Brochure n°114
de la Commission inter-IREM
Lycées technologiques

Direction de l'enseignement scolaire
Bureau A11
Valorisation des innovations pédagogiques

Transformation en z

Eléments de cours
et exercices corrigés

Document d'aide à la mise en application du nouveau programme de mathématiques pour les BTS du groupement A, applicable à la rentrée 2001, en première année.

Université PARIS 13

I.R.E.M. PARIS NORD
99 avenue J.B. Clément
93430 VILLETANEUSE

Brochure n°114 de la Commission inter-IREM - Lycées Technologiques

Université Paris 13 .- I.R.E.M.
Transformation en z .-
Gilbert Demengel - Paul Bénichou
Norbert Boy

ISBN 286240 114 6

Dépôt légal : 1er trimestre 2002

AVANT - PROPOS

Cette brochure a été réalisée dans le cadre de travaux de recherche lancés par la Direction de l'enseignement scolaire et l'Inspection générale de mathématiques.

Elle est diffusée dans le cadre de la convention entre l'ADIREM et la DESCO.

Elle est destinée aux professeurs de mathématiques qui enseignent dans les sections de BTS de la filière électronique, en particulier en BTS CIRA, Electronique, TPIL. Elle est consacrée à la définition et à la mise en oeuvre d'un outil mathématique nouveau pour les élèves de ces sections. Elle s'articule autour de deux chapitres.

Le premier, qui n'est pas un cours à usage des élèves, a pour but de donner aux professeurs qui enseigneront la transformation en Z quelques éléments de réflexion pour construire leur cours.

Le second, propose une série d'exercices et problèmes avec des éléments de correction. Ces énoncés peuvent être proposés aux élèves, après d'éventuelles modifications. Il ne s'agit pas de « modèles ».

Nous espérons que ce travail aidera les professeur sde mathématiques enseignant dans la filière électronique.

Bernard VERLANT
Responsable de la Commission inter-IREM
« Lycées Technologiques »

Cette brochure a été réalisée par :

Gilbert DEMENGEL	(pour les éléments de cours)
Paul BENICHOU	(pour les éléments de cours
Norbert BOY	et les exercices)

avec la collaboration des enseignants de la Commission inter-IREM « Lycées technologiques »

Table des matières

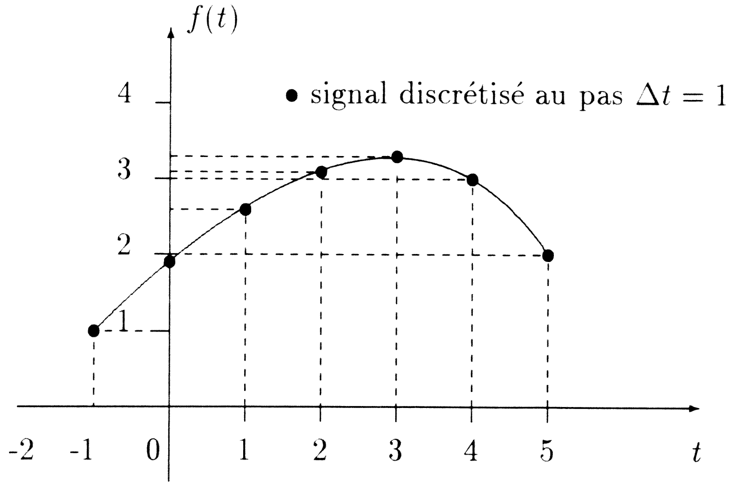
Chapitre 1

TRANSFORMATION EN Z

1.1 Signaux discrets

1.1.1 Définitions, notations

Les signaux utilisés en théorie du signal ne sont pas toujours représentés par des fonctions continues, ils peuvent aussi se présenter sous la forme d'une succession dans le temps de données numériques (signal discret). La notion de fonction, utilisée en analyse mathématique, doit, dans ce cas, laisser la place à la notion de **suite numérique**. Ces deux notions sont d'ailleurs liées. En effet, une fonction $t \mapsto f(t)$ étant donnée, on peut considérer la suite $(f(n\Delta t))_{n\in\mathbb{Z}}$ des valeurs de f à des instants $n\Delta t$ laissant entre eux des intervalles de temps réguliers (c'est-à-dire de **pas** Δt donné). Ce procédé, dit "d'échantillonnage", associe à un signal continu, un signal discret. On conçoit que, si le pas d'échantillonnage Δt est pris suffisamment petit, la connaissance du signal discret $(f(n\Delta t))_{n\in\mathbb{Z}}$ donne une idée assez précise du phénomène continu représenté par f.



On envisage donc un signal discret α comme une succession de nombres réels ou suite réelle $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{Z}}$. En principe α_n représente l'état du phénomène observé à l'instant $(n\Delta t)$. Le pas de temps étant donné une fois pour toutes, rien n'empêche de le considérer comme unité de temps, ce qui permet de considérer la suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ sans référence au temps. Le signal est ainsi identifié à une suite réelle comme un signal continu est identifié à une fonction. D'ailleurs, il est possible, pour plus de souplesse, d'introduire pour le signal α la notation $\alpha(n)$ pour son terme général[1], c'est-à-dire de considérer le signal discret comme l'application de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $n \mapsto \alpha(n)$. Dans la suite de ce chapitre les deux notations $\alpha(n)$ et α_n seront utilisées et lorsque **le pas d'échantillonnage Δt (intervalle de temps entre deux observations) n'est pas précisé, il sera, par convention pris égal à l'unité.**

Définition

Soit une fonction f.

• On appelle **signal discret associé à** f la suite réelle :

$$f_{ech} = (f(n\Delta t))_{n\in\mathbb{Z}}$$

obtenue en échantillonnant la fonction f au pas Δt (Δt réel strictement positif).

• On appelle **signal discret causal** la suite réelle :

$$f_{ech_c} = (f(n\Delta t))_{n\in\mathbb{N}}$$

[1]C'est cette notation qui s'utilise dans la pratique (cf. équations aux différences). Il faudra donc dans le cours sur les suites numériques entraîner les élèves à manipuler les deux notations : u_n et $u(n)$

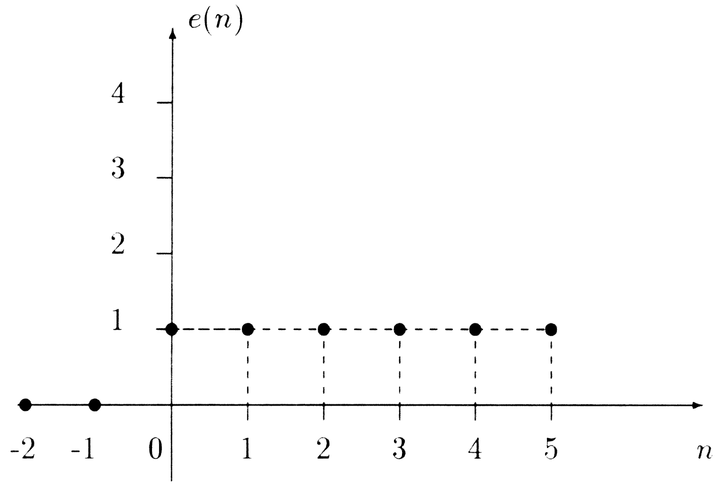
On peut considérer un signal discret causal comme un signal discret nul pour $n < 0$.
Rappellons que, si Δt n'est pas précisé, alors il est pris égal à 1.

1.1.2 Exemples de signaux discrets

• **Échelon unité à temps discret.**
L'échelon unité à temps discret est noté e (c'est l'échelon unité $t \mapsto \mathcal{U}(t)$ discrétisé au pas 1). Il est défini par :

$$\begin{cases} e(n) = 1 & \text{si} \quad n \in \mathbb{N} \\ e(n) = 0 & \text{si} \quad n \in \mathbb{Z}^{*-} \end{cases}$$

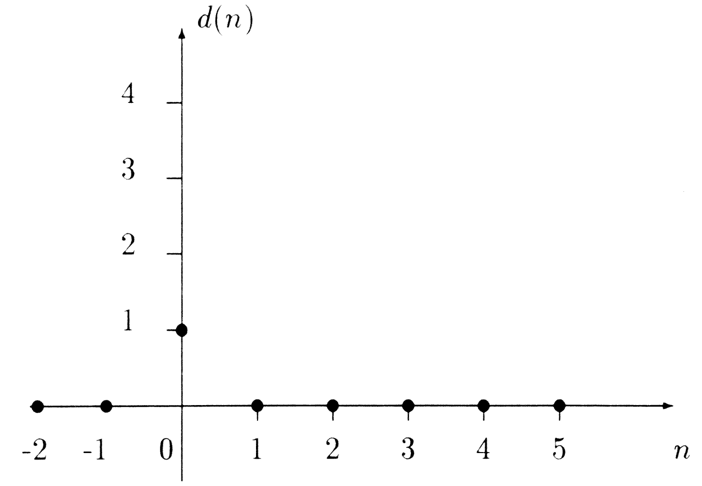
Sa représentation graphique est :



• **Impulsion de Dirac discrétisée ou impulsion unité à temps discret.**
L'impulsion de Dirac discrétisée ou impulsion unité à temps discret est noté d. Elle est définie par :

$$\begin{cases} d(n) = 0 & \text{si} \quad n \in \mathbb{Z} - \{0\} \\ d(0) = 1 \end{cases}$$

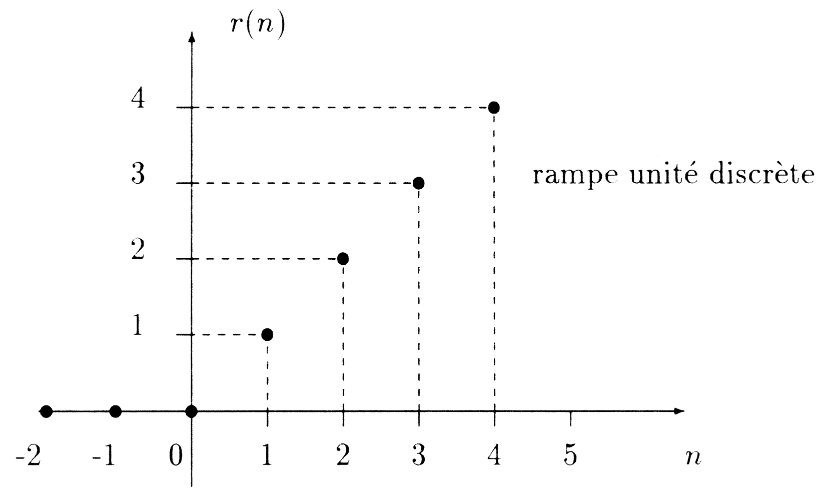
Sa représentation graphique est :



• **Rampe causale à temps discret.**
La rampe causale à temps discret est notée r. Elle est définie par :

$$\begin{cases} r(n) = 0 & \text{si} \quad n \in \mathbb{Z}^{*-} \\ r(n) = n & \text{si} \quad n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Sa représentation graphique est :



1.1.3 Opérations sur les signaux discrets

Les opérations classiques sur les signaux continus, *i.e.* les fonctions, restent valables pour les signaux discrets.

A. Somme, produit, produit par un réel

Á l'aide de deux signaux discrets[2] (u_n) et (v_n) on fabrique :

a) le signal somme (s_n) défini par :

$$s_n = u_n + v_n$$

b) le signal produit (p_n) défini par :

$$p_n = u_n \times v_n$$

c) le signal produit par le réel λ, (q_n) défini par :

$$q_n = \lambda v_n$$

B. Translation

Pour k entier quelconque donné, le **signal translaté d'indice** k du signal discret s est le signal discret (s_k^*) défini pour tout entier relatif n par :

$$s_k^*(n) = s(n-k)$$

Vocabulaire

⋆ Dans le cas où $k \in \mathbb{N}^*$, on parlera de **signal retardé** de k

⋆ Dans le cas où $k \in \mathbb{Z} - \mathbb{N}$, on parlera de **signal avancé** de k

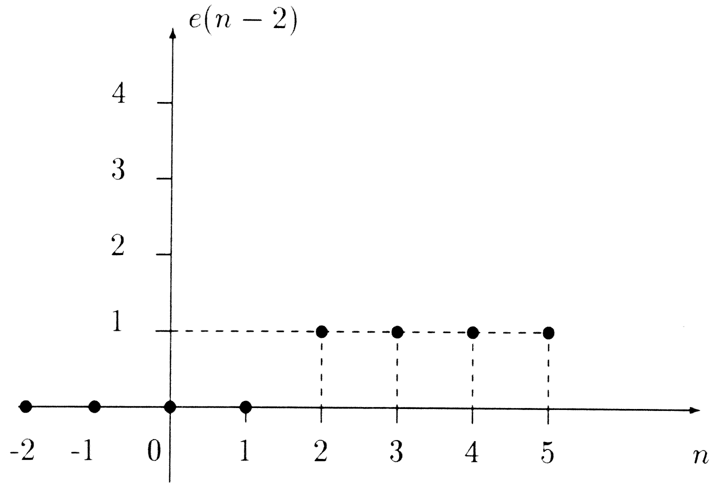
Citons deux exemples importants :

• L' échelon unité retardé de k, est défini par :

$$\begin{cases} e(n-k) = 0 & \text{si} \quad n < k \\ e(n-k) = 1 & \text{si} \quad n \geq k \end{cases}$$

Représentation graphique de l'échelon unité discret retardé de 2.

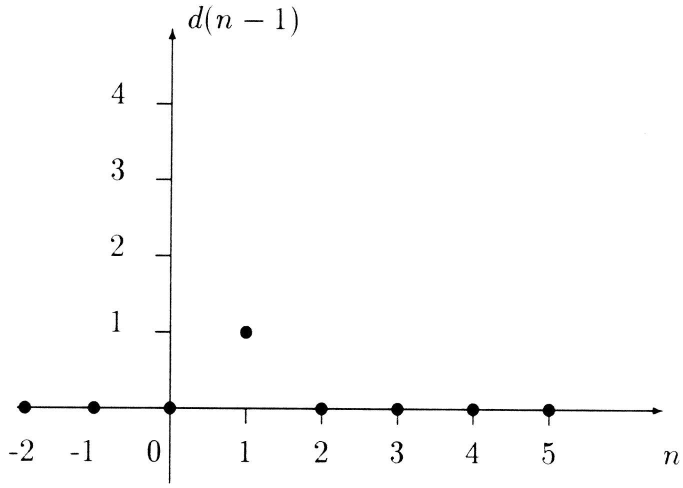
[2]Nous utiliserons dorénavant la notation allégée (u_n) à la place de la notation $(u_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ ou $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour un signal discret ou un signal discret causal



• L'impulsion unité retardée de k est définie par :

$$\begin{cases} d(n-k) = 1 & \text{si} \quad n = k \\ d(n-k) = 0 & \text{si} \quad n \neq k \end{cases}$$

La représentation graphique de l'impulsion unité retardée de 1 est :



Remarques très importantes :

• Dans la pratique, le signal causal retardé de k ($k \in \mathbb{N}^*$) s'exprime simplement avec un échelon retardé de k. Ainsi, soit le signal causal $u(n)$, le signal retardé de k associé est $u(n-k)e(n-k)$ où e est l'échelon unité discrétisé.

• L'importance de l'impulsion unité retardée vient du fait que tout signal causal $n \mapsto x(n)$ peut s'écrire :

$$x(n) = \sum_{k=0}^{+\infty} x(k)d(n-k)$$

C. Dilatation

Pour k entier quelconque donné, le signal **dilaté d'indice** k du signal discret s est le signal discret $^*s_k$ défini pour tout entier relatif n par :

$$^*s_k(n) = s(nk)$$

D. Convolution

Soient deux signaux discrets w et v. Sous réserve de convergence de la série, le **produit de convolution**[3] des deux signaux w et v, noté $w * v$ est donné, pour $n \in \mathbb{Z}$ par :

$$(w * v)(n) = \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} w(k)v(n-k)$$

Remarquons deux propriétés importantes :
P1 : L'impulsion unité discrète d est l'élément neutre du produit de convolution.
P2 : Le produit de convolution est commutatif :

$$w * v = v * w$$

La démonstration se fait à l'aide d'un changement de variable $k' = n - k$.

Cas des signaux causaux

En utilisant la définition des signaux causaux, on montre facilement que si v et w sont deux signaux causaux on a, pour $n \in \mathbb{N}$:

$$(w * v)(n) = \sum_{k=0}^{k=n} w(k)v(n-k) = \sum_{k=0}^{k=n} v(k)w(n-k)$$

[3] Ce paragraphe est hors programme des classes de B.T.S

1.2 Dérivation et intégration des signaux discrets et discrets causaux

1.2.1 Dérivation discrète

Il n'est évidemment pas question de définir la dérivée d'une suite, c'est-à-dire d'une fonction de la variable n entière. Cependant, rien n'empêche de considérer un signal associé à une fonction dérivable f et de l'échantillonner au pas Δt, puis de remplacer la dérivée au point d'abscisse $n\Delta t$ par un nombre qui en représente une valeur approchée.
Rappelons que :

$$f'(n\Delta t) = \lim_{h\to 0} \frac{f(n\Delta t + h) - f(n\Delta t)}{h}$$

Une approximation cohérente avec le pas Δt, consiste à remplacer h par Δt donc d'approcher $f'(n\Delta t)$ par $\dfrac{f(n\Delta t + \Delta t) - f(n\Delta t)}{\Delta t}$. Remarquons que si nous avions pris pour la dérivée de la fonction f au point d'abscisse $n\Delta t$ l'expression

$$f'(n\Delta t) = \lim_{h\to 0} \frac{f(n\Delta t) - f(n\Delta t - h)}{h}$$

une approximation cohérente avec le pas Δt, consisterait alors à remplacer toujours h par Δt donc d'approcher $f'(n\Delta t)$ par $\dfrac{f(n\Delta t) - f(n\Delta t - \Delta t)}{\Delta t}$ Cela conduit à la définition suivante :

Définition
Soit un signal discret (s_n) obtenu par échantillonnage au pas Δt d'une fonction f. On a donc $s_n = s(n) = f(n\Delta t)$.
L'opération de **dérivation discrète** consiste à associer à la suite (s_n) l'une des deux nouvelles suites $(D_1 s_n)$ ou (Ds_n) définies par :

$$D_1 s_n = \frac{1}{\Delta t}(s_{n+1} - s_n) = \frac{1}{\Delta t}(s(n+1) - s(n))$$

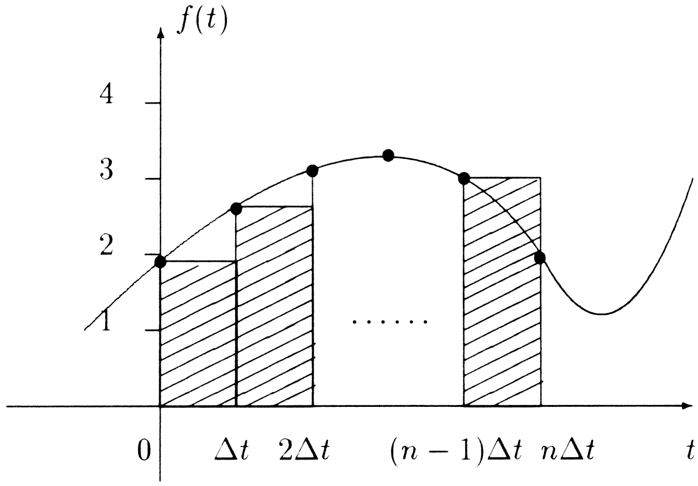
ou bien

$$Ds_n = \frac{1}{\Delta t}(s_n - s_{n-1}) = \frac{1}{\Delta t}(s(n) - s(n-1))$$

Le choix entre les opérateurs D_1 ou D se fera selon le contexte et les conditions initiales[4] (voir dans le chapitre 2, au paragraphe 2.4 le problème 2.4.2 qui montre bien comment s'opère le choix entre ces deux opérateurs de dérivation discrète)

1.2.2 Intégration discrète

Nous ne traiterons ici que le cas des signaux causaux.
Nous partons toujours d'une fonction f continue et causale. Il s'agit de donner une approximation, au pas Δt de l'intégrale $\int_0^t f(u)\,du$. Plaçons nous au point $t = n\Delta t$. En utilisant l'approximation de l'intégrale par la méthode des rectangles, qui consiste à remplacer l'aire algébrique sous la courbe représentative de f sur l'intervalle $[0, n\Delta t]$ par la somme des aires des rectangles hachurés (voir figure ci-dessous)



on est conduit à approcher l'intégrale $\int_0^{n\Delta t} f(u)\,du$ par :

$$\Delta t[f(0) + f(\Delta t) + f(2\Delta t) + \cdots f((n-1)\Delta t)]$$

[4]Lors d'une dérivation discrète, si le pas d'échantillonnage est trop petit, on risque de dériver les « bruits » et non le signal utile. Si le pas d'échantillonnage est trop grand on risque de tomber en contradiction avec le théorème de Shannon qui dit qu'on ne perd pas d'information si la fréquence d'échantillonnage est au moins égale à deux fois la plus élevée des fréquences contenues dans le spectre du signal.

Si l'on pose $\alpha_n = f(n\Delta t)$, l'opération d'intégration discrète consiste à associer à la suite (α_n) la suite, notée I_α, des valeurs précédentes. Ceci conduit à la définition suivante :

Définition
Soit un signal discret causal (s_n) obtenu par échantillonnage au pas Δt d'une fonction f intégrable. On a donc $s_n = s(n) = f(n\Delta t)$.
L'opération d'intégration discrète consiste à associer à la suite (s_n) l'une des deux nouvelles suites discrètes notées (Is_n) ou $(I_1 s_n)$ définies par :

$$Is_n = \Delta t[s_0 + s_1 + \cdots + s_{n-1}] = \Delta t[s(0) + s(1) + \cdots + s(n-1)]$$

si l'on a utilisé les rectangles «inférieurs»
ou bien

$$I_1 s_n = \Delta t[s_1 + s_2 + \cdots + s_n] = \Delta t[s(1) + s(2) + \cdots + s(n)]$$

si l'on a utilisé les rectangles «supérieurs»

Le choix entre les opérateurs I et I_1 se fera selon le contexte et les conditions initiales.
Remarque : on peut, dans certaines situations être amené à choisir :

$$I_2 s_n = \Delta t[s(0) + s(1) + \cdots + s(n)]$$

Remarque importante
On peut construire d'autres opérateurs d'intégration discrète en utilisant par exemple l'approximation d'une intégrale par la méthode des trapèzes (voir dans le chapitre 2, au paragraphe 2.4 le problème 2.4.5).

Montrons que les opérateurs de dérivation et d'intégration discrète D et I sont inverses l'un de l'autre.

- Appliquons l'opération de dérivation discrète D_1 à la suite (Is_n).

$$D_1 Is_n = \frac{1}{\Delta t}[Is_{n+1} - Is_n]$$

$$D_1 Is_n = \frac{1}{\Delta t}[\Delta t\,(s(0) + s(1) \cdots + s(n-1) + s(n) - s(0) - s(1) - \cdots s(n-1))]$$

donc

$$D_1 I s_n = s(n)$$

soit

$$(D_1 I s_n) = (s_n)$$

- Appliquons l'opération d'intégration discrète I à la suite $(D_1 s_n)$.

$$I D_1 s_n = \Delta t[D_1 s(0) + D_1 s(1) + \cdots + D_1 s(n-2) + D_1(s(n-1)]$$

$$I D_1 s_n = \Delta t \left\{ \frac{1}{\Delta t}[(s(1) - s(0)) + (s(2) - s(1)) + \cdots (s(n-1) - s(n-2)) \right.$$
$$\left. +(s(n) - s(n-1))] \right\}$$

donc,

$$I D_1 s_n = s(n) - s(0)$$

Ces deux résultats sont donc à rapprocher des formules

$$\frac{d}{dt}\left(\int_0^t f(u)\,du\right) = f(t)$$

et

$$\int_0^t \frac{df}{du}(u)\,du = f(t) - f(0)$$

1.3 Transformation en Z d'un signal discret causal

1.3.1 Motivation

On se propose de mettre en place une transformation agissant sur les signaux discrets causaux jouant le même rôle que la transformation de Laplace pour les signaux continus causaux. Il est donc naturel de considérer un signal échantillonné issu d'un signal continu et de remplacer l'intégrale de Laplace par une série numérique portant sur les valeurs échantillonnées.
Soit donc une fonction f, causale, admettant une transformée de Laplace. En échantillonnant f au pas Δt, on obtient un signal discret causal s tel que $s(n) = f(n\Delta t)$. Pour «approcher» l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t)\,dt$, il est logique

de considérer le signal w tel que $w(n) = s(n)e^{-pn\Delta t}, (n \in \mathbb{N})$ et dans un premier temps d'approcher l'intégrale $\int_0^{n\Delta t} e^{-pt} f(t)\, dt$ par une intégration discrète (cf paragraphe 1.2.2) du signal w. On obtient, en choisissant I_2 :

$$(I_2 w)_n = \Delta t(w_0 + w_1 + \cdots + w_n)$$

Dans un deuxième temps, il reste à chercher la limite, lorsque n tend vers $+\infty$, de $(Iw)_n$.

$$\lim_{n \to +\infty} (I_2 w)_n = \Delta t \lim_{n \to +\infty} (w_0 + w_1 + \cdots + w_n)$$

$$\lim_{n \to +\infty} (I_2 w)_n = \Delta t \sum_{k=0}^{k=+\infty} w_k$$

$$\lim_{n \to +\infty} (I_2 w)_n = \Delta t \sum_{k=0}^{k=+\infty} s_k e^{-pk\Delta t}$$

En posant $z = e^{p\Delta t}$, on obtient la série entière en $\frac{1}{z}$:

$$\Delta t \sum_{k=0}^{k=+\infty} s_k z^{-k}$$

Le nombre Δt étant supposé donné, le calcul formel ci-dessus fait apparaître cette série comme une transformée du signal discret causal s, analogue à la transformée de Laplace du signal continu causal f d'où est extrait s. Bien entendu, de la même façon que l'intégrale de Laplace demande une étude d'existence (abscisse de convergence de l'intégrale), la série précédente réclame une étude de convergence (intervalle de convergence)[5].

1.3.2 Définition

Définition
Soit un signal discret causal $s : n \mapsto s(n)$ $(n \in \mathbb{N})$. La transformée en Z de

[5]Ces deux notions ne sont pas au programme des classes de B.T.S où l'on suppose que les conditions de convergence sont vérifiées.

ce signal est la fonction $Z(s)$ de la variable rélle ou complexe, définie pour tout z assurant la convergence de la série par :

$$\boxed{(Zs)(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} s(n)z^{-n}}$$

Remarque importante
Soit un signal analogique causal $t \mapsto s(t)$. Si on l'échantillonne au pas $\Delta t = T_e$, sa transformée en Z est :

$$\boxed{(Zs)(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} s(nT_e)z^{-n}}$$

Souvent dans la pratique la période d'échantillonnage, c'est-à-dire l'intervalle de temps entre deux observations, est prise égale à 1. On a alors $T_e = 1$.

Remarque
De même qu'il existe une transformée de Laplace bilatérale définie par l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-pt}\,dt$, il existe aussi une transformée en Z bilatérale pour des signaux discrets quelconques (non causaux) définie par la somme $\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} x(n)z^{-n}$ (voir l'annexe à la fin de cette brochure).

Étude de la convergence[6]
Soit la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} s_n x^n$. On désigne par r_+ son rayon de convergence. La série $\sum_{n=0}^{+\infty} s(n)z^{-n}$ converge si $|z^{-1}| < r_+$, c'est-à-dire si $|z| > \frac{1}{r_+}$ (en supposant r_+ non nul). Le domaine de convergence de la transformée en Z du signal s sera donc $D_s = \left\{z/\,|z| > \frac{1}{r_+}\right\}$. Lorsque $r_+ = 0$, ce domaine est vide.

[6]Ce paragraphe n'est pas au programme des classes de B.T.S

1.3.3 Exemples de transformées en Z

A. Échelon unité discret

L'échelon unité discret, noté e, est défini par :

$$\begin{cases} e(n) = 1 & \text{si} \quad n \in \mathbb{N} \\ e(n) = 0 & \text{si} \quad n \in \mathbb{Z}^{*-} \end{cases}$$

La transformée en Z de ce signal est :

$$(Ze)(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} z^{-n}$$

On est en présence d'une série géométrique de premier terme 1 et de raison $\dfrac{1}{z}$. Elle converge si $|z| > 1$ et a pour somme $\dfrac{1}{1 - \dfrac{1}{z}}$. On a donc :

$$\boxed{(Ze)(z) = \frac{z}{z-1} \; ; \; |z| > 1}$$

B. Impulsion unité discrète

L'impulsion unité discrète, notée d, est définie par :

$$\begin{cases} d(n) = 0 & \text{si} \quad n \in \mathbb{Z} - \{0\} \\ d(0) = 1 \end{cases}$$

Sa transformée en Z est :

$$(Zd)(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} d(n) z^{-n}$$

soit

$$\boxed{(Zd)(z) = 1}$$

C. Signal géométrique causal

Le signal géométrique causal est défini, pour $a \in \mathbb{R}^*$, par :

$$\begin{cases} f(n) = a^n & \text{si} \quad n \in \mathbb{N} \\ f(n) = 0 & \text{si} \quad n \in \mathbb{Z}^{*-} \end{cases}$$

Sa transformée en Z est :

$$(Zf)(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a^n z^{-n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{a}{z}\right)^n$$

On est en présence d'une série géométrique de premier terme 1 et de raison $\frac{a}{z}$. Elle converge si $|z| > |a|$ et a pour somme $\frac{1}{1-\frac{a}{z}}$. On a donc :

$$\boxed{f(n) = a^n e(n) \to (Zf)(z) = \frac{z}{z-a}\ ;\ |z| > |a|}$$

D. Rampe unité causale

La rampe unité causale, notée r, est définie par :

$$\begin{cases} r(n) = n & \text{si} \quad n \in \mathbb{N} \\ r(n) = 0 & \text{si} \quad n \in \mathbb{Z}^{*-} \end{cases}$$

Sa transformée en Z est :

$$(Zr)(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} n z^{-n}$$

Par ailleurs on sait que pour $|z| > 1$ on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} z^{-n} = \frac{z}{z-1}$$

Or, on sait que l'on peut dériver terme à terme une série entière sur son domaine de convergence, donc

$$\sum_{n=0}^{+\infty} -n z^{-n-1} = -\frac{1}{(z-1)^2}$$

En multipliant les deux membres par $-z$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} n z^{-n} = \frac{z}{(z-1)^2}$$

Donc

$$\boxed{(Zr)(z) = \frac{z}{(z-1)^2}\ ;\ |z| > 1}$$

1.4 Propriétés de la transformation en Z

Les propriétés que nous allons donner sont à mettre en relation avec celles de la transformation de Laplace des signaux causaux.
La convergence sera supposée admise pour toute les séries considérées.

1.4.1 Linéarité

Si x et y sont des signaux discrets causaux et λ un réel quelconque, on a facilement :

$$\boxed{(Z(x+y))(z) = (Zx)(z) + (Zy)(z)}$$

et

$$\boxed{(Z(\lambda x))(z) = \lambda(Zx)(z)}$$

1.4.2 Retard

Soit x un signal discret causal. Le signal retardé de n_0 ($n_0 \in \mathbb{N}^*$) est le signal y défini par $y(n) = x(n-n_0)e(n-n_0)$. Ainsi,

$$(Zy)(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} x(n-n_0)e(n-n_0)z^{-n}$$

compte tenu de l'expression de $e(n-n_0)$, on obtient :

$$(Zy)(z) = \sum_{n=n_0}^{+\infty} x(n-n_0)z^{-n}$$

Le changement de variable $n = n_0 + p$ ($p \in \mathbb{N}$) fournit :

$$(Zy)(z) = \sum_{p=0}^{+\infty} x(p)z^{-n_0-p} = z^{-n_0}\sum_{p=0}^{+\infty} x(p)z^{-p}$$

La variable p étant muette,

$$(Zy)(z) = z^{-n_0}\sum_{n=0}^{+\infty} x(n)z^{-n} = z^{-n_0}(Zx)(z)$$

Ainsi,

$$\boxed{\begin{cases} y(n) = x(n-n_0)e(n-n_0) \implies (Zy)(z) = z^{-n_0}(Zx)(z) \\ (n, n_0) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^* \end{cases}}$$

1.4.3 Avance

Soit x un signal discret causal. Le signal avancé de n_0 ($n_0 \in \mathbb{N}^*$) est le signal y défini par $y(n) = x(n+n_0)$. Ainsi,

$$(Zy)(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} x(n+n_0)z^{-n}$$

Le changement de variable $p = n + n_0$ fournit :

$$(Zy)(z) = \sum_{p=n_0}^{+\infty} x(p)z^{-(p-n_0)} = z^{n_0} \sum_{p=n_0}^{+\infty} x(p)z^{-p}$$

La variable p étant muette :

$$(Zy)(z) = z^{n_0} \sum_{n=n_0}^{+\infty} x(n)z^{-n}$$

Pour faire apparaître la transformée en Z du signal x, on écrit :

$$(Zy)(z) = z^{n_0} \left[\sum_{n=0}^{+\infty} x(n)z^{-n} - \sum_{n=0}^{n=n_0-1} x(n)z^{-n} \right]$$

d'où :

$$(Zy)(z) = z^{n_0} \left[(Zx)(z) - x(0) - x(1)z^{-1} - x(2)z^{-2} - \cdots - x(n_0-1)z^{-(n_0-1)} \right]$$

Finalement :

$$\boxed{\begin{cases} y(n) = x(n+n_0), n_0 \in \mathbb{N}^* \\ (Zy)(z) = z^{n_0} \left[(Zx)(z) - x(0) - x(1)z^{-1} \cdots - x(n_0-1)z^{-(n_0-1)} \right] \end{cases}}$$

Dans le cas particulier où $n_0 = 1$, on obtient :

$$y(n) = x(n+1) \Longrightarrow (Zy)(z) = z\left[(Zx)(z) - x(0)\right]$$

ce qui sous l'hypothèse supplémentaire $x(0) = 0$ (hypothèse souvent vérifiée dans la pratique) devient :

$$y(n) = x(n+1) \text{ et } x(0) = 0 \Longrightarrow (Zy)(z) = z\left[(Zx)(z)\right]$$

ce qui peut s'énoncer :
«La multiplication par z correspond à une avance unité».

1.4.4 Produit par un signal géométrique causal

Soit x un signal discret causal. Son produit par un signal géométrique causal est le signal y défini par $y(n) = a^n x(n)$ où $a \in \mathbb{R}^*$. Ainsi,

$$(Zy)(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a^n x(n) z^{-n} = \sum_{r=0}^{+\infty} x(n) \left(\frac{z}{a}\right)^{-n}$$

Or,

$$(Zx)(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} x(n) z^{-n} \Longrightarrow (Zx)\left(\frac{z}{a}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} x(n) \left(\frac{z}{a}\right)^{-n}$$

donc, pour a réel non nul :

$$\boxed{y(n) = a^n x(n) \Longrightarrow (Zy)(z) = (Zx)\left(\frac{z}{a}\right)}$$

Si Zx existe pour $|z| > R$, Zy existe pour $|z| > |a|\,R$.

1.4.5 Transformée en Z de $nx(n)$

Soit x un signal discret causal. Notons y le signal discret causal défini par : $y(n) = nx(n), n \in \mathbb{N}$. Alors :

$$(Zy)(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} nx(n) z^{-n} \qquad (1)$$

Par ailleurs, $(Zx)(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} x(n)z^{-n}$. Nous savons que l'on peut dériver terme à terme cette série entière sur son domaine de convergence. Donc

$$\frac{d}{dz}\left[(Zx)(z)\right] = \sum_{n=0}^{+\infty} -nx(n)z^{-n-1} = \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{+\infty} nx(n)z^{-n}$$

Compte tenu de (1), on a donc pour $n \in \mathbb{N}$:

$$\boxed{y(n) = nx(n) \Longrightarrow (Zy)(z) = -z\frac{d}{dz}\left[(Zx)(z)\right]}$$

1.4.6 Transformée en Z d'un produit de convolution

Les calculs qui suivent[7] demanderaient des justifications délicates. On se contentera, ici, de faire simplement des calculs formels.
Soient w et v deux signaux discrets. En utilisant la transformation en Z bilatérale et donc pour $n \in \mathbb{Z}$,

$$(w * v)(n) = \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} w(k)v(n-k)$$

donc

$$\left[(Z(w * v)\right](z) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} (w * u)(n)z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \left(\sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} w(k)v(n-k)\right) z^{-n}$$

En intervertissant les deux sommations, on obtient :

$$\left[(Z(w * v)\right](z) = \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} w(k) \left(\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} v(n-k)z^{-n}\right)$$

On reconnaît dans la deuxième somme la transformée en Z du signal translaté de k du signal v. D'où

$$\left[Z(w * v)\right](z) = \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} w(k)z^{-k}(Zv)(z) = (Zv)(z)\sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} w(k)z^{-k}$$

[7]Rappelons que la notion de convolution n'est pas au programme des classes de B.T.S

Finalement[8]

$$\boxed{[Z(w * v)](z) = (Zw)(z) \times (Zv)(z)}$$

Cette formule reste valable pour les signaux causaux.

1.4.7 Théorème de la valeur initiale et de la valeur finale

Soit x un signal discret causal.
Nous admettrons les deux résultats qui suivent :

Théorème de la valeur initiale

$$\boxed{x(0) = \lim_{z \to +\infty} (Zx)(z)}$$

Sa démonstration est simple. Soit un signal causal défini par $n \mapsto x(n)$. Sa transformée en Z est :

$$(Zx)(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} x(n)z^{-n} = x(0) + \frac{x(1)}{z} + \frac{x(2)}{z^2} + \cdots + \frac{x(n)}{z^n} + \cdots$$

Les propriétés des séries entières impliquent qu'on peut faire le passage à la limite dans la série lorsque $\frac{1}{z}$ tend vers 0, c'est-à-dire lorsque $z \to +\infty$. Ce passage à la limite donne bien $x(0)$ comme résultat.

Théorème de la valeur finale

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} x(n) = \lim_{z \to 1} (z-1)(Zx)(z)}$$

sous réserve d'existence de chacune des limites.

[8]Ce résultat est valable pour les valeurs de z appartenant à l'intersection des domaines de convergence des deux transformées.

1.5 Transformation en Z inverse

1.5.1 Définition

Si l'on connaît $(Zx)(z)$, transformée en Z d'un signal causal discret x, la méthode qui consiste à déterminer le signal x à partir de $(Zx)(z)$ est appelée **transformation en Z inverse**.
Si $X(z) = (Zx)(z)$, on notera $x(n) = (Z^{-1}X)(n)$ pour $n \in \mathbb{N}$. On dira alors que le signal x est l'original de X. L'existence et l'unicité de l'original sont admises.

1.5.2 Propriété fondamentale

On admettra que la transformation en Z inverse est linéaire, c'est-à-dire que si λ et μ sont deux réels quelconques on a la relation :

$$[Z^{-1}(\lambda X + \mu Y)](n) = \lambda(Z^{-1}X)(n) + \mu(Z^{-1}Y)(n)$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$

1.5.3 Détermination de l'original

La détermination de l'original d'une fonction de la variable z se fera le plus souvent par utilisation conjointe de la linéarité de la transformation en Z inverse et de la «lecture inverse» d'une table de transformées.
Dans la pratique, nous aurons le plus souvent à rechercher l'original de fonctions X telles que :

$$X(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$$

où P et Q sont des polynômes en z. La méthode consiste alors à décomposer en éléments simples la fraction rationnelle X et à utiliser ensuite la linéarité de la transformation en Z inverse ainsi qu'une table de transformées.
Cependant, dans certains cas, il est plus intéressant de transformer la fraction rationnelle en une fraction rationnelle de la variable z^{-1} et à décomposer cette nouvelle fraction rationnelle en éléments simples. Illustrons cela par un exemple :

Exemple
Soit

$$F(z) = \frac{z^2}{z^2 - 3z + 2}$$

• **Démarche «directe»**

$$F(z) = \frac{z^2}{(z-1)(z-2)} = 1 - \frac{1}{z-1} + \frac{4}{z-2}$$

Le tableau des transformées donne l'original de $\frac{z}{z-1}$ et $\frac{z}{z-a}$. On écrit donc :

$$F(z) = 1 - z^{-1}\frac{z}{z-1} + 4z^{-1}\frac{z}{z-2}$$

En utilisant la linéarité de la transformation en Z inverse et le tableau des transformées, on obtient :

$$\boxed{f(n) = (Z^{-1}F)(n) = d(n) - e(n-1) + 4 \times 2^{n-1}e(n-1)} \qquad (1)$$

• **Passage par la fraction rationnelle en z^{-1}**

$$F(z) = \frac{1}{1 - 3z^{-1} + 2\left(z^{-1}\right)^2}$$

On a alors :

$$F(z) = \frac{1}{2(z^{-1} - 1)\left(z^{-1} - \frac{1}{2}\right)} = \frac{1}{z^{-1} - 1} - \frac{1}{z^{-1} - \frac{1}{2}}$$

Soit

$$F(z) = -\frac{z}{z-1} + 2\frac{z}{z-2}$$

En utilisant la linéarité de la transformation en Z inverse et le tableau des transformées, on obtient :

$$f(n) = (Z^{-1}F)(n) = -e(n) + 2 \times 2^n e(n)$$

c'est-à-dire

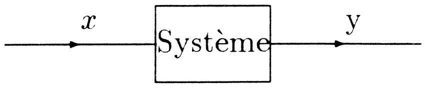
$$\boxed{f(n) = (2^{n+1} - 1)e(n)} \qquad (2)$$

L'expression (2) est plus «lisible» que l'expression (1).

1.6 Notion de fonction de transfert en Z

1.6.1 Définition d'un filtre

Considérons un système «entrée-sortie» schématisé de la manière suivante :



où x est le signal d'entrée et y le signal de sortie.
On peut définir sur l'ensemble des signaux admissibles pour le système, l'application T, caractérisant le système, qui à tout signal d'entrée x fait correspondre le signal de sortie correspondant : $y = T(x)$.
On désignera, dans la suite de ce paragraphe, h la **réponse impulsionnelle**, c'est-à-dire la sortie correspondant à l'entrée de l'impulsion unité discrète. On aura donc : $h = T(d)$.
Nous allons faire trois hypothèses sur l'application T, hypothèses le plus souvent vérifiées dans les systèmes physiques.

- **Hypothèse 1**

INVARIANCE

On suppose que le système est invariant, c'est-à-dire que si l'entrée est translatée de k, alors la sortie est aussi translatée de k. Ainsi, la relation $h = T(d)$ conduit, pour tout $n \in \mathbb{N}$ à :

$$h(n-k) = T[d(n-k)]$$

- **Hypothèse 2**

LINÉARITÉ

Le système est linéaire (attention la linéarité ne fait intervenir que des sommes finies), c'est-à-dire que pour tout signal causal on aura :

$$T[x(k)d(n-k)] = x(k)T[d(n-k)] = x(k)h(n-k)$$

et

$$T\left(\sum_{k=p}^{k=q} x(k)d(n-k)\right) = \sum_{k=p}^{k=q} T[x(k)d(n-k)] = \sum_{k=p}^{k=q} x(k)h(n-k)$$

- **Hypothèse 3**

$\boxed{\text{CONTINUITÉ}}$

On suppose que le système est continu, c'est-à-dire que si une entrée résulte d'un passage à la limite sur une famille de signaux, la sortie sera définie par le même passage à la limite sur la famille des sorties associées.

$$x(n) = \lim_{\substack{p\to-\infty \\ q\to+\infty}} \left(\sum_{k=p}^{k=q} x(n)d(n-k)\right) \Rightarrow y(n) = \lim_{\substack{p\to-\infty \\ q\to+\infty}} \left(\sum_{k=p}^{k=q} x(k)h(n-k)\right)$$

On convient alors d'écrire le signal d'entrée $x(n) = \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} x(k)d(n-k)$ et le signal de sortie $y(n) = \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} x(k)h(n-k)$.

Les résultats précédents conduisent alors au théorème suivant :

Théorème

Lorsqu'un système vérifie les propriétés d'Invariance, de Linéarité et de Continuité (Système ILC), la sortie y associée à un signal d'entrée x s'exprime par la convolution :

$$y = x * h$$

où h est la réponse impulsionnelle du système.

Définition

Un système ILC est appelé un **FILTRE**.

1.6.2 Fonction de transfert d'un filtre

Soit un système «entrée-sortie» qui est un filtre ILC, dans lequel le signal d'entrée est le signal causal échantillonné au pas Δt : $n \mapsto x(n\Delta t)$, et le signal de sortie est le signal échantillonné : $n \mapsto y(n\Delta t)$. On suppose que les signaux x et y admettent des transformées en Z. On sait qu'on a : $y = x * h$. En prenant la transformée en Z des deux membres on obtient :

$$(Zy)(z) = (Zx)(z) \times (Zh)(z)$$

Si l'on pose $H(z) = (Zh)(z)$, la relation précédente s'écrit :

$$(Zy)(z) = H(z) \times (Zx)(z)$$

Définition
La fonction H de la variable z définie par ;

$$(Zy)(z) = H(z) \times (Zx)(z)$$

est appelée **fonction de transfert en** Z.

Remarquons que la fonction de transfert en Z du filtre est, en fait, la réponse à l'impulsion unité discrète ou réponse impulsionnelle.

Exemple
Soit un système «entrée-sortie» déterminé par l'équation de récurrence

$$y(n) = \frac{1}{2}x(n) + \frac{1}{2}y(n-1)e(n-1)$$

Notons $Y(z) = (Zy)(z)$ et $X(z) = (Zx)(z)$ (on suppose que Y et X existent). En utilisant la linéarité de la transformation en Z et le tableau des transformées, on obtient :

$$Y(z) = \frac{1}{2}X(z) + \frac{1}{2}z^{-1}Y(z)$$

d'où la fonction de transfert :

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{z}{2z-1}$$

1.6.3 Passage de la fonction de transfert en «p» à la fonction de transfert en «Z»

La fonction de transfert en «p» est celle obtenue pour des signaux analogiques causaux à l'aide de la transformation de Laplace. Bien entendu, la fonction de transfert en Z est celle obtenue pour des signaux discrets causaux à l'aide de la transformation en Z. Le passage de l'une à l'autre se fera selon le schéma suivant.

$$H(p) \underset{\mathcal{L}^{-1}}{\longrightarrow} h(t)\mathcal{U}(t) \underset{discrtisation}{\xrightarrow{\hspace{3cm}}} h(n)e(n) \underset{Z}{\rightarrow} \tilde{H}(z)$$

Dans la pratique on désigne le plus souvent la fonction de transfert en p et celle en z par la même lettre.

Exemple

Un système du premier ordre admet pour fonction de transfert

$$H(p) = \frac{G_0}{1 + \tau p}$$

ou τ est un réel strictement positif. L'original de H est donné par

$$h(t) = \frac{G_0}{\tau} e^{-\frac{1}{\tau}t} \mathcal{U}(t)$$

En échantillonnant h au pas T_e, on obtient :

$$h(n) = \frac{G_0}{\tau} e^{-\frac{1}{\tau}nT_e} e(nT_e)$$

La transformée en Z de h est :

$$(Zh)(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{G_0}{\tau} e^{-\frac{1}{\tau}nT_e} z^{-n}$$

car $e(nT_e) = 1$ pour $n \in \mathbb{N}$.

$$\tilde{H}(z) = (Zh)(z) = \frac{G_0}{\tau} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{e^{-\frac{T_e}{\tau}}}{z} \right)^n$$

Cette série géométrique converge si $\left| \frac{e^{-\frac{T_e}{\tau}}}{z} \right| < 1$ c'est-à-dire si $|z| > e^{-\frac{T_e}{\tau}}$. On a, dans ces conditions

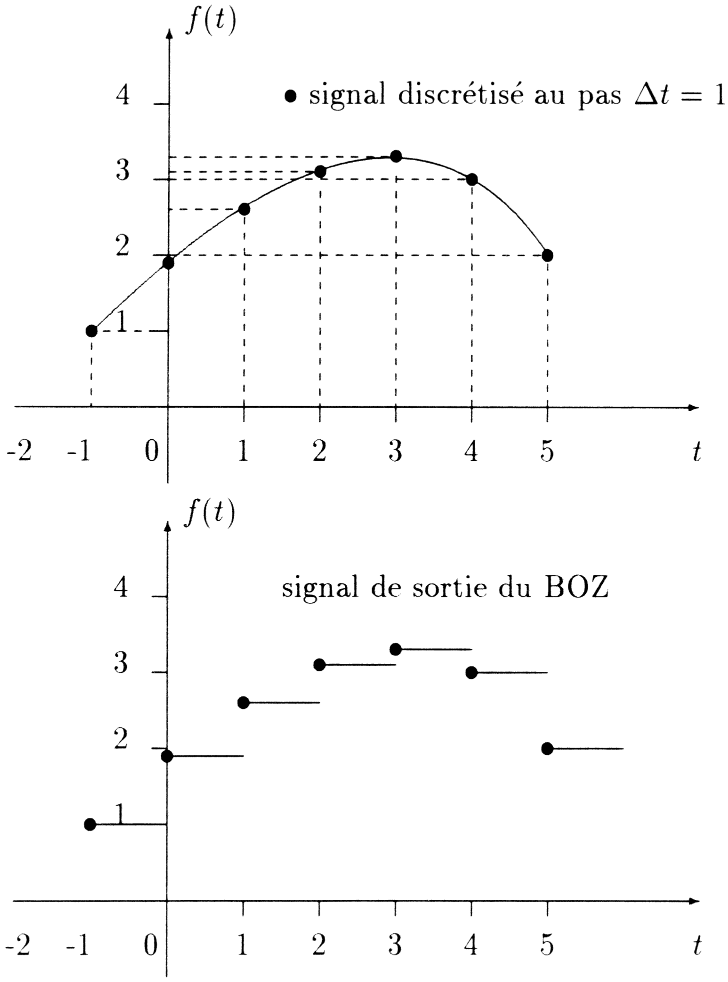
$$\tilde{H}(z) = \frac{G_0}{\tau} \times \frac{z}{z - e^{-\frac{T_e}{\tau}}}$$

qui représente la fonction de transfert en Z d'un système du premier ordre.

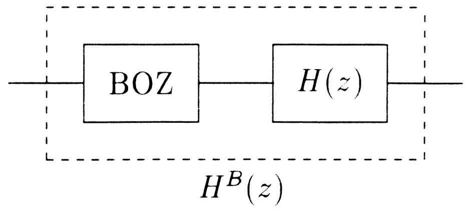
1.6.4 Fonction de transfert bloquée

Ce paragraphe n'intéresse que les collègues qui enseignent en sections électronique et CIRA.

En régulation ou en asservissement le process est analogique et ne peut pas recevoir des signaux discrets au sens où nous les avons définis. C'est pourquoi il faut ajouter dans la chaîne de régulation un **bloqueur d'ordre 0** (appelé BOZ) dont l'action consiste à maintenir constante la valeur de chaque échantillon jusqu'à l'arrivée du suivant. Un BOZ transforme un signal échantillonné en une fonction en escaliers.



On parle alors de système «échantillonné-bloqué».



C'est la fonction de transfert bloquée en z, $H^B(z)$, qu'on doit déterminer.
Or, la fonction de transfert bloquée en p, $H^B(p)$, est le produit de la fonction de transfert en p, $H_B(p)$, du BOZ par la fonction de transfert en p, $H(p)$ du système non bloqué.

Détermination de la fonction de transfert en p d'un BOZ

Un BOZ associe au signal d'entrée $t \mapsto \delta(t)$ (impulsion de Dirac) le signal de sortie $t \mapsto s(t) = \mathcal{U}(t) - \mathcal{U}(t - T_e)$. La fonction de transfert en p est donc :

$$H_B(p) = \frac{1 - e^{-T_e p}}{p}$$

d'où

$$H^B(p) = \frac{1 - e^{-T_e p}}{p} \times H(p)$$

Détermination de la fonction de transfert $H^B(z)$

Dans la pratique, si un système **continu** admet une fonction de transfert $p \mapsto F(p)$, la fonction de transfert en Z associée est définie, avec une notation abusive, par :

$$H(z) = Z[F(p)]$$

Le tableau donné à l'annexe B peut alors être utilisé en considérant $X(p)$ comme une fonction de transfert.
En notant, comme il est d'usage, avec la même lettre la fonction de transfert en p et en Z , on obtient :

$$H^B(z) = Z\left[\frac{H(p)}{p}\right] - Z\left[\frac{H(p)}{p} e^{-T_e p}\right]$$

Il est facile de montrer que

$$Z\left[\frac{H(p)}{p} e^{-T_e p}\right] = z^{-1} Z\left[\frac{H(p)}{p}\right]$$

donc

$$\boxed{H^B(z) = (1 - z^{-1})Z\left[\frac{H(p)}{p}\right]}$$

Exemple

Pour un système du premier ordre, on a :

$$H(p) = \frac{G_0}{1 + \tau p}$$

La fonction de transfert en Z bloquée correspondante est :

$$H^B(z) = (1 - z^{-1})Z\left[\frac{H(p)}{p}\right] = (1 - z^{-1})Z\left[\frac{G_0}{p(1 + \tau p)}\right]$$

$$H^B(z) = (1 - z^{-1})Z\left[G_0\frac{\frac{1}{\tau}}{p(p + \frac{1}{\tau})}\right]$$

En utilisant la table de l'annexe B, avec un pas d'échantillonnage T_e, on obtient :

$$H^B(z) = (1 - z^{-1})\frac{G_0(1 - \alpha)z^{-1}}{(1 - z^{-1})(1 - \alpha z^{-1})}$$

soit

$$\boxed{H^B(z) = G_0\frac{(1 - \alpha)z^{-1}}{1 - \alpha z^{-1}} \qquad \text{avec } \alpha = e^{-\frac{T_e}{\tau}}}$$

Chapitre 2

EXERCICES

2.1 Transformée de signaux

Exercice 2.1.1

Déterminer la transformée en Z du signal discret causal $n \mapsto x(n)$ ($n \in \mathbb{N}$) défini par

$$x(n) = e^{-an\Delta}$$

où a et Δ sont des réels strictement positifs.

Éléments de correction

On remarque que $x(n)$ est prélevé par échantillonnage au pas Δ sur la fonction $t \mapsto e^{-at}\mathcal{U}(t)$, où $\mathcal{U}$ est l'échelon unité.

$$x(n) = \left(e^{-a\Delta}\right)^n, \; n \in \mathbb{N}$$

donc

$$(Zx)(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(e^{-a\Delta}\right)^n z^{-n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(e^{-a\Delta} z^{-1}\right)^n$$

La série précédente est convergente si $\left|e^{-a\Delta} z^{-1}\right| < 1$ soit $|z| > e^{-a\Delta}$. La somme de cette série est

$$\frac{1}{1 - e^{-a\Delta} z^{-1}} = \frac{z}{z - e^{-a\Delta}}$$

On a donc :

$$\boxed{(Zx)(z) = \frac{z}{z - e^{-a\Delta}} \text{ pour } |z| > e^{-a\Delta}}$$

On aurait pu aussi utiliser le formulaire.

■

2.1.1 Exercice 2.1.2

Soit le signal analogique $t \mapsto y(t) = 1 - e^{-at}$, a réel non nul. Déterminer la transformée en Z du signal discrétisé causal correspondant au pas T_e.

Éléments de correction
Le signal discret causal correspondant au signal analogique y est donné par :

$$y(nT_e) = (1 - e^{-anT_e})e(n)$$

où e est l'échelon unité discrétisé.
Posons $x(n) = e^{-anT_e}e(n)$, alors

$$y(nT_e) = e(n) - x(n)$$

La linéarité de la transformation en Z permet d'écrire :

$$(Zy)(z) = (Ze)(z) - (Zx)(z)$$

En utilisant le formulaire et l'exercice 2.1.1, on obtient pour $|z| > e^{-aT_e}$ et $|z| > 1$,

$$(Zy)(z) = \frac{z}{z-1} - \frac{z}{z - e^{-aT_e}}$$

Après réduction ,

$$\boxed{(Zy)(z) = \frac{(1-\alpha)z^{-1}}{(1-z^{-1})(1-\alpha z^{-1})} \text{ avec } \alpha = e^{-aT_e}}$$

■

Exercice 2.1.3

Déterminer la transformée en Z du signal discret causal $n \mapsto x(n)$ ($n \in \mathbb{N}$) défini par

$$x(n) = \sin(n\omega\Delta)$$

Éléments de correction

On remarque que $x(n)$ est prélevé par échantillonnage au pas Δ sur la fonction $t \mapsto \sin(\omega t)\mathcal{U}(t)$, où $\mathcal{U}$ est l'échelon unité.

$$x(n) = \frac{1}{2i}\left(e^{in\omega\Delta} - e^{-in\omega\Delta}\right) = \frac{1}{2i}\left[\left(e^{i\omega\Delta}\right)^n - \left(e^{-i\omega\Delta}\right)^n\right]$$

En utilisant la linéarité de la transformation en Z et le formulaire, on obtient :

$$(Zx)(z) = \frac{1}{2i}\left[\frac{z}{z - e^{i\omega\Delta}} - \frac{z}{z - e^{-i\omega\Delta}}\right]$$

pour

$$|z| > \left|e^{i\omega\Delta}\right| \text{ et } |z| > \left|e^{-i\omega\Delta}\right|$$

or

$$\left|e^{i\omega\Delta}\right| = \left|e^{-i\omega\Delta}\right| = 1$$

donc pour $|z| > 1$, on a :

$$(Zx)(z) = \frac{z}{2i}\left[\frac{z - e^{-i\omega\Delta} - z + e^{i\omega\Delta}}{z^2 - \left(e^{i\omega\Delta} + e^{-i\omega\Delta}\right)z + 1}\right]$$

Finalement

$$\boxed{(Zx)(z) = \frac{z\sin(\omega\Delta)}{z^2 - 2z\cos(\omega\Delta) + 1} \text{ pour } |z| > 1}$$

Remarque : On démontrerait de même que si $y(n) = \cos(n\omega\Delta)$ avec $n \in \mathbb{N}$, on aurait :

$$(Zy)(z) = \frac{z^2 - z\cos(\omega\Delta)}{z^2 - 2z\cos(\omega\Delta) + 1} \text{ pour } |z| > 1$$

■

Exercice 2.1.4

Déterminer la transformée en Z des signaux discrets causaux f et g définis par

$$f(n) = na^n \,;\, g(n) = n^2a^n$$

pour $n \in \mathbb{N}$ et a réel non nul.

Éléments de correction

Pour le signal $r(n) = n$, on a : $(Zr)(z) = \dfrac{z}{(z-1)^2}$ avec $|z| > 1$.
Donc,[1] puisque $f(n) = a^n r(n)$,

$$(Zf)(z) = (Zr)\left(\frac{z}{a}\right)$$

avec $\left|\dfrac{z}{a}\right| > 1$ soit $|z| > |a|$. Alors

$$\boxed{(Zf)(z) = \frac{\frac{z}{a}}{\left(\frac{z}{a}-1\right)^2} = \frac{az}{(z-a)^2} \text{ pour } |z| > |a|}$$

Pour le signal $c(n) = n^2$, on a : $(Zc)(z) = \dfrac{z(z+1)}{(z-1)^3}$ avec $|z| > 1$.
Donc, puisque $g(n) = a^n c(n)$,

$$(Zg)(z) = (Zc)\left(\frac{z}{a}\right)$$

avec $|z| > |a|$. D'où :

$$(Zg)(z) = \frac{\frac{z}{a}\left(\frac{z}{a}+1\right)}{\left(\frac{z}{a}-1\right)^3}$$

finalement :

$$\boxed{(Zg)(z) = \frac{az(z+a)}{(z-a)^3} \text{ pour } |z| > |a|}$$

■

Remarques

- Les formules qui donnent une extension du formulaire pourront, avec une question intermédiaire, être utilisées dans des exercices plus conséquents.

[1] On utilise le formulaire : si $y(n) = a^n x(n)$ (a réel non nul), alors $(Zy)(z) = (Zx)\left(\frac{z}{a}\right)$

- Autre utilisation :

$$\frac{az(z+a)}{(z-a)^3} = \frac{az(z-a+2a)}{(z-a)^3} = \frac{az}{(z-a)^2} + \frac{2a^2z}{(z-a)^3}$$

On peut donc en déduire que l'original de $\frac{2a^2z}{(z-a)^3}$ est le signal discret causal h défini pour n dans $\mathbb{N}$ par :

$$h(n) = n^2a^n - na^n$$

Exercice 2.1.5

Soit le signal analogique causal $t \mapsto y(t) = te^{-at}$, a constante réelle. Déterminer la transformée en Z du signal discret correspondant échantillonné au pas T_e.

Éléments de correction

Le signal discret causal correspondant au signal analogique y est donné par :

$$y(nT_e) = (nT_e e^{-anT_e})e(n)$$

où e est l'échelon unité discrétisé.
La transformée en Z est alors :

$$(Zy)(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} nT_e e^{-anT_e} z^{-n} = T_e \sum_{n=0}^{+\infty} n \left(\frac{1}{e^{aT_e z}}\right)^n z^{-n}$$

En utilisant le résultat du paragraphe 1.4.5 du chapitre 1 et celui de l'exercice 2.1.1, on obtient :

$$(Zy)(z) = T_e \frac{d}{dz}\left[\frac{z}{z-\alpha}\right] \quad \text{avec } \alpha = e^{-aT_e}$$

d'où

$$\boxed{(Zy)(z) = \frac{T_e \alpha z}{(z-\alpha)^2} \quad \text{avec } \alpha = e^{-aT_e}}$$

■

2.2 Recherche d'originaux

Exercice 2.2.1

Sachant que s est un signal discret causal tel que sa transformée en Z est $(Zs)(z) = \dfrac{z}{(z-1)(z-2)}$ avec $|z| > 2$, déterminer le signal s.

Éléments de correction
Nous avons pour $z \neq 0$, ce qui est le cas puisque $|z| > 2$:

$$\frac{(Zs)(z)}{z} = \frac{1}{(z-1)(z-2)}$$

La décomposition en éléments simples de la fraction rationnelle donne :

$$\frac{(Zs)(z)}{z} = \frac{-1}{z-1} + \frac{1}{z-2}$$

soit

$$(Zs)(z) = -\frac{z}{z-1} + \frac{z}{z-2}$$

Or l'original de $z \mapsto \dfrac{z}{z-a}$ pour $|z| > |a|$ est le signal discret, causal $n \mapsto a^n$ $(n \in \mathbb{N})$. Ainsi,

$$\boxed{s(n) = -1 + 2^n \text{ pour } n \in \mathbb{N}}$$

ou

$$\boxed{s(n) = (-1 + 2^n)e(n)}$$

■

Exercice 2.2.2

Sachant que x est un signal discret causal tel que sa transformée en Z est $(Zx)(z) = \dfrac{z^2}{z^2 - 5z + 6}$ avec $|z| > 3$, déterminer le signal s.

Éléments de correction
Première méthode

Puisque $|z| > 3$, $\dfrac{(Zx)(z)}{z}$ existe et la décomposition en éléments simples de cette fraction rationnelle donne :

$$\frac{(Zx)(z)}{z} = \frac{z}{z^2 - 5z + 6} = \frac{z}{(z-2)(z-3)} = \frac{-2}{z-2} + \frac{3}{z-3}$$

Or l'original de $z \mapsto \dfrac{z}{z-a}$ pour $|z| > |a|$ est le signal discret, causal $n \mapsto a^n$ ($n \in \mathbb{N}$). Ainsi,

$$\boxed{x(n) = -2(2^n) + 3(3^n) \text{ pour } n \in \mathbb{N}}$$

ou

$$\boxed{x(n) = [-2(2^n) + 3(3^n)]e(n)}$$

Deuxième méthode

La décomposition en éléments simples

$$(Zx)(z) = \frac{z^2}{z^2 - 5z + 6} = 1 - \frac{4}{z-2} + \frac{9}{z-3}$$

peut aussi s'écrire :

$$(Zx)(z) = 1 - 4\frac{1}{z}\left(\frac{z}{z-2}\right) + 9\frac{1}{z}\left(\frac{z}{z-3}\right)$$

soit, pour bien faire apparaître le retard [2] :

$$(Zx)(z) = 1 - 4.z^{-1}\left(\frac{z}{z-2}\right) + 9.z^{-1}\left(\frac{z}{z-3}\right)$$

On obtient par linéarité de la transformation en Z inverse et l'utilisation du formulaire :

$$\boxed{x(n) = d(n) - 4.2^{n-1}e(n-1) + 9.3^{n-1}e(n-1)}$$

où $d(n)$ est l'impulsion de Dirac discrétisée.

[2] Rappelons que la multiplication par z^{-n_0} est l'indication d'un retard, *i.e.* d'une multiplication de l'original par $e(n - n_0)$ où e est l'échelon unité discrétisé

ATTENTION : avec cette méthode, la présence de l'échelon discrétisé retardé est nécessaire car au niveau de la transformée en Z inverse, il y a un terme sans retard et deux autres avec un retard de 1.

Troisième méthode

Cette méthode n'est pas accessible aux étudiants des classes de techniciens supérieurs puisque la division suivant les puissances décroissantes que nous allons utiliser n'est pas à leur programme. La division suivante :

$$
\begin{array}{l|l}
z^2 & z^2 - 5z + 6 \\
\cline{2-2}
-z^2 + 5z - 6 & 1 + 5z^{-1} + 19z^{-2} + 65z^{-3} + \cdots \\
\cline{1-1}
\qquad 5z - 6 & \\
\qquad -5z + 25 - 30z^{-1} & \\
\cline{1-1}
\qquad\qquad 19 - 30z^{-1} & \\
\qquad\qquad -19 + 95z^{-1} - 114z^{-2} & \\
\cline{1-1}
\qquad\qquad\qquad 65z^{-1} - 114z^{-2} & \\
\qquad\qquad\qquad \ldots &
\end{array}
$$

donne une série de puissances en z^{-1}. On en déduit immédiatement que :

$$x(0) = 1\,;\; x(1) = 5\,;\; x(2) = 19\,;\; x(3) = 65\,;\; \cdots$$

L'expression générale de $x(n)$ trouvée à l'aide de la première méthode permet de vérifier le résultat.

Le principal inconvénient de cette méthode provient du fait qu'on obtient les éléments de la suite donnant l'original un à un. Cela suffit souvent dans les applications pratiques

Nous laissons le soin au lecteur de vérifier la concordance des trois résultats obtenus.

■

Exercice 2.2.3

Sachant que x est un signal discret causal tel que sa transformée en Z est $(Zx)(z) = \dfrac{z+1}{z-1}$ avec $|z| > 1$, déterminer le signal x.

Éléments de correction

On a facilement

$$(Zx)(z) = 1 + \frac{2}{z-1}$$

soit

$$(Zx)(z) = 1 + 2.z^{-1}.\frac{z}{z-1}$$

Or, la multiplication par z^{-1} est l'indication d'un retard de 1, *i.e.* d'une multiplication de l'original par $e(n-1)$ où e est l'échelon unité discrétisé. On obtient donc par linéarité de la transformation en Z inverse et le formulaire :

$$\boxed{x(n) = d(n) + 2e(n-1)}$$

où $d(n)$ est l'impulsion de Dirac discrétisée. Remarquons que l'on obtient la suite :

$$x(0) = 1 \ , \ x(1) = 2 \ , \ x(2) = 2 \ , \ x(3) = 2 \ , \ \cdots$$

■

Exercice 2.2.4

Sachant que x est un signal discret causal tel que sa transformée en Z est $(Zx)(z) = \dfrac{z}{(z-1)(z+2)}$ avec $|z| > 2$, déterminer le signal x.

Éléments de correction

Puisque $|z| > 2$, nous pouvons effectuer une division par z^2 et l'on obtient :

$$(Zx)(z) = \frac{z^{-1}}{(1-z^{-1})(1+2z^{-1})}$$

Posons alors $z^{-1} = X$ et effectuons la décomposition en éléments simples :

$$\frac{z^{-1}}{(1-z^{-1})(1+2z^{-1})} = \frac{X}{(1-X)(1+2X)} = \frac{\frac{1}{3}}{1-X} - \frac{\frac{1}{3}}{1+2X}$$

Nous avons alors :

$$(Zx)(z) = \frac{1}{3}\left[\frac{z}{z-1} - \frac{z}{z+2}\right]$$

La consultation du formulaire permet de conclure :

$$\boxed{x(n) = \frac{1}{3}\left[1 - (-2)^n\right] \text{ pour } n \in \mathbb{N}}$$

ou

$$\boxed{x(n) = \frac{1}{3}\left[1 - (-2)^n\right] e(n)}$$

Nous laissons le soin au lecteur de résoudre cet exercice par décomposition en éléments simples de la fraction rationnelle.

■

Exercice 2.2.5

Sachant que x est un signal discret causal tel que sa transformée en Z est $(Zx)(z) = \dfrac{z^3 - z^2 + 3z}{(z-1)^2(z+2)}$ avec $|z| > 2$, on se propose de déterminer le signal x.

1) Montrer qu'il existe deux constantes réelles A et B telles que :

$$(Zx)(z) = \frac{Az}{(z-1)^2} + \frac{Bz}{z+2}$$

2) En déduire le signal x.

Éléménts de correction

1)

$$(Zx)(z) = \frac{z^3 - z^2 + 3z}{(z-1)^2(z+2)} = \frac{Az}{(z-1)^2} + \frac{Bz}{z+2}$$

On a alors, par le procédé classique d'identification :

$$A = 1 \text{ et } B = 1$$

D'où

$$(Zx)(z) = \frac{z}{(z-1)^2} + \frac{z}{z+2}$$

La linéarité de la transformation en Z inverse et le formulaire permettent de conclure :

$$\boxed{x(n) = n + (-2)^n \text{ pour } n \in \mathbb{N}}$$

ou

$$\boxed{x(n) = [n + (-2)^n]\, e(n)}$$

■

Exercice 2.2.6

Sachant que x est un signal discret causal tel que sa transformée en Z est $(Zx)(z) = \dfrac{z^2}{(z-a)^2}$ avec $a \neq 0$, on se propose de déterminer le signal x.

Éléments de correction

Première méthode

On considère

$$\frac{(Zx)(z)}{z} = \frac{z}{(z-a)^2}$$

et on décompose en éléments simples.

$$\frac{(Zx)(z)}{z} = \frac{z}{(z-a)^2} = \frac{1}{(z-a)} + \frac{a}{(z-a)^2}$$

donc

$$(Zx)(z) = \frac{z}{z-a} + \frac{az}{(z-a)^2}$$

d'où

$$(Zx)(z) = \frac{z}{z-a} + \frac{\frac{z}{a}}{\left(\frac{z}{a} - 1\right)^2}$$

L'original de $\dfrac{z}{z-a}$ se lit directement dans le formulaire.
On utilise ensuite le fait que

$$(Zr)(z) = \frac{z}{(z-1)^2} \Longrightarrow \frac{\frac{z}{a}}{\left(\frac{z}{a} - 1\right)^2} = (Zr)\left(\frac{z}{a}\right)$$

Par linéarité de la transformation en Z inverse, on obtient :

$$x(n) = a^n + na^n, \text{ pour } n \in \mathbb{N}$$

soit

$$\boxed{x(n) = (n+1)a^n, \text{ pour } n \in \mathbb{N}}$$

ou

$$\boxed{x(n) = [(n+1)a^n]e(n)}$$

Deuxième méthode
On remarque que :

$$(Zx)(z) = z \times \frac{z}{(z-a)^2}$$

or $\dfrac{z}{(z-a)^2} = \dfrac{1}{a}\left(\dfrac{az}{(z-a)^2}\right)$ a pour original le signal $n \mapsto f(n) = \dfrac{1}{a}na^n$. On en déduit que $f(0) = 0$. Finalement :

$$(Zx)\,z = z\,[(Zf)(z) - f(0)]$$

Le formulaire donne :

$$x(n) = f(n+1) \text{ pour } n \in \mathbb{N}$$

soit

$$x(n) = \frac{1}{a}(n+1)a^{n+1} \text{ pour } n \in \mathbb{N}$$

c'est-à-dire

$$\boxed{x(n) = (n+1)a^n \text{ pour } n \in \mathbb{N}}$$

ou

$$\boxed{x(n) = [(n+1)a^n]e(n)}$$

Cette méthode semble assez délicate à mettre en œuvre avec des élèves

Troisième méthode
Cette méthode est hors programme des éléves de STS.
Nous allons utiliser le produit de convolution.

$$(Zx)(z) = \frac{z^2}{(z-a)^2} = \frac{z}{z-a} \times \frac{z}{z-a}$$

Or, $\frac{z}{z-a}$ a pour original le signal $n \mapsto y(n) = a^n$ pour $n \in \mathbb{N}$. Donc, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} x(n) &= (y * y)(n) \\ &= \sum_{u=0}^{u=n} y(u)y(n-u) \\ &= \sum_{u=0}^{u=n} a^u a^{n-u} \\ &= \sum_{u=0}^{u=n} a^n \end{aligned}$$

d'où

$$\boxed{x(n) = (n+1)a^n \text{ pour } n \in \mathbb{N}}$$

ou

$$\boxed{x(n) = [(n+1)a^n]e(n)}$$

■

Exercice 2.2.7

Sachant que x est un signal discret causal tel que sa transformée en Z est $(Zx)(z) = \frac{z^3}{(z-1)^3}$ avec $|z| > 1$, on se propose de déterminer le signal x.

Éléments de correction

__Première méthode__

On décompose en éléments simple $\frac{(Zx)(z)}{z}$. On obtient :

$$\frac{z^2}{(z-1)^3} = \frac{1}{(z-1)^3} + \frac{2}{(z-1)^2} + \frac{1}{z-1}$$

donc

$$(Zx)(z) = \frac{z}{(z-1)^3} + \frac{2z}{(z-1)^2} + \frac{z}{z-1}$$

Le formulaire fournit directement les originaux des deux derniers termes. Il reste donc à déterminer l'original de $z \mapsto \frac{z}{(z-1)^3}$. Pour cela, on peut remarquer que :

$$\frac{z(z+1)}{(z-1)^3} = \frac{z(z-1+2)}{(z-1)^3} = \frac{z}{(z-1)^2} + \frac{2z}{(z-1)^3}$$

donc

$$\frac{z}{(z-1)^3} = \frac{1}{2}\left[\frac{z(z+1)}{(z-1)^3} - \frac{z}{(z-1)^2}\right]$$

Lors d'un exercice pour les élèves, on proposerait par exemple dans une question intermédiaire de vérifier l'égalité précédente puis d'en déduire l'original en question.

On obtient finalement par linéarité de la transformation en Z inverse et le formulaire :

$$x(n) = \frac{1}{2}(n^2 - n) + 2n + 1, \text{ pour } n \in \mathbb{N}$$

soit

$$\boxed{x(n) = \frac{1}{2}(n+1)(n+2), \text{ pour } n \in \mathbb{N}}$$

ou

$$\boxed{x(n) = \frac{1}{2}(n+1)(n+2)e(n)}$$

Deuxième méthode

Cette méthode utilise le produit de convolution.

$$(Zx)(z) = \frac{z^3}{(z-1)^3} = \frac{z}{(z-1)} \times \frac{z^2}{(z-1)^2}$$

Or $n \mapsto r(n) = n$, $n \in \mathbb{N}$, a pour transformé $z \mapsto (Zr)(z) = \dfrac{z}{(z-1)^2}$, d'où

$$\frac{z^2}{(z-1)^2} = z\left[(Zr)(z) - r(0)\right]$$

Ainsi

$$z \mapsto \frac{z^2}{(z-1)^2} \quad \text{a pour original} \quad n \mapsto r(n+1) = v(n) = n+1$$

$$z \mapsto \frac{z}{z-1} \quad \text{a pour original} \quad n \mapsto e(n) = 1$$

donc

$$\begin{aligned}
x(n) &= (e * v)(n) &&= (v * e)(n) \\
x(n) &= \sum_{u=0}^{u=n} e(u)v(n-u) &&= \sum_{u=0}^{u=n} v(u)e(n-u) \\
x(n) &= \sum_{u=0}^{u=n} v(u)e(n-u) &&= \left[\sum_{u=0}^{n}(u+1)\right] \times 1
\end{aligned}$$

donc

$$\boxed{x(n) = \frac{1}{2}(n+1)(n+2), \text{ pour } n \in \mathbb{N}}$$

ou

$$\boxed{x(n) = \frac{1}{2}(n+1)(n+2)e(n)}$$

Remarque

Pour obtenir l'original de $(Zy)(z) = \dfrac{z^3}{(z-1)^4}$, on écrirait :

$$(Zy)(z) = \left[z \times \frac{z}{(z-1)^2}\right] \times \left[\frac{z}{(z-1)^2}\right]$$

et on utiliserait convolution et translation.

<u>Troisième méthode</u>

Cette méthode utilise les propriétés des séries entières qui, bien sûr, ne font pas partie du programme des classes de BTS.

$$(Zy)(z) = \frac{z^3}{(z-1)^3} = \frac{1}{(1-z^{-1})^3}$$

Or, en utilisant un développement en série entière, il vient :

$$\frac{1}{(1-z^{-1})^3} = 1 + 3z^{-1} + \frac{(3)(4)}{2!}z^{-2} + \cdots + \frac{(n+1)(n+2)}{2}z^{-n}$$

donc

$$\boxed{x(n) = \frac{1}{2}(n+1)(n+2), \text{ pour } n \in \mathbb{N}}$$

Remarque

Pour obtenir l'original de $(Zy)(z) = \dfrac{z^3}{(z-1)^4}$, on écrirait :

$$(Zy)(z) = \frac{1}{z}\left[\frac{1}{(1-z^{-1})^4}\right]$$

et par développement en série entière :

$$y(n) = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}, \text{ pour } n \in \mathbb{N}$$

■

Les exemples précédents justifient le choix d'un formulaire restreint, moins important que celui rencontré parfois dans les ouvrages des matières professionnelles qui peut conduire à des interprétations très délicates. On a souhaité, dans le cadre de ce nouveau module sur la transformation en Z, habituer les étudiants à cette nouvelle notion dans les cas les plus simples.

2.3 Équations aux différences

Soient a, b, y_0 des réels données ($a \neq 0$) et f une fonction réelle causale. On cherche à déterminer la fonction y, solution de l'équation différentielle :

$$(E) \qquad \begin{cases} ay'(t) + by(t) &= f(t) \\ y(0) &= y_0 \end{cases}$$

Nous savons que cette équation différentielle admet une solution unique. Cependant, le calcul effectif de cette solution demande la connaissance d'une «solution particulière» qu'il n'est pas toujours facile de déterminer. De plus, dans la pratique des disciplines professionnelles, la fonction f du second membre n'est pas toujours explicitement connue. En effet, cette fonction est le plus souvent une grandeur physique mesurée à intervalles de temps $T > 0$ réguliers. Ainsi, à la place de l'expression de la fonction f on dispose seulement d'une séquence numérique $f_e = (f(nT))_{n\in\mathbb{N}}$. Il est alors impossible de déterminer la fonction inconnue y pour tous les instants t de $\mathbb{R}^+$. En revanche nous pourrons déterminer la séquence numérique $y_e = (y(nT))_{n\in\mathbb{N}}$. Dans ce but, on identifie

$$y'(nT) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{y(nT + \Delta t) - y(nT)}{\Delta t}$$

avec la différence

$$\frac{y(nT + T) - y(nT)}{T}$$

ce qui est acceptable lorsque T est assez petit, c'est-à-dire si l'on a échantillonné la fonction f assez finement (voir chapitre 1 § 1.2.1). L'équation différentielle devient alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$a\frac{y(nT + T) - y(nT)}{T} + by(nT) = f(nT)$$

soit en posant $\alpha = \dfrac{a}{T}$ et $\beta = \left(b - \dfrac{a}{T}\right)$:

$$\alpha y(nT + T) + \beta y(nT) = f(nT)$$

L'équation précédente est appelée : «équation aux différences».
Cette équation aux différences doit alors être résolue en tenant compte de la condition initiale $y(0) = y_0$.

Exercice 2.3.1

Déterminer le signal discret causal $n \mapsto y(n)$ vérifiant :

$$y(n) + ay(n-1) = e(n)$$

où a est un réel donné et e l'échelon unité discret.

Éléments de correction

Une première approche avec des élèves serait de travailler de proche en proche.
Pour $n = 0$, on a :

$$y(0) + ay(-1) = e(0)$$

Or, le signal y est causal donc $y(-1) = 0$ et $e(0) = 1$. On a donc

$$y(0) = 1$$

Pour $n = 1$, on a

$$y(1) + ay(0) = e(1) \Longleftrightarrow y(1) + a = 1$$

soit

$$y(1) = 1 - a$$

On obtiendrait de même :

$$y(2) = 1 - a + a^2 \; ; \; y(3) = 1 - a + a^2 - a^3 \; ; \; \cdots$$

Cette méthode n'est intéressante que si on a besoin des premiers échantillons de la réponse y. Pour avoir la réponse pour tout n dans $\mathbb{N}$, la transformation en Z s'impose.

Résolution par la transformation en Z.

La présence du terme $y(n-1)$ nous suggère de résoudre cette équation pour $n \geq 1$. Nous devons donc déterminer avant de faire cette résolution la valeur de $y(0)$.
Pour $n = 0$, on a :

$$y(0) + ay(-1) = e(0)$$

Or, le signal y est causal donc $y(-1) = 0$ et $e(0) = 1$. On a donc :

$$y(0) = 1$$

Nous pouvons alors utiliser la transformation en Z sur l'équation :

$$\begin{cases} y(n) + ay(n-1) &= e(n) \\ n \in \mathbb{N}, n \geq 1 \end{cases}$$

En utilisant la linéarité de la tansformation en Z et ses propriétés, on obtient :

$$(Zy)(z) + az^{-1}(Zy)(z) = \frac{z}{z-1}$$

On en déduit aisément

$$(Zy)(z) = \frac{z^2}{(z-1)(z+a)}$$

Le résultat recherché est alors obtenu en utilisant la transformation en Z inverse.

$$\frac{(Zy)(z)}{z} = \frac{z}{(z-1)(z+a)} = \frac{1}{a+1} \times \frac{1}{z-1} + \frac{a}{a+1} \times \frac{1}{z+a}$$

d'où

$$(Zy)(z)(z) = \frac{1}{(a+1)} \times \frac{z}{z-1} + \frac{a}{a+1} \times \frac{z}{z+a}$$

On obtient par linéarité de la transformation en Z inverse et l'utilisation du formulaire :

$$y(n) = \frac{1}{a+1} + \frac{a}{a+1}(-a)^n \text{ pour } n \in \mathbb{N}^*$$

Remarquons que cette formule est encore valable pour $n = 0$, en effet si on y remplace formellement n par 0 on obtient :

$$y(0) = \frac{1}{a+1} + \frac{a}{a+1} = 1$$

donc :

$$\boxed{y(n) = \frac{1}{a+1} + \frac{a}{a+1}(-a)^n \text{ pour } n \in \mathbb{N}}$$

ou

$$\boxed{y(n) = \left[\frac{1}{a+1} + \frac{a}{a+1}(-a)^n\right] e(n)}$$

Un texte d'exercice proposé aux élèves devra, éventuellement, comporter des indications pour la décomposition en éléments simples.

■

Exercice 2.3.2

Déterminer le signal discret causal $n \mapsto x(n)$ vérifiant :

$$x(n) - 2x(n-1) + x(n-2) = r(n)$$

où r est la rampe unité discrète causale définie par $r(n) = n$ $(n \in \mathbb{N})$.

Éléments de correction

La présence du terme $x(n-2)$ nous suggère de résoudre cette équation pour $n \geq 2$. Nous devons donc déterminer avant de faire cette résolution la valeur de $x(0)$ et celle de $x(1)$.

Pour $n = 0$, on a :

$$x(0) - 2x(-1) + x(-2) = 0$$

Or, le signal x est causal donc $x(-1) = 0$ et $x(-2) = 0$. On a donc

$$x(0) = 0$$

Pour $n = 1$, on a :

$$x(1) - 2x(0) + x(-1) = 1$$

Or, le signal x est causal donc $x(-1) = 0$. Puisque $x(0) = 0$, on a donc

$$x(1) = 1$$

Nous pouvons alors utiliser la transformation en Z sur l'équation :

$$\begin{cases} x(n) - 2x(n-1) + x(n-2) & = & n \\ n \in \mathbb{N}, n \geq 2 \end{cases}$$

En utilisant la linéarité de la tansformation en Z et ses propriétés, on obtient :

$$(Zx)(z) - 2z^{-1}(Zx)(z) + z^{-2}(Zx)(z) = \frac{z}{(z-1)^2}$$

On en déduit aisément

$$(Zx)(z) = \frac{z^3}{(z-1)^4}$$

<u>Recherche de l'original</u>

Première méthode

Cette méthode utilise le produit de convolution.

$$(Zx)(z) = \frac{z}{(z-1)^2} \times \frac{z^2}{(z-1)^2} = \frac{z}{(z-1)^2} \times \left[z \times \frac{z}{(z-1)^2} \right]$$

Or, $z \mapsto \dfrac{z}{(z-1)^2}$ a pour original $n \mapsto r(n) = n$.

Par ailleurs, puisque $r(0) = 0$, on peut écrire :

$$z \times \frac{z}{(z-1)^2} = z \times \left(\frac{z}{(z-1)^2} - r(0) \right)$$

ce qui montre que l'original de $z \times \dfrac{z}{(z-1)^2}$ est $n \mapsto r(n+1)$.

On en déduit :

$$\begin{cases} x(n) & = \quad r(n) * r(n+1) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} r(k)r(n-k+1) \\ n \in \mathbb{N} & \quad n \geq 2 \end{cases}$$

Or, r est un signal causal donc $r(n-k+1) = 0$ si et seulement si $n-k+1 < 0$ soit $k > n+1$. Ainsi

$$\begin{cases} x(n) & = \quad \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} r(k)r(n-k+1) = \sum_{k=0}^{n} r(k)r(n-k+1) \\ n \in \mathbb{N} & \quad n \geq 2 \end{cases}$$

Ainsi,

$$\begin{cases} x(n) & = \quad \displaystyle\sum_{k=0}^{n} k(n-k+1) \\ n \in \mathbb{N} & \quad n \geq 2 \end{cases}$$

En développant,

$$\begin{cases} x(n) & = \quad n\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k - \sum_{k=0}^{n} k^2 + \sum_{k=0}^{n} k \\ n \in \mathbb{N} & \quad n \geq 2 \end{cases}$$

On connaît la somme des n premiers entiers ainsi que la somme des carrés des n premiers entiers, d'où :

$$\begin{cases} x(n) & = \quad n\dfrac{n(n+1)}{2} - \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \dfrac{n(n+1)}{2} \\ n \in \mathbb{N} & \quad n \geq 2 \end{cases}$$

c'est-à dire :

$$\begin{cases} x(n) & = \quad \dfrac{n(n+1)(n+2)}{6} \\ n \in \mathbb{N} & \quad n \geq 2 \end{cases}$$

Remarquons que cette formule est encore valable pour $n = 0$ et $n = 1$, en effet si l'on y remplace formellement n par 0 puis par 1 on obtient :

$$x(0) = 0 \text{ et } x(1) = 1$$

finalement

$$\boxed{\begin{cases} x(n) & = \dfrac{n(n+1)(n+2)}{6} \\ n \in \mathbb{N} \end{cases}}$$

Deuxième méthode
Cette méthode utilise un développement en série entière.

$$(Zx)(z) = \frac{z^3}{(z-1)^4} = \frac{1}{z}\left[\frac{z^4}{(z-1)^4}\right] = z^{-1}\left(1-z^{-1}\right)^{-4}$$

or on sait que

$$(1-u)^{-4} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4 \times 5 \times \cdots \times (4+n-1)}{n!} u^n$$

avec $u = z^{-1}$, on obtient :

$$(Zx)(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n(n+1)(n+2)}{6} z^{-n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n(n+1)(n+2)}{6} z^{-n}$$

Par définition même de la transformation en Z, on a :

$$\boxed{\begin{cases} x(n) & = \dfrac{n(n+1)(n+2)}{6} \\ n \in \mathbb{N} \end{cases}}$$

Remarque importante
Cet exemple montre que pour une équation du type

$$ax(n) + bx(n-1) + cx(n-2) = a_1 y(n) + b_1 y(n-1)$$

avec un premier membre ayant des coefficients simples et un second membre constitué d'un signal causal élémentaire, on peut rapidement dépasser les connaissances exigibles des élèves.
Un choix judicieux des exemples à traiter s'impose donc.

■

Exercice 2.3.3

Cet exercice reprend l'exercice précédent 2.3.2 mais avec un second membre différent.

Déterminer le signal discret causal $n \mapsto x(n)$ vérifiant :

$$x(n) - 2x(n-1) + x(n-2) = d(n)$$

où d est l'impulsion de Dirac discretisée définie par $d(0) = 1$ et $d(n) = 0$ pour $n \in \mathbb{N} - \{0\}$.

Éléments de correction

La présence du terme $x(n-2)$ nous suggère de résoudre cette équation pour $n \geq 2$. Nous devons donc déterminer avant de faire cette résolution la valeur de $x(0)$ et celle de $x(1)$.
Pour $n = 0$, on a :

$$x(0) - 2x(-1) + x(-2) = d(0) = 1$$

Or, le signal x est causal donc $x(-1) = 0$ et $x(-2) = 0$. On a donc

$$x(0) = 1$$

Pour $n = 1$, on a :

$$x(1) - 2x(0) + x(-1) = d(1) = 0$$

Or, le signal x est causal donc $x(-1) = 0$. Puisque $x(0) = 1$, on a donc

$$x(1) = 2$$

Nous pouvons alors utiliser la transformation en Z sur l'équation :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x(n) - 2x(n-1) + x(n-2) & = & d(n) \\ n \in \mathbb{N}, n \geq 2 & & \end{array} \right.$$

En utilisant la linéarité de la tansformation en Z et ses propriétés, on obtient :

$$(Zx)(z) - 2z^{-1}(Zx)(z) + z^{-2}(Zx)(z) = 1$$

On en déduit aisément

$$(Zx)(z) = \frac{z^2}{(z-1)^2}$$

Nous avons alors :

$$\frac{(Zx)(z)}{z} = \frac{z}{(z-1)^2} = \frac{z-1+1}{(z-1)^2} = \frac{1}{z-1} + \frac{1}{(z-1)^2}$$

donc

$$(Zx)(z) = \frac{z}{z-1} + \frac{z}{(z-1)^2}$$

En utilisant la linéarité de la transformation en Z inverse et le formulaire, on obtient :

$$x(n) = 1 + n, \text{ pour } n \geq 2$$

Remarquons que cette formule est encore valable pour $n = 0$ et $n = 1$ puisque nous avons vu plus haut que $x(0) = 1$ et $x(1) = 2$. Ainsi

$$\boxed{x(n) = 1 + n \text{ pour } n \in \mathbb{N}}$$

ou

$$\boxed{x(n) = (1+n)e(n)}$$

Remarque 1 : On peut aussi écrire $x(n) = r(n+1)e(n+1)$ ce qui montre que le signal x est une «rampe avancée».
Remarque 2 : Pour déterminer l'original de $(Zx)(z)$, on aurait pu considérer que

$$(Zx)(z) = z \times \frac{z}{(z-1)^2}$$

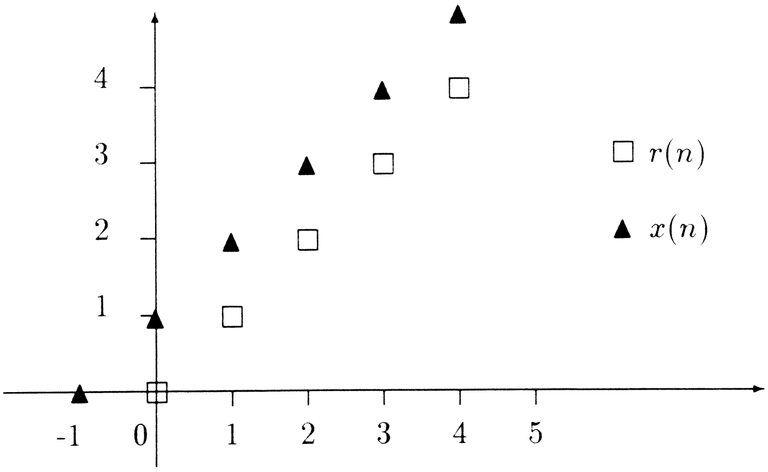
Or $z \mapsto \dfrac{z}{(z-1)^2}$ a pour original $n \mapsto r(n)$. Puisque $r(0) = 0$, on peut écrire :

$$(Zx)(z) = z[(Zr)(z) - r(0)]$$

Le formulaire permet alors de conclure que :

$$\boxed{x(n) = r(n+1) = 1 + n \text{ pour } n \in \mathbb{N}}$$

Graphiquement :



Le signal x solution est donc la **rampe discrète avancée** de 1.

■

Exercice 2.3.4

Déterminer le signal $n \mapsto y(n)$, causal vérifiant la relation de Fibonacci :

$$\begin{cases} y(n+2) = y(n+1) + y(n) \\ y(0) = 1 \quad ; \quad y(1) = 1 \end{cases}$$

Éléments de correction

En utilisant la linéarité de la transformation en Z et ses propriétés, on obtient :

$$z^2[(Zy)(z) - y(0) - y(1)z^{-1}] = z[(Zy)z - y(0)] + (Zy)(z)$$

Compte tenu des valeurs de $y(0)$ et de $y(1)$, on obtient :

$$(Zy)(z) = \frac{z^2}{z^2 - z - 1}$$

Or,

$$z^2 - z - 1 = (z-a)(z-b)$$

avec

$$a = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \text{ et } b = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

On a donc
$$\frac{(Zy)(z)}{z} = \frac{z}{(z-a)(z-b)} = \frac{A}{z-a} + \frac{B}{z-b}$$
avec
$$A = \frac{a}{a-b} \text{ et } B = \frac{b}{b-a}$$
ainsi,
$$(Zy)(z) = \frac{1}{a-b}[a\frac{z}{z-a} - b\frac{z}{z-b}]$$
En utilisant le formulaire et la linéarité de la transformation en Z inverse, on obtient :
$$\boxed{y(n) = \frac{1}{a-b}\left(a^{n+1} - b^{n+1}\right) \text{ pour } n \in \mathbb{N}}$$

■

Exercice 2.3.5

Déterminer le signal discret causal $n \mapsto x(n)$ vérfiant :
$$\begin{cases} x(n+2) - 2x(n+1) + x(n) & = & d(n) \\ x(0) = 0\,;\, x(1) = 0 \end{cases}$$
où d est l'impulsion de Dirac discrétisée.

Éléments de correction

En utilisant la linéarité de la transformation en Z et ses propriétés, on obtient :
$$z^2[(Zx)(z) - x(0) - x(1)z^{-1}] - 2z[(Zx)(z) - x(0)] + (Zx)(z) = 1$$
soit compte tenu des conditions initiales,
$$(Zx)(z) = \frac{1}{(z-1)^2}$$
En remarquant que
$$(Zx)(z) = \frac{z}{(z-1)^2} \times z^{-1}$$

Or $z \mapsto \dfrac{z}{(z-1)^2}$ a pour original $n \mapsto r(n)e(n)$ ($e(n)$ échelon discret). Le formulaire permet alors de conclure et l'on obtient :

$$\boxed{x(n) = r(n-1)e(n-1)}$$

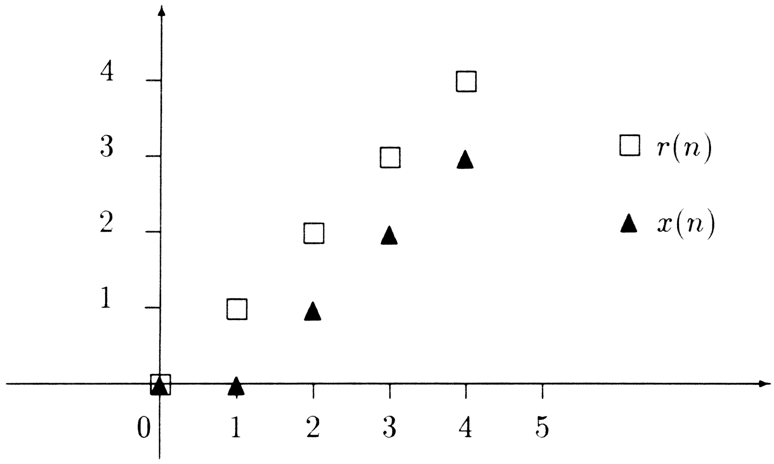
On peut remarquer que l'on a bien $x(0) = 0$ puisque $e(-1) = 0$ et $x(1) = 0$ puisque $r(0) = 0$ et $e(0) = 1$.
On peut donc écrire

$$\begin{cases} x(n) = n - 1 \quad \text{si} \quad n \geq 1 \\ x(0) = 0 \end{cases}$$

ce qui s'écrit encore :

$$\boxed{x(n) = n - 1 + d(n) \text{ pour } n \in \mathbb{N}}$$

où $d(n)$ est l'impulsion de Dirac discrétisée. Graphiquement :



Le signal x solution est donc la **rampe discrète retardée** de 1.

■

Exercice 2.3.6

Résoudre l'équation récurrente

$$\begin{cases} x(n+2) + 3x(n+1) + 2x(n) & = & \dfrac{3}{2}r(n+1) + \dfrac{1}{2}r(n) \\ x(0) = 2 \text{ et } x(1) = -6 \end{cases}$$

où x est un signal discret causal et r la rampe causale à temps discret.

Éléments de correction

Pour tout n dans $\mathbb{N}$, $r(n) = n$, donc l'équation s'écrit :

$$x(n+2) + 3x(n+1) + 2x(n) = \frac{3}{2}(n+1) + \frac{1}{2}(n) = 2n + \frac{3}{2}$$

Remarquons qu'il est possible de déterminer le signal x terme à terme. En effet, pour $n = 0$ on obtient :

$$x(2) + 3x(1) + 2x(0) = \frac{3}{2} \Longleftrightarrow x(2) = 18 - 4 + \frac{3}{2} = \frac{31}{2}$$

Et l'on peut poursuivre de proche en proche. Cette méthode n'est intéressante que si l'on a besoin uniquement des premiers termes de la solution. Utilisons la transformation en Z.

En utilisant la linéarité de la transformation en Z et ses propriétés, on obtient :

$$z^2[(Zx)(z) - x(0) - x(1)z^{-1}] + 3z[(Zx)(z) - x(0)] + 2(Zx)(z) = \frac{2z}{(z-1)^2} + \frac{3}{2} \times \frac{z}{z-1}$$

En tenant compte des conditions intiales et en remarquant que

$$z^2 + 3z + 2 = (z+1)(z+2)$$

on obtient :

$$(Zx)(z) = \frac{2z^2}{(z+1)(z+2)} + \frac{1}{2} \times \frac{z(3z+1)}{(z-1)^2(z+1)(z+2)}$$

Ainsi, $\dfrac{(Zx)(z)}{z}$ s'écrit comme la somme de deux fractions rationnelles que l'on décompose en éléments simples. Après des calculs que nous laissons le soin au lecteur de faire, on en déduit :

$$(Zx)(z) = \frac{z}{3(z-1)^2} - \frac{z}{36(z-1)} - \frac{9z}{4(z+1)} + \frac{77}{18} \times \frac{z}{z+2}$$

En utilisant le formulaire et la linéarité de la transformation en Z inverse, on obtient :

$$\boxed{x(n) = \frac{1}{3}n - \frac{1}{36} - \frac{9}{4}(-1)^n + \frac{77}{18}(-2)^n \text{ pour } n \in \mathbb{N}}$$

on peut vérifier qu'avec le résultat que l'on vient de trouver on obtient bien $x(0) = 2$, $x(1) = -6$ et $x(2) = \frac{31}{2}$.

Cette équation récurrente est effectivement issue d'un problème physique réel. Elle rentre bien dans le cadre du programme mais, bien entendu des questions intermédiaires sont nécessaires pour la faire résoudre par des élèves.

■

Exercice 2.3.7

Cet exercice traite un problème d'un point de vue analogique (partie A) et d'un point de vue discret (partie B). La partie A n'est pas accessible aux élèves des sections de STS compte tenu du nouveau module sur la transformation de Laplace.

Partie A

Rechercher la fonction causale $t \mapsto y(t)$, continue par morceaux sur $\mathbb{R}$, admettant une transformée de Laplace et vérifiant

$$y(t) + y(t-1) = t\mathcal{U}(t)$$

Partie B

Rechercher le signal discret causal $n \mapsto x(n)$ vérifiant l'équation aux différences :

$$x(n) + x(n-1) = r(n)$$

où r est la rampe unité causale telle que $r(n) = n$ pour tout n dans $\mathbb{N}$.

Éléments de correction

Partie A

La fonction y étant causale, l'équation donnant y présente un abus d'écriture classique. Elle doit être réecrite de la manière suivante :

$$y(t) + y(t-1)\mathcal{U}(t-1) = t\mathcal{U}(t)$$

Remarquons qu'il est inutile d'écrire ici $y(t)\mathcal{U}(t)$ puisque par hypothèse y est causale.

Par application de la linéarité de la transformation de Laplace et du théorème du retard nous avons, si l'on pose $Y(p) = (\mathcal{L})\,y(p)$:

$$(1 + e^{-p})Y(p) = \frac{1}{p^2}$$

soit

$$Y(p) = \frac{1}{p^2}\left(\frac{1}{1+e^{-p}}\right)$$

Or,

$$\frac{1}{1+e^{-p}} = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n e^{-np}$$

car on est en présence de la somme d'une série géométrique de premier terme 1 et de raison $q = e^{-p}$ qui converge puisque pour $p > 0$, $|q| = e^{-p} < 1$.
Ainsi,

$$Y(p) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{p^2} e^{-np}$$

$$Y(p) = \frac{1}{p^2} - \frac{1}{p^2}e^{-p} + \frac{1}{p^2}e^{-2p} - \cdots + (-1)^n \frac{1}{p^2}e^{-np} + \cdots$$

En admettant que l'on puisse utiliser la "linéarité" de la transformation de Laplace inverse pour une somme infinie, on obtient :

$$y(t) = t\mathcal{U}(t) - (t-1)\mathcal{U}(t-1) + (t-2)\mathcal{U}(t-2) + \cdots + (-1)^n(t-n)\mathcal{U}(t-n) + \cdots$$

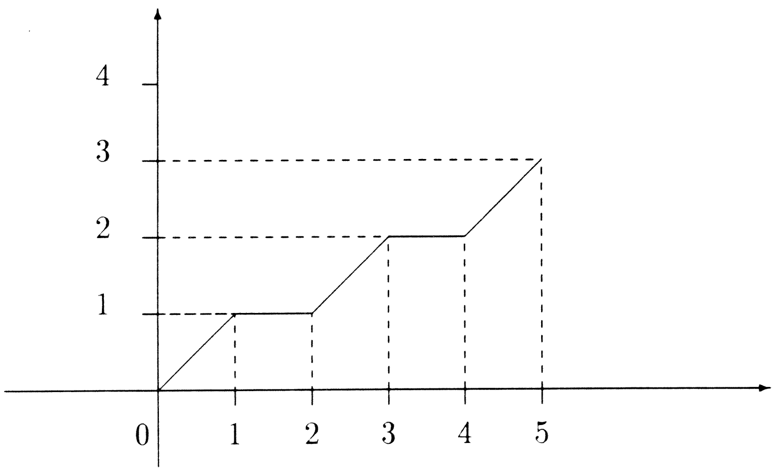
soit

$$\boxed{y(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n (t-n)\mathcal{U}(t-n)}$$

Effectuons la représentation graphique de la fonction y sur $[0, 5[$. On obtient :

$$\begin{cases} y(t) = t & \text{si} \quad t \in [0, 1[\\ y(t) = 1 & \text{si} \quad t \in [1, 2[\\ y(t) = t - 1 & \text{si} \quad t \in [2, 3[\\ y(t) = 2 & \text{si} \quad t \in [3, 4[\\ y(t) = t - 2 & \text{si} \quad t \in [4, 5[\end{cases}$$

La représentation graphique est alors :



Les problèmes mathématiques délicats posés par ce type d'exercice justifient le choix de certains allègements dans le module sur la transformation de Laplace, en particulier la disparition de la transformée de Laplace d'une fonction périodique.

Partie B

L'équation aux différences est

$$x(n) + x(n-1) = r(n)$$

La présence du terme $x(n-1)$ nous suggère de résoudre cette équation pour $n \geq 1$. Nous devons donc, avant de faire cette résolution, déterminer $x(0)$. L'équation fournit :

$$x(0) + x(-1) = r(0)$$

Or, x étant causal, on a $x(-1) = 0$; de plus $r(0) = 0$ donc

$$x(0) = 0$$

Nous pouvons alors utiliser la transformation en Z sur l'équation :

$$\begin{cases} x(n) + x(n-1) & = & r(n) \\ n \in \mathbb{N}, n \geq 1 & & \end{cases}$$

En utilisant la linéarité de la transformation en Z et ses propriétés, on obtient :

$$(Zx)(z) + z^{-1}(Zx)(z) = \frac{z}{(z-1)^2}$$

soit

$$(Zx)(z) = \frac{z}{(z-1)^2(1+z^{-1})} = \frac{z^2}{(z-1)^2(z+1)}$$

En décomposant en éléments simples $\frac{(Zx)(z)}{z}$, on obtient :

$$(Zx)(z) = \frac{1}{2} \cdot \frac{z}{(z-1)^2} + \frac{1}{4} \cdot \frac{z}{z-1} - \frac{1}{4} \cdot \frac{z}{z+1}$$

En utilisant le formulaire et la linéarité de la transformation en Z inverse, il vient :

$$\begin{cases} x(n) & = & \frac{1}{2}n + \frac{1}{4} - (-1)^n \frac{1}{4} \\ n \in \mathbb{N} & , & n \geq 1 \end{cases}$$

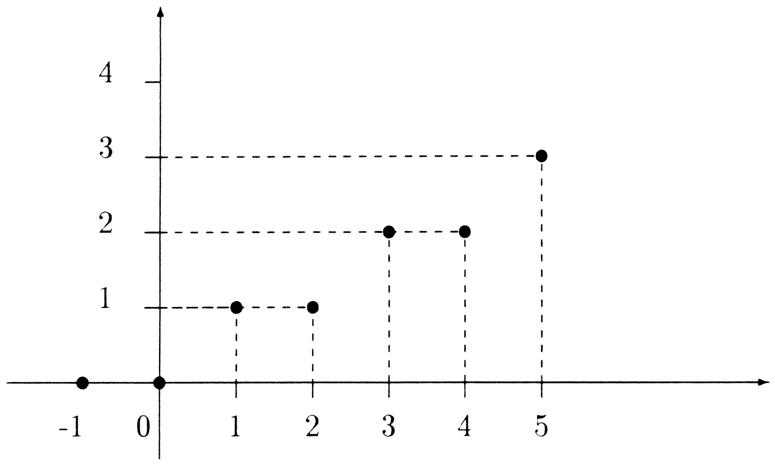
Remarquons que pour $n = 0$ la formule donne $x(0) = 0$; elle peut donc être étendue à $n \in \mathbb{N}$ d'où

$$\boxed{x(n) = \frac{1}{2}n + \frac{1}{4} - (-1)^n \frac{1}{4} \text{ pour } n \in \mathbb{N}}$$

ou

$$\boxed{x(n) = \left(\frac{1}{2}n + \frac{1}{4} - (-1)^n \frac{1}{4}\right) e(n)}$$

La représentation graphique de ce signal pour $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ est :



On pourra comparer les deux graphiques obtenus dans le cas continu et dans le cas discret.

2.4 Problèmes divers de discrétisation

Problème 2.4.1

Thème : discrétisation d'une équation différentielle.

Ce problème n'utilise pas la transformation en Z. Le problème 2.4.2 montrera comment résoudre la partie B à l'aide de la transformation en Z.

Nous donnons ci-dessous le texte d'un exercice du BTS CIRA.1995 qui correspond à la recherche de la réponse d'un système à un signal continu puis au même signal discrétisé. Ce texte nous semble une bonne introduction à la discrétisation. Après en avoir fait une correction succincte, nous montrerons comment ce même problème peut être abordé à l'aide de la transformation en Z et en utilisant divers pas d'échantillonnage.

On se propose d'étudier un système «entrée-sortie» en considérant deux types de signal d'entrée. Dans la partie A le signal d'entrée sera un échelon unité et dans la partie B le signal d'entrée sera modélisé par une suite numérique constante liée à l'échelon unité.

Partie A

Le signal d'entrée est l'échelon unité $\mathcal{U}$. Le signal de sortie est la fonction causale s, solution sur $[0, +\infty[$ de l'équation différentielle :

$$(1)\quad \begin{cases} 5\,\dfrac{ds}{dt}(t) + s(t) = \mathcal{U}(t) \\ s(0) = 2 \end{cases}$$

1) En résolvant l'équation (1), montrer que la fonction s est définie par :

$$s(t) = \left(1 + e^{-0.2t}\right)\mathcal{U}(t)$$

2) on désigne par k un entier naturel. Calculer $s(0,5k)$ pour les valeurs de l'entier k comprises entre 0 et 10.
On présentera les résultats sous forme d'un tableau dans lequel on donnera les valeurs décimales arrondies à 10^{-2} près.

Partie B

Le signal d'entrée est maintenant un «échelon unité échantillonné». Il est modélisé par la suite numérique $(\mathcal{U}(0.5k))_{k\in\mathbb{N}}$.

1) On se propose de caractériser le signal de sortie. La méthode consiste à remplacer dans l'équation (1) de la partie A, t par $0,5k$ et $\dfrac{ds}{dt}(0,5k)$ par $\dfrac{s\left(0,5(k+1)\right) - s(0,5k)}{0,5}$.

Montrer que l'on obtient alors :

$$(2)\ \begin{cases} s(0,5(k+1)) &= 0,9s(0,5k)+0,1 \\ s(0)=2 \end{cases}$$

2) On définit donc la suite numérique $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ par :

$$(3)\ \begin{cases} a_{k+1} &= 0,9a_k+0,1 \\ a_0=2 \end{cases}$$

a) Montrer que la suite $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ définie par $b_k = a_k - 1$ est la suite géométrique de raison $0,9$ et de premier terme 1.

b) En déduire l'expression de a_k en fonction de k.

c) Calculer a_k pour les valeurs de l'entier k comprises entre 0 et 10. On présentera les résultats sous forme de tableau dans lequel on donnera les valeurs décimales à 10^{-2} près.

Commentaire

Dans la partie A, le signal d'entrée était l'échelon unité $\mathcal{U}$. Dans la partie B, le signal d'entrée était l'échelon unité échantillonné $(\mathcal{U}(k\Delta t))_{k\in\mathbb{N}}$ avec $\Delta t = 0,5$ (Δt est le pas d'échantillonnage). La comparaison des résultats des questions 2) de la partie A et 2)c) de la partie B, montre que pour ce pas d'échantillonnage, la connaissance de la réponse échantillonnée $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ donne une idée assez précise de la réponse $t \mapsto s(t)$ obtenue dans la partie A.

Éléments de correction

Partie A.

1) On obtient aisément le résultat demandé :

$$s(t) = \left(1 + e^{-0,2t}\right)\mathcal{U}(t)$$

2) Une calculatrice permet alors d'obtenir le tableau demandé :

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$0,5k$	0	$0,5$	1	$1,5$	2	$2,5$	3	$3,5$	4	$4,5$	5
$s(0,5k)$	2	$1,91$	$1,82$	$1,74$	$1,67$	$1,61$	$1,55$	$1,50$	$1,45$	$1,41$	$1,37$

Partie B

1) Le but est de discrétiser l'équation différentielle :

$$(1)\quad \left\{\begin{array}{lcl} 5\,\dfrac{ds}{dt}(t)+s(t) & = & \mathcal{U}(t) \\ \\ s(0)=2 & & \end{array}\right.$$

en posant : $t=0,5k$ et $\dfrac{ds}{dt}(0,5k)=\dfrac{s\,(0,5(k+1))-s(0,5k)}{0,5}$.

Il vient alors :

$$\left\{\begin{array}{lcl} 5\,\dfrac{s\,(0,5(k+1))-s(0,5k)}{0,5}+s(0,5k) & = & \mathcal{U}(0,5k) \\ \\ s(0)=2 & & \end{array}\right.$$

Or, pour tout k dans $\mathbb{N}$, $\mathcal{U}(0,5k)=1$. D'où

$$\left\{\begin{array}{ll} 5\,\dfrac{s\,(0,5(k+1))-s(0,5k)}{0,5}+s(0,5k) & =1 \\ \\ s(0)=2 & \end{array}\right.$$

$\Longleftrightarrow$

$$\left\{\begin{array}{ll} s\,(0,5(k+1))-0,9s(0,5k) & =0,1 \\ \\ s(0)=2 & \end{array}\right.$$

2) Étude de la suite $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ avec $b_k=a_k-1$ et

$$\left\{\begin{array}{lcl} a_{k+1} & = & 0,9a_k+0,1 \\ \\ s(a_0)=2 & & \end{array}\right. \qquad (k\in\mathbb{N})$$

2.a) On a :

$$\left\{\begin{array}{lcl} b_{k+1}+1 & = & 0,9(b_k+1)+0,1 \\ b_0=2-1 & & \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} b_{k+1} & = & 0,9b_k \\ b_0=1 & & \end{array}\right.$$

La suite $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est donc la suite géométrique de raison $0,9$ et de premier terme 1

2.b) On a donc pour tout k dans $\mathbb{N}$:

$$b_k=0,9^k$$

donc puisque $a_k = b_k + 1$,

$$\boxed{a_k = 0,9^k + 1,\ k \in \mathbb{N}}$$

2.c) Valeurs de la suite $(a_k)_{k\in[0,10]}$

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a_k	2	1,9	1,81	1,73	1,66	1,59	1,53	1,48	1,43	1,39	1,35

Récrivons sous ce tableau celui donnant les valeurs numériques de $s(0,5k)$.

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$s(0,5k)$	2	1,91	1,82	1,74	1,67	1,61	1,55	1,50	1,45	1,41	1,37

La comparaison des deux tableaux justifie le commentaire fait à la fin de l'énoncé.

■

Problème 2.4.2

Thème : discrétisation d'une équation différentielle. Recherche de la dérivée discrétisée.

Reprendre la partie B du problème 2.4.1 précédent en utilisant la transformation en Z et différents pas d'échantillonnage.
(*On devra modifier le texte du problème pour le rendre accessible aux élèves.*)

Éléments de correction

On choisit un pas d'échantillonnage Δt. Alors, pour $n \in \mathbb{N}$:
à $t \mapsto s(t)$ on associe $n \mapsto x(n) = s(n\Delta t)$
à $t \mapsto s'(t)$ on peut associer soit :

$$n \mapsto (Dx)(n) = \frac{1}{\Delta t}[x(n) - x(n-1)]$$

soit

$$n \mapsto (D_1x)(n) = \frac{1}{\Delta t}[x(n+1) - x(n)]$$

Or, nous avons :

$$\begin{cases} 5\,\dfrac{ds}{dt}(t) + s(t) &= \mathcal{U}(t) \\ \\ s(0) = 2 \end{cases}$$

Examinons ce qui se passe en $t = n = 0$.

$$5\,\frac{ds}{dt}(0) + s(0) = \mathcal{U}(0) \Rightarrow \frac{ds}{dt}(0) = -\frac{1}{5}$$

Calculons alors $(Dx)(0)$ et $(D_1x))(0)$.

- Calcul de $(Dx)(0)$.

$$(Dx)(0) = \frac{1}{\Delta t}[x(0) - x(-1)]$$

Comme le signal s est causal on choisit x causal, donc $x(-1) = 0$ et

$$(Dx)(0) = \frac{2}{\Delta t}$$

Comme

$$\frac{ds}{dt}(0) = -\frac{1}{5}$$

le choix de (Dx) pour discrétiser la dérivée ne peut convenir.

- Calcul de $(D_1x)(0)$.

$$(D_1x)(0) = \frac{1}{\Delta t}[x(1) - x(0)]$$

Comme $x(0) = s(0) = 2$, on a :

$$(D_1x)(0) = \frac{1}{\Delta t}[x(1) - 2]$$

Dans ce cas il est possible d'avoir $(D_1x)(0) = -\frac{1}{5}$.

C'est ce choix que, bien sûr, nous adopterons.

Au pas d'échantillonnage Δt la discrétisation de l'équation différentielle nous donne :

$$\begin{cases} \dfrac{5}{\Delta t}[x(n+1) - x(n)] + x(n) &= \mathcal{U}(n\Delta t) = 1 \\ \\ x(0) = 2 \end{cases}$$

On est ainsi conduit à résoudre une équation aux différences.

Premier choix : $\Delta t = 1$

$$\left\{\begin{array}{rcl} 5\,[x(n+1) - x(n)] + x(n) & = & 1 \\ \\ x(0) = 2 & & \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} 5\,x(n+1) - 4x(n) & = & 1 \\ \\ x(0) = 2 & & \end{array}\right.$$

En utilisant la linéarité de la transformation en Z et ses propriétés, on obtient :

$$5z[(Zx)(z) - x(0)] - 4(Zx)(z) = \frac{z}{z-1}$$

$\iff$

$$(5z-4)(Zx)(z) = 10z + \frac{z}{z-1}$$

$\iff$

$$(Zx)(z) = \frac{10z}{5z-4} + \frac{z}{(z-1)(5z-4)}$$

Pour trouver l'original, écrivons :

$$\frac{(Zx)(z)}{z} = \frac{10}{5z-4} + \frac{1}{(z-1)(5z-4)}$$

L'utilisation de la décomposition en éléments simples conduit à :

$$\frac{(Zx)(z)}{z} = \frac{1}{z - \dfrac{4}{5}} + \frac{1}{z-1}$$

Finalement,

$$(Zx)(z) = \frac{z}{z - \dfrac{4}{5}} + \frac{z}{z-1}$$

Le formulaire permet alors de conclure.

$$\boxed{x(n) = \left(\frac{4}{5}\right)^n + 1 \text{ pour } n \in \mathbb{N}}$$

ou

$$\boxed{x(n) = \left(\left(\frac{4}{5}\right)^n + 1\right) e(n)}$$

Comparons les résultats obtenus, à 10^{-2} près, sans discrétisation et avec discrétisation (comparaison de $s(n)$ et $x(n)$).

$t=n$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$s(n)$	2	1,82	1,67	1,55	1,45	1,37	1,30	1,25	1,20	1,17	1,14
$x(n)$	2	1,80	1,64	1,51	1,41	1,33	1,26	1,21	1,17	1,13	1,11

Deuxième choix : $\Delta t = 0,5$

$$\left\{\begin{array}{lcl} \dfrac{5}{0,5}[x(n+1)-x(n)]+x(n) & = & 1 \\ & & \\ x(0)=2 & & \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} 10x(n+1)-9x(n) & = & 1 \\ & & \\ x(0)=2 & & \end{array}\right.$$

En utilisant la linéarité de la transformation en Z et ses propriétés, on obtient :

$$10z[(Zx)(z)-x(0)]-9(Zx)(z)=\frac{z}{z-1}$$

$\Longleftrightarrow$

$$(10z-9)(Zx)(z)=20z+\frac{z}{z-1}$$

$\Longleftrightarrow$

$$(Zx)(z)=\frac{20z}{10z-9}+\frac{z}{(z-1)(10z-9)}$$

Pour trouver l'original, écrivons :

$$\frac{(Zx)(z)}{z}=\frac{20}{10z-9}+\frac{1}{(z-1)(10z-9)}$$

L'utilisation de la décomposition en éléments simples conduit à :

$$\frac{(Zx)(z)}{z}=\frac{1}{z-\dfrac{9}{10}}+\frac{1}{z-1}$$

Finalement,

$$(Zx)(z)=\frac{z}{z-\dfrac{9}{10}}+\frac{z}{z-1}$$

Le formulaire permet alors de conclure.

$$\boxed{x(n) = \left(\frac{9}{10}\right)^n + 1 \text{ pour } n \in \mathbb{N}}$$

ou

$$\boxed{x(n) = \left(\left(\frac{9}{10}\right)^n + 1\right) e(n)}$$

Comparons les résultats obtenus, à 10^{-2} près, sans discrétisation et avec discrétisation (comparaison de $s(n)$ et $x(n)$).

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$x(n)$	2	1,90	1,81	1,73	1,66	1,59	1,53	1,48	1,43	1,39	1,35
$t = 0,5n$	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5
$s(0,5n)$	2	1,91	1,82	1,74	1,67	1,61	1,55	1,50	1,45	1,41	1,37

Troisième choix : $\Delta t = 0,1$

$$\left\{\begin{array}{lcl} \dfrac{5}{0,1}[x(n+1) - x(n)] + x(n) & = & 1 \\ \\ x(0) = 2 & & \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} 50x(n+1) - 49x(n) & = & 1 \\ \\ x(0) = 2 & & \end{array}\right.$$

En utilisant la linéarité de la transformation en Z et ses propriétés, on obtient :

$$50z[(Zx)(z) - x(0)] - 49(Zx)(z) = \frac{z}{z-1}$$

$\Longleftrightarrow$

$$(50z - 49)(Zx)(z) = 100z + \frac{z}{z-1}$$

$\Longleftrightarrow$

$$(Zx)(z) = \frac{100z}{50z-49} + \frac{z}{(z-1)(50z-49)}$$

Pour trouver l'original, écrivons :

$$\frac{(Zx)(z)}{z} = \frac{100}{50z-49} + \frac{1}{(z-1)(50z-49)}$$

L'utilisation de la décomposition en éléments simples conduit à :

$$\frac{(Zx)(z)}{z} = \frac{1}{z - \frac{49}{50}} + \frac{1}{z-1}$$

Finalement,

$$(Zx)(z) = \frac{z}{z - \frac{49}{50}} + \frac{z}{z-1}$$

Le formulaire permet alors de conclure.

$$\boxed{x(n) = \left(\frac{49}{50}\right)^n + 1 \text{ pour } n \in \mathbb{N}}$$

ou

$$\boxed{x(n) = \left(\left(\frac{49}{50}\right)^n + 1\right) e(n)}$$

Comparons les résultats obtenus, à 10^{-2} près, sans discrétisation et avec discrétisation (comparaison de $s(n)$ et $x(n)$).

n	0	1	2	3	4	5
$x(n)$	2	1,980	1,960	1,941	1,922	1,904
$t = 0,1n$	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
$s(0,1n)$	2	1,980	1,961	1,942	1,923	1,905

n	6	7	8	9	10
$x(n)$	1,886	1,868	1,851	1,834	1,817
$t = 0,1n$	0,6	0,7	0,8	0,9	1
$s(0,1n)$	1,887	1,869	1,852	1,835	1,819

L'étude de ces différents cas montre bien que la connaissance de la réponse échantillonnée donne une idée assez précise de la réponse analogique $t \mapsto s(t)$.

■

Problème 2.4.3

Thème : discrétisation d'une équation différentielle. Recherche de la dérivée discrétisée.

Soit l'équation différentielle :

$$\frac{ds}{dt}(t) + as(t) = at\mathcal{U}(t)$$

dans laquelle s est une fonction causale vérifiant $s(0) = 0$ et a une constante réelle strictement positive.
Discrétiser cette équation différentielle en utilisant un pas d'échantillonnage de θ pour obtenir une équation aux différences (on justifiera la forme de la dérivée discrétisée que l'on utilisera). Résoudre alors l'équation aux différences obtenue.
Un texte de problème pour les élèves ne pourra pas être donné tel quel. Il faudra donner toutes les indications utiles compte tenu de leurs connaissances.

Éléments de correction

Nous procédons comme il est dit dans l'énoncé à un pas d'échantillonnage de θ. Ainsi,
- À $t \mapsto s(t)$ on associe $n \mapsto x(n) = s(n\theta)$ $(n \in \mathbb{N})$.

Remarquons que x est un signal discret causal.
- À $t \mapsto \frac{ds}{dt}(t)$ on associe soit

$$n \mapsto Dx(n) = \frac{x(n) - x(n-1)}{\theta}$$

soit

$$n \mapsto D_1x(n) = \frac{x(n+1) - x(n)}{\theta}$$

Or, nous avons :

$$\frac{ds}{dt}(0) + as(0) = 0 \text{ et } s(0) = 0$$

donc

$$\frac{ds}{dt}(0) = 0$$

Comme $x(0) = s(0) = 0$, on aura

$$Dx(0) = \frac{x(0) - x(-1)}{\theta} = 0$$

car x étant causal $x(-1) = 0$, ou bien

$$D_1 x(0) = \frac{x(1) - x(0)}{\theta} = \frac{x(1)}{\theta}$$

Ne connaissant pas à priori $x(1)$, il faut choisir Dx comme discrétisation de s'.

• À $t \mapsto t\mathcal{U}(t)$ on associe la rampe discrétisée $n \mapsto y(n) = n\theta$.

Ainsi, au pas d'échantillonnage θ, l'équation différentielle est discrétisée en l'équation aux différences :

$$\boxed{\frac{x(n) - x(n-1)}{\theta} + ax(n) = an\theta}$$

Résolvons cette équation aux différences.

$$\frac{x(n) - x(n-1)}{\theta} + ax(n) = an\theta \Leftrightarrow (1 + a\theta)x(n) - x(n-1) = an\theta^2$$

En utilisant la linéarité de la transformation en Z, ses propriétés et $x(0) = 0$, on obtient :

$$(1 + a\theta)(Zx)(z) - z^{-1}(Zx)(z) = a\theta^2 \cdot \frac{z}{(z-1)^2}$$

soit

$$(Zx)(z) = a\theta^2 \cdot \frac{z^2}{(z-1)^2\left[(1 + a\theta)z - 1\right]}$$

En utilisant la décomposition en éléments simples de $\dfrac{(Zx)(z)}{z}$, on obtient :

$$(Zx)(z) = \theta \cdot \frac{z}{(z-1)^2} - \frac{1}{a} \cdot \frac{z}{z-1} + \frac{1}{a} \cdot \frac{z}{z - \dfrac{1}{1 + a\theta}}$$

En utilisant alors le formulaire et la linéarité de la transformation en Z inverse, on obtient :

$$\boxed{x(n) = \theta n - \frac{1}{a} + \frac{1}{a}\left(\frac{1}{1 + a\theta}\right)^n \quad \text{pour } n \in \mathbb{N}}$$

ou

$$\boxed{x(n) = \left(\theta n - \frac{1}{a} + \frac{1}{a}\left(\frac{1}{1 + a\theta}\right)^n\right) e(n)}$$

■

Problème 2.4.4

Thème : discrétisation d'une équation différentielle.

On considère un filtre analogique régit par l'équation différentielle :

$$(E_1) \qquad \tau \frac{ds}{dt}(t) + s(t) = e(t)$$

où τ est un réel strictement positif, s et e sont deux fonctions causales.
On décide d'échantillonner au pas Δt.

- À $t \mapsto s(t)$ on associe $n \mapsto y(n) = s(n\Delta t)$
- À $t \mapsto e(t)$ on associe $n \mapsto x(n) = e(n\Delta t)$
- À $t \mapsto \frac{ds}{dt}(t)$ on associe $n \mapsto (Dy)(n) = \frac{y(n) - y(n-1)}{\Delta t}$

y et x sont des signaux discret causaux.
1) Montrer que l'équation aux différences, notée (E_2), résultant de cette discrétisation s'écrit :

$$(E_2) \qquad y(n) = (1-K)y(n-1) + Kx(n)$$

avec $K = \frac{\Delta t}{\Delta t + \tau}$
2) On pose $x(n) = d(n)$, impulsion de Dirac discrétisée. Déterminer alors $y(n)$ et $\lim_{n \to +\infty} y(n)$.
3) Déterminer $y(n)$ lorsque $x(n) = e(n)$, échelon unité discrétisé.
On pourrait compléter cette question en demandant de représenter $n \mapsto y(n)$ pour n entier appartenant à $[0, 20]$ en prenant $K = \frac{1}{8}$

Éléments de correction

1) La discrétisation de l'équation (E_1) s'obtient simplement en utilisant les consignes données dans l'énoncé.

$$\frac{\tau}{\Delta t}[y(n) - y(n-1)] + y(n) = x(n) \Leftrightarrow \left(\frac{\tau + \Delta t}{\Delta t}\right) y(n) = \frac{\tau}{\Delta t} y(n-1) + x(n)$$

d'où

$$y(n) = \left(\frac{\tau}{\tau + \Delta t}\right) y(n-1) + \left(\frac{\Delta t}{\tau + \Delta t}\right) x(n)$$

(il est évident que $(\tau + \Delta t)$ est non nul).
Comme $1 - K = 1 - \dfrac{\Delta t}{\tau + \Delta t} = \dfrac{\tau}{\tau + \Delta t}$, on obtient :

$$\boxed{(E_2) \qquad y(n) = (1 - K)y(n-1) + Kx(n)}$$

2) Nous proposons deux méthodes pour résoudre cette question.
Méthode 1 : sans utilisation de la transformation en Z.

Nous avons dans cette question $x(n) = d(n)$.
Pour tout n dans $\mathbb{N}$:

$$y(n) = (1 - K)y(n-1) + Kd(n)$$

Pour $n = 0$

$$y(0) = (1 - K)y(-1) + Kd(0)$$

or, $y(-1) = 0$ (y est causal) et par définition $d(0) = 1$, donc

$$y(0) = K$$

Pour $n = 1$

$$y(1) = (1 - K)y(0) + Kd(1)$$

or, $y(0) = K$ et $d(1) = 0$, donc

$$y(1) = K(1 - K)$$

Pour $n = 2$

$$y(2) = (1 - K)y(1) + Kd(2)$$

or, $y(1) = K(1 - K)$ et $d(2) = 0$, donc

$$y(2) = K(1 - K)^2$$

En remarquant que pour tout $n \geq 1$, $d(n) = 0$, on peut écrire :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} y(n) & = & (1 - K)y(n-1) \\ & & \\ y(1) & = & K(1 - K) \end{array} \right. \qquad n \geq 1$$

On est donc en présence d'une suite géométrique de premier terme $y(1) = K(1 - K)$ et de raison $q = 1 - K$.

Le nombre $y(n)$ est alors le n ième terme de cette suite géométrique[3], il vaut donc $y(1)q^{n-1}$. Ainsi, pour $n \geq 1$:

$$y(n) = K(1-K)(1-K)^{n-1} = K(1-K)^n$$

On constate que pour $n = 0$ cette formule est encore valable puisqu'elle donne $y(0) = K$. Ainsi,

$$\boxed{y(n) = K(1-K)^n \text{ pour } n \in \mathbb{N}}$$

ou

$$\boxed{y(n) = \left(K(1-K)^n\right) e(n)}$$

Méthode 2 : avec utilisation de la transformation en Z.

L'application de la linéarité de la transformation en Z et de ses propriétés à (E_2) conduit à :

$$(Zy)(z) = (1-K)z^{-1}(Zy)(z) + K$$

soit

$$(Zy)(z) = \frac{K}{1-(1-K)z^{-1}} = \frac{Kz}{z-(1-K)}$$

La lecture inverse du formulaire fournit le même résultat que la méthode 1 :

$$\boxed{y(n) = K(1-K)^n \text{ pour } n \in \mathbb{N}}$$

ou

$$\boxed{y(n) = \left(K(1-K)^n\right) e(n)}$$

Comme $1 - K = \dfrac{\tau}{\tau + \Delta t} < 1$, on a :

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} y(n) = 0}$$

3) On doit résoudre l'équation :

$$y(n) = (1-K)y(n-1) + Ke(n)$$

[3]Cet exercice montre que dans le cours sur les suites géométriques il faudra sensibiliser les élèves au calcul du n ième terme selon que le premier terme est u_0 ou u_1. C'est une difficulté supplémentaire pour eux.

En utilisant la linéarité de la transformation en Z et ses propriétés, on obtient :

$$(Zy)(z) = (1-K)z^{-1}(Zy)(z) + K\frac{z}{z-1}$$

ce qui conduit à :

$$(Zy)(z) = \frac{Kz^2}{(z-1)(z-(1-K))}$$

soit

$$\frac{(Zy)(z)}{z} = \frac{Kz}{(z-1)(z-(1-K))}$$

La décomposition en éléments simples de cette fraction rationnelle, fournit :

$$(Zy)(z) = \frac{z}{z-1} - (1-K)\,\frac{z}{z-(1-K)}$$

En utilisant la linéarité de la transformation en Z inverse et le formulaire, on a pour tout entier naturel n :

$$y(n) = 1-(1-K)(1-K)^n$$

soit

$$\boxed{y(n) = 1-(1-K)^{n+1} \text{ pour } n \in \mathbb{N}}$$

ou

$$\boxed{y(n) = \left(1-(1-K)^{n+1}\right) e(n)}$$

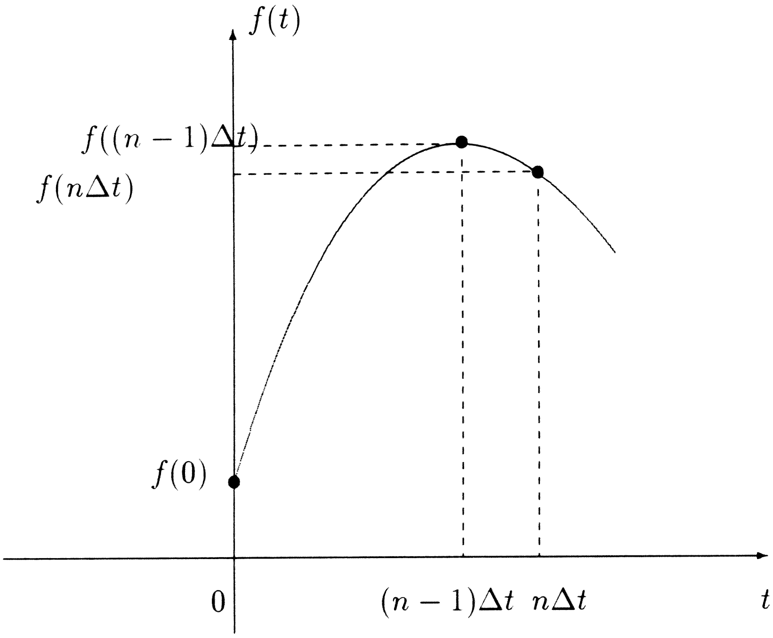
Cette question devra, pour un texte de problème à destination des élèves, comporter toutes les indications utiles pour effectuer la décomposition en éléments simples.

■

Problème 2.4.5

Intégrateur analogique

Un intégrateur analogique associe à une fonction intégrable f sur $[0, t]$ la fonction $t \mapsto \frac{1}{\tau}\int_0^t f(u)du$.
On cherche à le discrétiser.



On choisit un pas Δt.

- À $t \mapsto f(t)$ on associe $n \mapsto x(n) = f(n\Delta t)$.
- À $t \mapsto \frac{1}{\tau}\int_{t=0}^{t=n\Delta t} f(u)\,du$ on associe $n \mapsto y(n)$.
- À $t \mapsto \frac{1}{\tau}\int_{t=0}^{t=(n-1)\Delta t} f(u)\,du$ on associe $n \mapsto y(n-1)$.

Ainsi,

- À $t \mapsto \mathcal{A} = \frac{1}{\tau}\int_{t=(n-1)\Delta t}^{t=n\Delta t} f(u)\,du$ on associe $n \mapsto y(n) - y(n-1)$.

En utilisant par exemple la méthode des trapèzes, la quantité $\mathcal{A}$ peut-être approchée par $\frac{\Delta t}{2\tau}[f(n\Delta t) + f((n-1)\Delta t)]$.

En conséquence, l'équation aux différences qui régit l'intégrateur numérique associé à l'intégrateur analogique est :

$$y(n) - y(n-1) = \frac{\Delta t}{2\tau}[x(n) + x(n-1)]$$

où x est le signal discret d'entrée et y le signal discret de sortie, x et y étant des signaux causaux.
1) Déterminer $y(n)$ pour $x(n) = d(n)$. Représenter le signal $n \mapsto y(n)$ pour n entier naturel appartenant à l'intervalle $[0, 5]$ si l'on pose $\frac{\Delta t}{2\tau} = 0,1$.
2) Déterminer $y(n)$ pour $x(n) = e(n)$ à l'aide de la transformation en Z. Représenter le signal $n \mapsto y(n)$ pour n entier naturel appartenant à l'intervalle $[0, 5]$ si l'on pose $\frac{\Delta t}{2\tau} = 0,1$.

Éléments de correction

1) Réponse à une impulsion de Dirac discrétisée.
Comme $d(n) = 0$ dès que $n \geq 1$, nous allons procéder de proche en proche. L'équation s'écrit :

$$y(n) = y(n-1) + \frac{\Delta t}{2\tau}[d(n) + d(n-1)]$$

• $n = 0$

$$y(0) = y(-1) + \frac{\Delta t}{2\tau}[d(0) + d(-1)]$$

or, $y(-1) = 0$ (signal causal) et $d(0) = 1$, $d(-1) = 0$, donc

$$y(0) = \frac{\Delta t}{2\tau}$$

• $n = 1$

$$y(1) = y(0) + \frac{\Delta t}{2\tau}[d(1) + d(0)]$$

or, $y(0) = \frac{\Delta t}{2\tau}$, $d(0) = 1$, $d(1) = 0$, donc

$$y(1) = \frac{\Delta t}{\tau}$$

• $n = 2$

$$y(2) = y(1) + \frac{\Delta t}{2\tau}[d(2) + d(1)]$$

or, $y(1) = \frac{\Delta t}{\tau}$, $d(1) = 0$, $d(2) = 0$, donc

$$y(2) = \frac{\Delta t}{\tau}$$

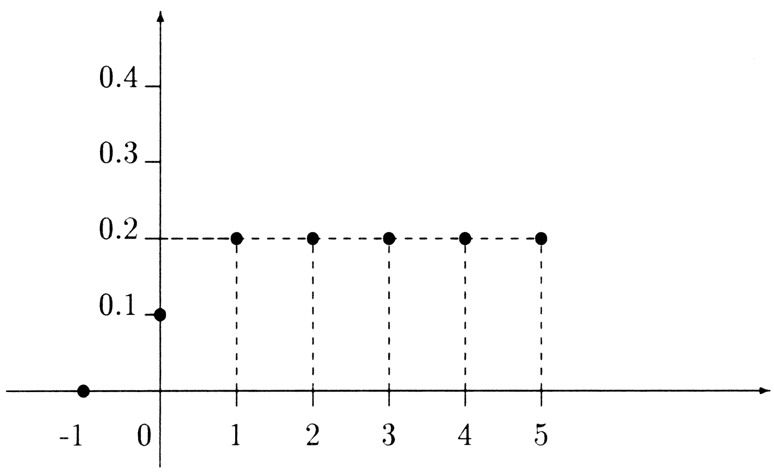
Plus généralement, pour $n \geq 2$, $d(n) = d(n-1) = 0$ donc l'équation devient :

$$\begin{cases} y(n) = y(n-1) \\ y(2) = \dfrac{\Delta t}{\tau} \end{cases} \quad n \geq 2$$

On est donc en présence d'une suite constante. Le signal de sortie est donc

$$\boxed{\begin{cases} y(0) = \dfrac{\Delta t}{2\tau} \\ y(n) = \dfrac{\Delta t}{\tau}, \quad n \geq 1 \end{cases}}$$

La représentation graphique demandée est :



2) Avec $x(n) = e(n)$ l'équation aux différences s'écrit :

$$y(n) = y(n-1) + \frac{\Delta t}{2\tau}[e(n) + e(n-1)]$$

En utilisant la linéarité de la transformation en Z et ses propriétés, on obtient :

$$(Zy)(z) = z^{-1}(Zy)(z) + \frac{\Delta t}{2\tau}\left(\frac{z}{z-1}\right)\left(1 + z^{-1}\right)$$

ce qui conduit à :

$$(Zy)(z) = \frac{\Delta t}{2\tau} \cdot \frac{z(z+1)}{(z-1)^2}$$

La décomposition en éléments simples de $\frac{(Zy)(z)}{z}$, conduit à :

$$(Zy)(z) = \frac{\Delta t}{\tau}\left(\frac{z}{(z-1)^2}\right) + \frac{\Delta t}{2\tau}\left(\frac{z}{z-1}\right)$$

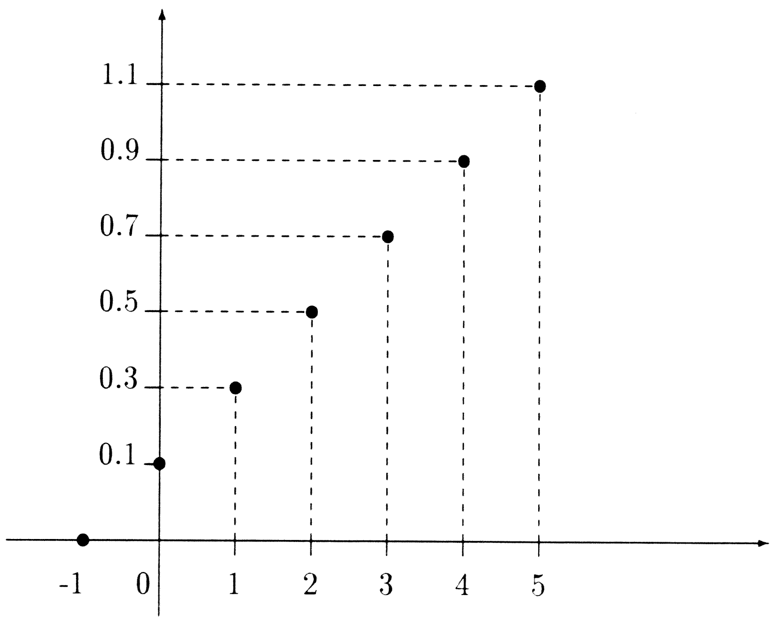
La linéarité de la transformation en Z inverse et le formulaire donnent :

$$\boxed{y(n) = n\frac{\Delta t}{\tau} + \frac{\Delta t}{2\tau} \text{ pour } n \in \mathbb{N}}$$

ou

$$\boxed{y(n) = \frac{\Delta t}{2\tau}\,(2n+1)\,e(n)}$$

La représentation graphique demandée est :



■

Annexe A

AVERTISSEMENT
Cette annexe traite de sujets qui sont très largement hors programme des classes de B.T.S. Elle n'est là que pour donner une information aux professeurs qui enseignent dans les sections de techniciens supérieurs de la filière électronique.

A.1 Transformée en Z bilatérale

Étant donné un signal discret $n \mapsto x(n)$, $n \in \mathbb{Z}$, on définit la transformée bilatérale en Z du signal x par :

$$(Z_b x)(z) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} x(n) z^{-n}$$

On démontre que la série définissant $X(z)$ converge dans un anneau du plan complexe déterminé par :

$$R_- < |z| < R_+$$

Remarquons que

$$(Z_b x)(z) = \sum_{n=-\infty}^{n=-1} x(n) z^{-n} + \sum_{n=0}^{n=+\infty} x(n) z^{-n} = X_1(z) + X_2(z)$$

$z \mapsto X_2(z)$ représente la transformée en Z du signal causal associé à x ; la série entière converge pour $|z| > R_-$.
$z \mapsto X_1(z)$ représente la transformée en Z du signal dit «anti-causal» associé à x ; la série entière converge pour $|z| < R_+$.

Remarque
Dans le cas des signaux causaux, la transformation en Z bilatérale se confond avec la transformation en Z unilatérale étudiée au chapitre 1.

A.2 Transformée de Laplace

La transformée de Laplace bilatérale d'un signal analogique x est donnée par :

$$(\mathcal{L}(x))(p) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-pt}\,dt$$

sous réseve de convergence de l'intégrale.
Notons x_e le signal échantillonné au pas T déduit du signal x. On a

$$x_e(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} x(nT)\delta(t-nT)$$

où δ représente l'impulsion de Dirac.
La transformée de Laplace de x_e est alors, sous réserve de pouvoir intervertir les symboles $\int$ et $\sum$:

$$\begin{aligned}(\mathcal{L}x_e)(p) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x_e(t)e^{-pt}\,dt \\ &= \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} x(nT)\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-nT)e^{-pt}\,dt\end{aligned}$$

soit

$$(\mathcal{L}x_e)(p) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} x(nT)e^{-pnT}$$

Pour un signal discret $n \mapsto x(n)$, $n \in \mathbb{Z}$, on aurait :

$$(\mathcal{L}x)(p) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} x(n)e^{-pn}$$

A.3 Transformation de Fourier

La transformée de Fourier d'un signal analogique x est donnée par :

$$(\mathcal{F}x)(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j\omega t}\,dt$$

où j est le nombre complexe tel que $j^2 = 1$. Notons x_e le signal échantillonné au pas T déduit du signal x. On a

$$x_e(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} x(nT)\delta(t - nT)$$

où δ représente l'impulsion de Dirac.
La transformée de Fourier de x_e est alors, sous réserve de pouvoir intervertir les symboles $\int$ et $\sum$:

$$\begin{aligned}(\mathcal{F}x_e)(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x_e(t)e^{-j\omega t}\,dt \\ &= \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} x(nT)\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT)e^{-j\omega t}\,dt\end{aligned}$$

soit :

$$(\mathcal{F}x_e)(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} x(nT)e^{-j\omega nT}$$

Pour un signal discret $n \mapsto x(n)$, $n \in \mathbb{Z}$, on aurait :

$$(\mathcal{F}x)(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} x(n)e^{-j\omega n}$$

Remarquons que contrairement à la transformée de Fourier d'un signal analogique, la transformée de Fourier d'un signal discrétisé est une fonction périodique de période 2π.

A.4 Lien entre les trois tranformées

Nous avons donc les trois formules :

$$(Z_b x)(z) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} x(n) z^{-n}$$

$$(\mathcal{L}x)(p) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} x(n) e^{-pn}$$

$$(\mathcal{F}x)(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} x(n) e^{-j\omega n}$$

donc

• La transformée en Z bilatérale d'un signal discret au point $z = e^{-p}$ est la transformée de Laplace de ce signal.

• La transformée de Laplace d'un signal discret au point $p = j\omega$ est la transformée de Fourier de ce signal.

• La transformée de Fourier d'un signal discret est la transformée en Z évalué sur le cercle de rayon 1 (poser $z = e^{j\omega}$).

Annexe B

$x(t)$	$X(p)$	$X(z)$
$\delta(t)$	1	1
$\delta(t-kT_e)$	e^{-kT_ep}	z^{-k}
$\mathcal{U}(t)$	$\frac{1}{p}$	$\frac{1}{1-z^{-1}}$
$t\mathcal{U}(t)$	$\frac{1}{p^2}$	$\frac{T_e z^{-1}}{(1-z^{-1})^2}$
$e^{-at}\mathcal{U}(t)$	$\frac{1}{p+a}$	$\frac{1}{1-\alpha z^{-1}}$
$(1-e^{-at})\mathcal{U}(t)$	$\frac{a}{p(p+a)}$	$\frac{(1-\alpha)z^{-1}}{(1-z^{-1})(1-\alpha z^{-1})}$
$te^{-at}\mathcal{U}(t)$	$\frac{1}{(p+a)^2}$	$\frac{T_e\alpha z^{-1}}{(1-\alpha z^{-1})^2}$

T_e est le pas d'échantillonnage et $\alpha = e^{-aT_e}$

Formulaire

Signaux causaux $n \mapsto x(n)$ pour $n \in \mathbb{N}$	**Transformée en** Z $z \mapsto (Zx)(z)$
$e(n) = 1$	$(Ze)(z) = \dfrac{z}{z-1}$
$\begin{cases} d(0) & = 1 \\ d(n) & = 0 \text{ si } n \neq 0 \end{cases}$	$(Zd)(z) = 1$
$r(n) = n$	$(Zr)(z) = \dfrac{z}{(z-1)^2}$
$c(n) = n^2$	$(Zc)(z) = \dfrac{z(z+1)}{(z-1)^3}$
$f(n) = a^n$, $a \in \mathbb{R} - \{0\}$	$(Zf)(z) = \dfrac{z}{z-a}$
$y(n) = a^n x(n)$, $a \in \mathbb{R} - \{0\}$	$(Zy)(z) = (Zx)\left(\dfrac{z}{a}\right)$
$y(n) = x(n - n_0)$, $(n - n_0) \in \mathbb{N}$ ou bien $y(n) = x(n - n_0)e(n - n_0)$ $n_0 \in \mathbb{N}^*$	$(Zy)(z) = z^{-n_0}(Zx)(z)$
$y(n) = x(n+1)$	$(Zy)(z) = z\left[(Zx)(z) - x(0)\right]$
$y(n) = x(n+2)$	$(Zy)(z) = z^2\left[(Zx)(z) - x(0) - x(1)z^{-1}\right]$
$y(n) = x(n + n_0)$, $n_0 \in \mathbb{N}^*$	$(Zy)(z) = z^{n_0}[(Zx)(z) - x(0) - x(1)z^{-1}$ $-x(2)z^{-2} - \cdots - x(n_0 - 1)z^{-(n_0-1)}]$

MODULE

ANALYSE SPECTRALE : TRANSFORMATION EN Z

Ce module sera étudié en liaison étroite avec les enseignements des autres disciplines, notamment parce que le traitement numérique du signal et les techniques d'échantillonnage d'un signal analogique (traitement numérique, restitution analogique) évoluent rapidement sous l'impulsion des nouvelles technologies. Dans ce module, on se propose de familiariser les étudiants aux phénomèmes discrets par la présentation de quelques signaux discrets et de leur transformation en Z, en se limitant à des signaux causaux. Cette présentation est complétée par l'étude de la réponse à des signaux discrets, de filtres numériques régis par une équation aux différences linéaire à coefficients constants. L'introduction des séries entières a pour seul but la présentation des résultats utiles pour l'étude de la transformation en Z.

a) Notions sur les séries entières.

La théorie générale des séries entières est hors programme.
L'existence du rayon de convergence est admise.

Application de la formule de Taylor avec reste intégral pour l'obtention de développements en séries entières (fonctions $t \mapsto \exp t, t \mapsto (1+t)^\alpha$ où $\alpha \in \mathbb{R}$, $t \mapsto \sin t$ et $t \mapsto \cos t$).

b) Transformation en Z

Définition de la transformée en Z pour un signal causal :

$$(Zx)(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} x(n) z^{-n} \text{ où } z \in \mathbb{C} \text{ et } n \in \mathbb{N}$$

En liaison avec les enseignements des autres disciplines,

on pourra donner la définition de la transformée en Z
d'un signal non causal :

$$(Zx)(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} x(k) z^{-k} \text{ où } z \in \mathbb{C} \text{ et } k \in \mathbb{Z},$$

mais aucune connaissance à ce sujet n'est exigible dans le cadre du programme de mathématiques.

Transformée des signaux usuels :

$n \mapsto 1$; $n \mapsto n$;
$n \mapsto n^2$; $n \mapsto a^n$ (a réel non nul)
$n \mapsto d(n)$ ($d(0) = 1$ et $d(n) = 0$ si $n \neq 0$)

Linéarité de la transformation en Z.
Effet d'une multiplication par a^n (a réel non nul)
Effet d'une translation sur la variable pour un signal causal.
Théorème de la valeur initiale pour un signal causal.
Théorème de la valeur finale (admis) pour un signal causal.

En relation avec les enseignements d'autres disciplines, on pourra donner la définition du produit de convolution, pour permettre de définir la notion de fonction de transfert d'un filtre discret, mais aucune connaissance n'est exigible à ce sujet dans le cadre du programme de mathématiques.

Travaux pratiques

1. Exemples simples de recherche de la transformée en Z d'un signal discret et de recherche d'un signal dont la transformée en Z est donnée.

On se limitera aux cas où le formulaire officiel permet de conclure. Pour la recherche de l'original, on donnera des indications sur la méthode à utiliser, en particulier sur l'expression à décomposer en éléments simples. En utilisant la division des polynômes, on peut écrire $(Zx)(z)$ sous forme d'une série de puissances en z^{-n}. On remarquera qu'il est aisé de vérifier (ou d'obtenir) $x(n)$ pour les petites valeurs de n ; les moyens informatiques permettent de déterminer $x(n)$ pour d'autres valeurs de n.

2. Exemples d'emploi de la transformation en Z pour la résolution d'équations récurrentes du type :
$ay(n)+by(n-1)+cy(n-2) = a_1x(n)+b_1x(n-1)$

ou
$ay(n+2)+by(n+1)+cy(n) = a_1x(n+1)+b_1x(n)$

où a, b, c, a_1, b_1 sont des réels,

où x est un signal causal discret connu

et où y est un signal causal discret inconnu.

Pour la recherche de l'original, on se réfèrera aux commentaires du TP 1.

En liaison avec les enseignements d'autres disciplines, on pourra montrer sur des exemples simples comment certaines équations s'interprètent en terme de « dérivation discrète et d'intégration discrète »,

mais aucune connaissance à ce sujet n'est exigible dans le cadre du programme de mathématiques.