,051 5	0,148 8	0,293 6	0,296 5	0,209 0	0,109 4
	3	0,005 4	0,033 1	0,146 8	0,254 1	0,278 7	0,218 8
	4	0,000 4	0,004 6	0,045 9	0,136 1	0,232 2	0,273 4
	5		0,000 4	0,009 2	0,046 7	0,123 9	0,218 8
	6			0,001 1	0,010 0	0,041 3	0,109 4
	7			0,000 1	0,001 2	0,007 9	0,031 2
	8				0,000 1	0,000 7	0,003 9
9	0	0,630 2	0,387 4	0,134 2	0,040 4	0,010 1	0,002 0
	1	0,298 5	0,387 4	0,302 0	0,155 6	0,060 5	0,017 6
	2	0,062 9	0,172 2	0,302 2	0,266 8	0,161 2	0,070 3
	3	0,007 7	0,044 6	0,176 2	0,266 8	0,250 8	0,164 1
	4	0,000 6	0,007 4	0,066 1	0,171 5	0,250 8	0,246 1
	5		0,000 8	0,016 5	0,073 5	0,167 2	0,246 1
	6		0,000 1	0,002 8	0,021 0	0,074 3	0,164 1
	7			0,000 3	0,003 9	0,021 2	0,070 3
	8				0,000 4	0,003 5	0,017 6
	9					0,000 3	0,002 0
10	0	0,598 7	0,348 7	0,107 4	0,028 2	0,006 0	0,001 0
	1	0,315 1	0,387 4	0,268 4	0,121 1	0,040 3	0,009 8
	2	0,074 6	0,193 7	0,302 0	0,233 5	0,120 9	0,043 9
	3	0,010 5	0,057 4	0,201 3	0,266 8	0,215 0	0,117 2
	4	0,001 0	0,011 2	0,088 1	0,200 1	0,250 8	0,205 1
	5	0,000 1	0,001 5	0,026 4	0,102 9	0,200 7	0,246 1
	6		0,000 1	0,005 5	0,036 8	0,111 5	0,205 1
	7			0,000 8	0,009 0	0,042 5	0,117 2
	8			0,000 1	0,001 4	0,010 6	0,043 9
	9				0,000 1	0,001 6	0,009 8
	10					0,000 1	0,001 0

Table 2 : Loi de Poisson $P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$

k	λ = 0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
0	0,9048	0,8187	0,7408	0,6703	0,6065	0,5488	0,4966	0,4493	0,4066	0,3679
1	0,0905	0,1637	0,2222	0,2681	0,3033	0,3293	0,3476	0,3595	0,3659	0,3679
2	0,0045	0,0164	0,0333	0,0536	0,0758	0,0988	0,1217	0,1438	0,1647	0,1839
3	0,0002	0,0011	0,0033	0,0072	0,0126	0,0198	0,0284	0,0383	0,0494	0,0613
4	0,0000	0,0001	0,0002	0,0007	0,0016	0,0030	0,0050	0,0077	0,0111	0,0153
5	0,0000	0,000	0,0000	0,0001	0,0002	0,0004	0,0007	0,0012	0,0020	0,0031
6	0,0000	0,000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0002	0,0003	0,0005
7	0,0000	0,000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001

k	λ = 1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	2,0
0	0,3329	0,3012	0,2725	0,2466	0,2231	0,2019	0,1827	0,1653	0,1496	0,1353
1	0,3662	0,3614	0,3543	0,3452	0,3347	0,3230	0,3106	0,2975	0,2842	0,2707
2	0,2014	0,2169	0,2303	0,2417	0,2510	0,2584	0,2640	0,2678	0,2700	0,2707
3	0,0738	0,0867	0,0998	0,1128	0,1255	0,1378	0,1496	0,1607	0,1710	0,1804
4	0,0203	0,0260	0,0324	0,0395	0,0471	0,0551	0,0636	0,0723	0,0812	0,0902
5	0,0045	0,0062	0,0084	0,0111	0,0141	0,0176	0,0216	0,0260	0,0309	0,0361
6	0,0008	0,0012	0,0018	0,0026	0,0035	0,0047	0,0061	0,0078	0,0098	0,0120
7	0,0001	0,0002	0,0003	0,0005	0,0008	0,0011	0,0015	0,0020	0,0027	0,0034
8	0,0000	0,0000	0,0001	0,0001	0,0001	0,0002	0,0003	0,0005	0,0006	0,0009
9	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0001	0,0001	0,0002

k	λ = 2,1	2,2	2,3	2,4	2,5	2,6	2,7	2,8	2,9	3,0
0	0,1225	0,1108	0,1003	0,0907	0,0821	0,0743	0,0672	0,0608	0,0550	0,0498
1	0,2572	0,2438	0,2306	0,2177	0,2052	0,1931	0,1815	0,1703	0,1596	0,1494
2	0,2700	0,2681	0,2652	0,2613	0,2565	0,2510	0,2450	0,2384	0,2314	0,2240
3	0,1890	0,1966	0,2033	0,2090	0,2138	0,2176	0,2205	0,2225	0,2237	0,2240
4	0,0992	0,1082	0,1169	0,1254	0,1336	0,1414	0,1488	0,1557	0,1622	0,1680
5	0,0417	0,0476	0,0538	0,0602	0,0668	0,0735	0,0804	0,0872	0,0940	0,1008
6	0,0146	0,0174	0,0206	0,0241	0,0278	0,0319	0,0362	0,0407	0,0455	0,0504
7	0,0044	0,0055	0,0068	0,0083	0,0099	0,0118	0,0139	0,0163	0,0188	0,0216
8	0,0011	0,0015	0,0019	0,0025	0,0031	0,0038	0,0047	0,0057	0,0068	0,0081
9	0,0003	0,0004	0,0005	0,0007	0,0009	0,0011	0,0014	0,0018	0,0022	0,0027
10	0,0001	0,0001	0,0001	0,0002	0,0002	0,0003	0,0004	0,0005	0,0006	0,0008
11	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0001	0,0001	0,0002	0,0002
12	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001

k	λ = 3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6	3,7	3,8	3,9	4,0
0	0,0450	0,0408	0,0369	0,0334	0,0302	0,0273	0,0247	0,0224	0,0202	0,0183
1	0,1397	0,1304	0,1217	0,1135	0,1057	0,0984	0,0915	0,0850	0,0789	0,0733
2	0,2165	0,2087	0,2008	0,1929	0,1850	0,1771	0,1692	0,1615	0,1539	0,1465
3	0,2237	0,2226	0,2209	0,2186	0,2158	0,2125	0,2087	0,2046	0,2001	0,1954
4	0,1734	0,1781	0,1823	0,1858	0,1888	0,1912	0,1931	0,1944	0,1951	0,1954
5	0,1075	0,1140	0,1203	0,1264	0,1322	0,1377	0,1429	0,1477	0,1522	0,1563
6	0,0555	0,0608	0,0662	0,0716	0,0771	0,0826	0,0881	0,0936	0,0989	0,1042
7	0,0246	0,0278	0,0312	0,0348	0,0385	0,0425	0,0466	0,0508	0,0551	0,0595
8	0,0095	0,0111	0,0129	0,0148	0,0169	0,0191	0,0215	0,0241	0,0269	0,0298
9	0,0033	0,0040	0,0047	0,0056	0,0066	0,0076	0,0089	0,0102	0,0116	0,0132
10	0,0010	0,0013	0,0016	0,0019	0,0023	0,0028	0,0033	0,0039	0,0045	0,0053
11	0,0003	0,0004	0,0005	0,0006	0,0007	0,0009	0,0011	0,0013	0,0016	0,0019
12	0,0001	0,0001	0,0001	0,0002	0,0002	0,0003	0,0003	0,0004	0,0005	0,0006
13	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0002	0,0002
14	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001

4. LOI DE POISSON. — Fonction cumulative $P_K = \sum_{0 \leq i \leq K} e^{-\lambda} \frac{\lambda^i}{k!}$.

K	λ = 0,1	λ = 0,2	λ = 0,3	λ = 0,4	λ = 0,5	λ = 0,6	λ = 0,7	λ = 0,8	λ = 0,9
0	0,904 8	0,818 7	0,740 8	0,670 3	0,606 5	0,548 8	0,496 6	0,449 3	0,460 6
1	0,995 3	0,982 5	0,963 1	0,938 4	0,909 8	0,878 1	0,844 2	0,808 8	0,772 5
2	0,999 8	0,998 8	0,996 4	0,992 0	0,985 6	0,976 9	0,965 9	0,952 6	0 937 2
3	1	0,999 9	0,999 7	0,999 2	0,998 2	0,996 6	0,994 2	0,990 9	0,986 6
4		1	1	0,999 9	0,999 8	0,999 6	0,999 2	0,998 6	0,997 7
5				1	1	1	0,999 9	0,999 8	0,999 7
6							1	1	1

K	λ = 1,0	λ = 1,5	λ = 2,0	λ = 2,5	λ = 3,0	λ = 3,5	λ = 4,0	λ = 4,5	λ = 5,0
0	0,367 9	0,223 1	0,135 3	0,082 1	0,049 8	0,030 2	0,018 3	0,011 1	0,006 7
1	0,735 8	0,557 8	0,406 0	0,287 3	0,199 1	0,135 9	0,091 6	0,061 1	0,040 4
2	0,919 7	0,808 8	0,676 7	0,543 8	0,423 2	0,320 8	0,238 1	0,173 6	0,124 7
3	0,981 0	0,934 4	0,857 1	0,757 6	0,647 2	0,536 6	0,433 5	0,342 3	0,265 0
4	0,996 3	0,981 4	0,947 3	0,891 2	0,815 3	0,725 4	0,628 8	0,532 1	0,440 5
5	0,999 4	0,995 5	0,983 4	0,957 9	0,916 1	0,857 6	0,785 1	0,702 9	0,616 0
6	0,999 9	0,999 1	0,995 5	0,985 8	0,966 5	0,934 7	0,889 3	0,831 1	0,762 2
7	1	0,999 8	0,999 9	0,995 8	0,988 1	0,973 3	0,948 9	0,913 4	0,866 6
8		1	0,999 8	0,998 9	0,996 2	0,990 1	0,978 6	0,959 7	0,931 9
9			1	0,999 7	0,998 9	0,996 7	0,991 9	0,982 9	0,968 2
10				0,999 9	0,999 7	0,999 0	0,997 2	0,993 3	0,986 3
11				1	0,999 9	0,999 7	0,997 1	0,997 6	0,994 5
12					1	0,999 9	0,999 7	0,999 2	0,998 0
13						1	0,999 9	0,999 7	0,999 3
14							1	0,999 9	0,999 8
15								1	0,999 9
16									1

K	λ = 5,5	λ = 6,0	λ = 6,5	λ = 7,0	λ = 7,5	λ = 8,0	λ = 8,5	λ = 9,0	λ = 9,5
0	0,004 1	0,002 5	0,001 5	0,000 9	0,000 6	0,000 3	0,000 2	0,000 1	0,000 1
1	0,026 6	0,017 4	0,011 3	0,007 3	0,004 7	0,003 0	0,001 9	0,001 2	0,000 8
2	0,088 4	0,062 0	0,043 0	0,029 6	0,020 3	0,013 8	0,009 3	0,006 2	0,004 2
3	0,201 7	0,151 2	0,111 8	0,081 8	0,059 1	0,042 4	0,030 1	0,021 2	0,014 9
4	0,357 5	0,285 1	0,223 7	0,173 0	0,132 1	0,099 6	0,074 6	0,055 0	0,040 3
5	0,528 9	0,445 7	0,369 0	0,300 7	0,241 4	0,191 2	0,149 6	0,115 7	0,088 5
6	0,686 0	0,606 3	0,526 5	0,449 7	0,378 2	0,313 4	0,256 2	0,206 8	0,164 9
7	0,809 5	0,744 0	0,672 8	0,598 7	0,524 6	0,453 0	0,385 6	0,323 9	0,268 7
8	0,904 4	0,847 2	0,791 6	0,729 1	0,662 0	0,592 5	0,523 1	0,455 7	0,391 8
9	0,946 2	0,916 1	0,877 4	0,830 5	0,776 4	0,716 6	0,653 0	0,587 4	0,521 8
10	0,974 7	0,957 4	0,933 2	0,901 5	0,862 2	0,815 9	0,763 4	0,706 0	0,645 3
11	0,989 0	0,979 9	0,966 1	0,946 6	0,920 8	0,888 1	0,848 7	0,803 0	0,752 0
12	0,995 5	0,991 2	0,984 0	0,973 0	0,957 3	0,936 2	0,909 1	0,875 8	0,836 4
13	0,998 3	0,996 4	0,992 9	0,987 2	0,978 4	0,965 8	0,948 6	0,926 1	0,898 1
14	0,999 4	0,998 6	0,997 0	0,994 3	0,989 7	0,982 7	0,972 6	0,958 5	0,940 0
15	0,999 8	0,999 5	0,998 8	0,997 6	0,995 4	0,991 8	0,986 2	0,978 0	0,966 5
16	0,999 9	0,999 8	0,999 6	0,999 0	0,998 0	0,996 3	0,993 3	0,988 9	0,982 3
17	1	1	0,999 8	0,999 6	0,999 2	0,998 4	0,997 0	0,994 7	0,991 1
18			1	0,999 9	0,999 7	0,999 3	0,998 7	0,997 6	0,995 7
19				1	0,999 9	0,999 7	0,999 5	0,998 9	0,998 0
20					1	0,999 9	0,999 8	0,999 6	0,999 1
21						1	0,999 9	0,999 8	0,999 6
22							1	0,999 9	0,999 8
23								1	0,999 9
24									1

Fonction de répartition de la loi normale

$$P(0 \leqslant T \leqslant t) = G(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^t e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,0000	0,0040	0,0080	0,0120	0,0160	0,0199	0,0239	0,0279	0,0319	0,0359
0,1	0,0398	0,0438	0,0478	0,0517	0,0557	0,0596	0,0636	0,0675	0,0714	0,0753
0,2	0,0793	0,0832	0,0871	0,0910	0,0948	0,0987	0,1026	0,1064	0,1103	0,1141
0,3	0,1179	0,1217	0,1255	0,1293	0,1331	0,1368	0,1406	0,1443	0,1480	0,1517
0,4	0,1554	0,1591	0,1628	0,1664	0,1700	0,1736	0,1772	0,1808	0,1844	0,1879
0,5	0,1915	0,1950	0,1985	0,2019	0,2054	0,2088	0,2123	0,2157	0,2190	0,2224
0,6	0,2257	0,2291	0,2324	0,2357	0,2389	0,2422	0,2454	0,2486	0,2517	0,2549
0,7	0,2580	0,2611	0,2642	0,2673	0,2704	0,2734	0,2764	0,2794	0,2823	0,2852
0,8	0,2881	0,2910	0,2939	0,2967	0,2995	0,3023	0,3051	0,3078	0,3106	0,3133
0,9	0,3159	0,3186	0,3212	0,3238	0,3264	0,3289	0,3315	0,3340	0,3365	0,3389
1,0	0,3413	0,3438	0,3461	0,3485	0,3508	0,3531	0,3554	0,3577	0,3599	0,3621
1,1	0,3643	0,3665	0,3686	0,3708	0,3729	0,3749	0,3770	0,3790	0,3810	0,3830
1,2	0,3849	0,3869	0,3888	0,3907	0,3925	0,3944	0,3962	0,3980	0,3997	0,4015
1,3	0,4032	0,4049	0,4066	0,4082	0,4099	0,4115	0,4131	0,4147	0,4162	0,4177
1,4	0,4192	0,4207	0,4222	0,4236	0,4251	0,4265	0,4279	0,4292	0,4306	0,4319
1,5	0,4332	0,4345	0,4357	0,4370	0,4382	0,4394	0,4406	0,4418	0,4429	0,4441
1,6	0,4452	0,4463	0,4474	0,4484	0,4495	0,4505	0,4515	0,4525	0,4535	0,4545
1,7	0,4554	0,4564	0,4573	0,4582	0,4591	0,4599	0,4608	0,4616	0,4625	0,4633
1,8	0,4641	0,4649	0,4656	0,4664	0,4671	0,4678	0,4686	0,4693	0,4699	0,4706
1,9	0,4713	0,4719	0,4726	0,4732	0,4738	0,4744	0,4750	0,4756	0,4761	0,4767
2,0	0,4772	0,4778	0,4783	0,4788	0,4793	0,4798	0,4803	0,4808	0,4812	0,4817
2,1	0,4821	0,4826	0,4830	0,4834	0,4838	0,4842	0,4846	0,4850	0,4854	0,4857
2,2	0,4861	0,4864	0,4868	0,4871	0,4875	0,4878	0,4881	0,4884	0,4887	0,4890
2,3	0,4893	0,4896	0,4998	0,4901	0,4904	0,4906	0,4909	0,4911	0,4913	0,4916
2,4	0,4918	0,4920	0,4922	0,4925	0,4927	0,4929	0,4931	0,4932	0,4934	0,4936
2,5	0,4938	0,4940	0,4941	0,4943	0,4945	0,4946	0,4948	0,4949	0,4951	0,4952
2,6	0,4953	0,4955	0,4956	0,4957	0,4959	0,4960	0,4961	0,4962	0,4963	0,4964
2,7	0,4965	0,4966	0,4967	0,4968	0,4969	0,4970	0,4971	0,4972	0,4973	0,4974
2,8	0,4974	0,4975	0,4976	0,4977	0,4977	0,4978	0,4979	0,4979	0,4980	0,4981
2,9	0,4981	0,4982	0,4983	0,4983	0,4984	0,4984	0,4985	0,4985	0,4986	0,4986
3,0	0,4987	0,4987	0,4987	0,4988	0,4988	0,4989	0,4989	0,4989	0,4990	0,4990
3,1	0,4990	0,4991	0,4991	0,4991	0,4992	0,4992	0,4992	0,4992	0,4993	0,4993
3,2	0,4993	0,4993	0,4994	0,4994	0,4994	0,4994	0,4994	0,4995	0,4995	0,4995
3,3	0,4995	0,4995	0,4995	0,4996	0,4996	0,4996	0,4996	0,4996	0,4996	0,4997
3,4	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4998
3,5	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998
3,6	0,4998	0,4998	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999
3,7	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999
3,8	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999
3,9	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000
4,0	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000

Fonction de répartition de la loi de Laplace-Gauss.

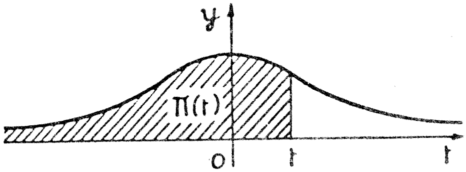
Probabilité d'une valeur inférieure à t :

$$\pi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{t} e^{-t^2/2} dt.$$

t	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	06915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7290	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9779	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,09984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986

TABLE III LOI NORMALE (répartition)

$$\text{Probabilité cumulée } \Pi(t) = \int_{-\infty}^{t} f(t)\, dt = \text{Prob } (T < t)$$



t	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5717	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7290	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9779	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	[illegible]	0,9940	0,9941	[illegible]	[illegible]	0,9946	[illegible]	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986

CAS DES GRANDES VALEURS DE *t*

t	3,0	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6	3,8	4,0	4,5
Π(t)	0,99865	0,99904	0,99931	0,99952	0,99966	0,99976	0,999841	0,999928	0,999968	0,999997

NOTA. — La table donne les valeurs de $\Pi(t)$ pour $t > 0$. Si t est négatif on prend le complément à l'unité de la valeur lue dans la table.

$$\Pi(-t) = 1 - \Pi(t)$$

LOI DE WEIBULL

Moyenne = $A\eta + \gamma$; Ecart-type = $B\eta$

β	A	B	β	A	B	β	A	B
			1,50	0,9027	0,613	4	0,9064	0,25
			1,55	0,8994	0,593	4,1	0,9077	0,24
			1,60	0,8966	0,574	4,2	0,9089	0,24
			1,65	0,8942	0,556	4,3	0,9102	0,23
,20	120	1901	1,70	0,8922	0,540	4,4	0,9114	0,23
,25	24	199	1,75	0,8906	0,525	4,5	0,9126	0,23
,30	9,2605	50,08	1,80	0,8893	0,511	4,6	0,9137	0,22
,35	5,0291	19,98	1,85	0,8882	0,498	4,7	0,9149	0,22
,40	3,3234	10,44	1,90	0,8874	0,486	4,8	0,9160	0,21
,45	2,4786	6,46	1,95	0,8867	0,474	4,9	0,9171	0,21
,50	2	4,47	2	0,8862	0,463	5	0,9182	0,21
,55	1,7024	3,35	2,1	0,8857	0,443	5,1	0,9192	0,20
,60	1,5046	2,65	2,2	0,8856	0,425	5,2	0,9202	0,20
,65	1,3663	2,18	2,3	0,8859	0,409	5,3	0,9213	0,20
,70	1,2638	1,85	2,4	0,8865	0,393	5,4	0,9222	0,19
,75	1,1906	1,61	2,5	0,8873	0,380	5,5	0,9232	0,19
,80	1,1330	1,43	2,6	0,8882	0,367	5,6	0,9241	0,19
,85	1,0880	1,29	2,7	0,8893	0,355	5,7	0,9251	0,18
,90	1,0522	1,17	2,8	0,8905	0,344	5,8	0,9260	0,18
,95	1,0234	1,08	2,9	0,8917	0,334	5,9	0,9269	0,18
	1	1	3	0,8930	0,325	6	0,9277	0,18
,05	0,9803	0,934	3,1	0,8943	0,316	6,1	0,9286	0,17
,10	0,9649	0,878	3,2	0,8957	0,307	6,2	0,9294	0,17
,15	0,9517	0,830	3,3	0,8970	0,299	6,3	0,9302	0,17
,20	0,9407	0,787	3,4	0,8984	0,292	6,4	0,9310	0,17
,25	0,9314	0,750	3,5	0,8997	0,285	6,5	0,9318	0,16
,30	0,9236	0,716	3,6	0,9011	0,278	6,6	0,9325	0,16
,35	0,9170	0,687	3,7	0,9025	0,272	6,7	0,9333	0,16
,40	0,9114	0,660	3,8	0,9038	0,266	6,8	0,9340	0,16
,45	0,9067	0,635	3,9	0,9051	0,260	6,9	0,9347	0,16