Les annales du BTS
Mathématiques, groupement B

FRANÇOIS MAILLOUX

mai 2013

IREM PARIS XIII - GROUPE " ENSEIGNEMENTS TECHNOLOGIQUES "

Epreuves du BTS groupement B

Remerciements

Cette compilation des annales du BTS groupement B a été faite à partir des fichiers LaTeX tapuscrits de Denis Vergès disponibles sur la toile sur le site de l'A.P.M.E.P. (l'Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public)
http://www.apmep.asso.fr/spip.php?rubrique376
L'idée a été reprise de Vincent Pantaloni (vincent.pantaloni@ac-orleans-tours.fr) qui a produit des annales des Restitutions Organisées de Connaissances (ROC) du Baccalauréat de la série S jusqu'en 2008. Elles sont visibles sur son site personnel
http://prof.pantaloni.free.fr
Nous les remercions de nous avoir autorisé à utiliser leurs productions.

mai 2001

Exercice 1 **9 points**

Les parties A, B et C de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.

Une entreprise fabrique, en grande quantité, des pièces métalliques rectangulaires dont les cotes sont exprimées en millimètres.

Un contrôle de qualité consiste à vérifier que la longueur et la largeur des pièces sont conformes à la norme en vigueur.

Dans ce qui suit, tous les résultats approchés seront arrondis à 10^{-3}.

Partie A

On note E l'évènement : « une pièce prélevée au hasard dans le stock de l'entreprise est conforme ». On suppose que la probabilité de l'évènement E est 0,9.

On prélève au hasard 10 pièces dans le stock. Le stock est assez important pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise de 10 pièces. On considère la variable aléatoire X qui, à tout prélèvement de 10 pièces, associe le nombre de pièces conformes parmi ces 10 pièces.

1. Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale dont on déterminera les paramètres.

2. Calculer la probabilité que, dans un tel prélèvement, 8 pièces au moins soient conformes.

Partie B

Une partie des pièces de la production de l'entreprise est fabriquée par une machine automatique notée « machine 1 ». Soient M et N les variables aléatoires qui, à chaque pièce prélevée au hasard dans un lot très important fabriqué par la machine 1, associent respectivement sa longueur et sa largeur.

On suppose que M suit la loi normale de moyenne $m_1 = 250$ et d'écart-type $\sigma_1 = 1,94$.

On suppose que N suit la loi normale de moyenne $m_2 = 150$ et d'écart-type $\sigma_2 = 1,52$.

1. Calculer la probabilité que la longueur d'une pièce prélevée au hasard dans ce lot soit comprise entre 246 et 254.

2. Calculer la probabilité que la largeur d'une pièce prélevée au hasard dans ce lot soit comprise entre 147 et 153.

3. Une pièce est conforme si sa longueur est comprise entre 246 et 254 et si sa largeur est comprise entre 147 et 153. On admet que les variables M et N sont indépendantes.

Montrer que la probabilité qu'une pièce prélevée au hasard dans ce lot soit conforme est 0,914.

Partie C

Une autre machine automatique de l'entreprise, notée « machine 2 » fabrique également ces mêmes pièces en grande quantité. On suppose que la probabilité qu'une pièce prélevée au hasard dans la production d'une journée de la machine 1 soit conforme est $p_1 = 0,914$ et que la probabilité qu'une pièce choisie au hasard dans la production de la machine 2 soit conforme est $p_2 = 0,879$. La machine 1 fournit 60 % de la production totale de ces pièces et la machine 2 le reste de cette production.

On prélève au hasard une pièce parmi la production totale de l'entreprise de la journée. Toutes les pièces ont la même probabilité d'être tirées. On définit les évènements suivants :

A : « la pièce provient de la machine 1 » ;
B : « la pièce provient de la machine 2 » ;
C : « la pièce est conforme ».

1. Déterminer les probabilités P(A), P(B), P(C/A), P(C/B). On rappelle que P(C/A) est la probabilité de l'évènement C sachant que l'évènement A est réalisé.

2. En déduire $P(C \cap A)$ et $P(C \cap B)$.

3. En admettant que $C = (C \cap A) \cup (C \cap B)$, calculer P(C).

Exercice 2 **11 points**

Les trois parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.

A. Résolution d'une équation différentielle.

On considère l'équation différentielle (E) :

$$y' - 2y = \mathrm{e}^{2x}$$

où y est une fonction de la variable réelle x, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et y' sa fonction dérivée.

1. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle (E_0) :

$$y' - 2y = 0$$

2. Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$h(x) = x\mathrm{e}^{2x}$$

Démontrer que h est une solution particulière de l'équation différentielle (E).

3. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E).

4. Déterminer la solution particulière f de l'équation (E) qui vérifie la condition $f(0) = -1$.

B. Étude d'une fonction

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = (x-1)\mathrm{e}^{2x}$$

Sa courbe représentative $\mathcal{C}$ est donnée dans le repère de l'annexe (à rendre avec la copie).

1. **a.** Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

b. On admet que $\lim\limits_{x \to -\infty} x\mathrm{e}^{2x} = 0$. En déduire $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.

c. Interpréter géométriquement le résultat obtenu au b).

2. **a.** Démontrer que, pour tout x de $\mathbb{R}$,

$$f'(x) = (2x-1)\mathrm{e}^{2x}$$

b. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $f'(x) \geqslant 0$.

c. En déduire le sens de variation de f sur $\mathbb{R}$.

3. **a.** À l'aide du développement limité au voisinage de 0 de la fonction exponentielle $t \longmapsto e^t$, donner le développement limité, à l'ordre 3, au voisinage de 0, de la fonction $x \longmapsto e^{2x}$.

b. En déduire que le développement limité, à l'ordre 3, au voisinage de 0, de la fonction f est :

$$f(x) = -1 - x + \frac{2}{3}x^3 + x^3\varepsilon(x)$$

avec

$$\lim_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$$

c. En déduire une équation de la tangente T à la courbe C au point d'abscisse 0 et la position relative de C et de T au voisinage de ce point.

d. Tracer T dans le repère de l'annexe.

C. Calcul intégral

1. Soit α un réel strictement négatif; On pose

$$I(\alpha) = \int_{\alpha}^{0} f(x)\,dx$$

Démontrer que

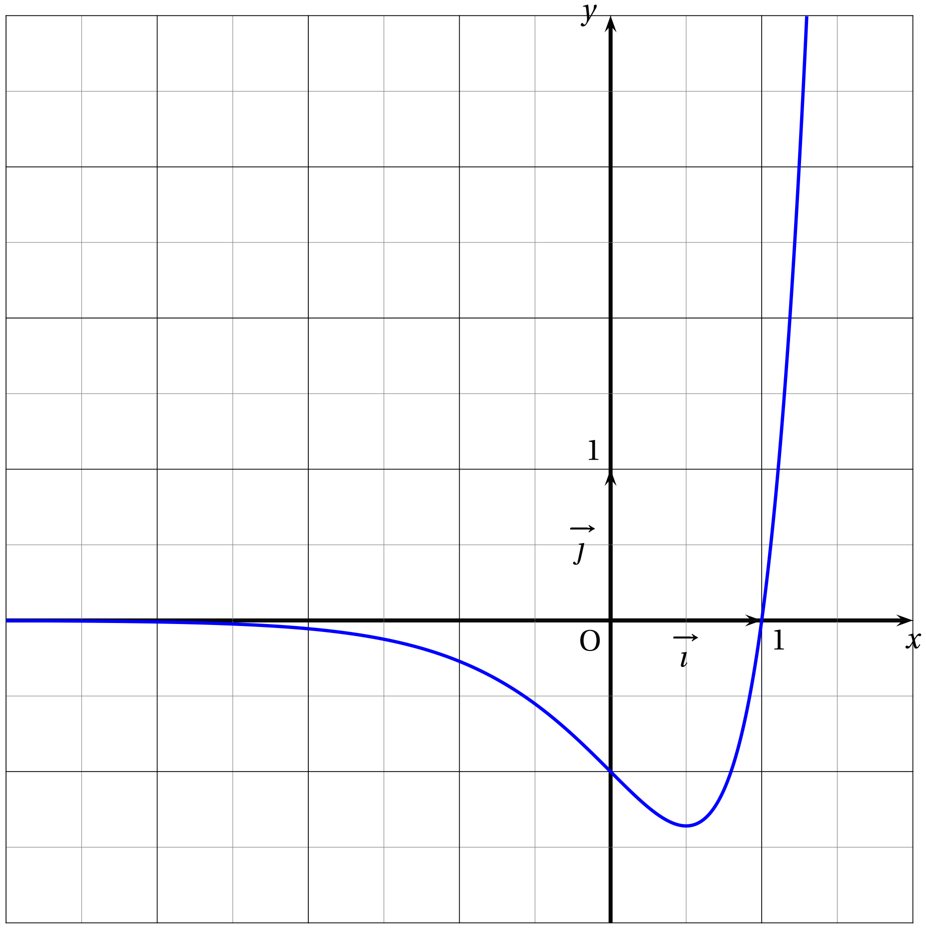
$$I(\alpha) = -\frac{3}{4} - \left(\frac{1}{2}\alpha - \frac{3}{4}\right)e^{2\alpha}$$

On pourra effectuer une intégration par parties.

2. **a.** Calculer la limite de $I(\alpha)$quand α tend vers $-\infty$.

b. À l'aide d'une phrase, donner une interprétation graphique de ce résultat.

ANNEXE



Retour au sommaire : 6

mai 2002

Exercice 1 **8 points**

Les quatre questions de cet exercice sont indépendantes.

Dans un groupe d'assurances, on s'intéresse aux sinistres susceptibles de survenir, une année donnée, aux véhicules de la flotte d'une importante entreprise de maintenance de chauffage collectif. Dans cet exercice, sauf mention contraire, les résultats approchés sont à arrondir à 10^{-3}.

1. Étude du nombre de sinistres par véhicule

Soit X la variable aléatoire qui, à tout véhicule tiré au hasard dans un des parcs de la flotte, associe le nombre de sinistres survenant pendant l'année considérée. On admet que X suit la loi de Poisson de paramètre $0,28$.

a. Calculer la probabilité de l'évènement A : « un véhicule tiré au hasard dans le parc n'a aucun sinistre pendant l'année considérée ».

b. Calculer la probabilité de l'évènement B : « un véhicule tiré au hasard dans le parc a, au plus, deux sinistres pendant l'année considérée ».

2. Étude du nombre de sinistres dans une équipe de 15 conducteurs.

On note E l'évènement : « un conducteur tiré au hasard dans l'ensemble des conducteurs de l'entreprise n'a pas de sinistre pendant l'année considérée ». On suppose que la probabilité de l'évènement E est 0,6.

On tire au hasard 15 conducteurs dans l'effectif des conducteurs de l'entreprise. Cet effectif est assez important pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise de 15 conducteurs.

On considère la variable aléatoire Y qui, à tout prélèvement de 15 conducteurs, associe le nombre de conducteurs n'ayant pas de sinistre pendant l'année considérée.

a. Justifier que la variable aléatoire Y suite une loi binomiale et déterminer ses paramètres.

b. Caculer la probabilité que, dans un tel prélèvement, 10 conducteurs n'aient pas de sinistre pendant l'année considérée.

3. Étude du coût des sinistres

Dans ce qui suit, on s'intéresse au coût d'une certaine catégorie de sinistres survenus dans l'entreprise pendant l'année considérée.

On considère la variable aléatoire C qui, à chaque sinistre tiré au hasard parmi les sinistres de cette catégorie, associe son coût en euros. On suppose que C suit la loi normale de moyenne 1 200 et d'écart type 200.

Calculer la probabilité qu'un sinistre tiré au hasard parmi les sinistres de ce type coûte entre 1 000 euros et 1 500 euros.

4. On considère un échantillon de 100 véhicules prélevés au hasard dans le parc de véhicules mis en service depuis 6 mois. Ce parc contient suffisamment de véhicules pour qu'on puisse assimiler ce tirage à un tirage avec remise. On constate que 91 véhicules de cet échantillon n'ont pas eu de sinistre.

a. Donner une estimation ponctuelle du pourcentage p de véhicules de ce parc qui n'ont pas eu de sinistre 6 mois après leur mise en service.

b. Soit F la variable aléatoire qui à tout échantillon de 100 véhicules prélevés au hasard et avec remise dans ce parc, associe le pourcentage de véhicules qui n'ont pas eu de sinistre 6 mois après leur mise en service.
On suppose que F suit la loi normale

$$N\left(p, \sqrt{\frac{p(1-p)}{100}}\right)$$

où p est le pourcentage inconnu de véhicules du parc qui n'ont pas eu de sinistre 6 mois après leur mise en service.
Déterminer un intervalle de confiance du pourcentage p avec le coefficient de confiance 95 %.

c. On considère l'affirmation suivante :
« le pourcentage p est obligatoirement dans l'intervalle de confiance obtenu à la question b. »
Est-elle vraie ? On ne demande pas de justification.

Exercice 2 **12 points**

Les trois parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.

Partie A : Résolution d'une équation différentielle

On considère l'équation différentielle :

$$(E) \quad y'' - y' - 2y = (-6x - 4)\,\mathrm{e}^{-x}$$

où y est une fonction de la variable réelle x, définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, y' sa fonction dérivée première et y'' sa fonction dérivée seconde.

1. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle :

$$(E_0) \quad y'' - y' - 2y = 0$$

2. Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$h(x) = \left(x^2 + 2x\right)\mathrm{e}^{-x}$$

Démontrer que h est une solution particulière de l'équation différentielle (E).

3. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E).
4. Déterminer la solution f de l'équation différentielle (E) qui vérifie les conditions initiales :

$$f(0) = 1 \quad f'(0) = 1$$

Partie B : Étude d'une fonction

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (x+1)^2\,\mathrm{e}^{-x}$$

Sa courbe représentative C dans un repère orthonormal est donnée sur la figure ci-après.

1. **a.** Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.

   b. Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 \mathrm{e}^{-x}$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} x\mathrm{e}^{-x}$. En déduire $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

   c. Interpréter graphiquement le résultat obtenu au b..

2. **a.** Démontrer que pour tout x de $\mathbb{R}$,

$$f'(x) = \left(1 - x^2\right) \mathrm{e}^{-x}$$

   b. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $f'(x) \geqslant 0$.

   c. En déduire le sens de variation de f sur $\mathbb{R}$.

3. **a.** À l'aide du développement limité au voisinage de 0 de la fonction exponentielle $t \to \mathrm{e}^t$, donner le développement limité, à l'ordre 2, au voisinage de 0 de la fonction x→ e^{-x}.

   b. Démontrer que le développement limité, à l'ordre 2, au voisinage de 0 de la fonction f est :

$$f(x) = 1 + x - \frac{1}{2}x^2 + x^2 \varepsilon(x)$$

   avec $\lim_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$.

   c. En déduire une équation de la tangente T à la courbe C au point d'abscisse 0 et la position relative de C et T au voisinage de ce point.

Partie C : Calcul intégral

1. **a.** La fonction f définie dans la partie B étant une solution de l'équation différentielle (E) :

$$y'' - y' - 2y = (-6x - 4)\,\mathrm{e}^{-x}$$

   montrer que f vérifie, pour tout x de $\mathbb{R}$:

$$f(x) = \frac{1}{2}\left[f''(x) - f'(x) + (6x + 4)\mathrm{e}^{-x}\right]$$

   b. Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$F(x) = \frac{1}{2}\left[f'(x) - f(x) - (6x + 10)\mathrm{e}^{-x}\right]$$

   Vérifier que pour tout x de $\mathbb{R}$,

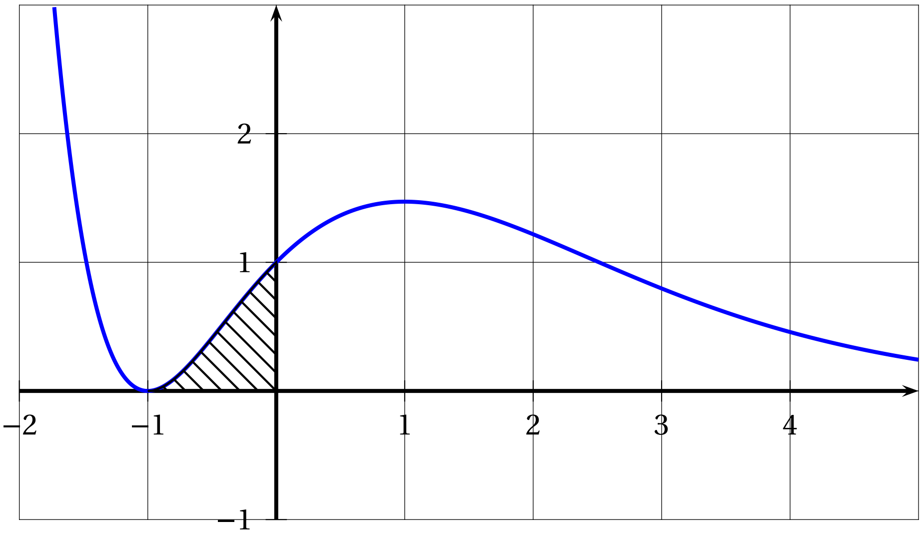
$$F'(x) = f(x)$$

   c. Vérifier que pour tout x de $\mathbb{R}$:

$$F(x) = \left(-x^2 - 4x - 5\right)\mathrm{e}^{-x}$$

2. Utiliser ce qui précède pour démontrer que l'aire A de la partie du plan hachurée sur la figure est, en unités d'aire,

$$A = 2\mathrm{e} - 5.$$



Retour au sommaire : 6

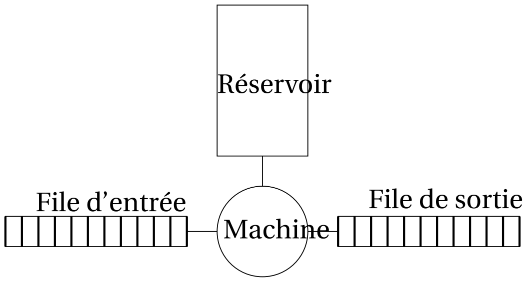
mai 2003

Exercice 1 **9 points**

Les quatre questions de cet exercice sont indépendantes

Dans une usine du secteur de l'agroalimentaire, une machine à embouteiller est alimentée par un réservoir d'eau et par une file d'approvisionnement en bouteilles vides, selon le schéma ci-contre.

L'exercice consiste en une étude statistique du bon fonctionnement de ce système.



1. *Défaut d'approvisionnement*

   On considère qu'il y a un défaut d'approvisionnement :
   - soit lorsque la file d'entrée des bouteilles est vide,
   - soit lorsque le réservoir est vide.

   On tire un jour ouvrable au hasard dans une année. On note A l'événement : « la file d'entrée est vide au moins une fois dans la journée » et B l'évènement : « le réservoir est vide au moins une fois dans la journée ».

   On suppose que les évènements A et B sont indépendants et une étude statistique a montré que $P(A) = 0,04$ et $P(B) = 0,02$.

   Calculer la probabilité de chacun des évènements suivants :

   a. $E_1 = A \cap B$

   b. E_2 : « la machine a connu au moins un défaut d'approvisionnement dans la journée ».

2. *Pannes de la machine sur une durée de 100 jours*

   On note X la variable aléatoire qui à toute période de 100 jours consécutifs, tirée au hasard dans les jours ouvrables d'une année, associe le nombre de pannes de la machine. Une étude, menée par le constructeur sur un grand nombre de machines de ce type, permet d'admettre que X suit la loi de Poisson de paramètre 0,5.

   Déterminer, à l'aide de la table du formulaire :

   a. $P(X \leqslant 2)$;

   b. la probabilité de l'évènement : « la machine a au plus quatre pannes pendant la période de 100 jours consécutifs ».

   c. le plus petit entier n tel que $P(X \leqslant n) = 0,99$.

Dans ce qui suit les volumes sont exprimés en litres et tous les résultats approchés sont à arrondir à 10^{-3}.

3. Q*ualité de l'embouteillage à la sortie*

   On désigne par Y la variable aléatoire qui, à toute bouteille prise au hasard dans la production d'une heure, associe le volume d'eau qu'elle contient. On admet que, lorsque la machine est bien réglée, Y suit la loi normale de moyenne 1,5 et d'écart type 0,01.

   Une bouteille est conforme aux normes de l'entreprise lorsqu'elle contient entre 1,47 et 1,53 litre d'eau.

   Calculer la probabilité qu'une bouteille satisfasse à la norme.

4. T*est d'hypothèse*

Pour contrôler le bon fonctionnement de la machine, on construit un test d'hypothèse bilatéral qui sera mis en ?uvre toutes les heures.

Pour une production d'une heure, la variable aléatoire Z qui, à toute bouteille prise au hasard dans cette production associe le volume d'eau qu'elle contient, suit la loi normale de moyenne μ et d'écart type $\sigma = 0,01$. Dans cette question, la moyenne μ est inconnue.

On désigne par $\bar{Z}$ la variable aléatoire qui, à chaque échantillon aléatoire de 100 bouteilles prélevé dans cette production d'une heure, associe la moyenne des volumes d'eau contenus dans les bouteilles de cet échantillon (la production pendant une heure est assez importante pour que l'on puisse assimiler ces prélèvements à des tirages avec remise).

On considère que la machine est bien réglée lorsque $\mu = 1,5$.

L'hypothèse nulle est H_0 : « $\mu = 1,5$ ».

L'hypothèse alternative est H_1 : « $\mu \neq 1,5$ ».

Le seuil de signification du test est fixé à $0,05$.

a. Justifier le fait que, sous l'hypothèse nulle H_0, $\bar{Z}$ suit la loi normale de moyenne $1,5$ et d'écart type $0,001$.

b. Sous l'hypothèse nulle H_0, déterminer le nombre h positif tel que :

$$P(1,5 - h \leqslant \bar{Z} \leqslant 1,5 + h) = 0,95$$

c. Énoncer la règle de décision permettant d'utiliser ce test.

d. On prélève un échantillon de 100 bouteilles et on observe que, pour cet échantillon, la moyenne des volumes d'eau contenus dans ces bouteilles est $\bar{z} = 1,495$.

Peut-on, au seuil de 5 %, conclure que la machine est bien réglée ?

Exercice 2 **11 points**

Les trois parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.

A. Résolution d'une équation différentielle

On considère l'équation différentielle

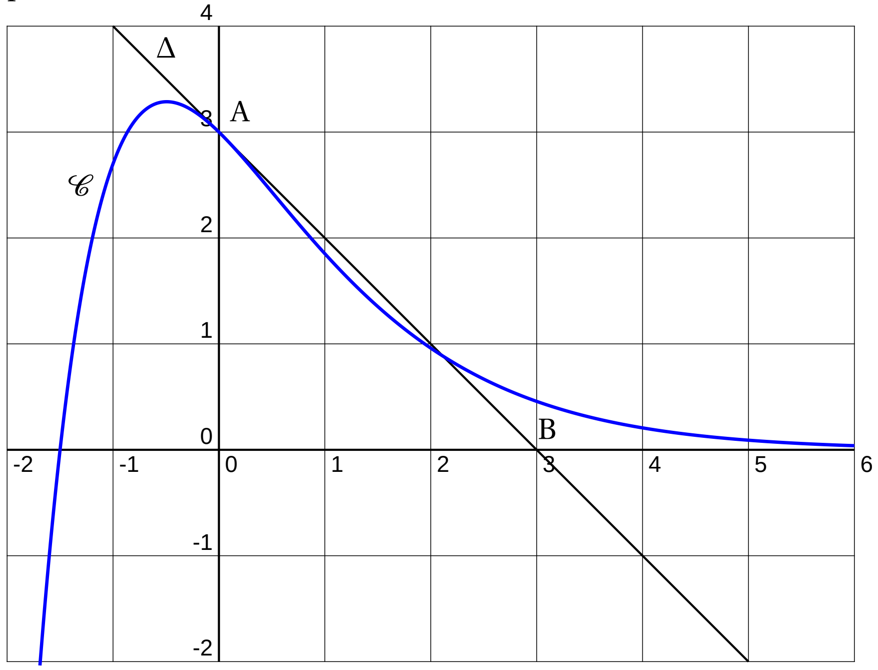
$$(E) \quad : \quad y' + y = 2\mathrm{e}^{-x}$$

où y est une fonction de la variable réelle x, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, et y' sa fonction dérivée.

1. Déterminer les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $(E_0) \quad : \quad y' + y = 0$.
2. Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = 2x\mathrm{e}^{-x}$.
   Démontrer que la fonction h est une solution particulière de l'équation différentielle (E).
3. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E).
4. Déterminer la solution f de l'équation différentielle (E) dont la courbe représentative, dans un repère orthonormal, passe par le point de coordonnées $(0\,;\,3)$.

B. Étude d'une fonction

1. La courbe $\mathscr{C}$ ci-dessous représente dans un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (ax + b)\mathrm{e}^{-x}$, où a et b sont des nombres réels.
   La droite Δ est la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point A d'abscisse 0. Cette tangente passe par le point B de coordonnées $(3\,;\,0)$.



   a. Déterminer graphiquement $f(0)$.

   b. Déterminer, graphiquement ou par le calcul, $f'(0)$.

c. Déterminer les valeurs des nombres réels a et b.
Dans la suite on admet que f est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (2x+3)\mathrm{e}^{-x}$$

d. Démontrer que, pour tout x de $\mathbb{R}$: $f'(x) = (-2x-1)\mathrm{e}^{-x}$;

e. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'inéquation $f'(x) \geqslant 0$;

f. En déduire le sens de variations de f sur $\mathbb{R}$
(on ne cherchera pas les limites en $-\infty$ et $+\infty$)

2. **a.** Déterminer le développement limité, à l'ordre 2, au voisinage de 0, de la fonction $x \mapsto \mathrm{e}^{-x}$.

b. Démontrer que le développement limité, à l'ordre 2, au voisinage de 0, de la fonction f est : $f(x) = 3 - x - \dfrac{1}{2}x^2 + x^2\varepsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$.

C. Calcul intégral

1. La fonction f définie dans la partie B est une solution de l'équation différentielle (E) de la partie A. Donc, pour tout x de $\mathbb{R}$, $f(x) = -f'(x) + 2\mathrm{e}^{-x}$.
En déduire une primitive F de f sur $\mathbb{R}$.

2. On note $I = \displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} f(x)\,\mathrm{d}x$

a. Démontrer que $I = 5 - 6\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$.

b. Donner une valeur approchée arrondie à 10^{-3} de I.

3. On note $J = \displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \left(3 - x - \frac{1}{2}x^2\right)\mathrm{d}x$.

a. Démontrer que $J = \dfrac{65}{48}$

b. Donner une valeur approchée à 10^{-3} de J.

c. Vérifier que les valeurs approchées obtenues ci-dessus pour I et J diffèrent de moins de 10^{-2}.

Retour au sommaire : 6

mai 2004

Exercice 1 **9 points**

Les trois parties de cet exercice sont indépendantes.

Une entreprise fabrique, en grande quantité, des tiges métalliques cylindriques pour l'industrie. Leur longueur et leur diamètre sont exprimés en millimètres.

Dans cet exercice, les résultats approchés sont à arrondir à 10^{-2}

A. Loi normale

Une tige de ce type est considérée comme conforme pour la longueur lorsque celle-ci appartient à l'intervalle [99,45 ; 100,55].
On note X la variable aléatoire qui, à chaque tige prélevée au hasard dans la production, associe sa longueur.
On suppose que X suit la loi normale de moyenne 100 et d'écart type $0,25$.

1. Calculer la probabilité qu'une tige prélevée au hasard dans la production soit conforme pour la longueur.
2. Déterminer le nombre réel h positif tel que

$$P(100 - h \leqslant X \leqslant 100 + h) = 0,95.$$

   Interpréter le résultat à l'aide d'une phrase.

B. Loi binomiale et loi de Poisson

Dans un lot de ce type de tiges, 3 % des tiges ne sont pas conformes pour la longueur.
On prélève au hasard 50 tiges de ce lot pour vérification de la longueur. Le lot est suffisamment important pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement a un tirage avec remise de 50 tiges.
On considère la variable aléatoire Y qui, à tout prélèvement de 50 tiges, associe le nombre de tiges non conformes pour la longueur.

1. Justifier que la variable aléatoire Y suit une loi binomiale dont on déterminera les paramètres.
2. Calculer la probabilité que, dans un tel prélèvement, deux tiges ne soient pas conformes pour la longueur.
3. Calculer la probabilité que, dans un tel prélèvement, au plus deux tiges ne soient pas conformes pour la longueur.
4. On considère que la loi suivie par Y peut être approchée par une loi de Poisson.
   Déterminer le paramètre λ de cette loi de Poisson.
5. On désigne par Z une variable aléatoire suivant la loi de Poisson de paramètre λ où λ a la valeur obtenue au **4.**.
   Calculer $P(Z = 2)$ et $P(Z \leqslant 2)$.

C. Intervalle de confiance

Dans cette question on s'intéresse au diamètre des tiges, exprimé en millimètres.
On prélève au hasard et avec remise un échantillon de 50 tiges dans la production d'une journée.
Soit $\overline{D}$ la variable aléatoire qui, à tout échantillon de 50 tiges prélevées au hasard et avec remise dans la production d'une journée, associe la moyenne des diamètres des tiges de cet échantillon.
On suppose que $\overline{D}$ suit la loi normale de moyenne inconnue μ et d'écart type $\dfrac{\sigma}{\sqrt{50}}$ avec $\sigma = 0,19$.
Pour l'échantillon prélevé, la moyenne obtenue, arrondie à 10^{-2} est $\overline{x} = 9,99$.

1. À partir des informations portant sur cet échantillon, donner une estimation ponctuelle de la moyenne μ des diamètres des tiges produites dans cette journée.

2. Déterminer un intervalle de confiance centré sur $\overline{x}$ de la moyenne μ des diamètres des tiges produites pendant la journée considérée, avec le coefficient de confiance 95 %.

3. On considère l'affirmation suivante : « la moyenne μ est obligatoirement dans l'intervalle de confiance obtenu à la question **2** ».
Est-elle vraie ? (On ne demande pas de justification).

Exercice 2 **11 points**

Dans cet exercice, on étudie une fonction qui intervient dans des calculs de probabilité à propos de la crue d'un fleuve.
(Source : un bureau d'étude du domaine de l'équipement)

Les trois parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.

A. Résolution d'une équation différentielle

On considère l'équation différentielle

$$(E) \quad : \quad y' + (0,4x)y = 0,4x$$

où y est une fonction dérivable de la variable réelle x, définie et dérivable sur $[0\,;\,+\infty[$, et y' sa fonction dérivée.

1. Déterminer les solutions de l'équation différentielle $(E_0) \quad : \quad y' + (0,4x)y = 0$.

2. Montrer que la fonction constante h, définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par $h(x) = 1$, est une solution particulière de l'équation différentielle (E).

3. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E).

4. Vérifier que la fonction F définie sur $[0;+\infty[$ par $F(x) = 1 - \mathrm{e}^{-0,2x^2}$ est la solution particulière de l'équation différentielle (E) qui vérifie la condition initiale $F(0) = 0$.

B. Étude d'une fonction

Soit f la fonction définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = 0,4x\mathrm{e}^{-0,2x^2}.$$

On désigne par $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthogonal $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$, les unités graphiques étant de 2 cm sur l'axe des abscisses et de 10 cm sur l'axe des ordonnées.

1. On admet que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.
Que peut-on en déduire pour la courbe $\mathscr{C}$?

2. **a.** Démontrer que, pour tout x de $[0\,;\,+\infty[$, $f'(x) = 0,4\left(1 - \sqrt{0,4}\,x\right)\left(1 + \sqrt{0,4}\,x\right)\mathrm{e}^{-0,2x^2}$.

b. En déduire le signe de $f'(x)$ sur $[0\,;\,+\infty[$.

c. Donner le tableau de variations de f sur $[0\,;\,+\infty[$.
On y fera figurer la valeur approchée arrondie à 10^{-2} du maximum de la fonction f.

3. Un logiciel de calcul formel fournit pour f le développement limité suivant, à l'ordre 3, au voisinage de 0 :

$$f(x) = 0,4x - 0,08x^3 + x^3\varepsilon(x) \text{ avec } \lim_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0.$$

Ce résultat est admis et n'est donc pas à démontrer.

En déduire une équation de la tangente $\mathcal{T}$ à la courbe $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0, et la position relative de $\mathcal{T}$ et de $\mathcal{C}$ au voisinage de ce point.

4. Tracer sur la copie la tangente $\mathcal{T}$ et la courbe $\mathcal{C}$ dans le repère $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ défini au début de la partie *B*.

C. Application à un problème de probabilité

Une étude statistique, fondée sur un historique des crues d'un fleuve, permet de faire des prévisions sur sa hauteur maximale annuelle, en mètres.
On note X la variable aléatoire qui, à une année prise au hasard dans une longue période, associe la hauteur maximale du fleuve en mètres.

Soit x un réel positif. La probabilité qu'une année donnée la hauteur maximale du fleuve soit inférieure à x mètres est $P(X \leqslant x) = \int_0^x f(t)\,\text{d}t$ où f est la fonction définie dans la partie *B*.
On admet que $\int_0^x f(t)\,\text{d}t = 1 - \text{e}^{-0,2x^2}$.

1. Les digues actuelles ne protègent l'agglomération que lorsque la hauteur est inférieure à 4 mètres.

   Calculer la probabilité $P(X \leqslant 4)$ qu'une année donnée, l'agglomération soit protégée de la crue ; arrondir le résultat à 10^{-2}.

2. Afin de réaliser des travaux pour améliorer la protection de l'agglomération, on cherche la hauteur x_0, en mètres, telle que $P(X \leqslant x_0) = 0,99$.

   a. Montrer que x_0 est solution de l'équation : $\text{e}^{-0,2x^2} = 0,01$.

   b. Déterminer la valeur approché arrondie à 10^{-2} de x_0.

   c. On considère l'affirmation suivante :
   « En surélevant les digues actuelles d'un mètre, la probabilité qu'une année prise au hasard, l'agglomération soit protégée est supérieure à 0,99 ».

   Cette affirmation est-elle vraie ? (Donner la réponse sans explication)

Retour au sommaire : 6

mai 2005

Exercice 1 **11 points**

Les trois parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.

A. Résolution d'une équation différentielle

On considère l'équation différentielle (E) :

$$(1+x)\,y' + y = \frac{1}{1+x}$$

où y est une fonction de la variable réelle x, définie et dérivable sur $]-1;+\infty[$ et y' sa fonction dérivée.

1. Démontrer que les solutions sur $]-1;+\infty[$ de l'équation différentielle (E_0) :

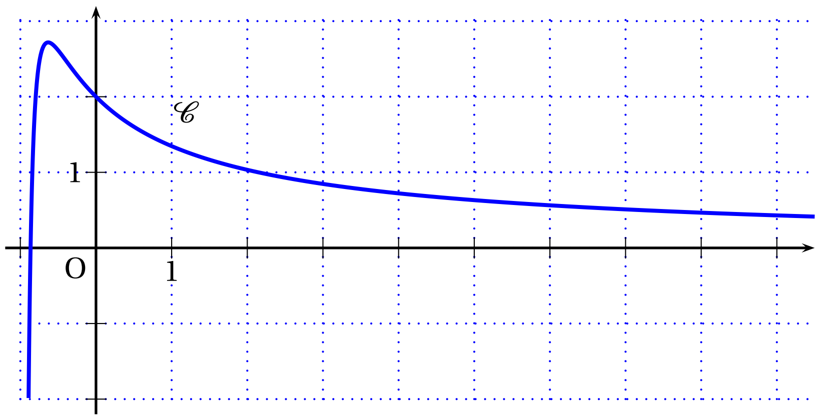
$$(1+x)y' + y = 0$$

sont les fonctions définies par $h(x) = \dfrac{k}{x+1}$ où k est une constante réelle quelconque.

2. Soit g la fonction définie sur $]-1\,;\,+\infty[$ par $g(x) = \dfrac{\ln(1+x)}{1+x}$
Démontrer que la fonction g est une solution particulière de l'équation différentielle (E).
3. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E).
4. Déterminer la solution f de l'équation différentielle (E) qui vérifie la condition initiale $f(0) = 2$.

B. Étude d'une fonction

Soit f la fonction définie sur $]-1;+\infty[$ par $f(x) = \frac{2+\ln(1+x)}{1+x}$
Sa courbe représentative $\mathscr{C}$, dans un repère orthonormal où l'unité graphique est 1 cm, est donnée ci-dessous.



1. On admet que $\lim\limits_{x\to -1} f(x) = -\infty$ et que $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = 0$.
Que peut-on en déduire pour la courbe $\mathscr{C}$?
2. **a.** Démontrer que, pour tout x de $]-1\,;\,+\infty[$, $f'(x) = \dfrac{-1-\ln(1+x)}{(1+x)^2}$

   b. Résoudre dans $]-1\,;\,+\infty[$ l'inéquation $-1-\ln(1+x) \geqslant 0$.
   En déduire le signe de $f'(x)$ lorsque x varie dans $]-1\,;\,+\infty[$.

c. Établir le tableau de variation de f.

3. Un logiciel de calcul formel donne le développement limité, à l'ordre 2, au voisinage de 0, de la fonction f :

$$f(x) = 2 - x + \frac{1}{2}x^2 + x^2\varepsilon(x) \text{ avec } \lim_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0$$

Ce résultat, admis, n'a pas à être démontré.

a. En déduire une équation de la tangente $\mathcal{T}$ à la courbe $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0.

b. Étudier la position relative de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{T}$ au voisinage de leur point d'abscisse 0.

C. Calcul intégral

1. Déterminer la dérivée de la fonction G définie sur $]-1\,;\,+\infty[$ par :

$$G(x) = \frac{1}{2}[\ln(1+x)]^2$$

2. En déduire qu'une primitive de f sur $]-1\,;\,+\infty[$ est définie par :

$$F(x) = 2\ln(1+x) + \frac{1}{2}[\ln(1+x)]^2$$

3. **a.** On note $I = \displaystyle\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x$. Démontrer que $I = \dfrac{1}{2}(\ln 3)^2 + 2\ln 3$.

b. Donner la valeur approchée arrondie à 10^{-2} de I.

c. Donner une interprétation graphique du résultat obtenu au b.

Exercice 2 **9 points**

Les quatre parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.

Une usine fabrique, en grande quantité, des rondelles d'acier pour la construction. Leur diamètre est exprimé en millimètres.

Dans cet exercice, sauf indication contraire, les résultats approchés sont à arrondir à 10^{-2}

A. Loi normale

Une rondelle de ce modèle est conforme pour le diamètre lorsque celui-ci appartient à l'intervalle [89,6 ; 90,4].

1. On note X_1 la variable aléatoire qui, à chaque rondelle prélevée au hasard dans la production, associe son diamètre. On suppose que la variable aléatoire X_1 suit la loi normale de moyenne 90 et d'écart-type $\sigma = 0,17$. Calculer la probabilité qu'une rondelle prélevée au hasard dans la production soit conforme.

2. L'entreprise désire améliorer la qualité de la production des rondelles : Il est envisagé de modifier le réglage des machines produisant les rondelles.
On note D la variable aléatoire qui, à chaque rondelle prélevée dans la production future, associera son diamètre. On suppose que la variable aléatoire D suit une loi normale de moyenne 90 et d'écart-type σ_1.
Déterminer σ_1 pour que la probabilité qu'une rondelle prélevée au hasard dans la production future soit conforme pour le diamètre soit égale à 0,99.

B. Loi binomiale

On note E l'évènement : « une rondelle prélevée au hasard dans un stock important a un diamètre défectueux ».
On suppose que $P(E) = 0,02$.
On prélève au hasard quatre rondelles dans le stock pour vérification de leur diamètre. Le stock est assez important pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise de quatre rondelles.
On considère la variable aléatoire Y_1 qui à tout prélèvement de quatre rondelles associe le nombre de rondelles de ce prélèvement ayant un diamètre défectueux.

1. Justifier que la variable aléatoire Y_1 suit une loi binomiale dont on déterminera les paramètres.

2. Calculer la probabilité que, dans un tel prélèvement, aucune rondelle n'ait un diamètre défectueux. Arrondir à 10^{-3}.

3. Calculer la probabilité que, dans un tel prélèvement, au plus une rondelle ait un diamètre défectueux. Arrondir à 10^{-3}.

C. Approximation d'une loi binomiale par une loi normale

Les rondelles sont commercialisées par lot de 1 000.
On prélève au hasard un lot de 1 000 dans un dépôt de l'usine. On assimile ce prélèvement à un tirage avec remise de 1 000 rondelles.
On considère la variable aléatoire Y_2 qui, à tout prélèvement de 1 000 rondelles, associe le nombre de rondelles non conformes parmi ces 1 000 rondelles.
On admet que la variable aléatoire Y_2 suit la loi binomiale de paramètres $n = 1000$ et $p = 0,02$.
On décide d'approcher la loi de la variable aléatoire Y_2 par la loi normalenormale !$\mathcal{N}(20;4.43)$ de moyenne 20 et d'écart-type 4,43.
On note Z une variable aléatoire suivant la loi normale de moyenne 20 et d'écart-type 4,43.

1. Justifier les paramètres de cette loi normale.

2. Calculer la probabilité qu'il y ait au plus 15 rondelles non conformes dans le lot de 1 000 rondelles, c'est à dire calculer $P(Z \leqslant 15,5)$

D. Test d'hypothèse

On se propose de construire un test d'hypothèse pour contrôler la moyenne μ de l'ensemble des diamètres, en millimètres, de rondelles constituant une grosse livraison à effectuer.
On note X_2 la variable aléatoire qui, à chaque rondelle prélevée au hasard dans la livraison, associe son diamètre.
La variable aléatoire X_2 suit la loi normale de moyenne inconnue μ et d'écart-type $\sigma = 0,17$.
On désigne par $\bar{X}_2$ la variable aléatoire qui, à chaque échantillon aléatoire de 100 rondelles prélevé dans la livraison, associe la moyenne des diamètres de ces rondelles (la livraison est assez importante pour que l'on puisse assimiler ces prélèvements à des tirages avec remise).
L'hypothèse nulle est $H_0 : \mu = 90$. Dans ce cas la livraison est dite conforme pour le diamètre.
L'hypothèse alternative est $H_1 : \mu \neq 90$.
Le seuil de signification du test est fixé à 0,05.

1. Énoncer la règle de décision permettant d'utiliser ce test en admettant, sous l'hypothèse nulle H_0, le résultat suivant qui n'a pas à être démontré :

$$P\left(89,967 \leqslant \overline{X}_2 \leqslant 90,033\right) = 0,95$$

2. On prélève un échantillon de 100 rondelles dans la livraison et on observe que, pour cet échantillon, la moyenne des diamètres est $\bar{x} = 90,02$.
Peut-on, au seuil de risque de 5 %, conclure que la livraison est conforme pour le diamètre ?

Retour au sommaire : 6

mai 2006

Exercice 1 **11 points**

Les trois parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.

A. Résolution d'une équation différentielle

On considère l'équation différentielle (E) :

$$y'' - 3y' - 4y = -5\, e^{-x}$$

où y est une fonction de la variable réelle x, définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, y' la fonction dérivée de y et y'' sa fonction dérivée seconde.

1. Déterminer les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle

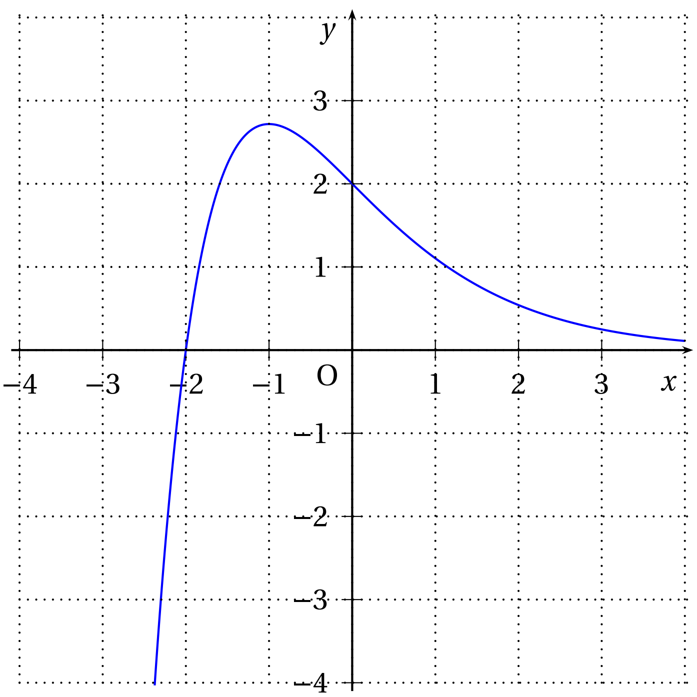
$$(\mathrm{E}_0) \quad : \quad y'' - 3y' - 4y = 0.$$

2. Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = x\mathrm{e}^{-x}$.
Démontrer que la fonction h est une solution particulière de l'équation différentielle (E).
3. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E).
4. Déterminer la solution f de l'équation différentielle (E) qui vérifie les conditions initiales $f(0) = 2$ et $f'(0) = -1$.

B. Étude locale d'une fonction

La courbe $\mathscr{C}$ ci-dessous est la représentation graphique, dans un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$, de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = (x+2)\mathrm{e}^{-x}.$$



1. Démontrer que le développement limité à l'ordre 3, au voisinage de 0, de la fonction f est

$$f(x) = 2 - x + \frac{x^3}{6} + x^3\varepsilon(x) \text{ avec } \lim_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0.$$

2. Déduire du **1** une équation de la tangente T à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0.

3. Étudier la position relative de $\mathscr{C}$ et T au voisinage du point d'abscisse 0.

C. Calcul intégral

On note $I = \int_0^{0,6} f(x)\,\mathrm{d}x$.

1. À l'aide d'une intégration par parties, démontrer que $I = 3 - 3,6\mathrm{e}^{-0,6}$.

2. Donner la valeur approchée arrondie à 10^{-3} de I.

3. Donner une interprétation graphique du nombre I.

Exercice 2 **9 points**

Une entreprise fabrique des chaudières de deux types :

– des chaudières dites « à cheminée »,
– des chaudières dites « à ventouse ».

Les quatre parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.

A. Ajustement affine

Le nombre de chaudières fabriquées lors des années précédentes est donné par le tableau suivant :

Rang de l'année : x_i	0	1	2	3	4	5
Nombre de chaudières fabriquées par milliers : y_i	15,35	15,81	16,44	16,75	17,19	17,30

1. À l'aide d'une calculatrice, déterminer :

a. le coefficient de corrélation linéaire de la série statistique double de variables x et y ; arrondir à 10^{-2} ;

b. déterminer une équation de la droite de régression de y en x, sous la forme $y = ax + b$, où a sera arrondi à 10^{-3} et b sera arrondi à l'unité.

2. En supposant que la tendance observée se poursuive pendant deux années, estimer le nombre de chaudières qui seront fabriquées l'année de rang 7.

B. Probabilités conditionnelles

L'entreprise a fabriqué en un mois 900 chaudières à cheminée et 600 chaudières à ventouse.
Dans ce lot, 1 % des chaudières à cheminée sont défectueuses et 5 % des chaudières à ventouse

sont défectueuses.
On prélève au hasard une chaudière dans la production de ce mois.
Toutes les chaudières ont la même probabilité d'être prélevées.

On considère les évènements suivants :

A : « La chaudière est à cheminée » ;
B : « La chaudière est à ventouse » ;
D : « La chaudière présente un défaut ».

1. Déterminer $P(A)$, $P(B)$, $P(D/A)$ et $P(D/B)$.

2. Calculer $P(D \cap A)$ et $P(D \cap B)$.

3. En remarquant que $D = (D \cap A) \cup (D \cap B)$ et que les événements $D \cap A$ et $D \cap B$ sont incompatibles, calculer $P(D)$ et $P(\bar{D})$.

C. Loi normale
Soit X la variable aléatoire qui, à chaque chaudière à cheminée prélevée au hasard dans la production, associe sa durée de fonctionnement en années.
On admet que X suit la loi normale de moyenne 15 et d'écart type 3.
Une chaudière est dite « amortie »si sa durée de fonctionnement est supérieure ou égale à 10 ans.

Calculer la probabilité qu'une chaudière prélevée au hasard dans la production soit « amortie » ; arrondir à 10^{-3}.

D. Intervalle de confiance
On considère un échantillon de 100 chaudières prélevées au hasard dans un stock important.
Ce stock est assez important pour qu'on puisse assimiler ce tirage à un tirage avec remise.
On constate que 94 chaudières sont sans aucun défaut.

1. Donner une estimation ponctuelle de la fréquence inconnue p des chaudières de ce stock qui sont sans aucun défaut.

2. Soit F la variable aléatoire qui, à tout échantillon de 100 chaudières prélevées au hasard et avec remise dans ce stock, associe la fréquence des chaudières de cet échantillon qui sont sans aucun défaut.
On suppose que F suit la loi normale de moyenne p et d'écart type $\sqrt{\dfrac{p(1-p)}{100}}$, où p est la fréquence inconnue des chaudières du stock qui sont sans aucun défaut.
Déterminer un intervalle de confiance de la fréquence p avec le coefficient de confiance 95 %. Arrondir les bornes à 10^{-2}.

3. On considère l'affirmation suivante : « la fréquence p est obligatoirement dans l'intervalle de confiance obtenu à la question **2** ».
Est-elle vraie ? (On ne demande pas de justification.)

Retour au sommaire : 6

Nouvelle Calédonie, octobre 2006

Exercice 1 **11 points**

Dans cet exercice on étudie une fonction intervenant dans la modélisation d'un risque de catastrophe naturelle.

Les trois parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.

A. Résolution d'une équation différentielle

On considère l'équation différentielle (E) :

$$10^4 y' + 2ty = 0,$$

où y est une fonction de la variable réelle définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et y' sa fonction dérivée.

1. Déterminer les solutions de l'équation différentielle (E).
2. Déterminer la solution f de l'équation différentielle (E) qui vérifie la condition initiale $f(0) = 1$.

B. Étude d'une fonction

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{10^4}}$.

On désigne par $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère onhogonal.

1. **a.** Déterminer $\lim\limits_{t \to -\infty} f(t)$ et $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t)$.

   b. Interpréter graphiquement les résultats obtenus au a.

2. On désigne par f' la fonction dérivée de f.

   Un logiciel de calcul formel donne l'expression de $f'(t)$:

   pour tout t de $\mathbb{R}$, $f'(t) = -\dfrac{2t}{10^4}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{10^4}}$.

   Ce résultat, admis, n'a pas à être démontré.

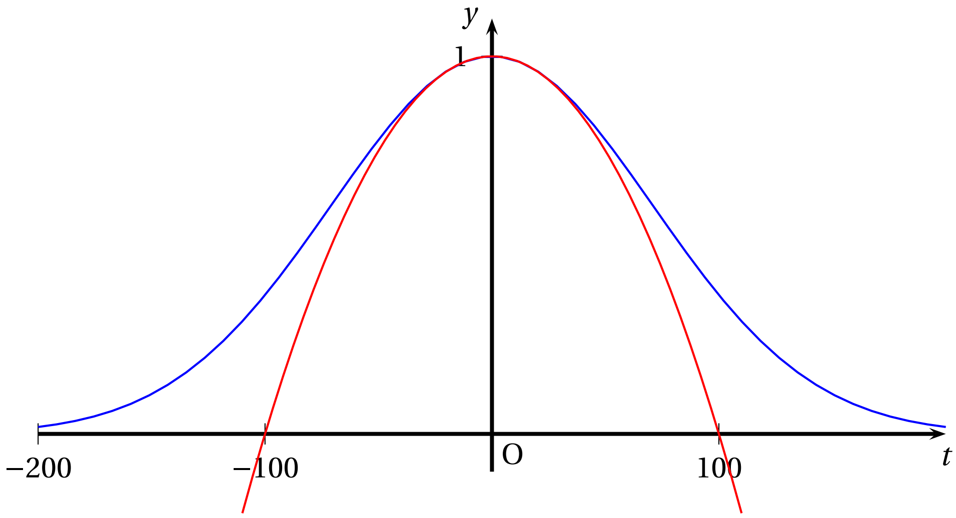
   a. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $f'(t) \geqslant 0$.

   b. En déduire le sens de variations de f sur $\mathbb{R}$.

3. **a.** À l'aide du développement limité, à l'ordre 1, au voisinage de 0, de la fonction $u \longmapsto \mathrm{e}^u$, calculer le développement limité, à l'ordre 2, au voisinage de 0, de la fonction f.

   b. Sur la figure ci-après sont tracées la courbe $\mathscr{C}$ et la courbe représentative Γ de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(t) = 1 - \dfrac{t^2}{10^4}$.

   Donner une interprétation graphique du résultat obtenu au B. 3. a.



4. Démontrer que $\displaystyle\int_0^{30}\left(1-\frac{t^2}{10^4}\right)\mathrm{d}t = 29,1$.

C. Application à la gestion d'un risque

On admet que la probabilité qu'un certain type de « catastrophe naturelle » ne se produise pas pendant les t années à venir est donnée par $f(t) = \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{10^4}}$.

1. Calculer la probabilité que cette catastrophe naturelle ne se produise pas pendant les 50 ans à venir. Arrondir à 10^{-1}.

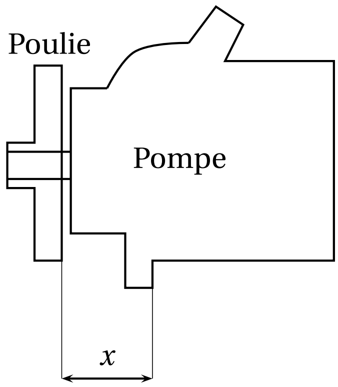
2. **a.** Déterminer un nombre réel positif t tel que $\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{10^4}} = 0,5$; donner la valeur exacte, puis arrondir à 10^{-1}.

b. Traduire le résultat du C. 2. a. à l'aide d'une phrase.

Exercice 2 **9 points**

Les quatre parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante

Un atelier d'une usine d'automobiles est chargé de l'assemblage d'un moteur. Dans cet exercice on s'intéresse au contrôle de qualité de l'emmanchement d'une poulie sur une pompe de direction assistée. Cet emmanchement est contrôlé par la mesure, en millimètres, de la cote x apparaissant sur la figure ci-contre



Dans cet exercice, sauf mention contraire, les résultats approchés sont à arrondir à 10^{-3}

A. Probabilités conditionnelles

Dans cette partie, on s'intéresse, un jour donné, à une machine assurant l'installation de la poulie. Cette machine peut connaître une défaillancc susceptible d'être détectée par un système d'alerte. Le système d'alerte peut aussi se déclencher sans raison.

On note D l'évènement : « la machine est défaillante » et on note A l'évènement : « l'alerte est donnée ».

On admet que : $P(D) = 0,001$; $P(A/D) = 0,99$ et $P(A/\overline{D}) = 0,005$.

(On rappelle que $P(A/D) = P_D(A)$ est la probabilité de l'évènement A sachant que l'évènement D est réalisé).

1. En remarquant que $A = (A \cap D) \cup \left(A \cap \overline{D}\right)$ et que $A \cap D$ et $A \cap \overline{D}$ sont incompatibles, calculer $P(A)$.
2. L'alerte est donnée. Calculer la probabilité qu'il s'agisse d'une « fausse alerte », c'est à dire $P\left(\overline{D}A/A\right)$. Arrondir à 10^{-2}.

B. Loi normale

L'installation de la poulie est considérée comme conforme lorsque la cote x appartient à l'intervalle $[39{,}85\ ;\ 40{,}15]$.

On note X la variable aléatoire qui à chaque ensemble pompe-poulie prélevé au hasard dans la production, associe sa cote x. On suppose que X suit la loi normale de moyenne 40 et d'écart type $0,06$.

Calculer la probabilité que la cote x d'un ensemble pompe-poulie prélevé au hasard dans la production soit confonne.

C. Loi binomiale

On suppose que dans la production du jour, 50 % des ensembles pompe-poulie ont des cotes x supérieures ou égales à 40 millimètres. On prélève au hasard 7 ensembles pompe-poulie dans cette production. La production est suffisamment importante pour qu'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise.

On considère la variable aléatoire Y qui, à tout prélèvement de 7 ensembles pompe-poulie, associe le nombre de ceux dont la cote x est supérieure ou égale à 40.

1. **1.** Justifier que la variable aléatoire Y suit une loi binomiale dont on déterminera les paramètres.
2. **2.** Calculer $P(Y = 7)$.

D. Test d'hypothèse

On se propose de construire un test d 'hypothèse pour contrôler la moyenne μ des ensembles pompe-poulie d'un lot important venant d'être réalisé.

On note Z la variable aléatoire qui, à chaque ensemble pompe-poulie prélevé au hasard dans ce lot, associe sa cote x. La variable aléatoire Z suit la loi normale de moyenne inconnue μ et d'écart type $\sigma = 0,06$.

On désigne par $\overline{Z}$ la variable aléatoire qui, à chaque échantillon aléatoire de 30 ensembles pompe-poulie prélevé dans le lot, associe la moyenne des cotes X de cet échantillon (le lot est assez important pour que l'on puisse assimiler ces prélèvements à des tirages avec remise).

L'hypothèse nulle est $H_0\ :\ \mu = 40$. Dans ce cas le lot est dit conforme.

L'hypothèse alternative est $H_1\ : \mu \neq 40$.

Le seuil de signification du test est fixé à $0,05$.

1. **1.** Justifier le fait que, sous l'hypothèse nulle H_0, Z suit la loi normale de moyenne 40 et d'écart type $0,011$.
2. **2.** Sous l'hypothèse nulle H_0, déterminer le nombre réel h positif tel que :

$$P\,(40 - h \leqslant Z \leqslant 40 + h) = 0,95.$$

3. **3.** Énoncer la régie de décision permettant d'utiliser ce test.
4. **4.** On prélève un échantillon de 30 ensembles pompe–poulie dans le lot et on observe que, pour cet échantillon, la moyenne des cotes x est $\overline{x} = 39,98$.

   Peut-on, au seuil de risque de 5 %, conclure que le lot est conforme ?

Retour au sommaire : 6

mai 2007

Exercice 1 12 **points**

On étudie dans cet exercice une fonction φ susceptible d'intervenir dans la modélisation du trafic Internet au terminal informatique d'une grande société. Pour un réel t positif, $\varphi(t)$ est la probabilité que le temps séparant l'arrivée de deux paquets de données soit inférieur à t secondes.

Les trois parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.

A. Résolution d'une équation différentielle

On considère l'équation différentielle (E) : $y' + 710y = 710$ où y est une fonction de la variable réelle t, définie et dérivable sur $[0\,;\,+\infty[$, et y' la fonction dérivée de y.

1. Déterminer les solutions définies sur $[0\,;\,+\infty[$ de l'équation différentielle (E_0) :

$$y' + 710y = 0.$$

2. Soit h la fonction définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par $h(t) = 1$.
Démontrer que la fonction h est une solution particulière de l'équation différentielle (E).

3. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E).

4. Déterminer la solution φ de l'équation différentielle (E) qui vérifie la condition initiale $\varphi(0) = 0$.

B. Étude d'une fonction

Soit φ la fonction définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par $\varphi(t) = 1 - \mathrm{e}^{-710t}$.
On désigne par C la courbe représentative de φ dans un repère orthogonal $\left(\mathrm{O},\ \overrightarrow{\imath},\ \overrightarrow{\jmath}\right)$ où on prend comme unités : 10 cm pour 0,01 sur l'axe des abscisses et 10 cm pour 1 sur l'axe des ordonnées.

1. Montrer que la fonction φ est croissante sur $[0\,;\,+\infty[$.

2. **a.** Démontrer que le développement limité à l'ordre 2, au voisinage de 0, de la fonction φ est

$$\varphi(t) = 710t - \frac{(710t)^2}{2} + t^2\varepsilon(t) \quad \text{avec} \quad \lim_{t\to 0}\varepsilon(t) = 0.$$

b. En déduire une équation de la tangente T à la courbe C au point d'abscisse 0, ainsi que la position relative de C et T au voisinage de ce point.

3. Tracer sur la copie la tangente T et la courbe C dans le repère $\left(\mathrm{O},\ \overrightarrow{\imath},\ \overrightarrow{\jmath}\right)$ défini au début de la partie *B*. On pourra se limiter à la partie de C correspondant à l'intervalle $[0\,;\,0{,}01]$.

4. **a.** Déterminer par le calcul le nombre réel positif α tel que $\varphi(\alpha) = 0{,}5$.
Donner la valeur exacte de α, puis sa valeur approchée arrondie à 10^{-5}.

b. Retrouver sur la figure le résultat obtenu au a) : faire apparaître les constructions utiles.

Le nombre α représente le temps médian en secondes séparant l'arrivée de deux paquets de données.

C. Calcul intégral

1. Pour tout réel positif t, on note $I(t) = 710\displaystyle\int_0^t x\mathrm{e}^{-710x}\,\mathrm{d}x$.
Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que :

$$I(t) = -t\mathrm{e}^{-710t} - \frac{1}{710}\mathrm{e}^{-710t} + \frac{1}{710}.$$

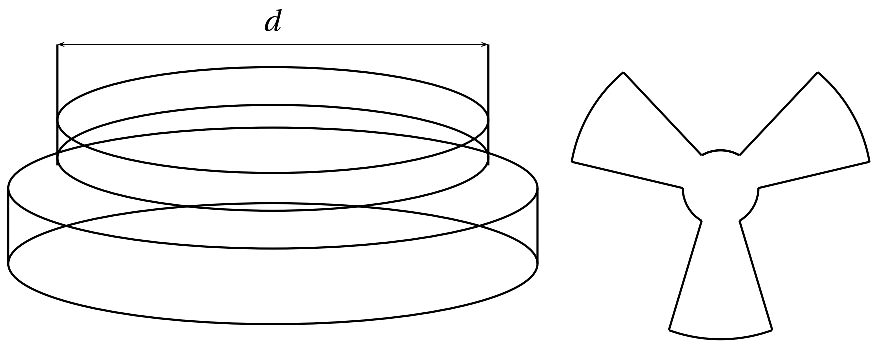
2. Calculer $\lim\limits_{t \to +\infty} I(t)$.
Donner la valeur exacte de cette limite, puis sa valeur approchée arrondie à 10^{-5}.

Le résultat obtenu est le temps moyen en secondes séparant l'arrivée de deux paquets de données.

Exercice 2 **8 points**

Les trois parties de cet exercice sont indépendantes.

Une usine fabrique des ventilateurs en grande quantité. On s'intéresse à trois type de pièces : l'axe moteur, appelée pièce de type 1, l'ensemble des trois pales, appelé pièce de type 2 et le support, appelé pièce de type 3.



Pièce de type 1 Pièce de type 2

Dans cet exercice, les résultats approchés sont à arrondir à 10^{-2}.

A. Loi normale

Une pièce de type 1 est conforme lorque son diamètre d (voir la figure), exprimée en millimètres, appartient à l'intervalle $[29,8\ ;\ 30,2]$.
On note X la variable aléatoire qui, à chaque pièce de type 1 prélevée au hasard dans la production des pièces de type 1, associe le diamètre d exprimé en millimètres. On suppose que la variable aléatoire X suit la loi normale de moyenne 30 et d'écart type 0,09.

Calculer la probabilité qu'une pièce prélevée au hasard dans la production des pièces de type 1 soit conforme.

B. Loi binomiale

On considère un stock important de pièces de type 2.
On note E l'évènement : « une pièce prélevée au hasard dans le stock de pièces de type 2 est défectueuse ».
On suppose que $P(E) = 0,03$.
On prélève au hasard 20 pièces dans le stock de pièces de type 2 pour vérification. Le stock est assez important pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise de 20 pièces de type 2.
On considère la variable aléatoire Y qui, à tout prélèvement ainsi défini, associe le nombre de pièces de ce prélèvement qui sont défectueuses.

1. Justifier que la variable aléatoire Y suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.

2. Calculer la probabilité qu'aucune pièce de ce prélèvement ne soit défectueuse.

3. Calculer la probabilité que, dans un tel prélèvement, une pièce au moins soit défectueuse.

C. Test d'hypothèse

Une importante commande de pièces de type 3 est passé à un sous-traitant. La hauteur du support doit être de 400 millimètres.
On se propose de construire un test d'hypothèse bilatéral pour contrôler, au moment de la livraison, la moyenne μ de l'ensemble des hauteurs, en millimètres, des pièces de type 3.
On note Z la variable aléatoire qui, à chaque pièce de type 3 prélevée au hasard dans la livraison associe sa hauteur.
La variable aléatoire Z suit la loi normale de moyenne inconnue μ et d'écart type $\sigma = 5$.
On désigne par $\overline{Z}$ la variable aléatoire qui, à chaque échantillon aléatoire de 100 pièces de type 3 prélevé dans la livraison, associe la moyenne des hauteurs des pièces de cet échantillon. La livraison est assez importante pour que l'on puisse assimiler ces prélèvements à des tirages avec remise.
L'hypothèse nulle est $H_0 : \mu = 400$.
L'hypothèse alternative est $H_1 : \mu \neq 400$.
Le seuil de signification du test est fixé à $0,05$.

1. Sous l'hypothèse H_0, on admet que la variable aléatoire $\overline{Z}$ suit la loi normale de moyenne 400 et d'écart type 0,5.
Déterminer sous cette hypothèse le nombre réel h positif tel que :

$$P(400 - h \leqslant \overline{Z} \leqslant 400 + h) = 0,95.$$

2. En déduire la règle de décision permettant d'utiliser ce test.

3. On prélève un échantillon aléatoire de 100 pièces dans la livraison reçue et on observe que, pour cet échantillon, la moyenne des hauteurs des pièces est $\overline{z} = 399,12$.
Peut-on, au seuil de 5%, conclure que la livraison est conforme pour la hauteur ?

Retour au sommaire : 6

Nouvelle Calédonie, novembre 2007

Exercice 1 10 **points**

Les trois parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante

Une usine fabrique un très grand nombre de billes en acier spécial destinées à un certain type de roulement.

Dans cet exercice, les résultats approchés sont à arrondir à $\mathbf{10^{-3}}$.

A- Loi normale

Une bille est conforme lorsque sa masse, exprimée en grammes, appartient à l'intervalle [14,92 ; 15,08].

1. On noie M la variable aléatoire qui, à chaque bille prélevée au hasard dans la production, associe sa masse. On suppose que la variable aléatoire M suit la loi normale de moyenne 15 et d'écart type $0,05$.

   Calculer la probabilité qu'une bille prélevée au hasard dans la production soit conforme.

2. La qualité de la production de billes étant jugée insuffisante, on effectue un réglage.

   On note M_1 la variable aléatoire qui, à chaque bille prélevée dans la nouvelle production future, associe sa masse. On suppose que la variable aléatoire M_1, suit une loi normale de moyenne 15 et d'écart type σ_1.

   On admet que la probabilité qu'une bille prélevée au hasard dans la nouvelle production soit conforme est alors égale à $0,99$.

   Déterminer σ_1.

B. Loi binomiale et approximation d'une loi binomiale par une loi de Poisson

On note E l'évènement : « une bille prélevée au hasard dans un stock important est défectueuse ».
On suppose que $P(E) = 0,01$.
Les roulements fabriqués avec ce type de billes contiennent 36 billes.
On prélève au hasard 36 billes dans un stock suffisamment important pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise de 36 billes.
On considère la variable aléatoire X qui, à tout prélèvement ainsi défini associe le nombre de billes de ce prélèvement qui sont défectueuses.

1. Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale dont on déterminera les paramètres.
2. **a.** Déterminer la probabilité qu'il n'y ait aucune bille défectueuse dans un tel prélèvement.

   b. Déterminer la probabilité qu'il y ait au plus deux billes défectueuses dans un tel prélèvement.
3. **a.** On considère que la loi suivie par la variable aléatoire X peut être approchée par une loi de Poisson.

   Déterminer le paramètre λ de cette loi de Poisson.

   b. On désigne par Y une variable aléatoire suivant la loi de Poisson de paramètre λ, où λest la valeur obtenue au **a.**.

   En utilisant cette loi de Poisson, calculer la probabilité qu'il y ait au plus deux billes défectueuses dans un tel prélèvement.

C. Test d'hypothèse

Pour la fabrication des roulements, les billes doivent peser 15 grammes.
On se propose de construire un test d'hypothèse bilatéral pour contrôler la moyenne m de l'ensemble des masses, en grammes, d'une importante livraison destinée au montage de roulements.
On note Z la variable aléatoire qui à chaque bille prélevée au hasard dans la livraison associe sa masse.
La variable aléatoire Z suit la loi normale de moyenne inconnue m et d'écart type $0,05$.
On désigne par $\overline{Z}$ la variable aléatoire qui, à chaque échantillon aléatoire de 36 pièces prélevé dans la livraison, associe la moyenne des masses des billes de cet échantillon. La livraison est assez importante pour que l'on puisse assimiler ces prélèvements à des tirages avec remise.
L'hypothèse nulle est $H_0 \ : \ m = 15$.
L'hypothèse alternative est $H_1 \ : \ m \neq 15$.
Le seuil de signification du test est fixé à $0,05$.

1. Énoncer la règle de décision permettant d'utiliser ce test en admettant, sous l'hypothèse nulle H_0, le résultat suivant, qui n'a pas à être démontré.

$$P(14,984 \leqslant \overline{Z} \leqslant 15,016) = 0,95.$$

2. On prélève un échantillon aléatoire de 36 billes dans la livraison et on calcule la moyenne des masses des billes de cet échantillon.

On obtient $\overline{x} = 15,025$.

Peut-on conclure, au seuil de risque de 0,05 que la livraison est conforme pour la masse ?

Exercice 2 10 **points**

Les trois parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante

A. Résolution d'une équation différentielle
On considère l'équation différentielle

$$(\text{E}) \quad : \qquad y' - y = -\frac{4\mathrm{e}^{2x}}{(\mathrm{e}^x+1)^2}$$

où y est une fonction de la variable réelle x, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, et y' la fonction dérivée de y.

1. Déterminer les solutions définies sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle (E_0) : $y' - y = 0$.
2. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \dfrac{4\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+1}$.
   Démontrer que la fonction g est une solution particulière de l'équation différentielle (E).
3. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E).

B. Étude locale d'une fonction
On rappelle que g est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \dfrac{4\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+1}$ et on note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de g dans un repère orthogonal.
On admet que le développement limite à l'ordre 3 de la fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{\mathrm{e}^x+1}$ au voisinage de 0 est :

$$\frac{1}{\mathrm{e}^x+1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}x + \frac{1}{48}x^3 + x^3\epsilon(x) \text{ avec} \lim_{x\to 0}\epsilon(x) = 0.$$

(Ce résultat n'a pas à être démontré).

1. Démontrer que le développement limité à l'ordre 3 de la fonction g au voisinage de 0 est

$$g(x) = 2 + x - \frac{x^3}{12} + x^3\epsilon(x) \text{ avec } \lim_{x\to 0}\epsilon(x) = 0.$$

2. En déduire une équation de la tangente T à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0 et la position relative de T et $\mathscr{C}$ au voisinage de ce point.

C. Calcul intégral

1. On note $I = \displaystyle\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x$.
   a. Démontrer que $I = 4\ln\dfrac{\mathrm{e}+1}{2}$.
   b. Donner la valeur approchée arrondie à 10^{-3} de I.
2. On note $J = \displaystyle\int_0^1 \left(2 + x - \frac{x^3}{12}\right)\mathrm{d}x$.
   a. Démontrer que $J = \dfrac{119}{48}$. 48
   b. Donner la valeur approchée arrondie à 10^{-3} de J.
   c. Vérifier que les valeurs approchées de I et de Jobtenues au 1. b. et au 2. b. diffèrent de 0,001.

Retour au sommaire : 6

mai 2008

Exercice 1 **12points**

Les trois parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.

A. Résolution d'une équation différentielle

On considère l'équation différentielle (E) : $y' - 2y = x\mathrm{e}^{x}$ où y est une fonction de la variable réelle x, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, et y' la fonction dérivée de y.

1. Déterminer les solutions définies sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle (E_0) :

$$y' - 2y = 0.$$

2. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = (-x-1)\mathrm{e}^{x}.$$

Démontrer que la fonction g est une solution particulière de l'équation différentielle (E).

3. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E).

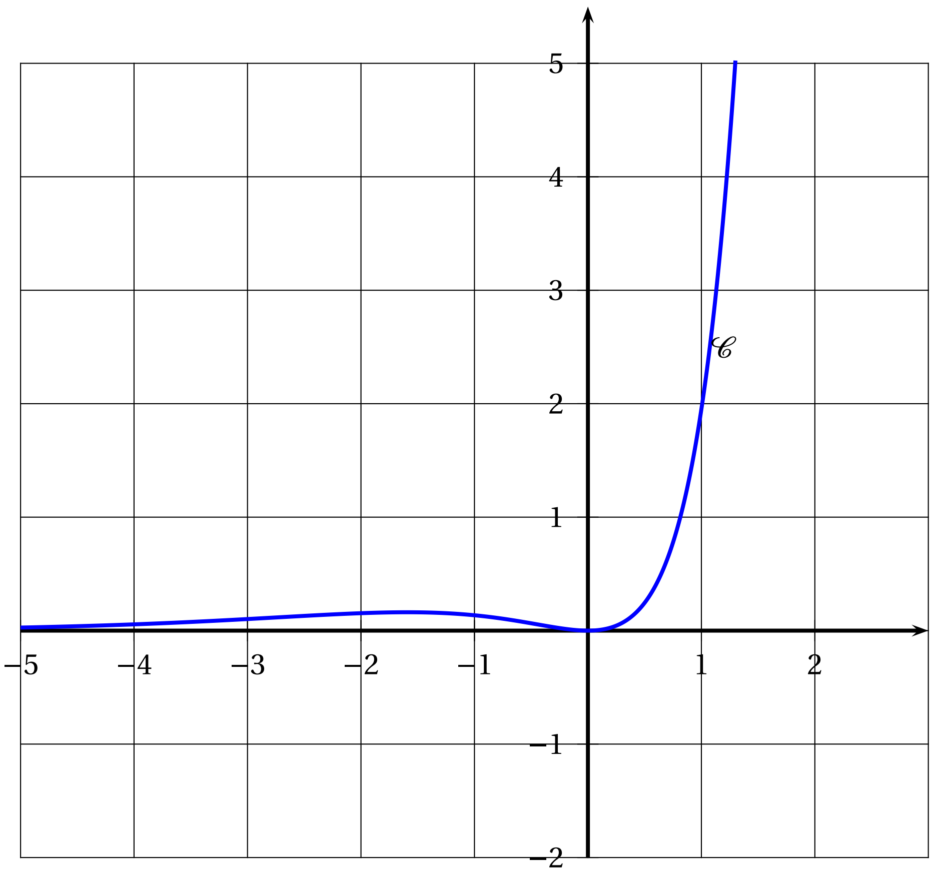
4. Déterminer la solution f de l'équation différentielle (E) qui vérifie la condition initiale $f(0) = 0$.

B. Étude locale d'une fonction

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \mathrm{e}^{2x} - (x+1)\mathrm{e}^{x}.$$

Sa courbe représentative $\mathscr{C}$ est donnée dans un repère orthogonal ci-dessous.



1. **a.** Démontrer que pour tout réel x, $f'(x) = \mathrm{e}^x(2\mathrm{e}^x - 2 - x)$.

   b. En déduire le coefficient directeur $f'(0)$ de la tangente T à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0.

   Interpréter graphiquement ce résultat.

2. **a.** Déterminer le développement limité, à l'ordre 2, au voisinage de 0, de la fonction $x \longmapsto \mathrm{e}^{2x}$.

   b. Démontrer que le développement limité, à l'ordre 2, au voisinage de 0, de la fonction f est :

$$f(x) = \frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon(x) \quad \text{avec} \quad \lim_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0.$$

C. Calcul intégral

1. On note $I = \displaystyle\int_{-0,3}^{0,3} \frac{x^2}{2}\,\mathrm{d}x$.

   Démontrer que $I = 0,009$.

2. On note $J = \displaystyle\int_{-0,3}^{0,3} \mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x$.

   Démontrer que $J = 0,5\left(\mathrm{e}^{0,6} - \mathrm{e}^{-0,6}\right)$.

3. On note $K = \displaystyle\int_{-0,3}^{0,3} (x+1)\mathrm{e}^{x}\,\mathrm{d}x$.

   Démontrer, à l'aide d'une intégration par parties, que $K = 0,3\left(\mathrm{e}^{0,3} + \mathrm{e}^{-0,3}\right)$.

4. On note $L = \displaystyle\int_{-0,3}^{0,3} f(x)\,\mathrm{d}x$.

   a. Déduire des questions précédentes la valeur exacte de L.

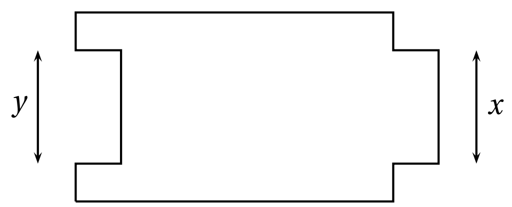
   b. Donner la valeur approchée de L arrondie à 10^{-5}.

   c. Vérifier que la valeur exacte de I et la valeur approchée de L obtenue à la question précédente diffèrent de $4,5 \times 10^{-4}$.

Exercice 2 **8 points**

Les trois parties de cet exercice sont indépendantes.

Une entreprise fabrique en grande série des pièces de bois. Ces pièces sont prévues pour s'encastrer les unes dans les autres.



Dans cet exercice, les résultats approchés sont à arrondir à 10^{-3}.

A. Loi normale

Une pièce de type est conforme lorsque sa cote x, exprimée en millimètres, appartient à l'intervalle $[9,5\ ;\ 10,5]$ et lorsque sa cote y appartient à l'intervalle $[10,5\ ;\ 11,5]$.

1. On note X la variable aléatoire qui, à chaque pièce de ce type prélevée au hasard dans la production d'une journée, associe sa cote x. On suppose que la variable aléatoire X suit la loi normale de moyenne 10 et d'écart type 0,21.

Calculer $P(9,5 \leqslant X \leqslant 10,5)$.

2. On note Y la variable aléatoire qui, à chaque pièce de ce type prélevée au hasard dans la production d'une journée, associe sa cote y. On admet que $P(10,5 \leqslant Y \leqslant 11,5) = 0,985$.

On suppose que les variables aléatoires X et Y sont indépendantes.

On prélève une pièce au hasard dans la production d'une journée. Déterminer la probabilité qu'elle soit conforme.

B. Loi binomiale et loi de Poisson

On considère un stock important de pièces.

On note E l'évènement : « une pièce prélevée au hasard dans le stock est défectueuse ».

On suppose que $P(E) = 0,03$.

On prélève au hasard 50 pièces dans le stock de pièces pour vérification. Le stock est suffisamment important pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise de 50 pièces. On considère la variable aléatoire Z qui, à tout prélèvement ainsi défini, associe le nombre de pièces de ce prélèvement qui sont défectueuses.

1. Justifier que la variable aléatoire Z suit une loi binomiale dont on déterminera les paramètres.

2. Calculer $P(Z = 0)$ et $P(Z \leqslant 2)$.

3. On considère que la loi de probabilité suivie par la variable aléatoire Z peut être approchée par une loi de Poisson.

  a. Déterminer le paramètre λ de cette loi de Poisson.

  b. On désigne par Z_1 une variable aléatoire suivant la loi de Poisson de paramètre λ, où λ a la valeur obtenue au **a**.

  En utilisant cette loi de Poisson, calculer la probabilité que, dans un tel prélèvement de 50 pièces, au plus deux pièces soient défectueuses.

C. Intervalle de confiance

Dans cette partie, on considère une grande quantité de pièces devant être livrées à une chaîne d'hypermarchés. On considère un échantillon de 100 pièces prélevées au hasard dans cette livraison. La livraison est assez importante pour que l'on puisse assimiler ce tirage à un tirage avec remise.

On constate que 96 pièces sont sans défaut.

1. Donner une estimation ponctuelle de la fréquence inconnue p des pièces de cette livraison qui sont sans aucun défaut.

2. Soit F la variable aléatoire qui, à tout échantillon de 100 pièces prélevées au hasard et avec remise dans cette livraison, associe la fréquence des pièces de cet échantillon qui sont sans défaut.

   On suppose que F suit la loi normale de moyenne p et d'écart type $\sqrt{\dfrac{p(1-p)}{100}}$, où p est la fréquence inconnue des pièces de la livraison qui sont sans aucun défaut.

   Déterminer un intervalle de confiance de la fréquence p avec le coefficient de confiance de 95%.

Retour au sommaire : 6

Nouvelle Calédonie, octobre 2008

Exercice 1 **10 points**

Les parties A, B et C sont indépendantes.

Une entreprise produit en grande série des véhicules électriques équipés de batteries au nickel-cadmium. On se propose d'étudier l'autonomie en kilomètres de ces véhicules.

A - Soit X la variable aléatoire qui, à chaque véhicule pris au hasard dans la production, associe son autonomie.
On admet que X suit la loi normale de moyenne $\mu = 104$ et d'écart type $\sigma = 6$.

1. Déterminer, à 10^{-2} près, la probabilité p_1 que l'autonomie d'un véhicule pris au hasard dans la production soit comprise entre 98 et 122.
2. La probabilité qu'un véhicule ait une autonomie insuffisante et soit donc déclaré non conforme au cahier des charges est $p_2 = 0,04$. Calculer l'autonomie correspondante, c'est-à-dire le nombre réel d tel que $P(X \leqslant d) = 0,04$.

B - Les véhicules sont parqués par lots de 75 avant de recevoir le certificat de conformité.
On note Y la variable aléatoire qui, à tout échantillon de 75 véhicules pris au hasard dans la production, associe le nombre de véhicules non conformes.
La production est assez importante pour qu'on puisse assimiler tout échantillon de 75 véhicules à un échantillon aléatoire prélevé avec remise.
On suppose que la probabilité qu'un véhicule soit non conforme est $0,04$.

1. Expliquer pourquoi Y suit une loi binomiale et donner les paramètres de cette loi.
   Calculer à 10^{-3} près, la probabilité $p_3 = P(Y = 0)$ de l'évènement « dans l'échantillon prélevé au hasard tous les véhicules sont conformes ».
2. On admet que la loi précédente peut être approchée par une loi de Poisson de même espérance mathématique. Donner son paramètre. Calculer à 10^{-3} près, la probabilité p_4 de l'évènement « dans l'échantillon prélevé au hasard il y a au plus deux véhicules non ronformes ».

C - À la suite d'une modification des batteries, on redoute que l'autonomie moyenne des véhicules soit moditiée. Afin de contrôler que la moyenne des autonomies de l'ensemble des véhicules mis sur le marché après modification des batteries est 104. on se propose de construire un test d'hypothèse (test bilatéral, bien que, pour cene situation. un test unilatéral soit plus adapté).
On désigne par $\overline{X}$ la variable aléatoire qui à chaque échantillon aléatoire de 36 véhicules, associe la moyenne des autonomies des 36 véhicules (la production est assez importante pour qu'on puisse assimiler ces prélèvements à des tirages de 36 véhicules avec remise).
L'hypothèse nulle est $H_0 \ : \mu = 104$.
L'hypothèse altemative est $H_1 \ : \mu \neq 104$.
Le seuil de signification du test est fixé à 0,05.
On suppose que, sous l'hypothèse nulle H_0 la variable aléatoire X suit la loi normale de moyenne 104 et d'écart type 1.

1. Déterminer à 10^{-2} près le nombre réel positif h tel que $P(104 - h \leqslant X \leqslant 104 + h) = 0,95$.
2. Énoncer la règle de décision permettant d'utiliser ce test
3. Une étude stalistique sur un échantillon de 36 véhicules donne $102,9$ comme moyenne des autonomies des véhicules de cet échantillon.
   Utiliser le test avec cet échantillon et conclure.

Exercice 2 **10 points**

Les deux parties A et B peuvent être traitées de façon indépendante

A - Résolution d'une équation différentielle

On considère l'équation différentielle (E) :

$$y" - 3y' + 2y = -1 - 2x$$

où y désigne une fonction de la variable réelle x, définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$. y' la fonction dérivée de y et $y"$ sa fonction dérivée seconde.

1. Déterminer les solutions de l'équation différentielle $(E_1)\ :\ y" - 3y' + 2y = 0$.
2. Déterminer les constantes réelles a et b pour que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = ax + b$ soit une solution particulière de l'équation (E).
3. Déduire du 1. et du 2. l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E).
4. Déterminer la solution f de l'équation (E) qui vérifie les conditions initiales $f(0) = 0$ et $f'(0) = 2$.

B - Étude d'une fonction

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \mathrm{e}^{2x} + \mathrm{e}^{x} - x - 2.$$

On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal d'unité 2c̃m.

1. **a.** Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$. On pourra mettre e^{x} en facteur dans $f(x)$.
   b. Déterminer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.
   c. Démontrer que la droite D d'équation $y = -x - 2$ est une asymptote de la courbe $\mathscr{C}$.
   d. Étudier la position relative de $\mathscr{C}$ et D.
2. **a.** Calculer $f'(x)$ pour tout x de $\mathbb{R}$.
   b. Vérifier que pour tout x de $\mathbb{R}$, $f'(x) = 2\left(\mathrm{e}^{x} + 1\right)\left(\mathrm{e}^{x} - \dfrac{1}{2}\right)$.
   c. Déduire du b. le signe de $f'(x)$ lorsque x varie dans $\mathbb{R}$.
   d. Établir le tableau variation de la fonction f.
3. Construire D et $\mathscr{C}$.
4. Calculer la valeur exacte en cm^2, de l'aire de la partie du plan limitée par la courbe $\mathscr{C}$, son asymptote D et les droites d'équations $x = -1$ et $x = 0$.

Retour au sommaire : 6

mai 2009

Exercice 1 **12 points**

Les trois parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante

A. Résolution d'une équation différentielle

On considère l'équation différentielle

$$(E): \quad y'' - 2y' + y = 8\mathrm{e}^{x}.$$

où y est une fonction de la variable réelle x, définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, y' la fonction dérivée de y et y'' sa fonction dérivée seconde.

1. Déterminer les solutions définies sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle

$$(E_0): \quad y'' - 2y' + y = 0.$$

2. Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = 4x^2\mathrm{e}^{x}$.
Démontrer que la fonction h est une solution particulière de l'équation différentielle (E).

3. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E).

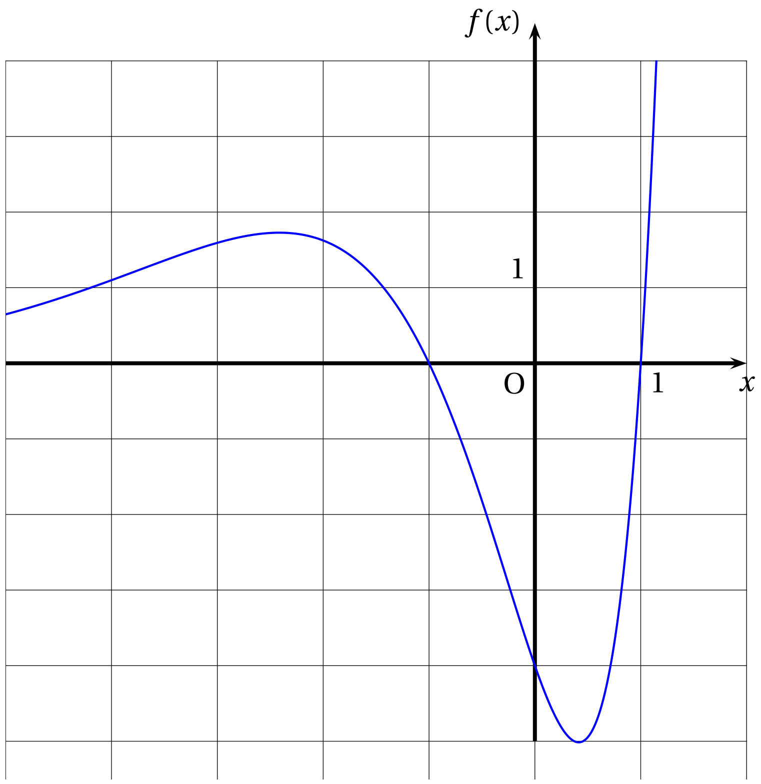
4. Déterminer la solution f de l'équation différentielle (E) qui vérifie les conditions initiales $f(0) = -4$ et $f'(0) = -4$.

B. Étude locale d'une fonction

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \left(4x^2 - 4\right)\mathrm{e}^{x}$$

Sa courbe représentative $\mathscr{C}$ dans un repère orthogonal est donnée ci-dessous.



1. **a.** Démontrer que pour tout réel x, $f'(x) = 4\left(x^2+2x-1\right)\mathrm{e}^x$.

   b. Donner sans justification la valeur exacte et la valeur approchée arrondie à 10^{-2} de l'abscisse de chacun des points de la courbe $\mathscr{C}$ où la tangente est parallèle à l'axe des abscisses.

2. **a.** Démontrer que le développement limité, à l'ordre 2, au voisinage de 0, de la fonction f est :

$$f(x) = -4-4x+2x^2+x^2\epsilon(x) \quad \text{avec } \lim_{x\to 0}\epsilon(x) = 0.$$

   b. Déduire du a. une équation de la tangente T à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0.

   c. Étudier la position relative de $\mathscr{C}$ et T au voisinage du point d'abscisse 0.

C. Calcul intégral

Dans cette partie, les questions 1. et 2. peuvent être traitées de façon indépendante.

1. La fonction f définie au début de la partie B est une solution de l'équation différentielle (E) de la partie A.
   Donc, pour tout x de $\mathbb{R}$, $f(x) = -f''(x)+2f'(x)+8\mathrm{e}^x$.
   En déduire une primitive F de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

2. **a.** Donner, sans justification, le signe de $f(x)$ sur l'intervalle $[0\ ;\ 1]$

   b. Dans cette question, on admet que la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par
   $F(x) = \left(4x^2-8x+4\right)\mathrm{e}^x$ est une primitive de la fonction f.
   Déduire de ce qui précède l'aire $\mathscr{A}$, en unités d'aire, de la partie du plan limitée par l'axe des abscisses, la courbe $\mathscr{C}$ et les droites d'équation $x=0$ et $x=1$.

Exercice 2 **8 points**

Les quatre parties de cet exercice sont indépendantes.

On s'intéresse au chantier de construction d'un tronçon de TGV.
Les travaux de terrassement nécessitent la mise à disposition d'une flotte importante de pelles sur chenilles et de camions-benne.
La réalisation de l'ouvrage nécessite de grandes quantités de fers à béton.

Dans cet exercice, les résultats approchés sont à arrondir à 10^{-3}.

A. Loi normale

On note X la variable aléatoire qui, à chaque pelle prélevée au hasard dans la flotte, associe le nombre de m^3 de matériaux extraits pendant la première heure du chantier. On suppose que la variable aléatoire X suit la loi normale de moyenne 120 et d'écart type 10.

1. Calculer $P(110 \leqslant X \leqslant 130)$.
2. Calculer la probabilité que la pelle prélevée extraie moins de 100 m^3 pendant la première heure du chantier.

B. Loi de Poisson

On note Y la variable aléatoire qui, à toute heure travaillée prise au hasard pendant la première semaine du chantier, associe le nombre de camions-benne entrant dans la zone 1 du chantier pour charger des matériaux. On suppose que la variable aléatoire Y suit la loi de Poisson de paramètre 5.

1. Calculer la probabilité de l'évènement
A : « pendant une heure prise au hasard il n'entre aucun camion-benne sur la zone 1 du chantier. »

2. Calculer la probabilité de l'évènement
B : « pendant une heure prise au hasard il entre au plus quatre camions-benne sur la zone 1 du chantier. »

C. Loi binomiale

On note E l' évènement : « un camion-benne pris au hasard dans la flotte n'a pas de panne ou de sinistre pendant le premier mois du chantier. »
On suppose que la probabilité de l'événement E est 0,9.
On prélève au hasard 10 camions-benne dans la flotte pour les affecter à une zone du chantier. Le nombre de camions-benne de la flotte est assez important pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise de 10 camions-benne.
On désigne par Z la variable aléatoire qui à tout prélèvement de ce type associe le nombre de camions-benne n'ayant pas eu de panne ou de sinistre pendant le premier mois du chantier.

1. Justifier que la variable aléatoire Z suit une loi binomiale dont on déterminera les paramètres.

2. Calculer la probabilité que, dans un tel prélèvement, aucun des 10 camions-benne n'ait de panne ni de sinistre pendant le premier mois du chantier.

D. Test d'hypothèse

De grandes quantités d'un certain type de fers cylindriques pour le béton armé, de diamètre 25 millimètres, doivent être réceptionnées sur le chantier.
On se propose de construire un test d'hypothèse bilatéral pour contrôler, au moment de la réception d'une livraison, la moyenne μ de l'ensemble des diamètres en millimètres des fers à béton.
On note M la variable aléatoire qui, à chaque fer prélevé au hasard dans la livraison, associe son diamètre en millimètres. La variable aléatoire M suit la loi normale de moyenne inconnue μ et d'écart type 0,2.
On désigne par $\overline{M}$ la variable aléatoire qui, à chaque échantillon aléatoire de 100 fers prélevés dans la livraison, associe la moyenne des diamètres des fers de cet échantillon. La livraison est assez importante pour que l'on puisse assimiler ces prélèvements à des tirages avec remise.
L 'hypothèse nulle est $H_0\ :\ \mu = 25$. Dans ce cas, la livraison est dite conforme pour le diamètre.
L'hypothèse alternative est $H_1\ :\ \mu \neq 25$.
Le seuil de signification du test est fixé à 0,05.

1. Sous l 'hypothèse H_0, on admet que la variable aléatoire $\overline{M}$ suit la loi normale de moyenne 25 et d'écart type 0,02.

On admet également que : $p(24,961 \leqslant \overline{M} \leqslant 25,039) = 0,95$. Ce **résultat** où 0,95 est une valeur approchée, **n'a pas à être démontré**.

Énoncer la règle de décision permettant d'utiliser ce test.

2. On prélève un échantillon aléatoire de 100 fers à béton et on observe que, pour cet échantillon, la moyenne des diamètres est $\overline{x} = 24,978$.

Peut-on, au seuil de 5 %, conclure que la livraison est conforme pour le diamètre ?

Retour au sommaire : 6

Nouvelle Calédonie, novembre 2009

Exercice 1 **12 points**

Les trois parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante

A. Résolution d'une équation différentielle

On considère l'équation différentielle

$$(\text{E}) \quad : \quad y'' + 2y' - 3y = -4\text{e}^x,$$

où y est une fonction de la variable réelle x, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, y' la fonction dérivée de y et y'' sa fonction dérivée seconde.

1. Déterminer les solutions définies sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle

$$(\text{E}_0) : y'' +' 2y' - 3y = 0.$$

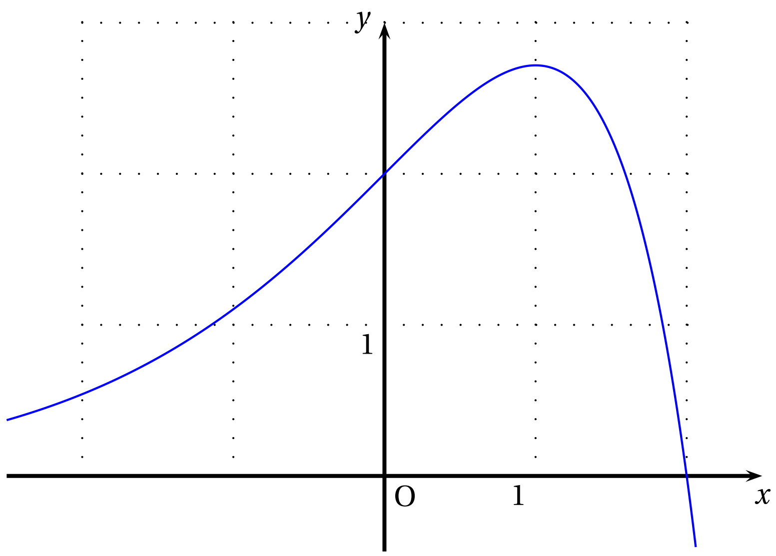
2. Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = -x\text{e}^x$.
   Démontrer que la fonction h est une solution particulière de l'équation différentielle (E).
3. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E).
4. Déterminer la solution f de l'équation différentielle (E) qui vérifie les conditions initiales $f(0) = 2$ et $f'(0) = 1$.

B. Étude d'une fonction

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = (2 - x)\text{e}^x.$$

Sa courbe représentative $\mathscr{C}$ dans un repère orthogonal est donnée ci-dessous.



1. **a.** Démontrer que pour tout réel x, $f'(x) = (1 - x)\text{e}^x$.

   b. Donner les valeurs exactes des coordonnées du point S où la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ est parallèle à l'axe des abscisses.

2. **a.** Démontrer que le développement limité à l'ordre 3, au voisinage de 0, de la fonction f est $f(x) = 2 + x - \dfrac{x^3}{6} + x^3\epsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x\to 0}\epsilon(x) = 0$.

b. Déduire du a. une équation de la tangente T à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0.

c. Étudier la position relative de $\mathscr{C}$ et T au voisinage de ce point.

C. Calcul intégral

1. On note $I = \displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$.

a. Démontrer, à l'aide d'une intégration par parties, que $I = 2\mathrm{e} - 3$.

b. Donner la valeur approchée arrondie à 10^{-2} de I.

2. On note $J = \displaystyle\int_0^1 \left(2 + x - \frac{x^3}{6}\right)\mathrm{d}x$.

a. Démontrer que $J = \dfrac{59}{24}$.

b. Donner la valeur approchée arrondie à 10^{-2} de J.

3. On désigne par S l'aire, en unités d'aires, de la partie du plan limitée par la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = 1$.
On désigne par S_1 l'aire, en unités d'aire, de la partie du plan limitée par la courbe représentative de la fonction f_1 définie sur $\mathbb{R}$ par $f_1(x) = 2 + x - \dfrac{x^3}{6}$, l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = 1$.
On admet que, pour tout x de l'intervalle $[0\,;\ 1]$, $f_1(x) \geqslant f(x)$. Donner la valeur exacte de $S_1 - S$.
En déduire la valeur approchée arrondie à 10^{-2} de $S_1 - S$.

Exercice 2 **8 points**

Les quatre parties de cet exercice sont indépendantes

Une entreprise produit en grande série un accessoire d'un certain type pour l'industrie automobile.

A. Évènements indépendants

Dans cette partie, donner les valeurs exactes des probabilités

Chaque accessoire fabriqué peut présenter deux défauts, que l'on désigne par défaut a et défaut b.
On prélève au hasard un accessoire dans la production d'une journée. On note A l'évènement : « l'accessoire présente le défaut a » et B l'évènement : « l'accessoire présente le défaut b ».
On suppose que $P(A) = 0,02$ et que $P(B) = 0,01$.
On suppose que les évènements A et B sont indépendants.

1. Calculer la probabilité qu'un accessoire prélevé au hasard dans la production de la journée présente le défaut a et le défaut b.

2. Calculer la probabilité qu'un accessoire prélevé au hasard dans la production de la journée présente au moins un des deux défauts.

3. Calculer la probabilité qu'un accessoire prélevé au hasard dans la production de la journée ne présente aucun des deux défauts a et b.

Dans ce qui suit, les résultats approchés sont à arrondir à 10^{-1}

B. Loi binomiale

On considère un stock important d'accessoires. On note E l'évènement : « un accessoire prélevé au hasard dans le stock d'accessoires est défectueux. »
On suppose que $P(E) = 0,03$.
On prélève au hasard 20 accessoires dans le stock d'accessoires pour vérification. Le stock est assez important pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise de 20 accessoires.
On considère la variable aléatoire X qui, à tout prélèvement ainsi défini, associe le nombre d'accessoires de ce prélèvement qui sont défectueux.

1. Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale dont on déterminera les paramètres.

2. Calculer la probabilité que, dans un tel prélèvement, aucun accessoire ne soit défectueux.

3. Calculer la probabilité que, dans un tel prélèvement, au plus un accessoire soit défectueux.

C. Approximation d'une loi binomiale par une loi normale

Les accessoires sont livrés par lots de 1 000.
On prélève au hasard un lot de 1 000 dans le dépôt de l'entreprise. On assimile ce prélèvement à un tirage avec remise de 1 000 accessoires.
On considère la variable aléatoire Y qui, à tout prélèvement de 1 000 accessoires, associe le nombre d'accessoires défectueux parmi ces 1 000 accessoires.
On admet que la variable aléatoire Y suit la loi binomiale de paramètres $n = 1\,000$ et $p = 0,03$.
On décide d'approcher la loi de la variable aléatoire Y par la loi normale de moyenne 30 et d'écart type 5,39.
On note Z une variable aléatoire suivant la loi normale de moyenne 30 et d'écart type 5,39.

1. Justifier les valeurs des deux paramètres de cette loi normale.

2. Calculer, à l'aide de la variable aléatoire Z, la probabilité qu'il y ait au plus 25 accessoires défectueux dans le lot de 1 000 accessoires, c'est-à-dire calculer $P(Z \leqslant 25,5)$.

D. Intervalle de confiance

Dans cette partie, on s'intéresse à la masse des accessoires d'un lot important.
On prélève au hasard et avec remise un échantillon de 100 accessoires dans le lot.
Soit $\overline{M}$ la variable aléatoire qui, à tout échantillon de 100 accessoires prélevés au hasard et avec remise dans le lot associe la moyenne des masses, en grammes, des accessoires de cet échantillon.
On suppose que $\overline{M}$ suit la loi normale de moyenne inconnue μ et d'écart type $\dfrac{\sigma}{\sqrt{100}}$ avec $\sigma = 5$.
Pour l'échantillon prélevé, la moyenne obtenue est $\overline{x} = 501$.

1. Déterminer un intervalle de confiance centré sur $\overline{x}$ de la moyenne inconnue μ des masses des accessoires du lot considéré, avec le coefficient de confiance 95 %.
2. On considère l'affirmation suivante : « la moyenne μ est obligatoirement dans l'intervalle de confiance obtenu à la question 1 ».

   Est-elle vraie ? (On ne demande pas de justification.)

Retour au sommaire : 6

mai 2010

Exercice 1 **12 points**

Les trois parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.

A. Résolution d'une équation différentielle

On considère l'équation différentielle

$$\text{(E)} : \quad y' - y = \mathrm{e}^{x} - 2x$$

où la fonction inconnue y, de la variable réelle x, est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et y' désigne sa fonction dérivée.

1. Déterminer les solutions définies sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle (E) : $y' - y = 0$.

2. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = x\mathrm{e}^{x} + 2x + 2.$$

Démontrer que la fonction g est une solution particulière de l'équation différentielle (E).

3. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E).

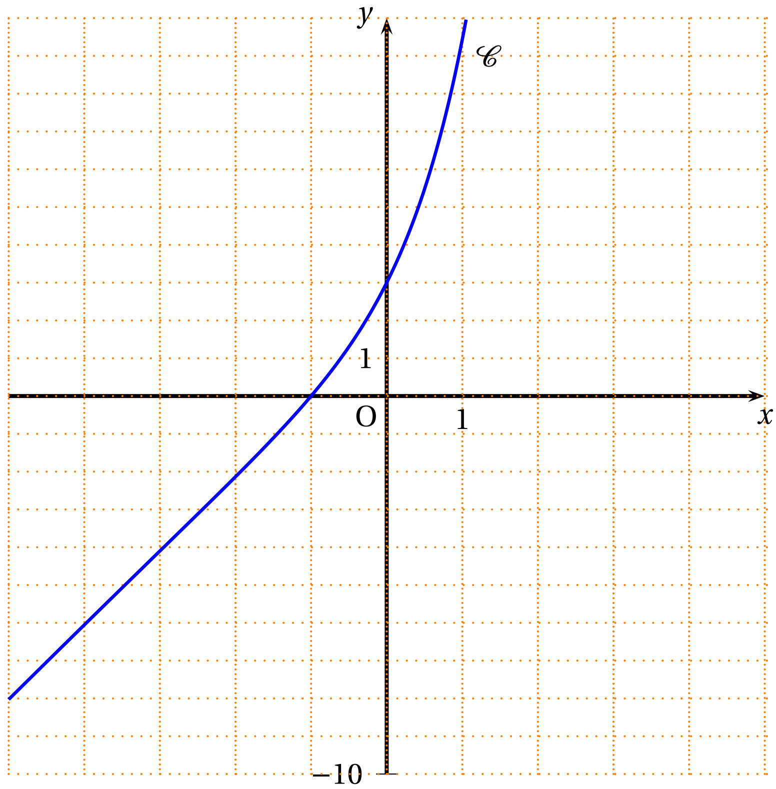
4. Déterminer la solution f de l'équation différentielle (E) qui vérifie la condition initiale $f(0) = 3$.

B. Étude d'une fonction

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = (x+1)\mathrm{e}^{x} + 2x + 2.$$

Sa courbe représentative $\mathscr{C}$ est donnée dans un repère orthogonal ci-dessous.



1. Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

2. *Pour cette question, une seule réponse A, B, C est exacte. Indiquer sur la copie la lettre correspondant à la réponse choisie. On ne demande aucune justification.*
La réponse juste rapporte un point. Une réponse fausse ou une absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de point.

   La courbe $\mathscr{C}$ admet une asymptote en $-\infty$ dont une équation est :

Réponse A	Réponse B	Réponse C
$y = x+1$	$y = 2x+2$	$y = 2$

3. **a.** Démontrer que le développement limité, à l'ordre 2, au voisinage de 0, de la fonction f est :

$$f(x) = 3 + 4x + \frac{3}{2}x^2 + x^2\epsilon(x) \text{ avec } \lim_{x \to 0} \epsilon(x) = 0.$$

Pour les question 3. b et 3. c, une seule réponse A, B, C est exacte. Indiquer sur la copie la lettre correspondant à la réponse choisie. On ne demande aucune justification.
La réponse juste rapporte un point. Une réponse fausse ou une absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de point.

   b. Une équation de la tangente T à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0 est :

Réponse A	Réponse B	Réponse C
$y = 3$	$y = 3+4x$	$y = \frac{3}{2}x^2$

   c. Au voisinage du point d'abscisse 0, la courbe $\mathscr{C}$ est :

Réponse A	Réponse B	Réponse C
au-dessus de la tangente T pour tout x.	au-dessous de la tangente T pour tout x.	au-dessous de la tangente T quand $x < 0$ et au-dessus quand $x > 0$.

C. Calcul intégral

1. On note $I = \int_{-1}^{1} (2x+2)\,\mathrm{d}x$.
   Montrer que $I = 4$.

2. On note $I = \int_{-1}^{1} (x+1)\mathrm{e}^{x}\,\mathrm{d}x$.
   Démontrer à l'aide d'une intégration par parties que $J = \mathrm{e} + \mathrm{e}^{-1}$.

3. **a.** On note $K = \int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x$, où f est la fonction définie dans la partie B.
   Déduire de ce qui précède la valeur exacte de K.

   b. Donner la valeur de K, arrondie à 10^{-2}.

   c. On admet que pour tout x de l'intervalle $[-1\,;\,1]$, $f(x) \geqslant 0$.
   Donner une interprétation graphique de K.

Exercice 2 **8 points**

Les trois parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.

Dans une usine de conditionnement, une machine remplit à la chaîne des bouteilles d'un certain liquide.

A. Loi binomiale et loi de Poisson

Dans cette partie, les résultats approchés sont à arrondir à 10^{-3}.
On note E l'évènement « une bouteille prélevée au hasard dans un stock important est non conforme au cahier des charges ».
On suppose que la probabilité de E est $0,02$.
On prélève au hasard 30 bouteilles dans le stock pour vérification. On suppose que le stock est suffisamment important pour qu'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise. On considère la variable aléatoire X qui, à chaque prélèvement de 30 bouteilles, associe le nombre de bouteilles non conformes.

1. **a.** Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale dont on déterminera les paramètres.

   b. Calculer $P(X \leqslant 1)$.
2. On considère que la loi de probabilité suivie par la variable aléatoire X peut être approchée par une loi de Poisson.
   Déterminer le paramètre λ de cette loi de Poisson.
   On désigne par Y une variable aléatoire suivant la loi de Poisson de paramètre λ, où λ a la valeur obtenue au a.
   En utilisant cette variable aléatoire, calculer la probabilité que dans un tel prélèvement de 30 bouteilles, au plus une bouteille soit non conforme.

Dans ce qui suit, les résultats approchés sont à arrondir à10^{-2}.

B. Loi normale

Dans cette partie, on considère une grande quantité de bouteilles devant être livrées à des clients.
On note Z la variable aléatoire qui, à une bouteille prélevée au hasard dans cette livraison, associe sa contenance en centilitres.
On suppose que Z suit la loi normale de moyenne 70 et d'écart type 1.

1. Calculer $P(68 \leqslant Z \leqslant 72)$.
2. Déterminer le nombre réel h positif tel que $P(70 - h \leqslant Z \leqslant 70 + h) = 0,99$.

C. Intervalle de confiance

Une chaîne de supermarchés réceptionne un lot important de bouteilles dont elle souhaite estimer la contenance moyenne. On prélève au hasard et avec remise un échantillon de 100 bouteilles dans ce lot.
Soit $\overline{C}$ la variable aléatoire qui à tout échantillon de 100 bouteilles ainsi prélevé associe la moyenne des contenances en centilitres des bouteilles de cet échantillon. On suppose que $\overline{C}$ suit la loi normale de moyenne inconnue μ et d'écart type $\dfrac{\sigma}{\sqrt{10}}$ avec $\sigma = 1$.
Pour l'échantillon prélevé, la moyenne obtenue est $\overline{x} = 70,12$.

1. Déterminer un intervalle de confiance centré en $\overline{x}$ de la moyenne μ des contenances des bouteilles de ce lot, avec le coefficient de confiance 95 %. (On arrondira les bornes de l'intervalle à 10^{-2}).

2. On considère l'affirmation suivante : « la moyenne μ est obligatoirement dans l'intervalle de confiance obtenu à la question 1. ».

Cette affirmation est-elle vraie ? (Donner la réponse sans explication).

Retour au sommaire : 6

Nouvelle Calédonie, novembre 2010

Exercice 1 **12 points**

Les trois parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante

A. Résolution d'une équation différentielle

On considère l'équation différentielle

$$(\text{E}) : \quad y' - 3y = -\mathrm{e}^{3x}$$

où la fonction inconnue y, de la variable réelle x, est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et y' désigne sa fonction dérivée.

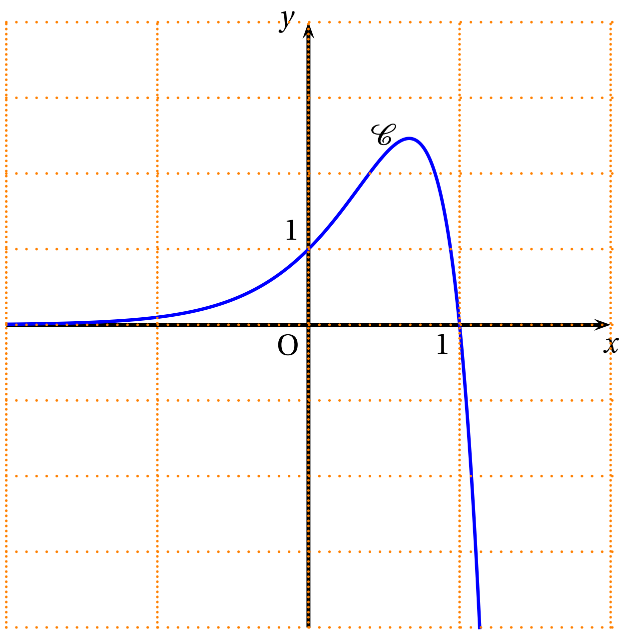
1. Déterminer les solutions définies sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle

$$(\text{E}_0) : \quad y' - 3y = 0.$$

2. Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = -x\mathrm{e}^{3x}$.
   Démontrer que la fonction h est une solution particulière de l'équation différentielle (E).
3. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E).
4. Déterminer la solution f de l'équation différentielle (E) qui vérifie la condition initiale $f(0) = 1$.

B. Étude d'une fonction

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (1-x)\mathrm{e}^{3x}$. Sa courbe représentative   est donnée dans un repère orthogonal ci-dessous.



1. **a.** Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

b. *Pour cette question, une seule réponse A, B, C est exacte. Indiquer sur la copie la lettre correspondant à la réponse choisie. On ne demande aucune justification.*
La réponse juste rapporte un point. Une réponse fausse ou une absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de point.

La courbe $\mathscr{C}$ admet une asymptote en $-\infty$ dont une équation est :

Réponse A	Réponse B	Réponse C
$y = 1 - x$	$x = 0$	$y = 0$

2. **a.** Démontrer que, pour tout réel x, $f'(x) = (2-3x)\mathrm{e}^{3x}$.

b. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $f'(x) \geqslant 0$.

c. Établir le tableau de variations de f.
(La valeur de $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ n'est pas demandée.)

3. **a.** À l'aide du développement limité au voisinage de 0 de la fonction $t \longmapsto \mathrm{e}^t$, donner le développement limité, à l'ordre 2, au voisinage de 0, de la fonction $x \longmapsto \mathrm{e}^{3x}$.

b. En déduire que le développement limité, à l'ordre 2, au voisinage de 0, de la fonction f est :

$$f(x) = 1 + 2x + \frac{3}{2}x^2 + x^2\epsilon(x) \quad \text{avec} \quad \lim_{x\to 0}\epsilon(x) = 0.$$

Pour les questions 3. c. et 3. d., une seule réponse A, B, C est exacte.
Indiquer sur la copie la lettre correspondant à la réponse choisie. On ne demande aucune justification.
La réponse juste rapporte un point. Une réponse fausse ou une absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de point.

c. Une équation de la tangente T à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0 est :

Réponse A	Réponse B	Réponse C
$y = \frac{3}{2}x^2$	$y = 1 + 2x$	$y = 1$

d. Au voisinage du point d'abscisse 0, la courbe $\mathscr{C}$ est :

Réponse A	Réponse B	Réponse C
au-dessous de la tangente T pour tout x.	au-dessus de la tangente T pour tout x.	au-dessous de la tangente T quand $x < 0$ et au-dessus quand $x > 0$.

C. Calcul intégral

1. On note $\mathrm{I} = \displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x$ où f est la fonction définie dans la partie B.

a. Démontrer, à l'aide d'une intégration par parties, que $\mathrm{I} = \dfrac{\mathrm{e}^3 - 7\mathrm{e}^{-3}}{9}$.

b. Donner la valeur de I, arrondie à 10^{-2}.

2. **a.** Donner, sans justification, le signe de $f(x)$ pour x dans l'intervalle $[-1\ ;\ 1]$.

b. Interpréter graphiquement le nombre I.

Exercice 2 **8 points**

Les trois parties de cet exercice sont indépendantes

Une entreprise produit en grande série des plaques métalliques rectangulaires pour l'industrie automobile.

Dans ce qui suit, les résultats approchés sont à arrondir à10^{-1}

A. Loi binomiale

On note E l'évènement : « une plaque prélevée au hasard dans la production d'une journée est défectueuse ».
On suppose que $P(E) = 0,02$.
On prélève au hasard 50 plaques dans la production de la journée pour vérification. La production est assez importante pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise de 50 plaques.
On considère la variable aléatoire X qui, à tout prélèvement ainsi défini, associe le nombre de plaques de ce prélèvement qui sont défectueuses.

1. Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale dont on déterminera les paramètres.
2. Calculer les probabilités $P(X = 0)$ et $P(X = 1)$.
3. Calculer la probabilité que, dans un tel prélèvement, au plus deux plaques soient défectueuses.

B. Loi normale

Une plaque de ce type est conforme pour la longueur lorsque sa longueur L, exprimée en millimètres, appartient à l'intervalle $[548\,;\,552]$. Une plaque de ce type est conforme pour la largeur lorsque sa largeur ℓ, exprimée en millimètres, appartient à l'intervalle $[108\,;\,112]$.

1. On note L_1 la variable aléatoire qui, à chaque plaque de ce type prélevée au hasard dans un stock important, associe sa longueur L. On suppose que la variable aléatoire L_1 suit la loi normale de moyenne 550 et d'écart type 1.
   Calculer $P(548 \leqslant L_1 \leqslant 552)$.
2. On note L_2 la variable aléatoire qui, à chaque plaque de ce type prélevée au hasard dans le stock, associe sa largeur 1. On admet que
   $P \leqslant (108 \leqslant L_2 \leqslant 112) = 0,95$.
   On suppose que les variables aléatoires L_1 et L_2 sont indépendantes.
   On prélève une plaque au hasard dans le stock. Déterminer la probabilité qu'elle soit conforme pour la longueur et conforme pour la largeur.

C. Intervalle de confiance

Dans cette partie on considère une grande quantité de plaques devant être livrées à une chaîne de montage de véhicules électriques. On considère un échantillon de 100 plaques prélevées au hasard dans cette livraison. La livraison est assez importante pour que l'on puisse assimiler ce tirage à un tirage avec remise.
On constate que 94 plaques sont sans défaut.

1. Donner une estimation ponctuelle de la fréquence inconnue p des plaques de cette livraison qui sont sans défaut.

2. Soit F la variable aléatoire qui, à tout échantillon de 100 plaques prélevées au hasard et avec remise dans cette livraison, associe la fréquence des plaques de cet échantillon qui sont sans défaut.

On suppose que F suit la loi normale de moyenne p et d'écart type $\sqrt{\dfrac{p(1-p)}{100}}$,où p est la fréquence inconnue des plaques de la livraison qui sont sans défaut.

Déterminer un intervalle de confiance de la fréquence p avec le coefficient de confiance 95 %.

Retour au sommaire : 6

mai 2011

Exercice 1 **12 points**

Les deux parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.

A. Résolution d'une équation différentielle

On considère l'équation différentielle (E) : $y'' - 3y' + 2y = -2e^x + 6$ où y est une fonction inconnue de la variable réelle x, définie et deux fois dérivable sur R, y' la fonction dérivée de y et y'' sa fonction dérivée seconde.

1. **a.** Résoudre dans R l'équation : $r^2 - 3r + 2 = 0$.

b. En déduire les solutions définies sur R de l'équation différentielle :
(E_0) : $y'' - 3y' + 2y = 0$.

2. Soit g la fonction définie sur R par $g(x) = 2xe^x + 3$.

a. *Cette question est une question à choix multiples. Une seule réponse est exacte.*
Recopier sur la copie la réponse qui vous paraît exacte. On ne demande aucune justification.
La réponse juste rapporte un point. Une réponse fausse ou une absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de point.

La fonction dérivée g' de la fonction g est définie sur R par :

$g'(x) = 2e^x$	$g'(x) = 2xe^x$	$g'(x) = (2x+2)e^x$

b. Démontrer que la fonction g est une solution particulière de l'équation différentielle (E).

3. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E).

4. Déterminer la solution f de l'équation différentielle (E) qui vérifie les conditions initiales $f(0) = 2$ et $f'(0) = 1$.

B. Étude d'une fonction et calcul intégral

Soit f la fonction définie sur R par $f(x) = (2x-1)e^x + 3$. On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal.

1. **a.** On admet le résultat suivant : $\lim_{x \to -\infty} xe^x = 0$.
Calculer $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} f(x)$.

b. En déduire que la courbe $\mathscr{C}$ admet une droite asymptote dont on donnera une équation.

2. **a.** Démontrer que le développement limité, à l'ordre 2, au voisinage de 0, de la fonction f est : $f(x) = 2 + x + \frac{3}{2}x^2 + x^2\varepsilon(x)$ avec $\lim_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$.

b. En déduire une équation de la tangente T à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0.

c. *Cette question est une question à choix multiples. Une seule réponse est exacte.*
Recopier sur la copie la réponse qui vous paraît exacte. On ne demande aucune justification.
La réponse juste rapporte un point. Une réponse fausse ou une absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de point.

On veut justifier qu'au voisinage du point d'abscisse 0, la courbe $\mathscr{C}$ est au-dessus de la droite T. Recopier sur votre copie la justification exacte.

$\frac{3}{2}x^2$ est positif au voisinage de 0.	$x^2\varepsilon(x)$ est positif au voisinage de 0.	$2+x$ est positif au voisinage de 0.

3. On admet que la fonction dérivée de f est donnée, pour tout x réel, par : $f'(x) = (2x+1)e^x$.

a. Étudier sur R le signe de $f'(x)$ puis en déduire le sens de variation de f sur R.

b. Donner la valeur approchée arrondie à 0,01 du minimum de la fonction f.

4. **a.** On note $I = \int_0^{0,5}\left(2+x+\frac{3}{2}x^2\right)\mathrm{d}x$.
Démontrer que $I = 1,1875$.

b. On note $K = \int_0^{0,5}(2x-l)e^x\mathrm{d}x$.
Démontrer, à l'aide d'une intégration par parties, que $K = 3-2e^{0,5}$.

c. On note $J = \int_0^{0,5} f(x)\mathrm{d}x$.
En utilisant la question précédente, déterminer la valeur exacte de J.

d. Vérifier que $J - I$ est inférieur à 2×10^{-2}.

Exercice 2 **8 points**

Les trois parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.

Une entreprise fabrique des barres de combustible pour des centrales électriques. Des pastilles de combustible sont introduites dans des gaines qui servent à réaliser ces barres.

Dans cet exercice, les résultats approchés sont à arrondir à 10^{-3}**.**

A. Loi normale

Une gaine est considérée comme conforme pour le diamètre lorsque le diamètre intérieur, exprimé en millimètres, appartient à l'intervalle [8,18 ; 8,48].

On note X la variable aléatoire qui, à chaque gaine prélevée au hasard dans la production d'une journée, associe son diamètre intérieur.

On admet que X suit la loi normale de moyenne 8,33 et d'écart type 0,09.

1. Calculer la probabilité qu'une gaine ainsi prélevée soit conforme pour son diamètre intérieur.

2. Calculer le nombre réel h positif tel que $P(8,33-h \leqslant X \leqslant 8,33+h) = 0,95$. Interpréter le résultat à l'aide d'une phrase.

B. Loi binomiale

On considère un stock important de gaines. On note E l'événement : « une gaine prélevée au hasard dans le stock n'est pas conforme pour le diamètre intérieur ».

On suppose que $P(E) = 0,096$.

On prélève au hasard 50 gaines dans le stock pour vérification du diamètre intérieur. Le stock est suffisamment important pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise de 50 gaines.

On considère la variable aléatoire Y qui, à tout prélèvement de 50 gaines ainsi défini, associe le nombre de gaines non conformes pour le diamètre intérieur de ce prélèvement.

1. Justifier que la variable aléatoire Y suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.

2. Calculer la probabilité que, dans un tel prélèvement, cinq gaines ne soient pas conformes pour le diamètre intérieur.

3. Calculer la probabilité que, dans un tel prélèvement, au plus deux gaines ne soient pas conformes pour le diamètre intérieur.

C. Test d'hypothèse

On se propose de construire un test d'hypothèse pour contrôler la moyenne μ inconnue des diamètres, exprimés en millimètres, d'un lot important de pastilles de combustible destinées à remplir les gaines.

On note D la variable aléatoire qui, à chaque pastille prélevée au hasard dans le lot, associe son diamètre.

On admet que la variable aléatoire D suit la loi normale de moyenne inconnue μ et d'écart type 0,2.

On désigne par $\overline{D}$ la variable aléatoire qui, à chaque échantillon aléatoire de 300 pastilles prélevées dans le lot, associe la moyenne des diamètres de ces pastilles (le lot est assez important pour que l'on puisse assimiler ces prélèvements à des tirages avec remise).

L'hypothèse nulle est $H_0 :\ \mu = 8,13$. Dans ce cas la livraison est dite conforme pour le diamètre.

L'hypothèse alternative est $H_1 :\ \mu \neq 8,13$.

Le seuil de signification du test est fixé à 5 %.

1. Sous l'hypothèse nulle H_0, on admet que la variable aléatoire $\overline{D}$ suit la loi normale de moyenne 8,13 et d'écart type 0,012.

   On admet également que $P(8,106 \leqslant \overline{D} \leqslant 8,154) = 0,95$.

   Ce résultat n'a pas à être démontré.

   Énoncer la règle de décision permettant d'utiliser ce test.

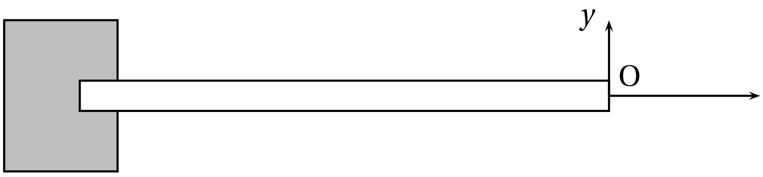
2. On prélève un échantillon aléatoire de 300 pastilles dans la livraison reçue et on observe que, pour cet échantillon, la moyenne des diamètres des pastilles est $\overline{d} = 8,16$. Peut-on, au seuil de 5 %, conclure que la livraison est conforme pour le diamètre ?

Retour au sommaire : 6

Nouvelle Calédonie, novembre 2011

Exercice 1 **12 points**

Une entreprise étudie en laboratoire les propriétés vibratoires d'un nouveau matériau. Une barre de ce matériau est tenue horizontalement à une extrémité ; à l'autre extrémité elle est soumise à une force dirigée vers le bas et d'intensité variable. On considère, dans le repère indiqué sur la figure ci-dessous, l'ordonnée $y(t)$ de l'extrémité libre, en fonction du temps t.



Les trois parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante

A. Résolution d'une équation différentielle

L'étude du système mécanique conduit à considérer l'équation différentielle (E) :

$$y'' + 4y' + 104y = -10,1\mathrm{e}^{-t}$$

où y est une fonction de la variable réelle t, définie et deux fois dérivable sur $[0~;~+\infty[$, y' sa fonction dérivée et y'' sa fonction dérivée seconde.

1. **a.** Montrer que les solutions complexes de l'équation $r^2 + 4r + 104 = 0$ sont $r_1 = -2 + 10\mathrm{i}$ et $r_2 = -2 - 10\mathrm{i}$.

   b. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E_0) :

$$y'' + 4y' + 104y = 0.$$

2. Montrer que la fonction h, définie sur $[0~;~+\infty[$ par $h(t) = -0,1\mathrm{e}^{-t}$, est une solution de l'équation différentielle (E).
3. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E).
4. Montrer que la solution f de l'équation différentielle (E) définie sur $[0~;~+\infty[$ par :

$$f(t) = -0,1\left[\mathrm{e}^{-t} - \cos(10t)\mathrm{e}^{-2t}\right]$$

   vérifie les conditions initiales $f(0) = 0$ et $f'(0) = -0,1$.

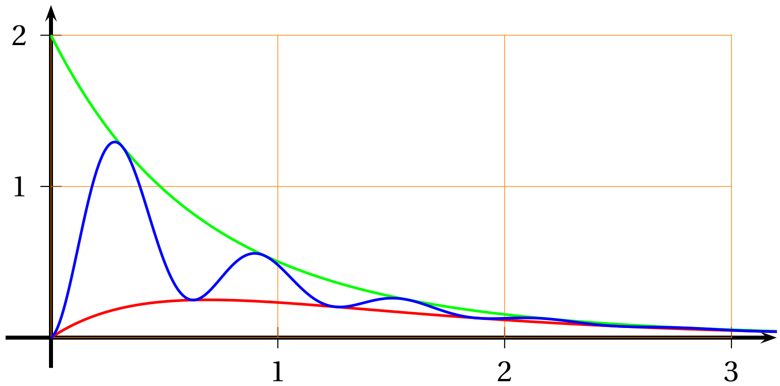
B. Étude de fonctions

Soit g_1 et g_2 les fonctions définies sur $[0~;~+\infty[$ par

$$g_1(t) = \mathrm{e}^{-t} + \mathrm{e}^{-2t} \quad \text{et} \quad g_2(t) = \mathrm{e}^{-t} - \mathrm{e}^{-2t}.$$

Les courbes représentatives des fonctions g_1 et g_2, dans un repère orthonormal, ainsi que celle de la fonction $g = -10f$ définie sur $[0~;~+\infty[$ par $g(t) = \mathrm{e}^{-t} - \cos(10t)\mathrm{e}^{-2t}$, sont données sur la figure de la page suivante.

1. On admet que, pour tout t dans $[0\ ;\ +\infty[$, on a $g_2(t) \leqslant g(t) \leqslant g_1(t)$.
Ce résultat, admis, n'a pas à être démontré.
Attribuer à chaque courbe $\mathscr{C}$, $\mathscr{C}'$, $\mathscr{C}''$ de la figure, la fonction qui lui correspond.
Aucune justification n'est demandée.



2. Déterminer les limites en $+\infty$ des fonctions g_1 et g_2 et interpréter graphiquement les résultats obtenus.

3. **a.** Calculer la dérivée de g_1.

b. Justifier que g_1 est décroissante sur $[0\ ;\ +\infty[$.

4. **a.** Démontrer que, pour tout t de $[0\ ;\ +\infty[$, $g_2'(t) = \mathrm{e}^{-t}\left(2\mathrm{e}^{-t} - 1\right)$.

b. Résoudre dans $[0\ ;\ +\infty[$ l'inéquation $2\mathrm{e}^{-t} - 1 \geqslant 0$.

c. Déduire de ce qui précède la valeur exacte de t pour laquelle la fonction g_2 admet un maximum.

5. *Les questions* 5. *a. et* 5. *b. sont des questions à choix multiples. Pour chaque question, une seule réponse est exacte. Recopier sur la copie la réponse qui vous paraît exacte. On ne demande aucune justification.*
La réponse juste rapporte un point. Une réponse fausse ou une absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de point.

On admet que le développement limité à l'ordre 2 au voisinage de 0 de la fonction g_2 est :

$$g_2(t) = t - \frac{3}{2}t^2 + t^2\epsilon(t) \quad \text{avec } \lim_{t\to 0}\epsilon(t) = 0.$$

Ce développement limité, admis, n'a pas à être démontré.

a. On déduit de ce développement limité qu'une équation de la tangente T à la courbe représentative de g_2 au point d'abscisse 0 est :

$y = 0$	$y = t$	$y = t - \dfrac{3t^2}{2}$

b. On veut justifier qu'au voisinage du point d'abscisse 0, la courbe représentative de g_2 est en dessous de la tangente T. Recopier sur votre copie la justification exacte.

$t^2\epsilon(t)$ est négatif lorsque t est positif.	$t - \dfrac{3t^2}{2}$ est négatif.	$-\dfrac{3t^2}{2}$ est négatif.

C. Calcul d'intégrale

1. Démontrer que la valeur exacte de l'intégrale $I = \int_0^3 \left[g_1(t) - g_2(t)\right] \mathrm{d}t$ où g_1 et g_2 sont les fonctions définies au début de la partie B, est $I = 1 - \mathrm{e}^{-6}$.
2. Interpréter géométriquement le résultat précédent.

Les questions 1., 2., 3., 4. de cet exercice sont indépendantes

Exercice 2 **8 points**

On considère un stock de pièces de rechange pour les machines-outils d'une grande entreprise.

Dans cet exercice, les résultats approchés sont à arrondir à 10^{-2}(sauf mention particulière)

1. Le tableau suivant récapitule la consommation mensuelle d'un certain modèle de roulements à billes, pour les 11 mois travaillés de l'année dernière.

Mois	Janvier	Février	Mars	Avril	Mai	Juin
Quantité	20	30	25	15	25	10

Mois	Juillet	Septembre	Octobre	Novembre	Décembre
Quantité	35	42	25	35	15

Déterminer la moyenne x et l'écart type σ de cette série statistique.

2. On désigne par X la variable aléatoire qui, à un mois travaillé pris au hasard dans l'année à venir, associe la consommation du type de roulements à billes considéré au 1. On suppose que X suit la loi normale de moyenne 25 et d'écart type 9,5.
   a. Calculer $P(14,5 \leqslant X \leqslant 35,5)$.
   b. Déterminer le nombre réel k tel que $P(X \leqslant k) = 0,95$.
   Le nombre entier n, obtenu en arrondissant k par excès, est appelé « stock d'alerte à 5 % » *pour la pièce considérée.*
3. Le délai de livraison d'un certain type de transformateur est de 20 jours. On admet que la variable aléatoire Y qui, à une période de 20 jours prise au hasard dans l'année à venir, associe le nombre de transformateurs de ce type, mis en service pendant cette période, suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda = 3$.
   a. Calculer $P(Y \leqslant 5)$ et $P(Y \leqslant 6)$.
   b. En déduire le « stock d'alerte à 5 % » pour ce type de transformateur, c'est -à-dire le plus petit entier a tel que $P(y \leqslant a) > 0,95$.
4. Pour réapprovisionner le stock d'un certain type de joints circulaires, on effectue une commande en grande quantité. Le fabriquant garantit des joints de 30 mm de diamètre, avec un écart type $\sigma = 1$ mm.
   Il est convenu de procéder, à la réception, à un contrôle de qualité à l'aide d'un test d'hypothèse bilatéral de la moyenne, sur un échantillon aléatoire de 64 joints.
   On désigne par $\overline{Z}$ la variable aléatoire qui, à chaque échantillon aléatoire de 64joints prélevés dans le lot reçu, associe la moyenne des diamètres en millimètres des joints de cet échantillon (le lot est suffisamment important pour qu'on puisse assimiler ces prélèvements à des tirages avec remise).

L'hypothèse nulle est H_0 : « $\mu = 30$ ».

L'hypothèse alternative est H_1 : « $\mu \neq 30$ ». Le seuil de signification du test est fixé à 0,05.

a. Sous l'hypothèse H_0, on considère que $\overline{Z}$ suit la loi normale de moyenne 30 et d'écart type $\dfrac{\sigma}{\sqrt{64}}$.

Déterminer, sous cette hypothèse, le nombre réel h positif tel que :

$$P\left(30 - h \leqslant \overline{Z} \leqslant 30 + h\right) = 0,95.$$

Arrondir h à 10^{-3}.

b. En déduire la règle de décision permettant d'utiliser ce test.

c. Sur l'échantillon de 64 joints prélevés dans le lot reçu, on trouve une moyenne de 29,8 mm pour les diamètres.

Indiquer si le lot est accepté en utilisant la règle de décision de la question précédente.

Retour au sommaire : 6

mai 2012

Exercice 1 **12 points**

Les trois parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.

A. résolution d'une équation différentielle

On considère l'équation différentielle (E) : $y' + 2\ y = -5\mathrm{e}^{-2x}$ où y est une fonction inconnue de la variable réelle x, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, et y' la fonction dérivée de y.

1. Déterminer les solutions de l'équation différentielle (E_0) : $y' + 2y = 0$.
2. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = -5x\mathrm{e}^{-2x}$. Démontrer que la fonction g est une solution de (E).
3. En déduire les solutions de l'équation différentielle (E).
4. Déterminer la solution f de l'équation différentielle (E) vérifiant la condition initiale $f(0) = 1$.

B. Étude locale d'une fonction

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = (1 - 5x)\mathrm{e}^{-2x}.$$

On note C sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormal.

1. **a.** On admet le résultat suivant : $\lim\limits_{x \to +\infty} -5x\mathrm{e}^{-2x} = 0$. Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

   b. *Cette question est une question à choix multiples. Une seule réponse est exacte. Recopier sur la copie la réponse qui vous paraît exacte. On ne demande aucune justification.*

   La réponse juste rapporte un point. Une réponse fausse ou une absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de point.

   La courbe C admet une asymptote en $+\infty$ dont une équation est :

Réponse A	Réponse B	Réponse C
$y = 1 - 5x$	$y = 0$	$x = 0$

2. **a.** À l'aide du développement limité, à l'ordre 2, au voisinage de 0, de la fonction $t \to \mathrm{e}^t$, déterminer le développement limité, à l'ordre 2, au voisinage de 0 de la fonction $x \to \mathrm{e}^{-2x}$.

   b. En déduire que le développement limité, à l'ordre 2, au voisinage de 0, de la fonction f est : $f(x) = 1 - 7x + 12x^2 + x^2\varepsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$.

   c. En déduire une équation de la tangente T à la courbe C au point d'abscisse 0.

   d. *Cette question est une question à choix multiples.* U*ne seule réponse est exacte. Recopier sur la copie la réponse qui vous paraît exacte. On ne demande aucune justification.*

   La réponse juste rapporte un point. Une réponse fausse ou une absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de point.

   On veut justifier qu'au voisinage du point d'abscisse 0, la courbe C est au-dessus de la droite T. Recopier sur la copie la justification qui vous paraît exacte

$12x^2$ est positif au voisinage de 0.	$x^2\varepsilon(x)$ est positif au voisinage de 0.	$1 - 7x$ est positif au voisinage de 0.

C. Calcul intégral

1. On note $\mathrm{I} = \displaystyle\int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x$ où f est la fonction définie dans la partie *B*.

   a. Démontrer, à l'aide d'une intégration par parties que $\mathrm{I} = \dfrac{23\mathrm{e}^{-4} - 13\mathrm{e}^{-2}}{4}$.

   b. Donner la valeur de I, arrondie à 10^{-2}.

2. **a.** Donner, sans justification, le signe de $f(x)$ pour x dans l'intervalle $[1\,;2]$.

   b. Interpréter graphiquement le nombre I.

   Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète ou non aboutie, sera prise en compte.

Exercice 2 **8 points**

Les trois parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.

Un particulier souhaite acheter, auprès d'un producteur, des bottes de paille pour l'isolation de sa maison.

Dans cette exercice, les résultats approchés sont à arrondir à 10^{-2}.

A. *Loi normale*

On prélève au hasard une botte de paille dans la production du 20 juillet 2011.

1. On note X la variable aléatoire qui, à chaque botte ainsi prélevée, associe on épaisseur exprimée en millimètres. On admet que X suit la loi normale de moyenne 360 et d'écart type 18. Calculer la probabilité $p(350 \leqslant X \leqslant 370)$.

2. On note Y la variable aléatoire qui, à chaque botte prélevée dans la production de cette journée, associe sa densité exprimée en $\mathrm{kg/m^3}$. On admet que Y suit la loi normale de moyenne 100 et d'écart type 5.

   Calculer la probabilité qu'une botte prélevée dans la production de cette journée ait une densité comprise entre 90 $\mathrm{kg/m^3}$ et 110 $\mathrm{kg/m^3}$.

3. On suppose que les variables aléatoires X et Y sont indépendantes.

   Une botte de paille est conforme aux normes d'isolation si son épaisseur, exprimée en millimètres, appartient à l'intervalle $[350\,; 370]$ et si sa densité, exprimée en $\mathrm{kg/m^3}$, appartient à l'intervalle $[90\,; 110]$. Calculer la probabilité qu'une botte prélevée dans la production de cette journée soit conforme aux normes d'isolation.

   Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète ou non aboutie, sera prise en compte.

B. Loi binomiale

On considêre un stock important de bottes de paille, dont une partie est destinée à un usage d'isolation. On note E l'événement : « une botte prélevée au hasard dans le stock est conforme aux normes d'isolation ». On suppose que $p(E) = 0,4$.
On prélève au hasard 5 bottes de paille dans le stock pour vérification de la conformité aux normes d'isolation. Le stock est suffisamment important pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise de 5 bottes.
On considère la variable aléatoire Z qui, à tout prélèvement de 5 bottes ainsi défini, associe le nombre de bottes de paille conformes aux normes d'isolation.

1. Justifier que la variable aléatoire Z suit une loi binomiale dont on déterminera les paramètres.

2. Calculer la probabilité que, dans un tel prélèvement, toutes les bottes de paille soient conformes aux normes d'isolation.

3. Calculer la probabilité que, dans un tel prélèvement, au moins quatre bottes de paille soient conformes aux normes d'isolation.

C. *Intervalle de confiance*

Dans cette partie, on considère les bottes de paille produites le 22 juillet 2011. On prélève au hasard un échantillon de 50 bottes de paille dans cette production. La production est assez importante pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise.
On constate que 37 bottes de paille de cet échantillon sont conformes aux normes d'isolation.

1. Donner une estimation ponctuelle de la fréquence inconnue p des bottes de paille de cette production qui sont conformes aux normes d'isolation.

2. Soit F la variable aléatoire qui à tout échantillon de 50 bottes ainsi prélevé dans cette production, associe la fréquence des bottes de cet échantillon qui sont conformes aux normes d'isolation.

On suppose que F suit la loi normale de moyenne inconnue p et d'écart type $\sqrt{\dfrac{p(1-p)}{50}}$.

a. Déterminer un intervalle de confiance de la fréquence p au niveau de confiance de 95 %.

b. On considère l'affirmation suivante :
« La fréquence p est obligatoirement dans l'intervalle de confiance obtenu à la question 2. a ».

Cette affirmation est-elle vraie ? (Donner la réponse sans explication)

Retour au sommaire : 6

Nouvelle Calédonie, novembre 2012

Exercice 1 **12 points**

Les trois parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.

Partie A - Résolution d'une équation différentielle

On considère l'équation différentielle :

$$y' + 2y = 2x - \mathrm{e}^{-2x}, \qquad \text{(E)}$$

où y est une fonction inconnue de la variable réelle x, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, et y' la fonction dérivée de y.

1. Déterminer les solutions de l'équation différentielle :

$$y' + 2y = 0 \qquad \text{(E')}$$

2. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x - \dfrac{1}{2} - x\mathrm{e}^{-2x}$. Démontrer que la fonction g est une solution de (E).
3. En déduire les solutions de l'équation différentielle (E).
4. Déterminer la solution f de l'équation (E) vérifiant la condition initiale $f(0) = 0$.

Partie B - Étude locale d'une fonction

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x - \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2} - x\right)\mathrm{e}^{-2x}.$$

On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormal.

1. **a.** Vérifier que, pour tout réel x,

$$f(x) = \left(\frac{1}{2} - x\right)\left(\mathrm{e}^{-2x} - 1\right),$$

puis calculer $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} f(x)$.

b. *Cette question est une question à choix multiples. Une seule réponse est exacte. Recopier sur la copie la réponse qui vous paraît exacte. On ne demande aucune justification.*

La réponse juste rapporte un point. Une réponse fausse ou une absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de point.

La courbe $\mathscr{C}$ admet une asymptote en $+\infty$ dont une équation est :

$y = 2x - 1$	$y = x - \frac{1}{2}$	$y = \frac{1}{2} - x$

2. **a.** À l'aide du développement limité, à l'ordre 2, au voisinage de 0, de la fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{t}$, déterminer le développement à l'ordre 2, au voisinage de 0 de ma fonction : $x \mapsto \mathrm{e}^{-2x}$.

b. En déduire que le développement limité, à l'ordre 2, au voisinage de 0, de la fonction f est :

$$f(x) = -x + 3x^2 + x^2\varepsilon(x), \text{ avec } \lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0.$$

Les questions 2c et 2d sont des questions à choix multiples. Une seule réponse est exacte. Recopier sur la copie la réponse qui vous paraît exacte. On ne demande aucune justification.

La réponse juste rapporte un point. Une réponse fausse ou une absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de point.

c. Une équation de la tangente $\mathscr{T}$ à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0 est :

$y = -x + 3x^2$	$y = 3x^2$	$y = -x$

d. Au voisinage du point d'abscisse 0, la courbe $\mathscr{C}$ est :

au dessus de la tangente $\mathscr{T}$	en dessous de la tangente $\mathscr{T}$	en dessous de la tangente $\mathscr{T}$ quand $x < 0$ et au dessus quand $x > 0$.

Partie C - Calcul intégral

1. On note $I = \displaystyle\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left(-x + 3x^2\right) \mathrm{d}x$.

Démontrer que $I = \dfrac{1}{4}$.

2. On note $J = \displaystyle\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2} - x\right) \mathrm{e}^{-2x} \mathrm{d}x$.

Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que $J = \frac{\mathrm{e}+\mathrm{e}^{-1}}{4}$.

3. a. On note $K = \displaystyle\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(x)\, \mathrm{d}x$, où f est la fonction définie dans la partie B.

Déduire de ce qui précède la valeur exacte de K.

b. Donner la valeur approchée de $K - I$ arrondie à 10^{-4}.

Exercice 2 **8 points**

Les quatre parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.
Un sous-traitant automobile fabrique des charnières de capot.

Dans cet exercice, les résultats seront à arrondir à 10^{-2} .

Partie A - Loi binomiale

On considère un stock important de charnières en attente de perçage. On note E l'évènement : « une charnière prélevée au hasard dans ce stock est défectueuse ». On suppose que $P(E) = 0,03$.
On prélève au hasard 100 charnières dans ce stock. Le stock est assez important pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise.
On considère la variable X, qui a chaque prélèvement de 100 charnières, associe le nombre de celles qui sont défectueuses.

1. Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale dont on déterminera les paramètres.
2. Calculer $P(x \geqslant 2)$.

Partie B - Loi de Poisson

On considère la perceuse n° 1 de cet atelier. On désigne par Y la variable aléatoire qui, à tout instant, associe le nombre de charnière en attente devant cette perceuse.
On suppose que la variable aléatoire Y suit une loi de Poisson de paramètre λ.

1. On suppose dans cette question que l'atelier dispose de deux perceuses. Dans ce cas, le paramètre λ de la loi de la variable aléatoire Y vaut $\lambda = 6$.
   a. Déterminer $P(Y = 8)$.
   b. Déterminer $P(Y > 7)$.
2. Soit S l'évènement : « il y a plus de 7 charnières en attente devant la perceuse n° 1 ».
   Lorsque l'atelier dispose de 3 perceuses, le paramètre λ de la loi de la variable aléatoire Y vaut $\lambda = 4$.
   Lorsque l'atelier dispose de 4 perceuses, le paramètre λ de la loi de la variable aléatoire Y vaut $\lambda = 3$.
   Quel est le nombre minimal de perceuses pour que la probabilité S soit inférieure à $0,1$?
   Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète ou non aboutie, sera prise en compte.

Partie C - Loi normale

On considère la production de charnières dans cette journée.
On note Z la variable aléatoire qui, à chaque charnière prélevée au hasard dans cette production, associe le diamètre du trou exprimé en millimètres. On admet que Z suit une loi normale de moyenne $6,2$ et d'écart-type $0,08$.
Calculer $P(Z \leqslant 6)$, dans ce cas le perçage sera à refaire.

Partie D - Intervalle de confiance

Avant d'expédier un lot de charnières au constructeur, on se propose d'en estimer la moyenne des diamètres de perçage.
On prélève un échantillon au hasard et avec remise de 100 charnières dans ce lot.
Soit $\bar{M}$ la variable aléatoire qui, à tout échantillon de 100 charnières ainsi prélevé, associe la moyenne des diamètres de perçage, exprimés en millimètres. On suppose que $\bar{M}$ suit une loi normale de moyenne inconnue μ et d'écart-type $\frac{0,08}{\sqrt{100}}$.
Pour l'échantillon prélevé la moyenne obtenue des diamètres de perçage est
$\overline{x} = 6,04$.

1. Déterminer un intervalle de confiance, centré en $\overline{x}$, de la moyenne μ des diamètres de perçage de ce lot avec le coefficient de confiance de 95 %.
2. On considère l'affirmation suivante : « la moyenne μ est obligatoirement dans l'intervalle de confiance obtenu à la question 1 ».
   Cette affirmation est-elle vraie ? (Donner la réponse sans explication.)

Retour au sommaire : 6

mai 2013

Exercice 1 **12 points**

Les trois parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante
Dans cet exercice, on étudie des fonctions intervenant dans les prévisions sur la vitesse moyenne du vent pour l'implantation d'éoliennes.

A. Résolution d'une équation différentielle

On considère l'équation différentielle

$$(E) : y' + (0,25x)y = 0,25x$$

où y est une fonction inconnue de la variable réelle x, définie et dérivable sur $[0\ ;\ +\infty[$ et y' sa fonction dérivée.

1. Déterminer les solutions définies sur $[0\ ;\ +\infty[$ de l'équation différentielle

$$(E_0) : \qquad y' + (0,25x)y = 0.$$

2. Vérifier que la fonction constante h, définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par $h(x) = 1$, est une solution de l'équation différentielle (E).
3. En déduire les solutions de l'équation différentielle (E).
4. Déterminer la solution de l'équation différentielle (E) qui vérifie la condition initiale $F(0) = 0$.
   Remarque : la fonction F intervient dans la partie C de cet exercice

B. Étude d'une fonction

Soit f la fonction définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x) = (0,25x)\mathrm{e}^{-0,125x^2}$$

Remarque : la fonction f n'est pas une solution de l'équation différentielle (E).

On désigne par C la courbe représentative de f dans un repère $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.

1. *Les questions a. et b. suivantes sont des questions à choix multiples. Pour chaque question, une seule réponse est exacte. Recopier sur la copie la réponse qui vous paraît exacte. On ne demande aucune justification. La réponse juste rapporte un point. Une réponse fausse ou une absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de point.*

   a. $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ est égal à :

$+\infty$	$-\infty$	0

   b. En $+\infty$ la courbe C admet une asymptote d'équation :

$y = -0,125x^2$	$y = 0$	$x = 0$

2. **a.** Démontrer que, pour tout réel x de l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$,

$$f'(x) = 0,0625(2 + x)(2 - x)\mathrm{e}^{-0,125x^2}$$

b. En déduire le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$.

c. Dresser le tableau de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$.

3. Un logiciel de calcul formel fournit le développement limité de la fonction f, à l'ordre 3, au voisinage de zéro :

$$f(x) = 0,25x - 0,031\,25x^3 + x^3\epsilon(X) \quad \text{avec } \lim_{x\to 0}\epsilon(x) = 0.$$

Ce résultat est admis et n'est donc pas à démontrer.

a. En déduire une équation de la tangente T à la courbe C au point d'abscisse 0.

b. Étudier la position relative de T et de C au voisinage du point d'abscisse 0, pour x positif.

C. Application à l'étude de la vitesse du vent

1. Soit F la fonction définie sur $[0~;~+\infty[$ par

$$F(x) = 1 - \mathrm{e}^{-0,125x^2}.$$

a. Calculer $\lim_{x\to+\infty} F(x)$.

b. Démontrer que F est une primitive sur $[0~;~+\infty[$ de la fonction f définie sur $[0~;~+\infty[$ par :

$$f(x) = (0,25x)\mathrm{e}^{-0,125x^2}.$$

2. Calculer $I = \displaystyle\int_1^6 f(x)\,\mathrm{d}x$. Donner la valeur approchée du résultat arrondie à 10^{-2}.
Le résultat précédent donne la probabilité, qu'une journée donnée, la vitesse moyenne du vent soit comprise entre 1 *m/s et* 6 *m/s.*

Exercice 2 **8 points**

Les quatre parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante. Dans cet exercice, les résultats approchés sont à arrondir à 10^{-2}

A. Loi de Poisson

On désigne par X la variable aléatoire qui, a tout intervalle de temps d'une durée de 30 secondes, associe le nombre de skieurs se présentant à une remontée mécanique, entre 14 heures et 15 heures. On admet que X suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda = 6$.

1. Déterminer la probabilité $P(X = 6)$.

2. Calculer la probabilité que, pendant un intervalle de temps d'une durée de 30 secondes pris au hasard entre 14 heures et 15 heures, il se présente au plus 6 skieurs.

B. Loi normale

Une entreprise découpe une grande quantité de tubes pour le montage des remontées mécaniques. La longueur des tubes est exprimée en millimètres. Un tube est dit « conforme pour la longueur » lorsque celle-ci appartient à l'intervalle $[245\,;255]$.
On désigne par Y la variable aléatoire qui, à chaque tube pris au hasard dans la production d'une journée, associe sa longueur.

1. Après un réglage de la machine, on admet que la variable aléatoire Y suit la loi normale de moyenne 250 et d'écart type 3.

   Calculer la probabilité qu'un tube pris au hasard dans la production de cette journée soit conforme pour la longueur.
2. Le résultat obtenu au 1. n'est pas jugé satisfaisant. On décide de modifier l'écart type à l'aide d'un nouveau réglage de la machine. Dans cette question, la variable aléatoire Y suit une loi normale de moyenne 250 et d'écart type σ.

   Déterminer l'écart type σ pour que $P(245 \leqslant Y \leqslant 255) = 0,97$.

C. Loi binomiale

Dans un lot de tubes, 3 % des tubes ne sont pas conformes pour la longueur. On prélève au hasard 50 tubes de ce lot. Le lot est suffisamment important pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise de 50 lots.
On considère la variable aléatoire Z qui, à tout prélèvement ainsi défini, associe le nombre de tubes qui ne sont pas conformes pour la longueur.

1. Justifier que la variable aléatoire Z suit une loi binomiale dont on precisera les paramètres.
2. Calculer la probabilité $P(Z = 0)$.
3. Calculer la probabilité que dans un tel prélèvement au moins un tube ne soit pas conforme pour la longueur.

D. Test d'hypothèse

On se propose de construire un test d'hypothèse pour contrôler la moyenne μ inconnue des longueurs, exprimées en millimètres, d'un lot important de tubes destinés au montage des remontées mécaniques.
On désigne par $\overline{L}$ la variable aléatoire qui, à chaque échantillon aléatoire de 50 tubes prélevés au hasard dans ce lot, associe la moyenne des longueurs de ces tubes (le lot est suffisamment important pour que l'on puisse assimiler ces prélèvements à des tirages avec remise).
L'hypothèse nulle est $H_0 : \mu = 250$. Dans ce cas, on considère que le lot est conforme.
L'hypothèse alternative est $H_1 : \mu \neq 250$.
Le seuil de signification du test est fixé à 5 %.

1. Sous l'hypothèse nulle H_0, on admet que la variable aléatoire $\overline{L}$ suit la loi normale de moyenne 250 et d'écart type $0,33$.

   On admet également que $P(249,35 < L < 250,65) = 0,95$. Ce résultat n'a pas à être démontré.

   Énoncer la règle de décision permettant d'utiliser ce test.

2. On prélève un échantillon aléatoire de 50 tubes dans le lot et on observe que, pour cet échantillon, la moyenne des longueurs des tubes est $\overline{L} = 250,49$.
   Peut-on, au seuil de 5 %, conclure que te lot est conforme ?

Retour au sommaire : 6

Index