Les annales du BTS
Mathématiques, groupement B2

THOMAS BRÉLIVET

octobre 2013

IREM PARIS XIII - GROUPE " ENSEIGNEMENTS TECHNOLOGIQUES "

Epreuves du BTS groupement B2

Remerciements

Cette compilation des annales du BTS groupement B2 a été faite à partir des fichiers LaTeX tapuscrits de Denis Vergès disponibles sur la toile sur le site de l'A.P.M.E.P. (l'Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public)

http://www.apmep.asso.fr/spip.php?rubrique376

L'idée a été reprise de Vincent Pantaloni (vincent.pantaloni@ac-orleans-tours.fr) qui a produit des annales des Restitutions Organisées de Connaissances (ROC) du Baccalauréat de la série S jusqu'en 2008. Elles sont visibles sur son site personnel

http://prof.pantaloni.free.fr

Nous les remercions de nous avoir autorisé à utiliser leurs productions.

mai 2005

Exercice 1 **11 points**

Les trois parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.

A. Résolution d'une équation différentielle

On considère l'équation différentielle (E) :

$$(1+x)\,y' + y = \frac{1}{1+x}$$

où y est une fonction de la variable réelle x, définie et dérivable sur $]-1\,;+\infty[$ et y' sa fonction dérivée.

1. Démontrer que les solutions sur $]-1\,;+\infty[$ de l'équation différentielle (E_0) :

$$(1+x)y' + y = 0$$

sont les fonctions définies par $h(x) = \dfrac{k}{x+1}$ où k est une constante réelle quelconque.

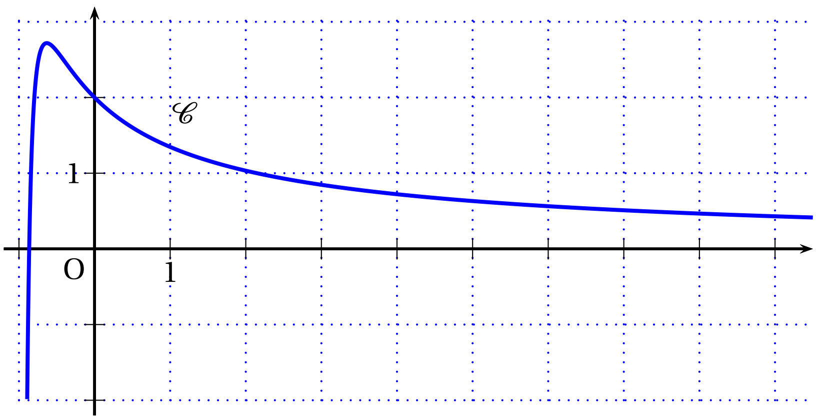
2. Soit g la fonction définie sur $]-1\,;\,+\infty[$ par $g(x) = \dfrac{\ln(1+x)}{1+x}$
Démontrer que la fonction g est une solution particulière de l'équation différentielle (E).

3. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E).

4. Déterminer la solution f de l'équation différentielle (E) qui vérifie la condition initiale $f(0) = 2$.

B. Etude d'une fonction

Soit f la fonction définie sur $]-1\,;+\infty[$ par $f(x) = \frac{2+\ln(1+x)}{1+x}$
Sa courbe représentative $\mathscr{C}$, dans un repère orthonormal où l'unité graphique est 1 cm, est donnée ci-dessous.



1. On admet que $\displaystyle\lim_{x\to-1} f(x) = -\infty$ et que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.
Que peut-on en déduire pour la courbe $\mathscr{C}$?

2. **a.** Démontrer que, pour tout x de $]-1\,;\,+\infty[$, $f'(x) = \dfrac{-1-\ln(1+x)}{(1+x)^2}$

b. Résoudre dans $]-1\ ;\ +\infty[$ l'inéquation $-1-\ln(1+x) \geqslant 0$.
En déduire le signe de $f'(x)$ lorsque x varie dans $]-1\ ;\ +\infty[$.

c. Établir le tableau de variation de f.

3. Un logiciel de calcul formel donne le développement limité, à l'ordre 2, au voisinage de 0, de la fonction f :

$$f(x) = 2 - x + \frac{1}{2}x^2 + x^2\varepsilon(x) \text{ avec } \lim_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0$$

Ce résultat, admis, n'a pas à être démontré.

a. En déduire une équation de la tangente $\mathcal{T}$ à la courbe $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0.

b. Étudier la position relative de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{T}$ au voisinage de leur point d'abscisse 0.

C. Calcul intégral

1. Déterminer la dérivée de la fonction G définie sur $]-1\ ;\ +\infty[$ par :

$$G(x) = \frac{1}{2}\left[\ln(1+x)\right]^2$$

2. En déduire qu'une primitive de f sur $]-1\ ;\ +\infty[$ est définie par :

$$F(x) = 2\ln(1+x) + \frac{1}{2}\left[\ln(1+x)\right]^2$$

3. **a.** On note $I = \displaystyle\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x$. Démontrer que $I = \dfrac{1}{2}(\ln 3)^2 + 2\ln 3$.

b. Donner la valeur approchée arrondie à 10^{-2} de I.

c. Donner une interprétation graphique du résultat obtenu au b.

Exercice 2 **9 points**

Le but de cet exercice est de résoudre une équation différentielle intervenant en mécanique ou en électronique en utilisant deux méthodes.

Les deux parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante

On se propose de déterminer la fonction f de la variable réelle t, définie et deux fois dérivable sur $[0\ ;\ +\infty[$, vérifiant :

a) $4f''(t) + 8f'(t) + 5f(t) = 20$ pour tout t de $[0\ ;\ +\infty[$,
b) $f(0) = 0 \quad$ et $\quad f'(0) = 0$.

A. Première méthode

1. Déterminer l'ensemble des solutions, définies sur $[0\ ;\ +\infty[$, de l'équation différentielle (E_0) :

$$4y'' + 8y' + 5y = 0.$$

2. Déterminer la constante k telle que la fonction g définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par $g(t) = k$ soit une solution particulière de l'équation différentielle (E) :

$$4y'' + 8y' + 5y = 20.$$

3. En déduire l'ensemble des solutions, définies sur $[0\ ;\ +\infty[$, de l'équation différentielle (E) :

4. Déterminer la solution f de l'équation différentielle (E) qui vérifie les conditions initiales $f(0) = 0$ et $f'(0) = 0$.

B. Deuxième méthode

1. On admet que la fonction f, nulle sur $]-\infty\ ;\ 0]$, et ses dérivées f' et f'' ont des transformées de Laplace. On note $F(p) = \mathscr{L}[f(t)]$ où F est la transformée de f.

a. Donner, à l'aide du formulaire figurant ci-dessous, les expressions de $\mathscr{L}[f''(t)]$ et $\mathscr{L}[f'(t)]$ en fonction de $F(p)$.

En déduire $\mathscr{L}[4f''(t) + 8f'(t) + 5f(t)]$ en fonction de $F(p)$.

b. Déterminer $\mathscr{L}[20\mathscr{U}(t)]$ où $\mathscr{U}$ est l'échelon unité.

c. Déduire des questions a. et b. que $F(p) = \dfrac{20}{p\left(4p^2 + 8p + 5\right)}$.

2. Dans la suite, on admet que $F(p)$ peut aussi s'écrire :

$$F(p) = 4\left(\frac{1}{p} - \frac{p+1}{(p+1)^2 + 0,25} - 2\frac{0,5}{(p+1)^2 + 0,25}\right).$$

a. Déterminer $\mathscr{L}^{-1}\left(\dfrac{1}{p}\right)$ où $\mathscr{L}^{-1}$ désigne la transformation de Laplace inverse.

b. Déterminer $\mathscr{L}^{-1}\left(\dfrac{p}{p^2 + (0,5)^2}\right)$ et en déduire $\mathscr{L}^{-1}\left(\dfrac{p+1}{(p+1)^2 + 0,25}\right)$.

c. Déterminer $\mathscr{L}^{-1}\left(\dfrac{0,5}{p^2 + (0,5)^2}\right)$ et en déduire $\mathscr{L}^{-1}\left(\dfrac{0,5}{(p+1)^2 + 0,25}\right)$

d. Déterminer alors la fonction f.

Formulaire

On rappelle les formules suivantes sur la transformation de Laplace.

$$\mathscr{L}[\mathscr{U}(t)] = \frac{1}{p}\ ;\ \mathscr{L}[\sin(\omega t)\mathscr{U}(t)] = \frac{\omega}{p^2+\omega^2}\ ;\ \mathscr{L}[\cos(\omega t)\mathscr{U}(t)] = \frac{p}{p^2+\omega^2}.$$

Plus généralement, si on note $\mathscr{L}[f(t)\mathscr{U}(t)] = F(p)$ alors,

$$\mathscr{L}[f(t)\mathrm{e}^{-at}\mathscr{U}(t)] = F(p+a);$$

$$\mathscr{L}[f'(t)\mathscr{U}(t)] = pF(p) - f(O^+);$$

$$\mathscr{L}[f''(t)\mathscr{U}(t)] = p^2F(p) - pf\left(0^+\right) - f'\left(0^+\right).$$

Retour au sommaire : 3

mai 2006

Exercice 1 **12 points**

Les trois parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.

A. Résolution d'une équation différentielle

On considère l'équation différentielle (E) :

$$y'' - 3y' - 4y = -5\mathrm{e}^{-x}$$

où y est une fonction de la variable réelle x, définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, y' la fonction dérivée de y et y'' sa fonction dérivée seconde.

1. Déterminer les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle

$$(\mathrm{E}_0) \quad : \quad y'' - 3y' - 4y = 0.$$

2. Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = x\mathrm{e}^{-x}$.

Démontrer que la fonction h est une solution particulière de l'équation différentielle (E).

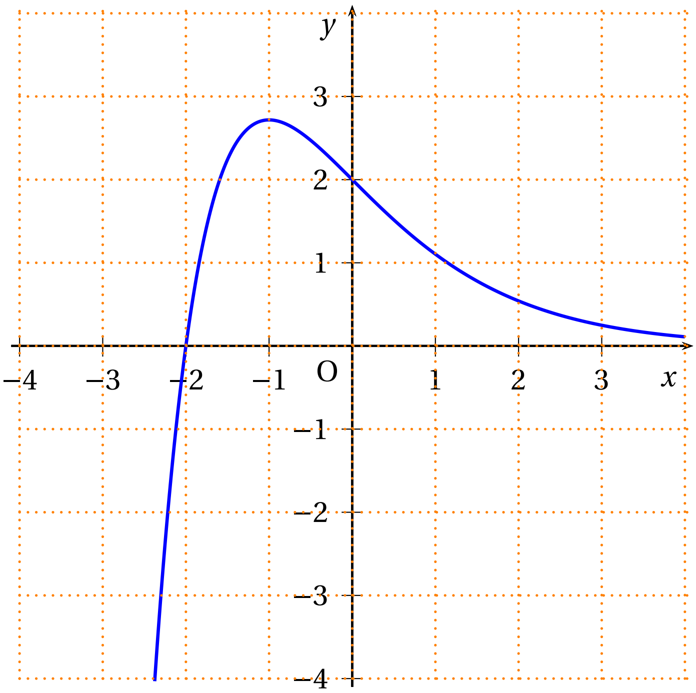
3. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E).

4. Déterminer la solution f de l'équation différentielle (E) qui vérifie les conditions initiales $f(0) = 2$ et $f'(0) = -1$.

B. Étude locale d'une fonction

La courbe $\mathscr{C}$ ci-dessous est la représentation graphique, dans un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$, de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = (x+2)\mathrm{e}^{-x}.$$



1. Démontrer que le développement limité à l'ordre 3, au voisinage de 0, de la fonction f est

$$f(x) = 2 - x + \frac{x^3}{6} + x^3\varepsilon(x) \text{ avec } \lim_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0.$$

2. Déduire du **1** une équation de la tangente T à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0.

3. Étudier la position relative de $\mathscr{C}$ et T au voisinage du point d'abscisse 0.

C. Calcul intégral

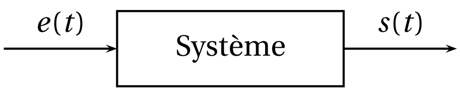
On note $I = \int_0^{0,6} f(x)\,\mathrm{d}x$.

1. À l'aide d'une intégration par parties, démontrer que $I = 3 - 3,6\mathrm{e}^{-0,6}$.

2. Donner la valeur approchée arrondie à 10^{-3} de I.

3. Donner une interprétation graphique du nombre I.

Exercice 2 **8 points**



On considère un système (électrique ou mécanique) et on note $e(t)$ le signal d'entrée et $s(t)$ le signal de sortie. Un système du 1er ordre est un système régi par une équation différentielle du type $(\mathrm{E_D})$: $T\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} + s(t) = Ke(t)$, où T et K sont des constantes réelles positives.

On note $E(p) = \mathscr{L}(e(t))$ et $S(p) = \mathscr{L}(s(t))$ où $\mathscr{L}$ est la transformation de Laplace.

La fonction de transfert H du système est alors définie par : $H(p) = \dfrac{S(p)}{E(p)}$.

Les trois parties 1° , 2° et 3° peuvent être traitées de façon indépendante

1° *Recherche de la fonction de transfert*

En appliquant la transformation de Laplace $\mathscr{L}$ aux deux membres de l'équation différentielle $(\mathrm{E_D})$ et en supposant que $s\left(0^+\right) = 0$ (le système est initialement au repos), montrer que :

$$H(p) = \frac{K}{1 + Tp}.$$

Dans le reste de l'exercice, on prendra $K = T = 1$

2° *Recherche du signal de sortie dans un cas particulier*

On suppose que le signal d'entrée est $e(t) = 2\mathscr{U}(t-3)$.

a. Représenter sur la feuille de copie la fonction e dans un repère orthogonal pour t élément de $[-1~;~6]$.

b. Calculer $E(p)$.

c. Montrer que $S(p) = 2\left(\dfrac{\mathrm{e}^{-3p}}{p} - \dfrac{\mathrm{e}^{-3p}}{p+1}\right)$.

d. En déduire l'expression du signal de sortie $s(t) = \mathscr{L}^{-1}(S(p))$.

3° *On se propose dans cette question de déterminer le « lieu de transfert » associé à la fonction de transfert H*

On note j le nombre complexe de module 1 et d'argument $\dfrac{\pi}{2}$ et on pose $p = \mathrm{j}\omega$ avec $\omega \in]0~;~+\infty[$.

On a alors : $H(\mathrm{j}\omega) = \dfrac{1}{1+\mathrm{j}\omega}$.

Dans ce qui suit, les représentations graphiques demandées sont à réaliser sur une feuille de papier millimétré avec un repère orthonormal $\left(\mathrm{O},~\vec{u},~\vec{v}\right)$ d'unité graphique 5 centimètres.

On appelle M_ω le point d'affixe $z = 1 + \mathrm{j}\omega$ et N_ω le point d'affixe $H(\mathrm{j}\omega)$ pour tout ω de l'intervalle $]0~;~+\infty[$.

a. On lit sur l'écran d'une calculatrice que les valeurs de $H(\mathrm{j}\omega)$ pour $\omega = \dfrac{3}{4}$, $\omega = 1$ et $\omega = \sqrt{3}$ sont :

$$H\left(\mathrm{j}\frac{3}{4}\right) = \frac{16}{25} - \frac{12}{25}\mathrm{j} \quad ; \quad H(\mathrm{j}) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\mathrm{j} \quad ; \quad H\left(\mathrm{j}\sqrt{3}\right) = \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4}\mathrm{j}.$$

Placer sur une figure les points M_ω et N_ω pour $\omega = \dfrac{3}{4}$, $\omega = 1$ puis $\omega = \sqrt{3}$.

b. Tracer sur la figure du 3° **a.** l'ensemble $\mathscr{E}_1$ décrit par le point M_ω lorsque ω varie dans l'intervalle $]0~;~+\infty[$.

c. Quelle est la transformation complexe qui associe au point M_ω d'affixe $z = 1 + \mathrm{j}\omega$ le point N_ω d'affixe $Z = \dfrac{1}{1+\mathrm{j}\omega}$.

d. Tracer l'ensemble $\mathscr{E}_2$ décrit par le point N_ω lorsque ω varie dans l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.

Formulaire

On rappelle les formules suivantes sur la transformation de Laplace.

$$\mathscr{L}[\mathscr{U}(t)] = \frac{1}{p}\ ;$$

Plus généralement, si on note $\mathscr{L}[f(t)\mathscr{U}(t)] = F(p)$ alors,

$$\mathscr{L}[f(t-\tau)\mathscr{U}(t-\tau)] = F(p)\mathrm{e}^{-\tau p}\ ;$$
$$\mathscr{L}[f(t)\mathrm{e}^{-at}\mathscr{U}(t)] = F(p+a)\ ;$$
$$\mathscr{L}[f'(t)\mathscr{U}(t)] = pF(p) - f\left(0^+\right).$$

Retour au sommaire : 3

mai 2007

Exercice 1 — 12 **points**

On étudie dans cet exercice une fonction φ susceptible d'intervenir dans la modélisation du trafic Internet au terminal informatique d'une grande société. Pour un réel t positif, $\varphi(t)$ est la probabilité que le temps séparant l'arrivée de deux paquets de données soit inférieur à t secondes.

Les trois parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.

A. Résolution d'une équation différentielle

On considère l'équation différentielle (E) : $\quad y' + 710y = 710$ où y est une fonction de la variable réelle t, définie et dérivable sur $[0\,;\,+\infty[$, et y' la fonction dérivée de y.

1. Déterminer les solutions définies sur $[0\,;\,+\infty[$ de l'équation différentielle (E_0) :

$$y' + 710y = 0.$$

2. Soit h la fonction définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par $h(t) = 1$.
Démontrer que la fonction h est une solution particulière de l'équation différentielle (E).

3. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E).

4. Déterminer la solution φ de l'équation différentielle (E) qui vérifie la condition initiale $\varphi(0) = 0$.

B. Étude d'une fonction

Soit φ la fonction définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par $\varphi(t) = 1 - \mathrm{e}^{-710t}$.
On désigne par C la courbe représentative de φ dans un repère orthogonal $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ où on prend comme unités : 10 cm pour 0,01 sur l'axe des abscisses et 10 cm pour 1 sur l'axe des ordonnées.

1. Montrer que la fonction φ est croissante sur $[0\,;\,+\infty[$.

2. **a.** Démontrer que le développement limité à l'ordre 2, au voisinage de 0, de la fonction φ est

$$\varphi(t) = 710t - \frac{(710t)^2}{2} + t^2\varepsilon(t) \quad \text{avec} \quad \lim_{t\to 0}\varepsilon(t) = 0.$$

b. En déduire une équation de la tangente T à la courbe C au point d'abscisse 0, ainsi que la position relative de C et T au voisinage de ce point.

3. Tracer sur la copie la tangente T et la courbe C dans le repère $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ défini au début de la partie *B*. On pourra se limiter à la partie de C correspondant à l'intervalle $[0\,;\,0,01]$.

4. **a.** Déterminer par le calcul le nombre réel positif α tel que $\varphi(\alpha) = 0,5$.
Donner la valeur exacte de α, puis sa valeur approchée arrondie à 10^{-5}.

b. Retrouver sur la figure le résultat obtenu au a) : faire apparaître les constructions utiles.

Le nombre α représente le temps médian en secondes séparant l'arrivée de deux paquets de données.

C. Calcul intégral

1. Pour tout réel positif t, on note $I(t) = 710\displaystyle\int_0^t x\mathrm{e}^{-710x}\,\mathrm{d}x$.
Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que :

$$I(t) = -t\mathrm{e}^{-710t} - \frac{1}{710}\mathrm{e}^{-710t} + \frac{1}{710}.$$

2. Calculer $\lim\limits_{t \to +\infty} I(t)$.
Donner la valeur exacte de cette limite, puis sa valeur approchée arrondie à 10^{-5}.

Le résultat obtenu est le temps moyen en secondes séparant l'arrivée de deux paquets de données.

Exercice 2 **8 points**

Soit le signal f, périodique de période $T = 2\pi$, impair, tel que :

$$f(t) = 1 \text{ sur l'intervalle }]0\,;\,\pi[\text{ et } f(0) = f(\pi) = 0.$$

1. Sur une feuille de papier millimétré, tracer, dans un repère orthogonal, la représentation graphique de f sur l'intervalle $[-2\pi\,;\,2\pi]$. On prendra comme unité 1 cm pour 1 sur l'axe des abscisses et 5 cm pour 1 sur l'axe des ordonnées.

2. Soit $S(t) = a_0 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)\right)$ le développement en série de Fourier associé à f.

a. Justifier que $a_n = 0$ pour tout nombre entier naturel n.

b. On rappelle que, dans le cas d'un signal impair, $b_n = \dfrac{4}{T}\displaystyle\int_0^{\frac{T}{2}} f(t)\sin(n\omega t)\,\mathrm{d}t$ pour tout nombre entier naturel non nul n.
Justifier que $\omega = 1$ et démontrer que $b_n = \dfrac{2}{n\pi}\left[1-(-1)^n\right]$, pour tout nombre entier naturel non nul n.

3. On décide de ne conserver, dans le développement en série de Fourier donné au 2., que les termes de rang n inférieur ou égal à 5.

a. Montrer que la fonction g ainsi obtenue est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(t) = \frac{4}{\pi}\sin(t) + \frac{4}{3\pi}\sin(3t) + \frac{4}{5\pi}\sin(5t).$$

b. Compléter après l'avoir reproduit le tableau de valeurs suivant dont les valeurs approchées sont à arrondir à 10^{-2} :

t	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	π
$g(t)$		1,19	0,89					

c. Compléter le graphique de la question 1. par l'allure de la représentation graphique de g sur $[0\,;\,\pi]$ obtenue à l'aide des résultats de la question b. et d'une calculatrice graphique.
Les résultats obtenus permettent d'observer l'approximation d'un signal périodique par le signal obtenu avec les premiers termes de son développement en série de Fourier.

Retour au sommaire : 3

mai 2008

Exercice 1 **12points**

Les trois parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.

A. Résolution d'une équation différentielle On considère l'équation différentielle (E) : $y' - 2y = x\text{e}^{x}$ où y est une fonction de la variable réelle x, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, et y' la fonction dérivée de y.

1. Déterminer les solutions définies sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle (E_0) :

$$y' - 2y = 0.$$

2. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = (-x-1)\text{e}^{x}.$$

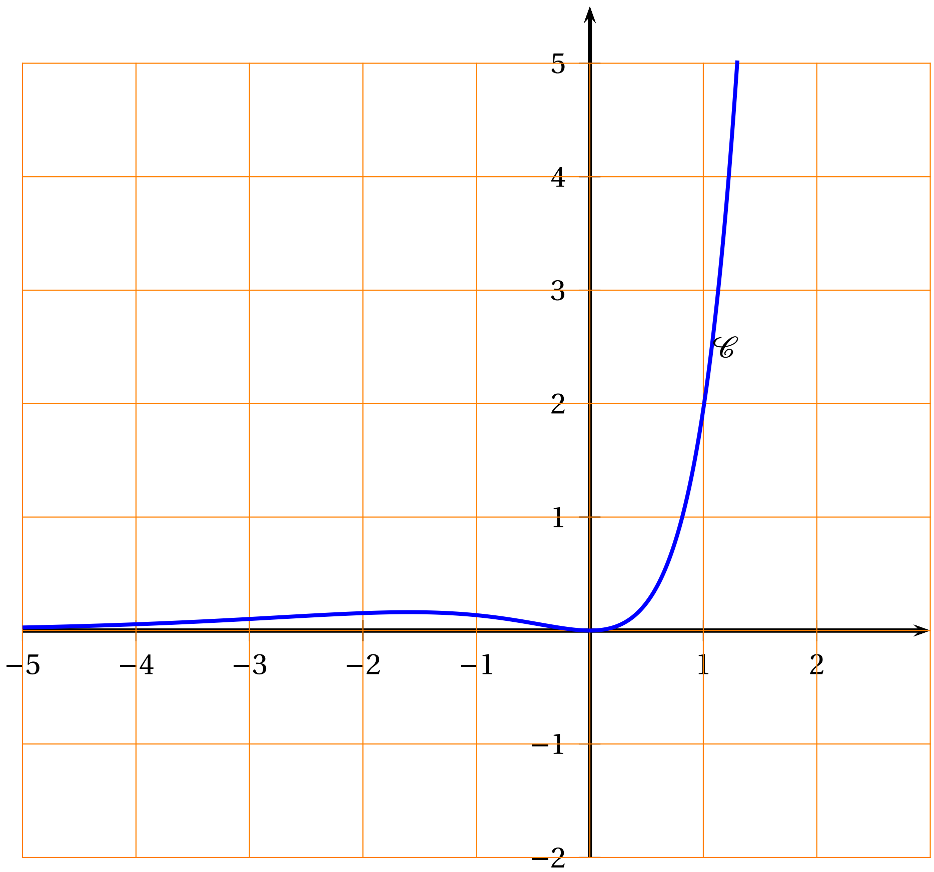
Démontrer que la fonction g est une solution particulière de l'équation différentielle (E).

3. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E).
4. Déterminer la solution f de l'équation différentielle (E) qui vérifie la condition initiale $f(0) = 0$.

B. Étude locale d'une fonction Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \text{e}^{2x} - (x+1)\text{e}^{x}.$$

Sa courbe représentative $\mathscr{C}$ est donnée dans un repère orthogonal ci-dessous.



1. **a.** Démontrer que pour tout réel x, $f'(x) = \mathrm{e}^{x}(2\mathrm{e}^{x} - 2 - x)$.

   b. En déduire le coefficient directeur $f'(0)$ de la tangente T à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abcisse 0.

   Interpréter graphiquement ce résultat.

2. **a.** Déterminer le développement limité, à l'ordre 2, au voisinage de 0, de la fonction $x \longmapsto \mathrm{e}^{2x}$.

   b. Démontrer que le développement limité, à l'ordre 2, au voisinage de 0, de la fonction f est :

$$f(x) = \frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon(x) \quad \text{avec} \quad \lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0.$$

C. Calcul intégral

1. On note $I = \displaystyle\int_{-0,3}^{0,3} \frac{x^2}{2}\mathrm{d}x$.

   Démontrer que $I = 0,009$.

2. On note $J = \displaystyle\int_{-0,3}^{0,3} \mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x$.

   Démontrer que $J = 0,5\left(\mathrm{e}^{0,6} - \mathrm{e}^{-0,6}\right)$.

3. On note $K = \displaystyle\int_{-0,3}^{0,3} (x+1)\mathrm{e}^{x}\mathrm{d}x$.

   Démontrer, à l'aide d'une intégration par parties, que $K = 0,3\left(\mathrm{e}^{0,3} + \mathrm{e}^{-0,3}\right)$.

4. On note $L = \displaystyle\int_{-0,3}^{0,3} f(x)\mathrm{d}x$.

   a. Déduire des questions précédentes la valeur exacte de L.

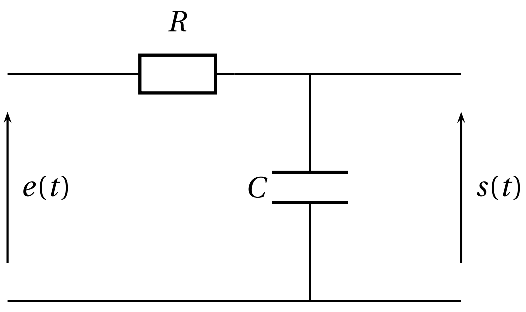
   b. Donner la valeur approchée de L arrondie à 10^{-5}.

   c. Vérifier que la valeur exacte de I et la valeur approchée de L obtenue à la question précédente différent de $4,5 \times 10^{-4}$.

Exercice 2 **8 points**

La question 5. de cet exercice peut-être traitée de façon indépendante

On considère le circuit représenté ci-dessous alimenté à tout instant t par une tension $e(t)$ et on note $s(t)$ la tension aux bornes du condensateur.



L'équation différentielle régissant ce circuit est (1) : $RCs'(t) + s(t) = e(t)$
avec $s(t) = 0$ pour $t \leqslant 0$ et où s' est la dérivée de la fonction s.

En utilisant la transformation de Laplace, on se propose de rechercher la tension $s(t)$ aux bornes du condensateur dans le cas suivant :

- $e(t) = \mathcal{U}(t) - \mathcal{U}(t - O,1)$ où la fonction $\mathcal{U}$ est la fonction échelon unité définie par $\mathcal{U}(t) = 0$ si $t < 0$ et $\mathcal{U}(t) = 1$ si $t \geqslant 0$;
- $R = 10\ \Omega$ et $C = O,004$F.

Pour cela on admet que les fonctions s, s' et e admettent des transformées de Laplace.
On note $E(p) = \mathscr{L}[e(t)]$ et $S(p) = \mathscr{L}[s(t)]$.

1. Sur une feuille de papier millimétré, tracer, dans un repère orthogonal, la représentation graphique de e sur l'intervalle [0 ; 0,2]. On prendra comme unité 1 cm pour 0,02 sur l'axe des abscisses et 10 cm pour 1 sur l'axe des ordonnées.
2. Déterminer $E(p) = \mathscr{L}[e(t)]$.
3. **a.** En appliquant la transformation de Laplace aux deux membres de l'équation différentielle (1), déterminer une expression de $S(p)$ en supposant que $s\left(0^+\right) = 0$.

   b. Montrer que $S(p)$ peut s'écrire sous la forme :

$$S(p) = \frac{1}{p} - \frac{1}{p+25} - \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p+25}\right)\mathrm{e}^{-0,1p}.$$

4. **a.** Déterminer $\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{p+25}\right]$.

   b. En déduire $\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{p+25}\right]\mathrm{e}^{-0,1p}$.

   c. En déduire la tension $s(t) = \mathscr{L}^{-1}[S(p)]$.
5. On admet que si $t \in [0\ ;\ 0,1[$, $s(t) = 1 - \mathrm{e}^{-25t}$ et si $t \in [0,1\ ;\ +\infty[$, $s(t) = \mathrm{e}^{-25t}\left(\mathrm{e}^{2,5} - 1\right)$.

   a. Reproduire et compléter le tableau de valeurs suivant (on donnera des valeurs décimales arrondies à 10^{-2} près.

t	0	0,025	0,05	0,075	0,100	0,125	0,15	0,175	0,2
$s(t)$									

   b. Construire une représentation de s sur le même graphique que celle de e.

Formulaire

$$\begin{tikzcd} f(t)\mathcal{U}(t) \arrow[r, bend left, "\mathscr{L}"] & F(p) \arrow[l, bend left, "\mathscr{L}^{-1}"] \end{tikzcd}$$

On rappelle les formules suivantes sur la transformation de Laplace.

$$\mathscr{L}[\lambda f + \mu g] = \lambda\mathscr{L}[f] + \mu\mathscr{L}[g].$$

$$\mathscr{L}[\mathscr{U}(t)] = \frac{1}{p}.$$

$$\mathscr{L}[f(t)\mathrm{e}^{-at}\mathscr{U}(t)] = \frac{1}{p+a}.$$

Plus généralement, si on note $\mathscr{L}[f(t)\mathscr{U}(t)] = F(p)$ alors,

$$\mathscr{L}[f(t-\tau)\mathscr{U}(t-\tau)] = F(p)\mathrm{e}^{-\tau p}\ ;$$

$$\mathscr{L}[f(t)\mathrm{e}^{-at}\mathscr{U}(t)] = F(p+a)\ ;$$

$$\mathscr{L}[f'(t)\mathscr{U}(t)] = pF(p) - f(O^+).$$

Retour au sommaire : 3

mai 2009

Exercice 1 **12 points**

Les trois parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.

A. Résolution d'une équation différentielle

On considère l'équation différentielle (E) :

$$y'' - 2y' + y = 8\mathrm{e}^x$$

où y est une fonction de la variable réelle x, définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, y' la fonction dérivée de y et y'' sa fonction dérivée seconde.

1. Déterminer les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle

$$(\mathrm{E}_0) \quad : \quad y'' - 2y' + y = 0.$$

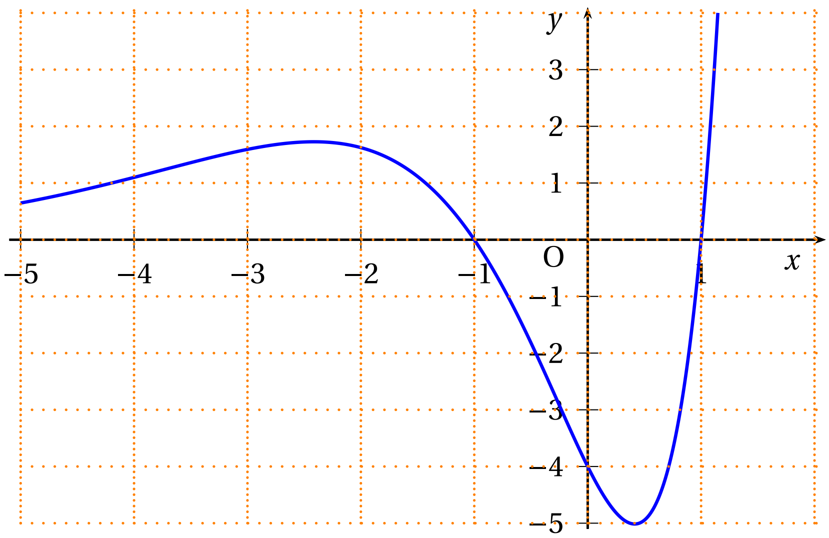
2. Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = 4x^2\mathrm{e}^x$.
Démontrer que la fonction h est une solution particulière de l'équation différentielle (E).

3. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E).

4. Déterminer la solution f de l'équation différentielle (E) qui vérifie les conditions initiales $f(0) = -4$ et $f'(0) = -4$.

B. Étude locale d'une fonction

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (4x^2 - 4)\mathrm{e}^x$.
Sa courbe représentative $\mathscr{C}$ dans un repère orthogonal est donnée ci-dessous.



1. a. Démontrer aue pour tout réel$x$, $f'(x) = 4(x^2 + 2x - 1)\mathrm{e}^x$.

b. Donner sans justification la valeur exacte et la valeur approchée arrondie à 10^{-2} de l'abscisse de chacun des points de la courbe $\mathscr{C}$ où la tangente est parallèle à l'axe des abscisses.

2. **a.** Démontrer que le développement limité, à l'ordre 2, au voisinage de 0, dela fonction f est : $f(x) = -4-4x+2x^2+x^2\varepsilon(x)$ avec $\lim_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0$.

b. Déduire du a) une équation de la tangente T à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0.

c. 'Etudier la position relative de $\mathscr{C}$ et T au voisinage du point d'abscisse 0.

C. Calcul intégral

Dans cette partie, les question 1° et 2° peuvent être traitées de façon indépendante.

1. La fonction f définie au début de la partie B est une solution de l'équation différentielle (E) de la partie A.

Donc, pour tout x de $\mathbb{R}$, $f(x) = -f''(x)+2f'(x)+8\mathrm{e}^x$.

En déduire une primitive F de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

2. **a.** Donner, sans justification, le signe de $f(x)$sur l'intervalle $[0;1]$.

b. Dans cette question, on admet que la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = (4x^2-8x+4)\mathrm{e}^x$ est une primitive de la fonction f.

Déduire de ce qui précède l'aire A, en unités d'aire, de la la partie du plan limitée par l'axe des abscisses, la courbe $\mathscr{C}$ et les droites d'équation $x=0$ et $x=1$.

Exercice 2 **8 points**

On considère un signal correspondant à la fonction f, définie sur $\mathbb{R}$, périodique de période $T = 2\pi$ et telle que :

$$f(t) = \pi - t \text{ pour } 0 \leq t < \pi \text{ ‘ et } f(t) = 0 \text{ pour } \pi \leq t < 2\pi.$$

Soit $S(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(a_n\cos(n\omega t) + b_n\sin(n\omega t)\right)$ le développement en série de Fourier associé à la fonction f.

1. Tracer, dans un repère orthogonal, une représentation graphique de la fonction f, pour t appartenant à l'intervalle $[-2\pi, 6\pi[$.

2. Montrer que $a_0 = \frac{\pi}{4}$.

3. Un logiciel de calcul formel a permis d'obtenir les intégrales suivantes, pour n entier non nul :

$$\int_0^{\pi}(\pi - t)\cos(nt)\mathrm{d}t = \frac{1-(-1)^n}{n^2} \text{ et } \int_0^{\pi}(\pi - t)\sin(nt)\mathrm{d}t = \frac{\pi}{n}.$$

Ces résultats sont admis et n'ont donc pas à être démontrés.

En déduire les expressions de a_n et b_n en fonction de l'entier non nul n.

4. *Calcul d'une valeur approchée de la valeur efficace de f*

Pour tout entier n, on pose $c_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$ pour $n \geq 1$ et $c_0 = |a_0|$, où a_n et b_n sont les coefficients de Fourier de la fonction f.

Le tableau suivant donne les valeurs de c_n, arrondies à 10^{-4}, pour n variant de 0 à 5.

n	0	1	2	3	4	5
c_n	0,785 4	1,185 4	0,5	0,340 8	0,25	0,201 6

On note E_f la valeur efficace de la fonction f.

La formule de Parseval permet d'écrire : $(E_f)^2 = a_n^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(a_n^2 + b_n^2\right) = c_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} c_n^2$.

On obtient une valeur approchée de E_f en ne prenant pas en compte les harmoniques d'ordre supérieur ou égal à 6. On obtient alors une valeur approcée P du carré de la valeur efficace de f par la formule : $P = c_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} c_n^2$.

Donner en uilisant le tableau ci-dessus, une approximation à 10^{-4} près de P.

5. *Co,paraison avec la valeur exacte de la valeur efficace de f*

a. On rappelle que $(E_f)^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f^2(t)\,\mathrm{d}t$.

Montrer que $(E_f)^2 = \frac{\pi^2}{6}$.

b. Déduire des questions précédentes une valeur approchée arrondie à 10^{-3} du rapport $\frac{P}{(E_f)^2}$.

On peut observer ici que $\frac{P}{(E_f)^2}$ *est inférieur à* $0,95$. *On constate ainsi que l'abandon des harmoniques d'ordre supérieur à* 5 *ne fournit pas une excellente approximation de* $(E_f)^2$ *dans le cas où, comme ici, les valeurs de* c_n *ne décroissent pas rapidement.*

Formulaire pour les séries de Fourier

f fonction périodique de période T

Développement en série de Fourier :

$$s(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(a_n\cos(n\omega t) + b_n\sin(n\omega t)\right) = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_k \mathrm{e}^{ik\omega t},\ (n \in \mathbb{N}^*, k \in \mathbb{Z}).$$

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_a^{a+T} f(t)\,\mathrm{d}t\ ;\ a_n = \frac{2}{T}\int_a^{a+T} f(t)\cos(n\omega t)\,\mathrm{d}t\ ;$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_a^{a+T} f(t)\sin(n\omega t)\,\mathrm{d}t\ ;$$

$$c_k = \frac{1}{T}\int_a^{a+T} f(t)\mathrm{e}^{-ik\omega t}\,\mathrm{d}t\ (k \in \mathbb{Z})\ ;\ c_0 = a_0\ ;$$

$$\frac{a_n - ib_n}{2} = c_n\ ;\ \frac{a_n + ib_n}{2} = c_{-n}\ (n \in \mathbb{N}^*).$$

Retour au sommaire : 3

mai 2010

Exercice 1 **12 points**

Les trois parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.

A. Résolution d'une équation différentielle

On considère l'équation différentielle

$$(\text{E}) : \quad y' - y = \mathrm{e}^{x} - 2x$$

où la fonction inconnue y, de la variable réelle x, est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et y' désigne sa fonction dérivée.

1. Déterminer les solutions définies sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle (E) : $y' - y = 0$.

2. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = x\mathrm{e}^{x} + 2x + 2.$$

Démontrer que la fonction g est une solution particulière de l'équation différentielle (E).

3. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E).

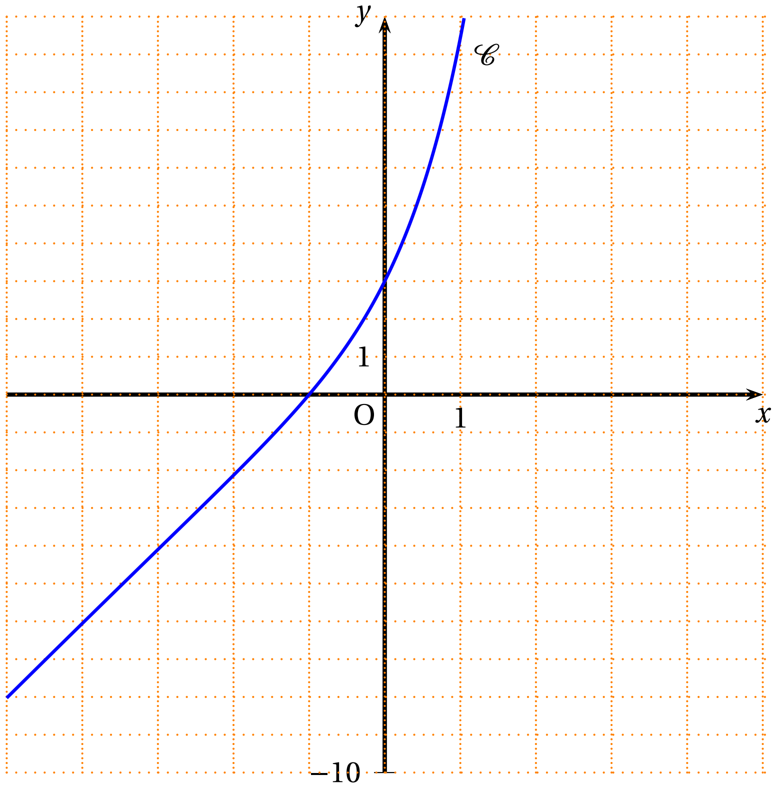
4. Déterminer la solution f de l'équation différentielle (E) qui vérifie la condition initiale $f(0) = 3$.

B. Étude d'une fonction

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = (x+1)\mathrm{e}^{x} + 2x + 2.$$

Sa courbe représentative $\mathscr{C}$ est donnée dans un repère orthogonal ci-dessous.



1. Calculer $\lim_{x \to +\infty} f(x)$.

2. *Pour cette question, une seule réponse A, B, C est exacte. Indiquer sur la copie la lettre correspondant à la réponse choisie. On ne demande aucune justification.*
La réponse juste rapporte un point. Une réponse fausse ou une absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de point.

La courbe $\mathscr{C}$ admet une asymptote en $-\infty$ dont une équation est :

Réponse A	Réponse B	Réponse C
$y = x + 1$	$y = 2x + 2$	$y = 2$

3. **a.** Démontrer que le développement limité, à l'ordre 2, au voisinage de 0, de la fonction f est :

$$f(x) = 3 + 4x + \frac{3}{2}x^2 + x^2\varepsilon(x) \text{ avec } \lim_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0.$$

Pour les question 3. b et 3. c, une seule réponse A, B, C est exacte. Indiquer sur la copie la lettre correspondant à la réponse choisie. On ne demande aucune justification.
La réponse juste rapporte un point. Une réponse fausse ou une absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de point.

b. Une équation de la tangente T à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0 est :

Réponse A	Réponse B	Réponse C
$y = 3$	$y = 3 + 4x$	$y = \frac{3}{2}x^2$

c. Au voisinage du point d'abscisse 0, la courbe $\mathscr{C}$ est :

Réponse A	Réponse B	Réponse C
au-dessus de la tangente T pour tout x.	au-dessous de la tangente T pour tout x.	au-dessous de la tangente T quand $x < 0$ et au-dessus quand $x > 0$.

Calcul intégral

1. On note $I = \int_{-1}^{1} (2x+2)\,\mathrm{d}x$.
   Montrer que $I = 4$.
2. On note $J = \int_{-1}^{1} (x+1)\mathrm{e}^{x}\,\mathrm{d}x$.
   Démontrer à l'aide d'une intégration par parties que $J = \mathrm{e} + \mathrm{e}^{-1}$.
3. **a.** On note $K = \int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x$, où f est la fonction définie dans la partie B.
   Déduire de ce qui précède la valeur exacte de K.

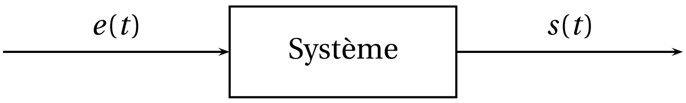
   b. Donner la valeur de K, arrondie à 10^{-2}.

   c. On admet que pour tout x de l'intervalle $[-1\ ;\ 1]$, $f(x) \geqslant 0$.
   Donner une interprétation graphique de K.

Exercice 2 **8 points**

Les parties A et B de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.

On considère un système, électrique ou mécanique. On note $e(t)$ le signal d'entrée et $s(t)$ le signal de sortie.



On note $E(P) = \mathscr{L}(e(t))$ et $S(P) = \mathscr{L}(s(t))$ où $\mathscr{L}$ est la transformation de Laplace.
La fonction de transfert H du système est définie par la relation : $S(P) = H(P) \times E(P)$.
On suppose que pour ce système la fonction de transfert est égale à :

$$H(P) = \frac{2p}{(p+1)^2+1}.$$

A. Réponse du système à un échelon

On suppose dans cette partie que $e(t) = \mathscr{U}(t)$ où $\mathscr{U}$ est la fonction échelon unité définie sur $\mathbb{R}$ par :
$\mathscr{U}(t) = 0$ si $t < 0$; $\mathscr{U}(t) = 1$ si $t \geqslant 0$.

1. **a.** Déterminer $E(P)$.

b. En déduire que $S(P) = \dfrac{2}{(p+1)^2+1}$.

2. **a.** Déterminer, à l'aide du formulaire, $\mathcal{L}^{-1}\left(\dfrac{1}{p^2+1}\right)$.

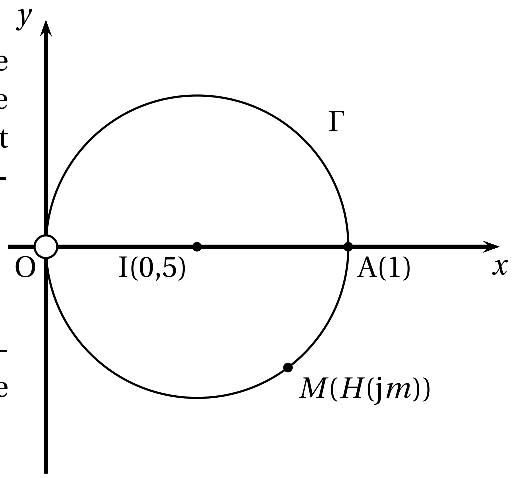
b. En déduire $s(t) = \mathcal{L}^{-1}[S(P)]$.

B. Recherche d'une pulsation particulière

On appelle « lieu de transfert » l'ensemble des points M du plan complexe d'affixe $H(\mathrm{j}m)$ lorsque m décrit $]0~;~+\infty[$, où j est le nombre complexe de module 1 et d'argument $\dfrac{\pi}{2}$.

On admet que $H(\mathrm{j}m) = \dfrac{1}{1+\mathrm{j}\left(\frac{\omega}{2}-\frac{1}{\omega}\right)}$.

On propose deux méthodes pour déterminer la pulsation ω pour laquelle le module $\left|H(\mathrm{j}m)\right|$ est maximal.



Les deux méthodes peuvent être traitées de façon indépendante.

1. *Méthode graphique*

On admet que le lieu de transfert Γ est le cercle de centre 1 d'affixe 0,5 et de rayon 0,5, privé du point O et représenté sur la figure ci-dessus.

a. Donner la position du point M sur Γ pour laquelle la distance OM est maximale.

b. En déduire la valeur de $H(\mathrm{j}m)$ pour laquelle le module $\left|H(\mathrm{j}m)\right|$ est maximal.

c. Déterminer la valeur ω_0 de ω telle que $H(\mathrm{j}m) = 1$.

2. *Méthode analytique*

a. On considère la fonction r, définie sur $]0~;~+\infty[$, par $r(\omega) = \dfrac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\omega}{2}-\frac{1}{\omega}\right)^2}}$.

Montrer que, pour tout ω dans l'intervalle $]0~;~+\infty[$, le module $\left|H(\mathrm{j}m)\right|$ vaut $r(\omega)$.

b. Un logiciel de calcul formel donne le résultat suivant pour la dérivée r' de la fonction r :

$$r'(\omega) = \frac{-2\left(\omega+\sqrt{2}\right)\left(\omega-\sqrt{2}\right)\left(\omega^2+2\right)}{\left(\omega^4+4\right)^{3/2}}.$$

Ce résultat est admis et ne doit pas être démontré.

Par ailleurs, on admet que la fonction r possède un maximum unique ω_0 sur $]0~;~+\infty[$.
Déterminer la valeur de ω_0 en utilisant l'expression $r'(\omega)$.

ω_0 est la pulsation de résonance du système.

Formulaire

$$\begin{tikzcd} f(t)\mathscr{U}(t) \arrow[rr, bend left, "\mathscr{L}"] & & F(p) \arrow[ll, bend left, "\mathscr{L}^{-1}"] \end{tikzcd}$$

On rappelle les formules suivantes sur la transformation de Laplace.

$$\mathscr{L}[\lambda f + \mu g] = \lambda \mathscr{L}[f] + \mu \mathscr{L}[g];$$
$$\mathscr{L}[\mathscr{U}(t)] = \frac{1}{p};$$
$$\mathscr{L}[\mathrm{e}^{-at}\mathscr{U}(t)] = \frac{1}{p+a};$$
$$\mathscr{L}[\sin(\omega t)\mathscr{U}(t)] = \frac{\omega}{p^2+\omega^2}.$$

Plus généralement, si on note $\mathscr{L}[f(t)\mathscr{U}(t)] = F(p)$ alors,

$$\mathscr{L}[f(t-\tau)\mathscr{U}(t-\tau)] = F(p)\mathrm{e}^{-\tau p};$$
$$\mathscr{L}[f(t)\mathrm{e}^{-at}\mathscr{U}(t)] = F(p+a);$$
$$\mathscr{L}[f'(t)\mathscr{U}(t)] = pF(p) - f\left(0^+\right).$$

Retour au sommaire : 3

mai 2011

EXERCICE 1 12 points

Les deux parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.

A. Résolution d'une équation différentielle

On considère l'équation différentielle (E) : $y'' - 3y' + 2y = -2\mathrm{e}^x + 6$ où y est une fonction inconnue de la variable réelle x, définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, y' la fonction dérivée de y et y'' sa fonction dérivée seconde.

1. **a.** Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $r^2 - 3r + 2 = 0$.

   b. En déduire les solutions définies sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle :

   (E_0) : $y'' - 3y' + 2y = 0$.

2. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 2x\mathrm{e}^x + 3$.

   a. *Cette question est une question à choix multiples. Une seule réponse est exacte.*
   Recopier sur la copie la réponse qui vous paraît exacte. On ne demande aucune justification.
   La réponse juste rapporte un point. Une réponse fausse ou une absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de point.
   La fonction dérivée g' de la fonction g est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$g'(x) = 2\mathrm{e}^x$	$g'(x) = 2x\mathrm{e}^x$	$g'(x) = (2x+2)\mathrm{e}^x$

   b. Démontrer que la fonction g est une solution particulière de l'équation différentielle (E).

3. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E).
4. Déterminer la solution f de l'équation différentielle (E) qui vérifie les conditions initiales $f(0) = 2$ et $f'(0) = 1$.

B. Étude d'une fonction et calcul intégral

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (2x-1)\mathrm{e}^x + 3$. On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal.

1. **a.** On admet le résultat suivant : $\lim_{x\to-\infty} xe^x = 0$.
   Calculer $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x)$.

   b. En déduire que la courbe $\mathscr{C}$ admet une droite asymptote dont on donnera une équation.

2. **a.** Démontrer que le développement limité, à l'ordre 2, au voisinage de 0, de la fonction f est : $f(x) = 2 + x + \frac{3}{2}x^2 + x^2\varepsilon(x)$ avec $\lim_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0$.

   b. En déduire une équation de la tangente T à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0.

   c. *Cette question est une question à choix multiples. Une seule réponse est exacte.*
   Recopier sur la copie la réponse qui vous paraît exacte. On ne demande aucune justification.
   La réponse juste rapporte un point. Une réponse fausse ou une absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de point.
   On veut justifier qu'au voisinage du point d'abscisse 0, la courbe $\mathscr{C}$ est au-dessus de la droite T. Recopier sur votre copie la justification exacte.

$\frac{3}{2}x^2$ est positif au voisinage de 0.	$x^2\varepsilon(x)$ est positif au voisinage de 0.	$2+x$ est positif au voisinage de 0.

3. On admet que la fonction dérivée de f est donnée, pour tout x réel, par : $f'(x) = (2x+1)e^x$.

a. Étudier sur $\mathbb{R}$ le signe de $f'(x)$ puis en déduire le sens de variation de f sur $\mathbb{R}$.

b. Donner la valeur approchée arrondie à 0,01 du minimum de la fonction f.

4. **a.** On note $I = \int_0^{0,5} \left(2 + x + \frac{3}{2}x^2\right) \mathrm{d}x$.
Démontrer que $I = 1,1875$.

b. On note $K = \int_0^{0,5} (2x-1)\mathrm{e}^x \mathrm{d}x$.
Démontrer, à l'aide d'une intégration par parties, que $K = 3 - 2\mathrm{e}^{0,5}$.

c. On note $J = \int_0^{0,5} f(x)\mathrm{d}x$.
En utilisant la question précédente, déterminer la valeur exacte de J.

d. Vérifier que $J - I$ est inférieur à 2×10^{-2}.

EXERCICE 2 8 points

On considère un signal périodique correspondant à la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ et représentée sur le graphique fourni en annexe, pour tout réel x de l'intervalle $[-2\pi ; 2\pi]$.

Les questions 1. *et* 2. *sont des questions à choix multiples. Pour chaque question, une seule réponse est exacte. Recopier sur la copie la réponse qui vous paraît exacte. On ne demande aucune justification.*
La réponse juste rapporte un point. Une réponse fausse ou une absence de réponsse ne rapporte ni n'enlève de point.

1. La fonction f est :

paire de période π	paire de période 2π	impaire de période π

2. Pour tout nombre réel x de l'intervalle $[0 ; \pi]$, $f(x) = \pi - x$.
Si x appartient à l'intervalle $[-\pi ; 0]$, $f(x)$ s'écrit :

$f(x) = -x$	$f(x) = \pi + x$	$f(x) = \dfrac{\pi}{2} + x$

3. On note a_0, et, pour tout entier naturel non nul n, a_n et b_n les coefficients de Fourier de la fonction f.

a. Justifier que pour tout n non nul, $b_n = 0$.

b. Calculer l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^{\pi} (\pi - x)\,\mathrm{d}x$.

c. Montrer que $a_0 = \dfrac{\pi}{2}$.

4. **a.** Un logiciel de calcul formel donne le résultat suivant :
$a_n = \dfrac{2}{\pi n^2}\left[1 - (-1)^n\right]$ pour tout $n \geqslant 1$.
Le résultat précédent n'est pas à démontrer.
Déterminer les valeurs exactes de a_1, a_2 et a_3.

b. On note s_3 la fonction correspondant au développement en série de Fourier de la fonction f, dans lequel on ne conserve que les termes d'indice n inférieur ou égal à 3.
Écrire l'expression de $s_3(x)$.

5. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = \dfrac{\pi}{2} + \dfrac{4}{\pi}\left(\cos x + \dfrac{1}{9}\cos(3x)\right)$.

a. Compléter, à l'aide de la calculatrice, le tableau figurant sur la feuille annexe, avec les valeurs approchées de $f(x)$ et $g(x)$ arrondies à 0,01.

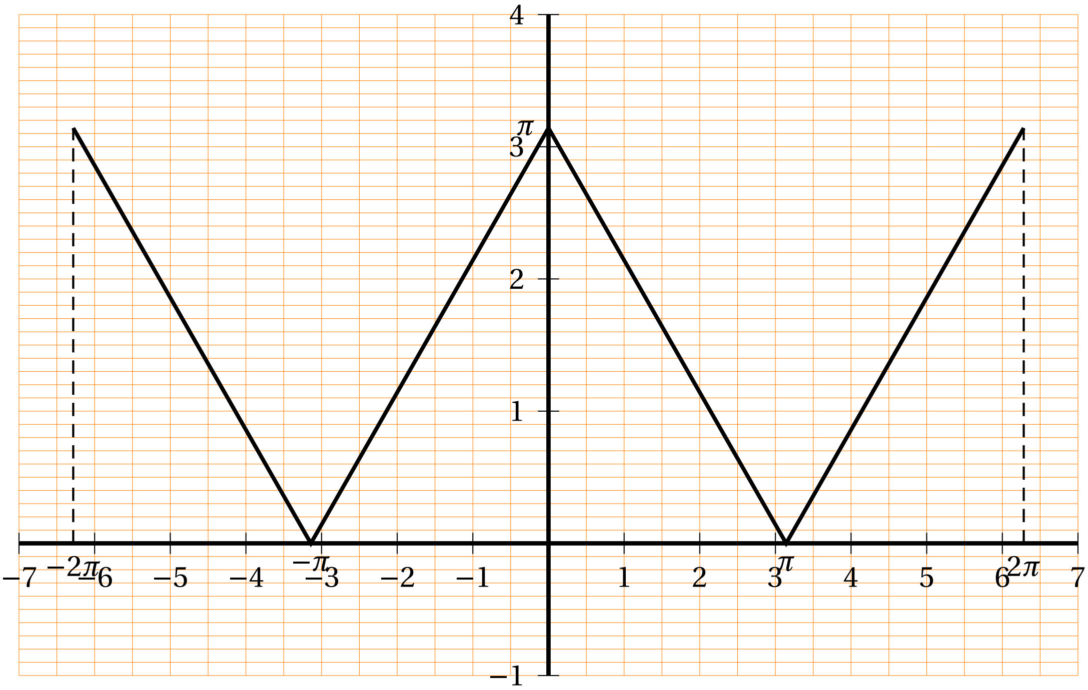
b. On admet que la fonction g est décroissante sur $[0 ; \pi]$. Tracer, dans le repère donné en annexe, l'allure de la courbe représentative de la fonction g sur l'intervalle $[0 ; \pi]$.

c. Compléter le graphique sur l'intervalle $[-\pi ; 0]$ sachant que la fonction g est paire.

ANNEXE À COMPLÉTER PUIS À RENDRE AVEC LA COPIE

EXERCICE 2
Questions 1., 2. et 5.

Représentation graphique de f. Graphique à compléter aux questions 5. b. et 5. c.



Tableaux de valeurs à compléter à la question 5. a. :

x	0	0,5	1	1,5	$\frac{\pi}{2}$	2	2,5	3	π
$f(x)$			2,14						
$g(x)$			2,12						

Retour au sommaire : 3

mai 2012

Exercice 1 **12 points**

A. Les trois parties de cet exercice peuvent être traitées de manière indépendante.

Résolution d'une équation différentielle

On considère l'équation différentielle :

$$(E) \quad : y' + 2y = -5\mathrm{e}^{-2x},$$

où y est une fonction inconnue de la variable x, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, et y' la fonction dérivée de y.

1. Déterminer les solutions de l'équation différentielle :

$$(E_0) \quad : y' + 2y = 0.$$

2. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = -5x\mathrm{e}^{-2x}$. Démontrer que la fonction g est une solution de (E).

3. En déduire les solutions de l'équation différentielle (E).

4. Déterminer la solution f de l'équation différentielle (E) vérifiant la condition initiale $f(0) = 1$.

B. Étude locale d'une fonction

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (1-5x)\mathrm{e}^{-2x}$. On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormal.

a. On admet le résultat suivant : $\lim\limits_{x\to+\infty} -5x\mathrm{e}^{-2x} = 0$. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

b. *Cette question est une question a choix multiples. Une seule réponse est exacte. Recopier sur la copie la réponse qui vous paraît exacte. On ne demande aucune justification.*

La réponse juste rapporte un point. Une réponse fausse ou une absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de point.

La courbe $\mathscr{C}$ admet une asymptote en $+\infty$ dont une équation est :

$y = 1-5x$	$y = 0$	$x = 0$

2. **a.** À l'aide du développement limité, à l'ordre 2, au voisinage de 0, de la fonction $t \mapsto \mathrm{e}^t$, déterminer le développement limité à l'ordre 2, au voisinage de 0, de la fonction : $x \mapsto \mathrm{e}^{-2x}$.

b. En déduire que le développement limité, à l'ordre 2, au voisinage de 0, de la fonction f est :

$$f(x) = 1 - 7x + 12x^2 + x^2\varepsilon(x), \text{ avec } \lim_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0.$$

c. En déduire une équation de la tangente $\mathscr{T}$ à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0.

d. *Cette question est une question a choix multiples. Une seule réponse est exacte. Recopier sur la copie la réponse qui vous paraît exacte. On ne demande aucune justification.*

La réponse juste rapporte un point. Une réponse fausse ou une absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de point.

On veut justifier qu'au voisinage du point d'abscisse 0, la courbe C est au dessus de la droite $\mathscr{T}$. Recopier sur la copie la justification qui vous paraît exacte.

$12x^2$ est positif au voisinage de 0.	$x^2\varepsilon(x)$ est positif au voisinage de 0.	$1-7x$ est positif au voisinage de 0.

C. Calcul intégral

1. on note $I = \int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x$ où f est la fonction définie dans la partie B.

a. Démontrer, à l'aide d'une intégration par parties, que $I = \dfrac{23\mathrm{e}^{-4} - 13\mathrm{e}^{-2}}{4}$.

b. Donner la valeur approchée de I, arrondie à e^{-2}.

2. **a.** Donner sans justification, le signe de $f(x)$, pour x dans l'intervalle $[1\,;\,2]$.

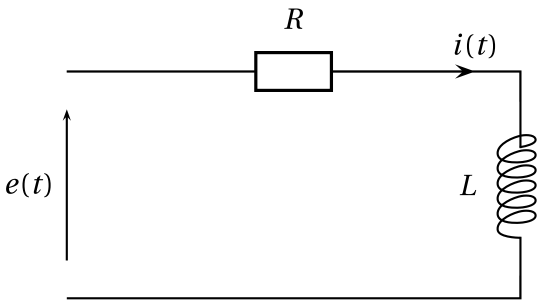
b. Interpréter graphiquement le nombre I.

Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète ou non aboutie, sera prise en compte.

Exercice 2 **8 points**

Les trois parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante

On considère le circuit représenté ci-dessous alimenté à tout instant t par une tension $e(t)$. On note $i(t)$ l'intensité du courant.



L'équation différentielle régissant ce circuit s'écrit :

$$Li'(t) + Ri(t) = e(t)$$

où la fonction inconnue i, de la variable t, est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et i' est la fonction dérivée de i.

On se place dans le cas où $R = 5\ \Omega$ et $L = 1$ H de sorte que l'équation différentielle précédente devient :

$$(1)\ :\quad i'(t) + 5i(t) = e(t),$$

avec $i\left(0^+\right) = 0$.

On suppose que la tension e est donnée par :

$$e(t) = \begin{cases} 10 & \text{si}\quad 0 \leqslant t < 2 \\ 0 \text{ si} & t < 0 \text{ ou } t \geqslant 2. \end{cases}$$

A. Étude de la tension d'entrée

1. Sur une feuille de papier millimétré, tracer, dans un repère orthogonal, la représentation graphique de e sur l'intervalle $[0\,;5]$. On prendra comme unité 2 cm pour l'axe des abscisses et 0,5cm pour l'axe des ordonnées.
2. On désigne par $\mathcal{U}$ la fonction échelon unité définie par $\mathcal{U}(t) = 0$ si $t < 0$ et $\mathcal{U}(t) = 1$ si $t \geqslant 0$. Montrer que pour tout nombre réel t, on a $e(t) = 10[\mathcal{U}(t) - \mathcal{U}(t-2)]$.

B. Transformation de Laplace

En utilisant la transformée de Laplace, on se propose de déterminer l'intensité i du courant. On admet que i, i' et e admettent des transformées de Laplace.
On note $E(p) = \mathcal{L}(e(t))$ et $I(p) = \mathcal{L}(i(t))$.

1. Déterminer $E(p)$.
2. **a.** En appliquant la transformation de Laplace aux deux membres de l'équation différentielle (1), montrer, sachant que $i\left(0^+\right) = 0$, que $I(p) = 10\dfrac{1-\mathrm{e}^{-2p}}{p(p+5)}$.

   b. Montrer que $I(p)$ peut s'écrire sous la forme :

$$I(p) = 2\left[\frac{1}{p} - \frac{1}{p+5} - \frac{\mathrm{e}^{-2p}}{p} + \frac{\mathrm{e}^{-2p}}{p+5}\right].$$

3. **a.** Déterminer les originaux $\mathcal{L}^{-1}\left(\dfrac{1}{p}\right)$; $\mathcal{L}^{-1}\left(\dfrac{1}{p+5}\right)$; $\mathcal{L}^{-1}\left(\dfrac{\mathrm{e}^{-2p}}{p}\right)$ et $\mathcal{L}^{-1}\left(\dfrac{\mathrm{e}^{-2p}}{p+5}\right)$

   b. En déduire l'intensité $i(t) = \mathcal{L}^{-1}(I(p))$.

C. Étude de la tension de sortie

On note u la tension de sortie aux bornes de la résistance. On admet que, pour tout réel t, $u(t) = Ri(t)$. On a ainsi :

$$u(t) = \begin{cases} 0 \text{ si } t < 0 \\ 10\left(1-\mathrm{e}^{-5t}\right) \text{ si } 0 \leqslant t < 2. \\ 10\mathrm{e}^{-5t}\left(\mathrm{e}^{10}-1\right) \text{ si } t \geqslant 2 \end{cases}$$

On fournit le tableau de valeurs suivant, où $u(t)$ est arrondi au centième.

t	0	0,25	0,5	0,75	1	1,5	2	2,1	2,25	2,5	3	5
$u(t)$	0	7,13	9,18	9,76	9,93	9,99	10	6,06	2,86	0,82	0,07	0

1. Sur le graphique de la partie A, représenter u sur l'intervalle $[0\,;5]$.
2. Déterminer à l'aide du graphique, la plus petite valeur t_0 de t telle que $t \geqslant 2$ et $u(t) \leqslant 5$. Laisser apparents sur la figure les tracés utilisés.

Retour au sommaire : 3

mai 2013

Exercice 1 **12 points**

Les trois parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante
Dans cet exercice, on étudie des fonctions intervenant dans les prévisions sur la vitesse moyenne du vent pour l'implantation d'éoliennes.

A. Résolution d'une équation différentielle

On considère l'équation différentielle

$$(E) : \qquad y' + (0,25x)y = 0,25x$$

où y est une fonction inconnue de la variable réelle x, définie et dérivable sur $[0\ ;\ +\infty[$ et y' sa fonction dérivée.

1. Déterminer les solutions définies sur $[0\ ;\ +\infty[$ de l'équation différentielle

$$(E_0) : \qquad y' + (0,25x)y = 0.$$

2. Vérifier que la fonction constante h, définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par $h(x) = 1$, est une solution de l'équation différentielle (E).
3. En déduire les solutions de l'équation différentielle (E).
4. Déterminer la solution de l'équation différentielle (E) qui vérifie la condition initiale $F(0) = 0$.
   Remarque : la fonction F intervient dans la partie C de cet exercice

B. Étude d'une fonction

Soit f la fonction définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x) = (0,25x)\mathrm{e}^{-0,125x^2}$$

Remarque : la fonction f n'est pas une solution de l'équation différentielle (E).

On désigne par C la courbe représentative de f dans un repère $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.

1. *Les questions a. et b. suivantes sont des questions à choix multiples. Pour chaque question, une seule réponse est exacte. Recopier sur la copie la réponse qui vous paraît exacte. On ne demande aucune justification. La réponse juste rapporte un point. Une réponse fausse ou une absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de point.*

   a. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ est égal à :

$+\infty$	$-\infty$	0

   b. En $+\infty$ la courbe C admet une asymptote d'équation :

$y = -0,125x^2$	$y = 0$	$x = 0$

2. **a.** Démontrer que, pour tout réel x de l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$,

$$f'(x) = 0{,}0625(2+x)(2-x)\mathrm{e}^{-0{,}125x^2}$$

b. En déduire le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.

c. Dresser le tableau de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.

3. Un logiciel de calcul formel fournit le développement limité de la fonction f, à l'ordre 3, au voisinage de zéro :

$$f(x) = 0{,}25x - 0{,}03125x^3 + x^3\epsilon(X) \quad \text{avec } \lim_{x\to 0}\epsilon(x) = 0.$$

Ce résultat est admis et n'est donc pas à démontrer.

a. En déduire une équation de la tangente T à la courbe C au point d'abscisse 0.

b. Étudier la position relative de T et de C au voisinage du point d'abscisse 0, pour x positif.

C. Application à l'étude de la vitesse du vent

1. Soit F la fonction définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par

$$F(x) = 1 - \mathrm{e}^{-0{,}125x^2}.$$

a. Calculer $\lim_{x\to+\infty} F(x)$.

b. Démontrer que F est une primitive sur $[0\,;\,+\infty[$ de la fonction f définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = (0{,}25x)\mathrm{e}^{-0{,}125x^2}.$$

2. Calculer $I = \int_1^6 f(x)\,\mathrm{d}x$. Donner la valeur approchée du résultat arrondie à 10^{-2}.
Le résultat précédent donne la probabilité, qu'une journée donnée, la vitesse moyenne du vent soit comprise entre 1 *m/s et* 6 *m/s.*

Exercice 2 — 8 points

Les trois parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.

A. Étude d'un signal

On considère la fonction f, périodique de période $T = 4$, définie par :

$$\begin{array}{lcll} f(x) & = & 2 & \text{si} \quad x \in [0\,;\,3[\,; \\ f(x) & = & 0 & \text{si} \quad x \in [3\,;\,4[. \end{array}$$

1. **a.** Déterminer $f(1), f(3,2)$ puis $f(3)$.
   b. Tracer la représentation graphique de la fonction f, pour x variant dans l'intervalle $[-4\ ;\ 8[$ dans un repère orthogonal d'unités graphiques 1 cm sur l'axe des abscisses et 2 cm sur l'axe des ordonnées.
2. *Cette question est une question à choix multiples. Une seule réponse est exacte. Recopier sur la copie la réponse qui vous paraÎt exacte. On ne demande aucune justification. La réponse juste rapporte un point. Une réponse fausse ou une absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de point.*

   Si $x \in [13\ ;\ 14[$, $f(x) = 0$
   Si $x \in [14\ ;\ 15[$, $f(x) = 2$
   Si $x \in [15\ ;\ 16[$, $f(x) = 2$
3. On note ω la pulsation associée à la fonction f. Justifier que $\omega = \dfrac{\pi}{2}$.

B. Calcul des coefficients de Fourier a_n du signal

On note a_n et b_n les coefficients de Fourier de la fonction f.

1. Vérifier que $a_0 = \dfrac{3}{2}$.
2. **a.** Soit n un entier supérieur ou égal à 1, calculer l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^3 \cos\left(n\frac{\pi}{2}t\right)\,\mathrm{d}t$.
   b. Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$, $a_n = \dfrac{2}{n\pi}\sin\left(\dfrac{3n\pi}{2}\right)$.
   c. En déduire les valeurs exactes de a_1, a_2 et a_3.

C. Application à la valeur efficace

1. On admet que, pour tout entier $n \geqslant 1$, $a_n = \dfrac{2}{n\pi}\sin\left(\dfrac{3n\pi}{2}\right)$ et $b_n = \dfrac{2}{n\pi}\left(1 - \cos\left(\dfrac{3n\pi}{2}\right)\right)$.
   Recopier et compléter le tableau suivant avec des valeurs approchées arrondies à 0,001.

n	0	1	2	3
a_n	1,5			
b_n				

2. On note f_e la valeur efficace de la fonction f et on admet que $f_e^2 = 3$.
   Soit P le nombre défini par : $P = a_0^2 + \dfrac{1}{2}\left(a_1^2 + b_1^2 + a_2^2 + b_2^2 + a_3^2 + b_3^2\right)$.
   On veut vérifier que le nombre P est une approximation de f_e^2.
   a. En utilisant les nombres du tableau de la question 1., calculer le nombre P. Donner la valeur approchée de P arrondie à 0,01.
   b. On appelle erreur relative de l'approximation le nombre $\dfrac{3-P}{3}$.
   Vérifier que $\dfrac{3-P}{3} < 0,04$.

Retour au sommaire : 3

Index

Retour au sommaire : 3