Les annales du BTS Mathématiques, C.G.O.

Nathalie Rodriguez

avril 2014

IREM Paris XIII - Groupe « Enseignements technologiques »

Sommaire

Remerciements
Cette compilation des annales du BTS CGO a été faite à partir des fichiers LaTeX tapuscrits de Denis Vergès disponibles sur la toile sur le site de l'A.P.M.E.P. (l'Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public)
http://www.apmep.asso.fr/spip.php?rubrique376
L'idée a été reprise de Vincent Pantaloni (vincent.pantaloni@ac-orleans-tours.fr) qui a produit des annales des Restitutions Organisées de Connaissances (ROC) du Baccalauréat de la série S jusqu'en 2008. Elles sont visibles sur son site personnel
http://prof.pantaloni.free.fr
Nous les remercions de nous avoir autorisé à utiliser leurs productions.

C.G.O. métropole, mai 2002

Exercice 1

Les trois parties A, B et C peuvent être traitées de manière indépendante

Afin d'augmenter son chiffre d'affaires, un magasin d'appareils électroménagers réalise un investissement pour rénover son rayon des ventes et effectuer une campagne publicitaire.
Cet exercice propose une étude du coût, des recettes et du bénéfice de cette opération financière, pendant l'année qui suit sa réalisation.
Les données financières sont exprimées en milliers d'euros (k€) et les résultats demandés seront arrondis à 10^{-1} près.

Partie A étude du coût

1. Le coût de l'opération financière s'élève à la fin du 1er mois à 50 k€ et à la fin du 2e mois à 46 k€.

   Calculer la diminution en pourcentage du coût entre le premier et le deuxième mois.
2. On note u_n le coût exprimé en kg de l'opération financière à la fin du n-ième mois ($1 \leqslant n \leqslant 12$), ainsi $u_1 = 50$ et $u_2 = 46$. On admet que (u_n) est une suite géométrique de raison $0,92$. Calculer u_{12}.
3. En fait le coût mensuel de l'opération financière suit une évolution légèrement différente et peut être modélisé par la fonction f définie sur $[1 ; 12]$ par :

$$f(t) = \frac{108}{1 + \mathrm{e}^{0,15t}}.$$

   On admet que $f(t)$ représente le coût mensuel, exprimé en k€, comptabilisé à la fin du t-ième mois.

   a. Calculer $f'(t)$, pour tout t appartenant à l'intervalle $[1 ; 12]$. En déduire le sens de variation de f sur l'intervalle $[1 ; 12]$.

   b. En annexe, deux courbes sont tracées. L'une représente la fonction f.
   La reconnaître ; expliquer.

   c. Déterminer graphiquement, en faisant figurer les tracés utiles, durant quel mois le coût mensuel devient inférieur à 30 k€.

Partie B étude des recettes

On admet que le montant mensuel des recettes peut être modélisé par la fonction g définie sur l'intervalle $[1 ; 12]$ par :

$$g(t) = 2(18 - t)\mathrm{e}^{0,1t}.$$

Ainsi $g(t)$ représente le montant des recettes, exprimées en k€, comptabilisées la fin du t-ième mois.

1. Montrer que $g'(t) = 0,2(8 - t)\mathrm{e}^{0,1t}$, pour tout t appartenant à l'intervalle $[1 ; 12]$. En déduire le tableau de variations de g.
2. On veut calculer l'intégrale $I = \displaystyle\int_1^{12} g(t)\,\mathrm{d}t$.

a. On considère la fonction G définie par $G(t) = 20(28 - t)\mathrm{e}^{0,1t}$.
Montrer que G est une primitive de g sur l'intervalle $[1 ; 12]$.

b. En déduire la valeur de I.

Partie C : étude du bénéfice

1. La courbe représentant la fonction g est tracée en annexe, la reconnaître.
2. Déterminer graphiquement, à partir de quel mois l'opération financière devient bénéficiaire.

Exercice 2

Dans une station de sports d'hiver, une étude statistique est réalisée dans le but d'étudier la durée d'attente au pied des remontées mécaniques.
Dans ce problème, on s'intéresse à l'étude de la durée d'attente, exprimée en minutes, au pied d'une remonté mécanique particulière.

Partie A : étude de la durée d'attente en début de journée

On désigne par A et B les événements suivants :
A : « la durée d'attente lors de la première montée est supérieure à 3 minutes » ;
B : « la durée d'attente lors de la deuxième montée est supérieure à 3 minutes ».
Des observations permettent d'admettre que $p(A) = 0,2$.
De plus, on constate que :

- si la durée d'attente lors de la première montée est supérieure à 3 minutes, la probabilité que la duré d'attente lors de la deuxième montée soit supérieure à 3 minutes est $0,3$;
- si la durée d'attente lors de la première montée est strictement inférieure à 3 minutes, la probabilité que la durée d'attente lors de la deuxième montée soit supérieure à 3 minutes est $0,5$.

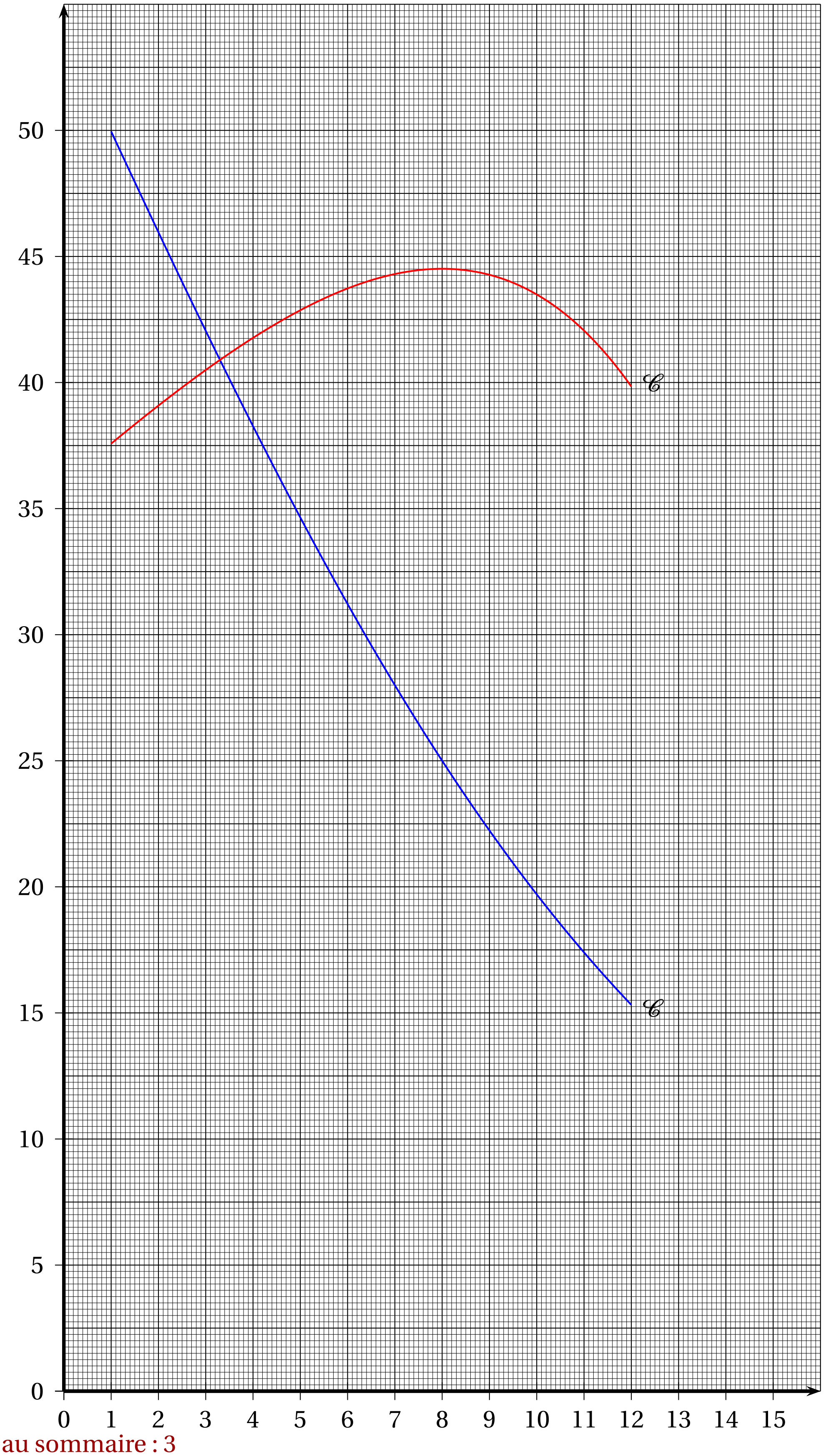
1. **a.** On désigne par $\overline{A}$ l'événement contraire de A.
Calculer les probabilités des événements $\overline{A}$, $A \cap B$ et $\overline{A} \cap B$.
b. En déduire que $p(B) = 0,46$.
2. Un skieur emprunte cinq fois consécutives cette remontée dans les conditions décrites précédemment.
On appelle X la variable aléatoire exprimant le nombre de remontées où la durée d'attente est supérieure 3 minutes. X suit-elle une loi binomiale ? Justifiez votre réponse

Partie B étude de l'effet du renouvellement de le remontée mécanique

On renouvelle cette remontée mécanique en vue d'améliorer son débit.
On étudie les nouvelles durées d'attente aux moments de forte affluence pour cette nouvelle remontée.
À cet effet, on considère un échantillon de 100 skieurs pris au hasard et on constate que la moyenne des durées d'attente pour cet échantillon est 5,3 minutes et que l'écart type est 2,5 minutes. Le nombre de skieurs est suffisamment grand pour qu'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise.
On note Z la variable aléatoire qui, à tout échantillon de 100 skieurs prélevés au hasard et avec remise dans l'ensemble des skieurs, associe la moyenne des durées d'attente pour cette nouvelle remontée. On suppose que Z suit la loi normale de moyenne inconnue m et d'écart type $\dfrac{\sigma}{\sqrt{100}}$.

1. À partir des informations portant sur l'échantillon, calculer, à 0,01 près, une estimation ponctuelle de σ.
2. À partir des informations portant sur l'échantillon, donner une estimation de la moyenne m des durées d'attente au pied de la nouvelle remontée mécanique par un intervalle de confiance avec le coefficient de confiance de 95 %. On prendra pour σ l'estimation obtenue à la question précédente. On donnera des valeurs arrondies à 0,1 près des bornes de l'intervalle.
3. Cette étude permet-elle d'affirmer que la durée d'attente moyenne pour l'ensemble des skieurs au pied de cette nouvelle remontée mécanique est inférieure à 6 minutes ? Justifiez voire réponse.

ANNEXE à rendre avec la copie



Retour au sommaire : 3

C.G.O. Nouvelle-Calédonie, novembre 2002

Exercice 1

Partie A : étude mathématique

Soient f et g les fonctions définies sur l'intervalle [1 ; 6] respectivement par :

$$f(t) = 6 - \frac{9}{t+2} \quad \text{et} \quad g(t) = \frac{21}{5 + \mathrm{e}^{-0,8t}}.$$

On note $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ les représentations graphiques respectives des fonctions f et g dans le plan muni du repère orthogonal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ d'unités graphiques : 2 cm pour 1 unité en abscisse, et 10 cm pour 1 unité en ordonnée.

1. Calculer $f'(t)$ pour tout t appartenant à l'intervalle [1 ; 6]. En déduire le sens de variation de f.
2. **a.** Démontrer que, pour tout t appartenant à l'intervalle [1 ; 6],
   $g'(t) = \dfrac{16,8\mathrm{e}^{-0,8t}}{\left(5 + \mathrm{e}^{-0,8t}\right)^2}$.

   b. En déduire le sens de variations de g.
3. Sur la feuille donnée en annexe, compléter le tableau de valeurs de f et g (les valeurs de $f(t)$ et $g(t)$ seront arrondies à 10^{-2}).
   Construire les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.
4. Résoudre algébriquement l'inéquation $g(t) \geqslant 4,15$. On donnera la valeur arrondie à 10^{-2} près de la borne inférieure de l'intervalle des solutions.
5. **a.** Donner une primitive de f sur l'intervalle [1 ; 6].

   b. Montrer que, pour tout t appartenant à l'intervalle [1 ; 6], $g(t) = \dfrac{21\mathrm{e}^{0,8t}}{5\mathrm{e}^{0,8t} + 1}$.
   En déduire une primitive de g sur l'intervalle [1 ; 6].

   c. Calculer la valeur exacte de $\displaystyle\int_1^6 f(t)\,\mathrm{d}t$.

   d. Calculer la valeur exacte de $\displaystyle\int_1^6 g(t)\,\mathrm{d}t$.

Partie B : utilisation de certains résultats pour une étude économique

Un groupe distribuant une marque d'un certain produit lance un plan de réorganisation de l'implantation des points de vente de cette marque sur une période de 6 ans. Ce plan entraîne pendant cette période d'une part, des fermetures de points de vente et d'autre part, des ouvertures de nouveaux points de vente.

Une étude a montré que f modélise le nombre, exprimé en centaines, d'ouvertures et g le nombre, exprimé en centaines, de fermetures de points de vente.
Ainsi, $f(1)$ représente le nombre d'ouvertures au cours de la 1re année,
$f(2)$ représente le nombre d'ouvertures au cours de la 2e année,
$f(t)$ représente le nombre d'ouvertures au cours de la te année ($1 \leqslant t \leqslant 6$).
De même, $g(t)$ représente le nombre de fermetures au cours de la te année
($1 \leqslant t \leqslant 6$).

1. L'année précédant le lancement du plan, 4 150 points de vente étaient implantés en France.
   Déterminer graphiquement, au cours de quelle année le nombre de points de vente fermés dans l'année dépasse 10 % de l'effectif initial.
   On fera figurer sur le graphique les traits de construction utiles.
2. Déterminer graphiquement, l'année au cours de laquelle le nombre de points de vente ouverts devient supérieur au nombre de points de vente fermés.
3. Expliquer comment on pourrait obtenir le nombre total de points de vente de la marque à la fin du plan de réorganisation.

Exercice 2 Un éditeur scolaire produit en grande série un CD-Rom de sujets d'examens de mathématiques corrigés, à l'intention des étudiants des sections de techniciens supérieurs. Au cours de la fabrication de ce produit, deux défauts peuvent se produire :
- le défaut a au cours de l'impression de la jaquette ;
- le défaut b au cours de l'enregistrement des données.

Les trois parties A, B et C peuvent être traitées de manière indépendante

Partie A
On noté A l'événement « le CD-Rom présente le défaut a ». Une étude a montré que $p(A) = 0,08$.

1. On prélève au hasard successivement 50 CD-Roms dans le stock On admet que le stock est assez important pour qu'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise de 50 CD-Roms.
   On considère la variable aléatoire X qui, à tout prélèvement de 50 CD-Roms, associe le nombre de CD-Roms présentant le défaut a.
   a. Expliquer pourquoi X suit une loi binomiale. En déterminer les paramètres.
   b. Calculer les probabilités, arrondies à 10^{-2} près, des événements suivants :
   - « parmi les 50 CD-Roms, exactement cinq présentent le défaut a ».
   - « parmi les 50 CD-Roms, deux au moins présentent le défaut a ».
2. Le prix de vente unitaire prévu d'un CD-Rom est 18 euros. L'éditeur effectue une réduction de 15 % sur le prix de vente prévu pour les CD-Roms présentant le défaut a.
   a. Déterminer l'espérance mathématique $E(X)$ de la variable aléatoire X. Que représente $E(X)$?
   b. Déduire de la question a. la recette moyenne, arrondie à un euro, que l'éditeur peut espérer de la vente de 50 CD-Roms.

Partie B
Dans cette partie, les résultats seront donnés à 10^{-2} *près*
Les CD-Roms présentant le défaut b sont considérés comme défectueux. Lorsqu'un client se trouve en possession d'un CD-Rom défectueux, il doit le renvoyer au service après-vente de l'éditeur qui en échange, lui fait parvenir un autre CD-Rom en remplacement.
On note Y la variable aléatoire qui, à chaque client concerné prélevé au hasard, associe le nombre de jours séparant la date de renvoi du CD-Rom défectueux au service après-vente et la date de réception du CD-Rom de remplacement.
On suppose que Y suit la loi normale de moyenne 8 et d'écart type 2,75.
On admet qu'un client se déclare satisfait par le service après-vente si son délai d'attente ne dépasse pas 10 jours et mécontent si ce délai dépasse 14 jours.

1. Calculer la probabilité qu'un client concerné soit satisfait du service après-vente.
2. Calculer la probabilité qu'un client concerné soit mécontent du service après-vente.

Partie C

L'éditeur met en place des services après-vente décentralisés.
Dans cette partie, on s'intéresse à un service après-vente donné.
Les résultats seront donnés à 10^{-2} *près*

Pendant une période donnée, on a relevé le délai d'attente, en jours, de chaque client de ce service après-vente.
Pour un échantillon de 100 clients prélevés au hasard et avec remise dans l'ensemble des clients de ce service pendant la période considérée, on constate que la moyenne des délais d'attente est $\overline{x} = 9$ et que l'écart-type s des délais d'attente est $s = 2,80$.

1. À partir des informations portant sur cet échantillon, donner une estimation ponctuelle de la moyenne μ et de l'écart type σ des délais d'attente de l'ensemble des clients de ce service pendant la période considérée.
2. Soit $\overline{Z}$ la variable aléatoire qui, à tout échantillon de 100 clients prélevés au hasard et avec remise dans l'ensemble des clients de ce service pendant la période considérée, associe la moyenne des délais d'attente, en jours, des clients de ce service.

   On suppose que $\overline{Z}$ suit la loi normale de moyenne inconnue μ et d'écart type $\dfrac{\sigma}{\sqrt{100}}$. On prendra pour σ l'estimation ponctuelle fournie à partir de l'échantillon de la question 1.

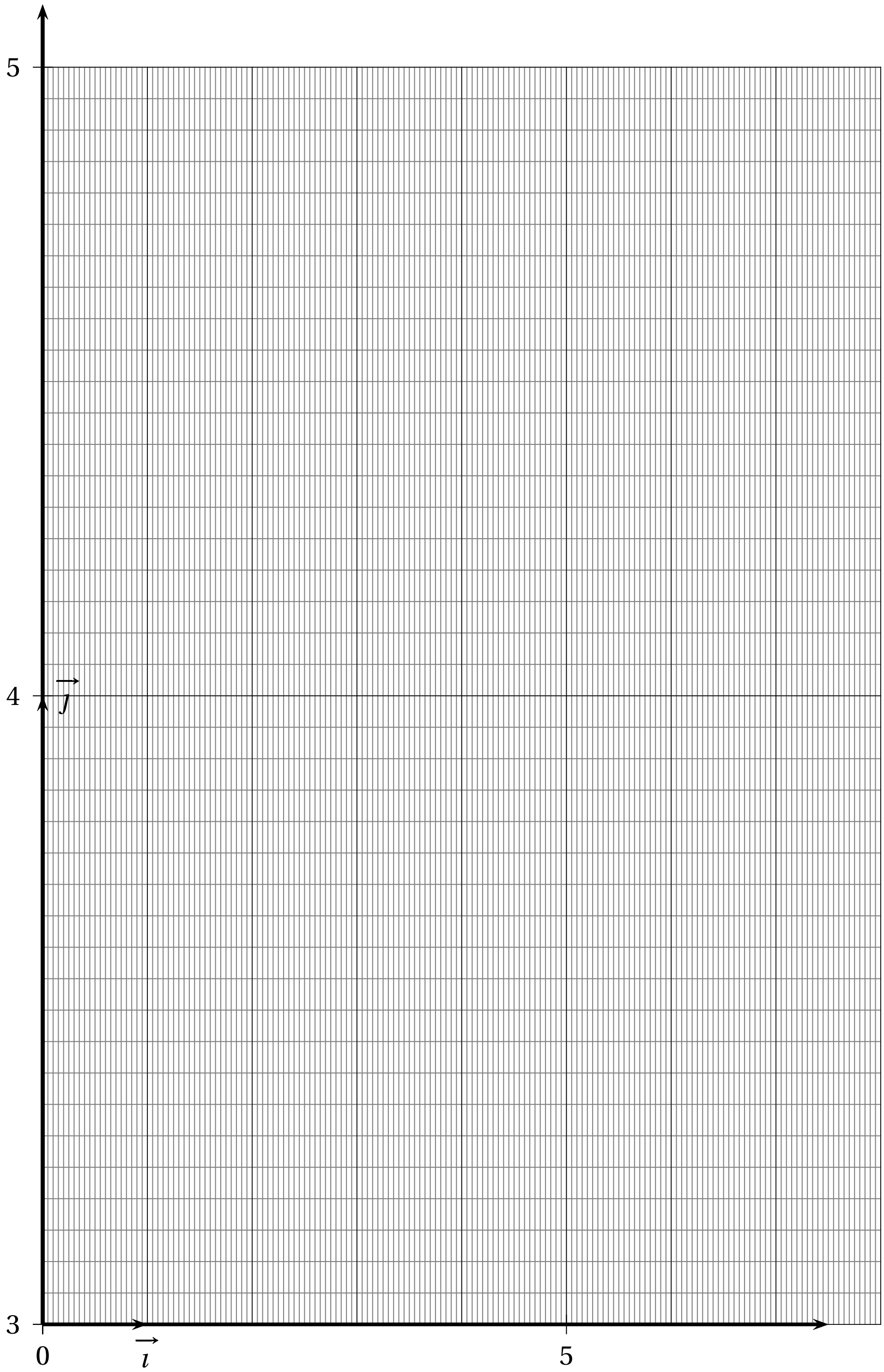
   a. Déterminer un intervalle de confiance centré en 9 de la moyenne μ des délais d'attente des clients de ce service avec le coefficient de confiance 95 %.

   b. Ce service peut-il affirmer que la moyenne des délais d'attente ne dépasse pas 10 jours ? Justifier la réponse.

ANNEXE à rendre avec la copie

Tableau de valeurs à compléter :

t	1	2	3	4	5	6
$f(t)$						
$g(t)$						



Retour au sommaire : 3

C.G.O. métropole, mai 2003

Exercice 1

Pour un promoteur immobilier, le coût de production, en millions d'euros, pour n villas construites, $0 \leqslant n \leqslant 40$, est donné par :

$$C(n) = 0,4n + 5 - 2,8\ln(n+2).$$

Chaque villa est vendue 300 000 €.

Partie A :

Soit la fonction f définie sur $[0\,;\ 40]$ par

$$f(x) = 0,4x + 5 - 2,8\ln(x+2).$$

On donne, en annexe, la courbe représentative $\mathscr{C}$ de f et la droite D d'équation $y = 0,3x$, dans un repère orthogonal $\left(\text{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ d'unités : 0,5 cm en abscisses, 1 cm en ordonnées.

1. Déterminer, par le calcul, les variations de f et dresser son tableau de variations sur $[0\,;40]$.
2. Calculer l'abscisse du point A de $\mathscr{C}$ où la tangente Δ est parallèle à la droite D.
3. Tracer Δ sur le graphique de l'annexe.

Partie B : (à traiter à l'aide des résultats obtenus dans la partie A)

1. Combien de villas faut-il construire pour que le coût de production soit minimal ? Préciser le montant dc ce coût minimum à 10 000 € près.
2. Déterminer graphiquement le nombre minimal de villas qu'il faut construire pour réaliser un bénéfice.
3. Utiliser le graphique pour déterminer en centaines de milliers d'euros le bénéfice maximal (On pourra utiliser la question A 2.)

Partie C :

1. Montrer que le bénéfice réalisé pour la construction et la vente de n villas est, en millions d'euros :
$$B(n) = 0,1n - 5 + 2,8\ln(n+2).$$
2. **a.** Étudier les variations de la fonction g définie sur $[0\,;40]$ par
$$g(x) = -0,1x - 5 + 2,8\ln(x+2)$$
et construire son tableau de variations.
   b. Déterminer la valeur de x pour laquelle $g(x)$ est maximal.
   c. À l'aide des graphiques fournis en annexe, justifier que l'équation $g(x) = 0$ admet une et une seule solution α comprise entre 5 et 6.
   d. Donner alors le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.
3. En déduire :
   a. le nombre minimal de villas à construire pour que le bénéfice soit positif,
   b. la valeur du bénéfice maximal à 10 000 euros près.

Exercice 2 *Les résultats seront arrondis à* 10^{-4} *près*

Une usine fabrique des cylindres en grande série.

1. Le premier usinage consiste en un tournage. Deux machines M_1 et M_2 sont utilisées pour effectuer toutes les deux ce même travail. La production journalière de la machine M_1 est $n_1 = 1\,500$ pièces, avec une proportion de pièces défectueuses de $p_1 = 0,002$; pour la machine M_2, on a $n_2 = 2\,100$ pièces, avec $p_2 = 0,003$.

Dans la production totale, un jour donné, on choisit au hasard une de ces pièces tournées.

a. Montrer que la probabilité que cette pièce présente un tournage défectueux est de 0,002 6.

b. Sachant que le tournage de cette pièce est défectueux, calculer la probabilité qu'elle ait été tournée par la machine M_1.

2. Le second usinage consiste en un fraisage. L'expérience montre que, en fabrication normale, 2 % de ces fraisages sont défectueux. On dispose d'un lot comprenant un très grand nombre de ces pièces fraisées dans lequel on prélève au hasard 20 pièces (le prélèvement est assimilé à un tirage successif avec remise.)

Soit X la variable aléatoire qui, à chaque prélèvement au hasard de 20 pièces, associe le nombre de pièces dont le fraisage est défectueux.

a. Quelle est la loi de probabilité de X? Donner ses paramètres. On justifiera soigneusement la réponse.

b. Calculer la probabilité que, parmi les 20 pièces prélevées, trois aient un fraisage défectueux.

3. On tire maintenant au hasard une pièce dans un lot de pièces où les deux usinages précédents ont été réalisés.

Ces deux usinages sont indépendants. Calculer les probabilités pour que cette pièce :

a. présente les deux usinages défectueux,

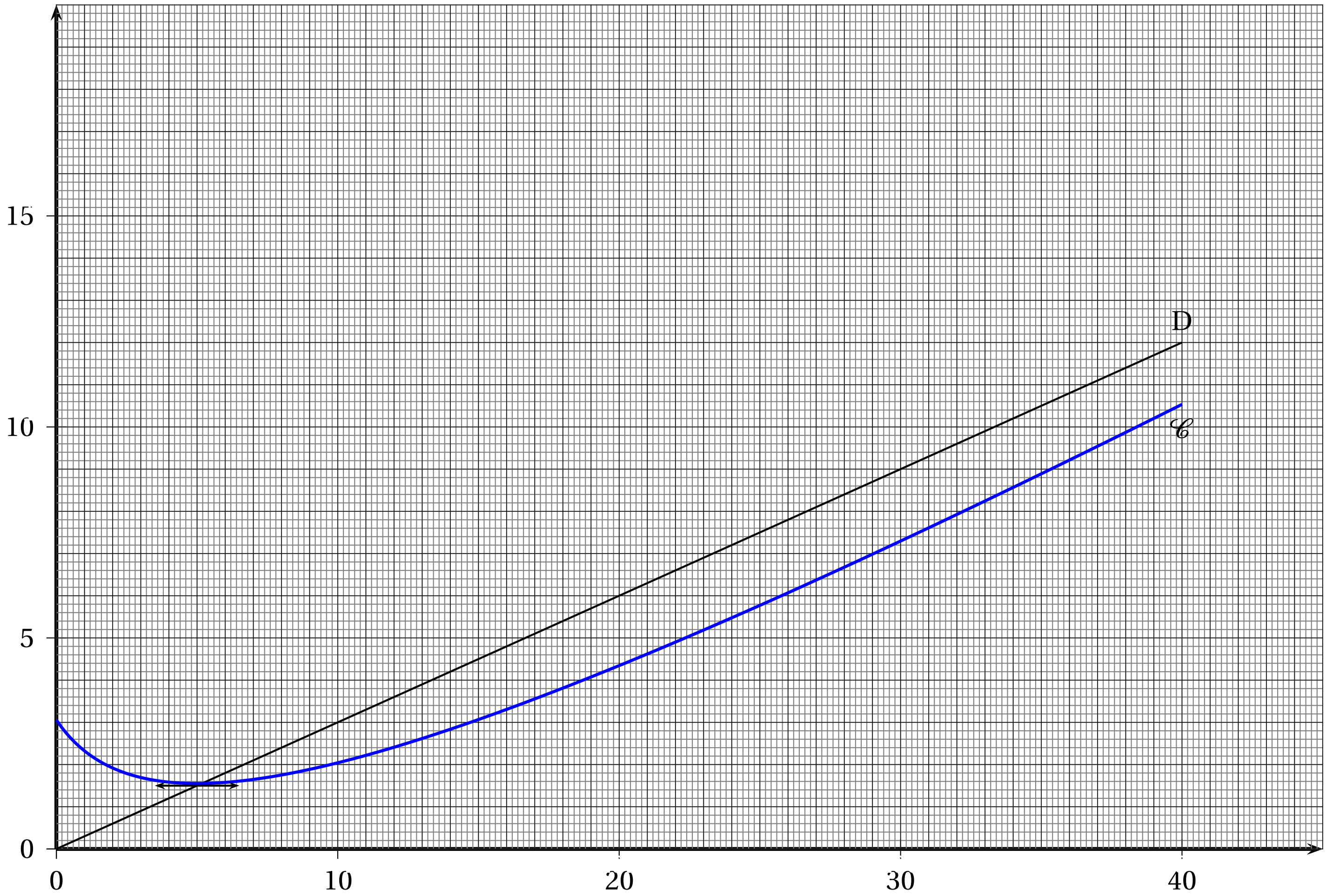
b. présente l'un au moins de ces usinages défectueux,

c. ne présente aucun des usinages défectueux.

4. Sur chacun des cylindres fabriqués, on contrôle le diamètre y qui, en principe, doit être de 50,0 mm. En fait, les mesures effectuées révèlent que le diamètre de ces cylindres est une variable aléatoire Y suivant une loi normale de moyenne 50,2 mm et d'écart-type 0,5 mm.

En raison d'un montage réalisé par la suite par un robot, les cylindres dont le diamètre n'est pas compris entre 49,6 mm et 50,8 mm doivent être mis au rebut.
Calculer la probabilité pour qu'un cylindre soit mis au rebut.
On fera apparaître les différentes étapes du calcul.

Annexe de l'exercice 1



Retour au sommaire : 3

C.G.O. métropole, mai 2004

Exercice 1 **10 points**

A. Étude d'une fonction logistique

Soit f la fonction définie sur $[0\ ; 40]$ par

$$f(t) = \frac{1}{1+99\mathrm{e}^{-0,26t}}.$$

On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$. On prendra comme unités 1 cm pour 5 sur l'axe des abscisses et 1 cm pour 0,1 sur l'axe des ordonnées.

1. **a.** Démontrer que, pour tout réel t de $[0\,;40]$,

$$f'(t) = \frac{25,74\mathrm{e}^{-0,26t}}{\left(1+99\mathrm{e}^{-0,26t}\right)^2}.$$

   b. Étudier le signe de $f'(t)$ sur $[0\,;40]$ et en déduire le tableau de variations de f.

2. **a.** Compléter, après l'avoir reproduit, le tableau de valeurs suivant dans lequel les valeurs approchées sont à arrondir à 10^{-3}.

t	0	5	10	15	20	25	30	35	40
$f(t)$									

   b. Tracer la courbe $\mathscr{C}$.

3. Résoudre graphiquement l'équation $f(t) = 0,8$.
   On fera apparaître sur la figure les constructions utiles.

B. Calcul intégral

1. Vérifier que, pour tout réel t de $[0\,;40]$,

$$f(t) = \frac{\mathrm{e}^{0,26t}}{99+\mathrm{e}^{0,26t}}.$$

2. Soit F la fonction définie sur $[0\,;40]$ par : $F(t) = \dfrac{1}{2,6}\ln\left(99+\mathrm{e}^{0,26t}\right)$.
   Démontrer que F est une primitive de f sur $[0\,;40]$.
3. Démontrer que la valeur moyenne de f sur $[30\,;40]$ est : $V_m = \dfrac{1}{2,6}\ln\dfrac{99+\mathrm{e}^{10,4}}{99+\mathrm{e}^{7,8}}$. (On rappelle que $\ln a - \ln b = -\ln\dfrac{a}{b}$ où $a > 0$ et $b > 0$.)
4. Donner la valeur approchée arrondie à 10^{-3} de V_m.

C. Application des résultats des parties A et B

On suppose que $f(t)$ donne te pourcentage de foyers français équipés d'un téléviseur, entre 1954 et 1994, t étant le rang de l'année à partir de 1954.

Par exemple $f(0) \approx 0,01$ se traduit par : en 1954, 1 % des foyers étaient équipés d'un téléviseur.

$f(10) \approx 0,12$ se traduit par : en 1964, 12 % des foyers étaient équipés d'un téléviseur.

1. Déterminer le pourcentage de foyers équipés d'un téléviseur en 1968. Même question pour 1989.
   Dans cette question, les valeurs approchées de $f(t)$ sont à arrondir à 10^{-3}.
2. Déduire de la partie A. l'année à partir de laquelle 80 % des foyers ont été équipés d'un téléviseur.
3. À l'aide d'une phrase, interpréter le résultat obtenu au 4. de la partie B.

Exercice 2 **10 points**

Les trois parties de cet exercice sont indépendantes.

Une entreprise fabrique un certain type d'article électroménager.
On admet que chaque article de ce type peut présenter deux types de défauts :
– un défaut de soudure, noté défaut a,
– un défaut sur un composant électronique, noté défaut b.

A. Événements indépendants
On prélève un article au hasard dans la production d'une journée.
On note A l'événement : « l'article présente le défaut a ».
On note B l'événement : « l'article présente le défaut b ».
On admet que les probabilités des événements A et B sont $P(A) = 0,03$ et $P(B) = 0,02$ et on suppose que ces deux événements sont indépendants.

1. Calculer la probabilité de l'événement E_1 : « l'article présente le défaut a et le défaut b ».
2. Calculer la probabilité de l'événement E_2 « l'article présente au moins un des deux défauts ».
3. Calculer la probabilité de l'événement E_3 « l'article ne présente aucun défaut ».
4. Calculer la probabilité de l'événement E_4 : « l'article présente un seul des deux défauts ».

   On admet que, si les événements A et B sont indépendants, alors les événements $\overline{A}$ et B sont indépendants et les événements A et $\overline{B}$ sont indépendants.

B. Loi binomiale

Dans cette partie, tous les résultats approchés sont à arrondir à 10^{-3}.

Les articles sont mis en place dans des petites surfaces de distribution par lot de 25.
On prélève au hasard un lot de 25 articles dans la production d'une journée.
On assimile ce prélèvement à un tirage avec remise de 25 articles.
On considère la variable aléatoire X qui, à tout prélèvement de 25 articles, associe le nombre d'articles défectueux parmi ces 25 articles.
On suppose que la probabilité de l'événement D : « l'article est défectueux » est $P(D) = 0,05$.

1. Expliquer pourquoi X suit une loi binomiale dont on déterminera les paramètres.
2. Calculer $P(X = 0)$.
3. Calculer la probabilité que, dans un tel prélèvement, il y ait exactement deux articles défectueux.
4. Calculer la probabilité que, dans un tel prélèvement, il y ait au plus deux articles défectueux.

C. Approximation d'une loi binomiale par une loi normale

Les articles sont mis en place dans les hypermarchés par lots de 800.
On prélève au hasard un lot de 800 articles dans un stock important. On assimile ce prélèvement à un tirage avec remise dc 800 articles.
On considère la variable aléatoire Y qui, à tout prélèvement de 800 articles, associe le nombre d'articles défectueux parmi ces 800 articles. On admet que Y suit la loi binomiale $\mathscr{B}(800\,;\ 0,05)$.
On décide d'approcher la loi de la variable aléatoire Y par la loi normale de paramètres : $m = 40$ et $\sigma = 6$.
On note Z une variable aléatoire suivant la loi normale $\mathscr{N}(40\,;\,6)$.

1. Justifier les valeurs de m et de σ.
2. Calculer la probabilité qu'il y ait au plus 41 articles défectueux dans le lot, c'est à dire calculer : $P(Z \leqslant 41,5)$. Arrondir à 10^{-2}

Retour au sommaire : 3

C.G.O. Nouvelle-Calédonie, novembre 2004

Exercice 1 **12 points**

Les parties A et B de cet exercice sont indépendantes

A. Statistique

On a relevé le chiffre d'affaires annuel d'une société depuis 8 ans. Les résultats sont donnés dans le tableau suivant, où x_i est le rang de l'année et y_i le chiffre d'affaires correspondant, en millions d'euros.

Années	1996	1997	1998	1999	2000	2001	2002	2003
Rang de l'année : x_i	1	2	3	4	5	6	7	8
Chiffre d'affaires annuel : y_i	5	7,5	9,2	11	18,3	22,5	31	43

On renonce à un ajustement affine pour ce nuage de points. On effectue le changement de variable $z_i = \ln y_i$ (ln désigne le logarithme népérien).

1. **a.** Compléter, après l'avoir reproduit, le tableau suivant dans lequel on fera figurer les valeurs approchée de z_i, arrondies à 10^{-3}.

Rang de l'année : x_i	1	2	3	4	5	6	7	8
$z_i = \ln y_i$	1,609							

   b. Déterminer, à l'aide d'une calculatrice, le coefficient de corrélation linéaire r de la série statistique $(x_i\ ;\ z_i)$. Arrondir r à 10^{-3}. Le résultat obtenu permet d'envisager un ajustement affine.

2. Déterminer, à l'aide d'une calculatrice, l'équation de la droite de régression de z en x sous la forme $z = ax + b$, où a et b sont à arrondir à 10^{-3}.
3. En déduire une expression de y en fonction de x de la forme $y = \alpha \mathrm{e}^{kx}$ où α et k sont des constantes à arrondir à 10^{-3}.
4. En déduire une estimation, arrondie à 10^{-1} du chiffre d'affaires de l'entreprise, en millions d'euros, pour l'année 2004.

B. Probabilités

Les trois questions suivantes sont indépendantes

Dans une usine de la société dont on a étudié le chiffre d'affaires dans la partie A., on fabrique des pièces métalliques d'un certain type pour du matériel de bureau.

1. Dans cette usine, les pièces métalliques de ce type sont fabriquées par deux unités de production notées « unité 1 » et « unité 2 ».
   Un jour donné, la production de l'unité 1 est de 600 pièces et la production de l'unité 2 est de 900 pièces.
   On admet que 0,7 % des pièces produites par l'unité 1 et 1,2 % des pièces produites par l'unité 2 ont un « défaut de surface ».
   On prélève une pièce au hasard dans l'ensemble des 1 500 pièces produites par cette usine pendant cette journée. Toutes les pièces ont la même probabilité d'être prélevées.
   On définit les événements suivants :

A : « la pièce est produite par l'unité 1 » ;
B : « la pièce est produite par l'unité 2» ;
D : « la pièce présente un défaut de surface ».
On note $P_A(D) = P(D/A)$ la probabilité de l'événement D sachant que l'événement A est réalisé.

a. Déterminer $P(A)$, $P(B)$, $P_A(D)$ et $P_B(D)$ à l'aide des informations contenues dans l'énoncé.

b. Calculer $P(A \cap D)$ et $P(B \cap D)$.

c. En déduire la probabilité qu'une pièce, prélevée au hasard dans la production totale d'une journée, présente un défaut de surface

2. On prélève au hasard un lot de 50 pièces dans la production totale d'une journée.
Le nombre de pièces produites est assez important pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise de 50 pièces. On note E l'événement : « une pièce, prélevée au hasard dans la production de la journée, a un défaut de surface ».
On admet que $P(E) = 0,01$.
On note X la variable aléatoire qui, à tout prélèvement de 50 pièces, associe le nombre de pièces présentant un défaut de surface parmi ces 50 pièces.

a. Expliquer pourquoi X suit une loi binomiale. Préciser les paramètres de cette loi.

b. Calculer $P(X \leqslant 1)$. Arrondir à 10^{-3}.

3. On prélève une pièce au hasard dans un stock important.
On admet que la variable aléatoire Y qui, à chaque pièce associe la mesure de sa « dureté », suit la loi normale de moyenne 55 et d'écart type $1,2$.
Une pièce est jugée acceptable si la mesure de sa dureté appartient à l'intervalle $[52,66 ; 57,34]$.
Calculer la probabilité que la pièce soit acceptable. Arrondir à 10^{-3}.

Exercice 2 **8 points**

A. Etude d'une fonction

Soit f la fonction définie sur $[0 ; +\infty[$ par

$$f(t) = 42 - 40\mathrm{e}^{-0,3t}.$$

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthogonal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ (unités : 1 cm pour 1 sur l'axe des abscisses, et 1 cm pour 5 sur l'axe des ordonnées).

1. **a.** Calculer $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t)$.

b. Interpréter graphiquement le résultat obtenu au a..

2. **a.** Calculer $f'(t)$ pour tout t de $[0 ; +\infty[$.

b. Étudier le signe de $f'(t)$ lorsque t varie dans $[0 ; +\infty[$.

c. Établir le tableau de variations de f dans $[0 ; +\infty[$.

3. **a.** Compléter, après l'avoir reproduit, le tableau de valeurs suivant, dans lequel les valeurs approchées sont à arrondir à 10^{-1}.

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$f(t)$											

   b. Construire la courbe $\mathscr{C}$.

4. Résoudre graphiquement dans $[0\ ;\ +\infty[$ l'inéquation $f(t) \geqslant 35$. On fera apparaître sur la figure les constructions utiles. (On utilisera une valeur approchée à 10^{-1})

5. **a.** Démontrer que la valeur moyenne de f sur $[0\ ;\ 5]$ est $V_m = \dfrac{46}{3} + \dfrac{80}{3}\mathrm{e}^{-1,5}$.

   b. Donner la valeur approchée, arrondie à l'unité, de V_m.

B. Application économique

On suppose que $f(t)$ représente le coût total d'utilisation, en milliers d'euros, au bout de t années, d'une des machines dont s'est équipée une entreprise.

1. L'entreprise décide de revendre une machine dès que le coût d'utilisation dépasse 35 000 euros. Déduire du A. au bout de combien d'années l'entreprise devra revendre cette machine.
2. Donner, à l'aide d'une phrase, une interprétation économique du résultat obtenu au A. 5. b..

Retour au sommaire : 3

C.G.O. métropole, mai 2005

Exercice 1 **10 points**

Les trois parties A, B et C de cet exercice sont indépendants.

Une entreprise fabrique en grande quantité des sacs poubelle.

A. Probabilités conditionnelles

On admet que 3 % des sacs de la production présentent un défaut.
On contrôle les sacs d'un lot. Ce contrôle refuse 94 % des sacs avec défaut et accepte 92 % des sacs sans défaut.
On prélève un sac au hasard dans le lot.
On considère les événements suivants :
D : « le sac a un défaut » ;
A : « le sac est accepté à l'issue du contrôle ».

1. Déduire des informations figurant dans l'énoncé :
   $P(D)$, $P_D\left(\overline{A}\right)$, et $P_{\overline{D}}(A)$.
   (On rappelle que $P_D\left(\overline{A}\right) = P\left(\overline{A}/D\right)$ est la probabilité de l'événement A sachant que l'événement D est réalisé).
2. **a.** Déterminer $P_D(A)$.
   b. Calculer $P(A \cap D)$ et $P\left(A \cap \overline{D}\right)$.
3. Déduire de ce qui précède $P(A)$.
4. Calculer la probabilité qu'un sac soit défectueux sachant qu'il a été accepté par le contrôle. Arrondir à 10^{-3}.

Dans les parties B et C, les résultats approchés sont à arrondir à 10^{-2}.

B. Loi binomiale

On note E l'événement : « Un sac prélevé au hasard dans une grosse livraison pour une municipalité n'a pas de défaut ».
On suppose que la probabilité de E est $0,97$.
On prélève au hasard 10 sacs de cette livraison pour vérification. La livraison est suffisamment importante pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise de 10 sacs.
On considère la variable aléatoire X qui, à tout prélèvement de 10 sacs, associe le nombre de sacs sans défaut de ce prélèvement.

1. Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale dont on déterminera les paramètres.
2. Calculer la probabilité que, dans un tel prélèvement, tous les sacs soient sans défaut.
3. Calculer la probabilité que, dans un tel prélèvement, exactement 9 sacs soient sans défaut
4. Calculer la probabilité que, dans un tel prélèvement, au moins 9 sacs soient sans défaut.

C. Loi normale

Soit Y la variable aléatoire qui, à chaque sac prélevé au hasard dans la production, associe la masse maximale, en kilogrammes, qu'il peut supporter sans se déchirer.
On suppose que Y suit la loi normale de moyenne 5 et d'écart type $0,4$.

1. Calculer $P(46 \leqslant Y \leqslant 5,4)$.
2. Déterminer le nombre réel positif h tel que :
   $P(v \leqslant 5+h) = 0,95$.
   Interpréter le résultat obtenu à l'aide d'une phrase.

Exercice 2 **10 points**

A. Étude d'une fonction

Soit f la fonction définie sur $[1 ; 7]$ par

$$f(x) = 100 + 0,01(x-7)\mathrm{e}^{x}.$$

1. **a.** Démontrer que, pour tout x de l'intervalle $[1 ; 7]$, $f'(x) = 0,01(x-6)\mathrm{e}^{x}$.
   b. Étudier le signe de $f'(x)$ sur $[1 ; 7]$.
   c. Établir le tableau de variations de f sur $[1 ; 7]$.
2. **a.** Compléter, après l'avoir reproduit, le tableau de valeurs suivant dans lequel les valeurs approchées sont à arrondir à 10^{-1}.

x	1	2	3	4	5	6	6,5	7
$f(x)$								

   b. Construire la courbe représentative $\mathscr{C}$ de f dans un repère orthononnal d'unité graphique 2 cm. Faire la figure dans un repère orthonormal où la graduation commence à zéro sur l'axe des abscisses et commence à 95 sur l'axe des ordonnées.
   c. Résoudre graphiquement dans $[1 : 7]$ l'équation $f(x) = 97$. On fera apparaître sur la figure les constructions utiles.

B. Calcul intégral

1. On note $I = \displaystyle\int_1^7 0,01(x-7)\mathrm{e}^{x}\,\mathrm{d}x$.
   Démontrer, à l'aide d'une intégration par parties, que : $I = 0,01\left(7\mathrm{e} - \mathrm{e}^{7}\right)$.
2. On note $J = \displaystyle\int_1^7 f(x)\,\mathrm{d}x$.
   En utilisant le résultat du **1.**, démontrer que $J = 600 + 0,01\left(7\mathrm{e} - \mathrm{e}^{7}\right)$.

C. Application des résultats des parties A et B

Une entreprise fabrique, chaque jour, entre 1 et 7 tonnes de produit chimique.
On admet que, lorsque x tonnes de ce produit sont fabriquées, $1 \leqslant x \leqslant 7$, le coût moyen de fabrication d'une tonne de produit est, en euros : $f(x) = 100 + 0,01(x-7)\mathrm{e}^{x}$.

1. Déterminer la quantité de produit à fabriquer pour que le coût moyen soit minimal. Déterminer alors ce coût moyen. Arrondir à l'euro.
2. Déduire de la partie B la valeur moyenne de f(x) lorsque x varie dans $[1 ; 7]$. Arrondir à l'euro.
3. Quelle(s) quantité(s) de produit faut-il fabriquer pour que le coût moyen de fabrication d'une tonne de produit soit de 97 euros ?

Retour au sommaire : 3

C.G.O. Polynésie, mai 2005

Exercice 1 **9 points**

Les trois parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante

Une PME fabrique des boules de billard.

Dans cet exercice, les résultats approchés sont à arrondir à 10^{-2}

A. Loi normale

Le diamètre des boules est exprimé en millimètres.
Une boule est dite « de premier choix » si son diamètre appartient à l'intervalle [61 ; 61,5], sinon, elle est dite « de deuxième choix ».
On note X la variable aléatoire qui, à chaque boule prélevée au hasard dans la production, associe son diamètre.
On suppose que X suit la loi normale de moyenne $61,25$ et d'écart type $0,2$.

1. Calculer la probabilité qu'une boule prélevée au hasard dans la production soit de premier choix.
2. En déduire la probabilité qu'une boule prélevée au hasard dans la production soit de second choix.
3. Calculer $P(X \geqslant 61,5)$.

B. Loi binomiale

Dans un stock de boules, 67 % des boules sont blanches et le reste est rouge.
On prélève au hasard 15 boules de ce stock. Le stock est suffisamment important pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise de 15 boules.
On considère la variable aléatoire Y qui, à tout prélèvement de 15 boules, associe le nombre de boules blanches parmi les 15 boules.

1. Justifier que la variable aléatoire Y suit une loi binomiale dont on déterminera les paramètres.
2. Calculer la probabilité que, dans un tel prélèvement, il y ait exactement 10 boules blanches.
3. Calculer la probabilité que, dans un tel prélèvement, il y ait, au plus, 13 boules blanches.

C. Événements indépendants

On prélève une boule au hasard dans un lot important.
On note A l'évènement « la boule est de deuxième choix ».
On note B l'évènement « la boule est blanche ».
On admet que les probabilités des évènements A et B sont $P(A) = 0,21$ et
$P(B) = 0,67$. On suppose de plus que ces deux évènements sont indépendants.

1. Calculer la probabilité de l' évènement E_1 : « la boule est de deuxième choix et elle est blanche ».
2. Calculer la probabilité de l'évènement E_2 : « la boule est de deuxième choix ou elle est blanche ».

3. On rappelle que si une boule n'est pas de deuxième choix, elle est de premier choix et que les boules sont, soit blanches, soit rouges.
Calculer la probabilité de l'évènement E_3 : « la boule est de premier choix et elle est rouge ».
On admet que si les évènements A et B sont indépendants, alors les évènements $\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont indépendants.

Exercice 2 **11 points**

A. Étude d'une fonction logistique

Soit f la fonction définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par

$$f(t) = \frac{12}{1+3\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}}}.$$

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ d'unité graphique 1 cm.

1. **a.** On admet que $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{t}{2}} = 0$. En déduire $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} f(t)$.

b. Que peut-on en déduire pour la courbe $\mathscr{C}$?

2. **a.** Démontrer que, pour tout t de $[0\,;\,+\infty[$,

$$f'(t) = \frac{18\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}}}{\left(1+3\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}}\right)^2}.$$

b. Étudier le signe de $f'(t)$ sur $[0\,;\,+\infty[$.

c. Établir le tableau de variation de f sur $[0\,;\,+\infty[$.

3. **a.** Déterminer le coefficient directeur de la tangente Δ à la courbe représentative $\mathscr{C}$ de f au point d'abscisse 0.

b. Compléter, après l'avoir reproduit, le tableau de valeurs suivant dans lequel les valeurs approchées sont à arrondir à $1O^{-1}$.

t	0	1	2	4	5	8	10
$f(t)$							

c. Tracer la droite Δ et la courbe $\mathscr{C}$.

4. Résoudre graphiquement l'équation $f(t) = 10$.
On fera apparaître sur la figure les constructions utiles.

B. Calcul intégral

1. **a.** Vérifier que, pour tout t de $[0\,;\,+\infty[$, $f(t) = \dfrac{12\mathrm{e}^{\frac{t}{2}}}{\mathrm{e}^{\frac{t}{2}}+3}$.

b. Soit F la fonction définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par : $F(t) = 24\ln\left(\mathrm{e}^{\frac{t}{2}}+3\right)$.
Démontrer que F est une primitive de f sur $[0\,;\,+\infty[$.

2. **a.** Démontrer que la valeur moyenne de f sur $[0\,;\,10]$ est :

$$V_m = 2,4\ln\left(\frac{e^5+3}{4}\right).$$

b. Donner la valeur approchée, arrondie à 10^{-2}, de V_m.

C. Application économique

On admet que dans une entreprise fabriquant des accessoires pour la téléphonie mobile, la production d'un certain matériel depuis 1993, est donnée, en milliers d'exemplaires, par $f(t)$. Par exemple $f(0) = 3$ se traduit par : « en 1993, il a été fabriqué 3 000 exemplaires du matériel considéré ».

1. Déduire de la partie A. une valeur approchée de la production de ce matériel en 2001.
2. Déduire de la partie A., l'année au cours de laquelle la production a dépassé 10 milliers d'exemplaires.
3. À l'aide d'une phrase, interpréter le résultat de la question 2. b. de la partie B.

Retour au sommaire : 3

C.G.O. métropole, mai 2006

Exercice 1 **11 points**

Les deux parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.

A. Ajustement affine

Un institut de recherche démographique a étudié l'évolution de la population d'une grande ville. Les résultats de cette étude sont donnés dans le tableau suivant où t_i désigne le rang de l'armée et où p_i désigne l'effectif de la population, en millions d'habitants au cours de la même année.

Rang de l'année : t_i	0	5	10	15	20	25
Effectif : p_i	5	5,6	6,1	6,8	7,6	8,4

On renonce à un ajustement affine pour ce nuage de points. On effectue le changement de variable $y_i = \ln p_i$ (ln désigne le logarithme népérien).

1. Compléter, après l'avoir reproduit, le tableau suivant dans lequel les valeurs approchées sont à arrondir à 10^{-3}.

Rang de l'année : t_i	0	5	10	15	20	25
$y_i = \ln p_i$						

2. Déterminer, à l'aide d'une calculatrice, le coefficient de corrélation linéaire de la série statistique $\left(t_i,\ y_i\right)$. Arrondir à 10^{-3}.
3. Déterminer, à l'aide d'une calculatrice, une équation de la droite de régression de y en t sous la forme $y = at + b$, où a et b sont à arrondir à 10^{-3}.
4. En déduire une expression de p en fonction de t de la forme $p = \alpha \mathrm{e}^{kt}$ où la constante α sera arrondie à 10^{-1} et la constante k sera arrondie à 10^{-2}.
5. À l'aide du résultat du 4., donner une estimation de l'effectif de la population l'année de rang 35.
   Arrondir à 10^{-1}.

B. Étude d'une fonction

Soit f la fonction définie pour tout t de $[-25\ ;\ 35]$ par

$$f(t) = 5\mathrm{e}^{0,02t}.$$

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthogonal $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$. On prendra comme unités 1 cm pour 5 sur l'axe des abscisses et 1 cm pour 1 sur l'axe des ordonnées.

1. Étudier les variations de f sur $[-25\ ;\ 35]$.
2. Construire la courbe $\mathscr{C}$ sur une feuille de papier millimétré,
3. **a.** Démontrer que la valeur moyenne de f sur $[0\ ;\ 25]$ est $V_m = 10\left(\mathrm{e}^{0,5} - 1\right)$.

   b. Donner la valeur approchée, arrondie à 10^{-1}, de V_m.
4. On admet que, lorsque $0 \leqslant t \leqslant 30$, l'effectif de la population de la ville étudiée dans la partie A est donné, en millions d'habitants, l'année de rang t, par : $f(t) = 5\mathrm{e}^{0,02t}$.

   a. Déterminer l'effectif, en millions d'habitants, de la population l'année de rang 28. Arrondir à 10^{-1}.

   b. Interpréter, à l'aide d'une phrase, le résultat obtenu au 3. b..

   c. Déterminer le rang de l'année au cours de laquelle l'effectif de la population dépassera 9 millions d'habitants.

Exercice 2 **9 points**

Les trois parties A, B et C de cet exercice sont indépendantes.

Une entreprise fabrique en grande quantité un certain type de pièces pour de l'équipement informatique.

A. Probabilités conditionnelles
Les pièces sont fabriquées par deux machines notées : « machine 1 » et « machine 2 ».
40 % des pièces proviennent de la machine 1 et 60 % de la machine 2.
On admet que 5 % des pièces provenant de la machine 1 sont défectueuses et que 2 % des pièces provenant de la machine 2 sont défectueuses.
On prélève au hasard une pièce dans la production d'une journée des deux machines.
Toutes les pièces ont la même probabilité d'être prélevées.
On appelle A l'événement : « la pièce provient de la machine I ».
On appelle B l'événement : « la pièce provient de la machine 2 ».
On appelle D l'événement : « la pièce est défectueuse ».

1. À l'aide des informations contenues dans l'énoncé, donner les probabilités $P(A)$, $P(B)$, $P_A(D)$, et $P_B(D)$.
   (On rappelle que $P_A(D) = P(D/A)$ est la probabilité de l'événement D sachant que l'événement A est réalisé).
2. **a.** Calculer $P(A \cap D)$ et $P(B \cap D)$.

   b. En déduire la probabilité qu'une pièce soit défectueuse.
3. Calculer la probabilité qu'une pièce provienne de la machine 1 sachant qu'elle est défectueuse.

B. Loi binomiale Dans un stock de ces pièces, on prélève au hasard 10 pièces pour vérification.
Le stock est assez important pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise de 10 pièces.
On note E l'événement : « une pièce prélevée au hasard dans ce stock est défectueuse ». On suppose que $P(E) = 0,03$.
On considère la variable aléatoire X qui, à tout prélèvement de 10 pièces, associe le nombre de pièces défectueuses parmi ces 10 pièces.

1. Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale dont on déterminera les paramètres.
2. Calculer la probabilité que, dans un tel prélèvement, aucune pièce ne soit défectueuse. Arrondir à 10^{-3}.
3. Calculer la probabilité que, dans un tel prélèvement, au plus deux pièces soient défectueuses
   Anondir à 10^{-3}.

C. Approximation d'une loi binomiale par une loi normale

Dans un lot de ce type de pièces, on admet que 3,2 % des pièces sont défectueuses.
On prélève au hasard 500 pièces de ce lot. Le lot est suffisamment important pour que l'on puisa assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise de 500 pièces.
On considère la variable aléatoire Y qui, à tout prélèvement de 500 pièces, associe le nombre de pièces défectueuses parmi ces 500 pièces.
On admet que la variable aléatoire Y suit la loi binomiale de paramètres $n = 500$ et $p = 0,032$.

1. On considère que la loi suivie par la variable aléatoire Y peut être approchée par la loi normale de moyenne 16 et d'écart type $3,9$. Justifier les paramètres de cette loi normale.
2. On désigne par Z une variable aléatoire suivant la loi normale de moyenne 16 et d'écart typ $3,9$.
   Déterminer la probabilité que, dans un tel prélèvement, il y ait entre 13 et 19 pièces défectueuses, c'est-à-dire calculer $P(12,5 \leqslant Z \leqslant 19,5)$. Arrondir à 10^{-2}.

Retour au sommaire : 3

C.G.O. Polynésie, mai 2006

Exercice 1 **11 points**

On considère un produit dont le prix de la tonne est, en euros, noté x.
La demande, $d(x)$, est la quantité de ce produit, exprimée en tonnes, que les consommateurs sont prêts à acheter au prix de x euros la tonne.
L'offre, $o(x)$ est la quantité de ce produit, exprimée en tonnes, que les producteurs sont prêts à vendre au prix de x euros la tonne.
On appelle prix d'équilibre de ce produit le prix pour lequel l'offre et la demande sont égales.

Les deux parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.

A. Ajustement affine

On a relevé les valeurs, en tonnes, de l'offre et de la demande de ce produit pour différents prix de la tonne. Les résultats figurent dans le tableau suivant :

Prix de la tonne, en euros : x_i	10	10,5	11	11,7	13	15	17
Demande, en tonne : y_i	11,5	10,5	9,9	9,1	7,9	6,5	5,1
Offre, en tonne : z_i	3,5	4,5	4,9	5,3	5,8	6,2	6,5

1. On pose $Y_i = \ln y_i$ et $Z_i = \mathrm{e}^{z_i}$.
Compléter, après l'avoir reproduit, le tableau de valeurs dans lequel les valeurs approchées sont à arrondir à 10^{-3}.

x_i							17
$Y_i = \ln y_i$							
$Z_i = \mathrm{e}^{z_i}$							

2. **a.** Déterminer, à l'aide de la calculatrice, une équation de la droite de régression de Y en x sous la forme $Y = ax + b$ où a est à arrondir à 10^{-2} et b à 10^{-1}.

b. En déduire une expression de y en fonction de x.

3. **a.** Déterminer, à l'aide de la calculatrice, une équation de la droite de régression de Z en x sous la forme $Z = a'x + b'$ où a' et b' sont à arrondir à l'unité.

b. En déduire une expression de z en fonction de x.

B. Recherche d 'un prix d'équilibre

1. Soit f la fonction définie sur $[10 ; 17]$ par :

$$f(x) = \mathrm{e}^{-0,11x+3,5}.$$

a. Étudier les variations de f sur $[10 ; 17]$.

b. Construire la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de f dans un repère orthonormal d'unité graphique deux centimètres. Faire la figure dans un repère orthonormal où la graduation commence à 10 sur l'axe des abscisses et à 0 sur l'axe des ordonnées.

2. Soit g la fonction définie sur [10 ; 17] par :

$$g(x) = \ln(90x - 852).$$

a. Étudier les variations de g sur [10 ; 17].

b. Construire la courbe représentative $\mathscr{C}_g$ de g dans le même repère que la courbe $\mathscr{C}_f$.

3. Résoudre graphiquement dans [10 ; 17] l'équation $f(x) = g(x)$. On fera apparaître sur la figure les constructions utiles.

4. On admet que, pour un prix du produit de x euros la tonne, la demande $d(x) = f(x)$ et l'offre $o(x) = g(x)$ où f et g sont les fonctions définies au début de la partie B.

a. Déduire de ce qui précède une valeur approchée du prix d'équilibre.

b. En déduire une valeur approchée arrondie à 0,1 tonne de l'offre correspondant an prix d'équilibre.

Exercice 2 **9 points**

Les deux parties de cet exercice sont indépendantes.

Une entreprise fabrique, en grande quantité, un certain type de pièces pour l'industrie automobile.

A. Événements indépendants Dans cette partie, on s'intéresse à deux défauts possibles, notés a et b.
On prélève une pièce au hasard dans la production d'une journée.
On considère les événements suivants :

E_1 : « la pièce prélevée présente le défaut a » ;

E_2 : « la pièce prélevée présente le défaut b ».

On admet que $P(E_1) = 0,005$ et que $P(E_2) = 0,02$.

Dans cette partie, on demande les valeurs exactes des probabilités.

On suppose de plus que les deux événements E_1 et E_2 sont indépendants.

1. Calculer la probabilité qu'une pièce prélevée au hasard dans la production de la journée présente les deux défauts.

2. **a.** Calculer la probabilité qu'une pièce prélevée au hasard dans la production de la journée présente au moins un des deux défauts.

b. Calculer la probabilité qu'une pièce prélevée au hasard dans la production de la journée ne présente aucun des deux défauts.

B. Loi binomiale

Dans cette partie les résultats approchés sont à arrondir à10^{-3}.
On note E l'événement : « une pièce prélevée au hasard dans un stock important présente un défaut pouvant affecter la sécurité ».
On suppose que $P(E) = 0,01$.
On prélève au hasard 50 pièces dans un stock pour vérification. Le stock est assez important pour que l'on puisse assimiler ce tirage à un tirage avec remise de 50 pièces. On considère la variable aléatoire X qui, à tout prélèvement de 50 pièces, associe le nombre de pièces de ce prélèvement présentant un défaut pouvant affecter la sécurité.

1. Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale dont on déterminera les paramètres.
2. Calculer $P(X=0)$.
3. a. Calculer la probabilité que, dans un tel prélèvement, il y ait au plus deux pièces présentant un défaut pouvant affecter la sécurité.
   b. En déduire la probabilité que, dans un tel prélèvement, il y ait au moins trois pièces présentant un défaut pouvant affecter la sécurité.

Retour au sommaire : 3

C.G.O. Nouvelle-Calédonie, novembre 2006

Exercice 1 **11 points**

A. Étude d'une fonction

Soit f la fonction définie sur l'intervalle [1 ; 14] par

$$f(x) = \frac{x+1-\ln x}{x}.$$

1. **a.** Démontrer que. pour tout x de l'intervalle [1 ; 14], $f'(x) = \dfrac{\ln x - 2}{x^2}$.
   b. Résoudre dans [1 ; 14] l'inéquation $\ln x - 2 \geqslant 0$.
   En déduire le signe de $f'(x)$ lorsque x varie dans [1 ; 14].
   c. Établir le tableau de variation de f sur [1 ; 14].
2. **a.** Compléter, après l'avoir reproduit, le tableau de valeurs suivant dans lequel les valeurs approchées sont à arrondir à 10^{-2}.

x	1	2	3	4	5	6	7	8	14
$f(x)$			0,97						

   b. Construire la courbe representative $\mathscr{C}$ de f dans un repère orthogonal. Sur l'axe des abscisses, on prend un centimètre pour une unité et, sur l'axe des ordonnées, on prend dix centimètres pour une unité.
3. **a.** Résoudre dans [1 ; 14] l'équation $f(x) = 1$.
   b. On note α la solution obtenue au **a.** Placer sur la figure le point I d'abscisse α.

B. Calcul intégral

1. Soit F la fonction définie sur l'intervalle [1 ; 14] par :

$$F(x) = x + \ln x - \frac{1}{2}(\ln x)^2.$$

   Démontrer que F est une primitive de f sur [1 ; 14].
2. On note $J = \displaystyle\int_1^{14} f(x)\,\mathrm{d}x$.
   a. Démontrer que $J = \ln 14 - \dfrac{1}{2}(\ln 14)^2 + 13$.
   b. Donner la valeur approchée de J arrondie à 10^{-2}.

C. Application des résultats des parties A et B

Une entreprise fabrique, chaque jour, entre 100 et 1 400 exemplaires d'un certain type de pièce pour téléphone mobile.
On admet que, lorsque x centaines d'exemplaires de cette pièce sont fabriquées,
$1 \leqslant x \leqslant 14$, le coût moyen de fabrication d'une pièce est $f(x)$ euros, où f est la fonction qui a été définie dans la partie A.

1. Déterminer la quantité de pièces à fabriquer, en centaine, pour que le coût moyen soit minimal.
   Arrondir à 10^{-2}.
   Déterminer alors ce coût moyen. Arrondir an centime d'euro.
2. Déterminer la quantité de pièces à fabriquer, en centaines, pour que le coût moyen de fabrication d'une pièce soit un euro. Arrondir à 10^{-2}.
3. Déduire de la partie B la valeur moyenne de $f(x)$ lorsque x varie dans $[1\,;\,14]$. Donner le résultat arrondi au centime d'euro.

Exercice 2 **9 points**

Les trois parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.

Une usine fabrique en grande quantité un certain modèle de stylo.

Dans les parties A et B, les résultats approchés sont à arrondir à 10^{-2}

A. Loi binomiale On prélève un stylo, au hasard, dans une importante livraison destinée à une chaîne d'hypermarchés.
On note E l'événement « un stylo prélevé au hasard est défectueux ».
On suppose que $P(E) = 0,016$.
On prélève au hasard vingt stylos dans la livraison pour vérification. La livraison est assez importante pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement de vingt stylos à un tirage avec remise de vingt stylos.
On considère la variable aléatoire X qui, à tout prélèvement de vingt stylos, associe le nombre de stylos défectueux de ce prélèvement

1. Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale dont on déterminera les paramètres.
2. Calculer la probabilité que, dans un tel prélèvement, il n'y ait aucun stylo défectueux.
3. En déduire la probabilité que, dans un tel prélèvement, il y ait au moins un stylo défectueux.

B. Approximation d'une loi binomiale par une loi normale

Les stylos sont livrés aux grandes surfaces par lots de 1 000. On prélève au hasard un lot de 1 000 stylos dans un depôt de l'usine. On assimile ce prélèvement à un tirage avec remise de 1000 stylos.
On considère la variable aléatoire Y qui, à tout prélèvement de 1 000 stylos, associe le nombre de stylos défectueux parmi les 1 000 stylos. On admet que la variable aléatoire Y suit la loi binomiale de paramètres $n = 1\,000$ et $p = 0,016$.
On décide d'approcher la loi de la variable aléatoire Y par la loi normale de moyenne 16 et d'écart type 4.

1. Justifier les paramètres de cette loi normale.
   On note Z une variable aléatoire suivant la loi normale de moyenne 16 et d'écart type 4.
2. Calculer la probabilité qu'il y ait au plus 17 stylos défectueux, c'est-à-dire calculer $P(Z \leqslant 17,5)$.

C. Probabilités conditionnelles

L'usine possède deux ateliers de fabrication, notés « atelier 1 » et « atelier 2 ».
L'atelier 1 produit 60 % de la production et l'atelier 2 produit le reste.
1 % des stylos provenant de l'atelier 1 sont défectueux et 2,5 % des stylos provenant de l'atelier 2 sont défectueux.
On prélève au hasard un stylo parmi la production totale des deux ateliers d'une journée.
On définit les événements suivants :

A : « le stylo prélevé provient de l'atelier 1 » ;
B : « le stylo prélevé provient de l'atelier 2 » ;
D : « Le stylo prélevé est défectueux ».

Dans cette partie, on demande les valeurs exactes des probabilités.

1. Déduire des informations figurant dans l'énoncé : $P(A)$, $P(B)$, $P(D/A)$, $P(D/B)$.
   (On rappelle que $P(D/A) = P_A(D)$ est la probabilité de l'événement D sachant que l'événement A est réalisé.)
2. Calculer $P(D \cap A)$ et $P(D \cap B)$.
3. Déduire de ce qui précède $P(D)$.

Retour au sommaire : 3

C.G.O. métropole, mai 2007

Exercice 1 **10 points**

Les trois parties de cet exercice sont indépendantes.

Un atelier d'assemblage de matériel informatique s'approvisionne en pièces d'un certain modèle.

A. Événements indépendants et probabilités conditionnelles

L'atelier reçoit ce modèle de pièces en grande quantité. Chaque pièce peut présenter deux défauts que l'on appelle défaut a et défaut b.
On prélève une pièce au hasard dans une importante livraison.
On note A l'événement : « l'appareil présente le défaut a » et on note B l'événement : « l'appareil présente le défaut b ».
On admet que les probabilités des événements A et B sont $P(A) = 0,02$ et $P(B) = 0,01$.
On suppose que les deux événements A et B sont indépendants.

1. Calculer la probabilité de l'événement E_1 : « la pièce présente le défaut a et le défaut b ».
2. Calculer la probabilité de l'événement E_2 « la pièce est défectueuse, c'est-à-dire qu'elle présente au moins un des deux défauts ».
3. Calculer la probabilité de l'événement E_3 : « la pièce ne présente aucun défaut ».
4. Calculer la probabilité que la pièce présente les deux défauts sachant qu'elle est défectueuse. Arrondir à 10^{-4}.

Dans ce qui suit, tous les résultats approchés sont à arrondir à 10^{-3}

B. Loi binomiale

On note D l'événement : « une pièce prélevée au hasard dans un stock important est défectueuse ».
On suppose que $P(D) = 0,03$.
On prélève au hasard 200 pièces dans le stock pour vérification. Le stock est assez important pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise de 200 pièces.
On considère la variable aléatoire X qui, à tout prélèvement de 200 pièces, associe le nombre de pièces de ce prélèvement qui sont défectueuses.

1. Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale dont on déterminera les paramètres.
2. Calculer la probabilité que dans un tel prélèvement ii y ait exactement une pièce défectueuse.
3. Calculer la probabilité que dans un tel prélèvement il y ait au moins deux pièces défectueuses.

C. Loi normale

On s'intéresse maintenant à la masse de ces pièces.
On note Y la variable aléatoire qui à chaque pièce prélevée au hasard dans un lot important associe sa masse en grammes.
On suppose que la variable aléatoire Y suit la loi normale de moyenne 500 et d'écart type 4.

1. Calculer $P(Y \leqslant 510)$.

2. Une pièce de ce modèle est acceptable pour la masse lorsque celle-ci appartient à l'intervalle [490; 510]. Calculer la probabilité qu'une pièce prélevée au hasard soit acceptable pour la masse.

Exercice 2 **10 points**

A. Étude d'une fonction

Soit f la fonction définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x) = 4 - \mathrm{e}^{-x}(x+2)^2.$$

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans le plan muni d'un repère orthogonal $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$. On prend comme unités : 1 cm pour 1 sur l'axe des abscisses et 2 cm pour 1 sur l'axe des ordonnées.

1. **a.** On admet que $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-x}(x+2)^2 = 0$; en déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

   b. En déduire que la courbe $\mathscr{C}$ admet une asymptote Δ dont on donnera une équation.

2. **a.** Démontrer que pour tout réel x de $[0\ ;\ +\infty[$, $f'(x) = x(x+2)\mathrm{e}^{-x}$.

   b. Étudier le signe de $f'(x)$ pour tout réel x de $[0\ ;\ +\infty[$. Établir le tableau de variations de la fonction f.

3. Compléter, après l'avoir reproduit, le tableau suivant dans lequel les valeurs approchées sont à arrondir à 10^{-2}.

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$f(x)$									

4. Construire la droite Δ et la courbe $\mathscr{C}$ sur une feuille de papier millimétré.

B. Calcul intégral

1. **a.** Soient g et h les fonctions définies sur $[0\ ;\ +\infty[$ respectivement par :

$$g(x) = -\mathrm{e}^{-x}(x+2)^2 \quad \text{et} \quad h(x) = \mathrm{e}^{-x}\left(x^2+6x+10\right).$$

   Démontrer que h est une primitive de g sur $[0\ ;\ +\infty[$.

   b. Déduire du **1. a.** une primitive F de la fonction f sur $[0\ ;\ +\infty[$.

2. **a.** Démontrer que la valeur moyenne de f sur $[0:8]$ est $V_m = \dfrac{11+61\mathrm{e}^{-8}}{4}$.

   b. Donner la valeur approchée, arrondie à 10^{-2}, de V_m.

C, Application économique

Depuis le premier janvier 1999 une entreprise fabrique un produit noté P. Ce produit a été commercialisé dans une ville comportant 40 000 foyers acheteurs potentiels.

On admet que le nombre de foyers équipés du produit P le premier janvier de l'année $(1999+n)$ est égal à $10000 \times f(n)$, où f est la fonction définie dans la partie A.

1. Déterminer le pourcentage de foyers équipés du produit P le premier janvier 2007 parmi les foyers acheteurs potentiels. Arrondir à 1 %.

2. Déterminer le nombre de foyers qui se sont équipés entre le premier janvier 2001 et le premier janvier 2002.

Retour au sommaire : 3

C.G.O. Nouvelle-Calédonie, novembre 2007

Exercice 1 **11 points**

Les parties A et B de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.

A Ajustement affine

Une étude a été réalisée sur le solde moyen des comptes courants d'entreprises clientes d'un important groupe bancaire. Les résultats de cette étude sont donnés dans le tableau suivant : x désigne un montant en centaines de milliers d'euros, n désigne le nombre de milliers d'entreprises qui ont un compte courant dont le solde est supérieur ou égal à x.

x	0,3	0,6	0,9	1,2	1,5	2
n	1,81	0,79	0,32	0,15	0,078	0,031

1. Compléter après l'avoir reproduit le tableau suivant dans lequel les valeurs approchées sont à arrondir à 10^{-2}.

x	0,3	0,6	0,9	1,2	1,5	2
n	1,81	0,79	0,32	0,15	0,078	0,031
$z = \ln n$						

2. Déterminer, à l'aide de la calculatrice, une équation de la droite de régression de z en x sous la forme $z = ax + b$, où a et b sont à arrondir à 10^{-2}.
3. En déduire une expression de n en fonction de x de la forme $n = \alpha \mathrm{e}^{kx}$ où la constante k sera arrondie à 10^{-2}.
4. À l'aide du résultat du **3**, donner une estimation du nombre d'entreprises dont le compte courant a un solde moyen supérieur ou égal à 250 000 euros.

B. Étude d'une fonction

Soit f la fonction définie pour tout x de $[0\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = 3,2\mathrm{e}^{-2,4x}.$$

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans le plan muni d'un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$. L'unité est 5 centimètres.

1. **a.** Calculer $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} f(x)$.

   b. Que peut-on déduire du résultat du **a** pour la courbe $\mathscr{C}$?
2. Étudier les variations de f sur $[0\,;\,+\infty[$.
3. **a.** Compléter, après l'avoir reproduit, le tableau de valeurs suivant dans lequel les valeurs approchées sont à arrondir à 10

x	0,2	0,5	1	1,5	2
$f(x)$					

   b. Construire la courbe $\mathscr{C}$ sur une feuille de papier millimétré.

4. a. Résoudre par le calcul, dans $[0\ ;\ +\infty[$, l'équation $f(x) = 0,60$.
Donner la valeur exacte de la solution x_0 puis la valeur approchée de x_0 arrondie a 10^{-2}.

b. Retrouver graphiquement le résultat du **4. a.**. On fera apparaître sur la figure les constructions utiles.

C. Application

On admet maintenant que, lorsque $0,1 \leqslant x \leqslant 2,5$, il y a $1\,000 f(x)$ entreprises possédant un compte courant dont le solde moyen est supérieur ou égal à x centaines de milliers d'euros dans le groupe bancaire évoqué dans la partie A.

1. Déterminer le nombre d'entreprises dont le compte courant a un solde moyen supérieur ou égal à 50 000 euros.
2. Déterminer le nombre d'entreprises dont le compte courant a un solde moyen compris au sens large entre 50 000 et 100 000 euros.

Exercice 2 9 points

Les trois parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.

Un atelier produit en grande série des pièces destinées à l'équipement informatique.

A. Probabilités conditionnelles

L'atelier utilise deux machines M_1 et M_2. La fabrication est répartie entre les deux machines.
La machine M_1 fabrique 80 % des pièces dont 1 % sont défectueuses et la machine M_2 fabrique 20 % des pièces dont 2 % sont défectueuses.
On prélève au hasard une pièce dans la production d'une journée.
On désigne par D l'événement : « la pièce est défectueuse » ; par A l'événement : « la pièce a été fabriquée par la machine M_1 et par B l'événement : « la pièce a été fabriquée par la machine M_2 ».

1. Déduire des informations figurant dans l'énoncé $P(\text{A})$, $P(\text{B})$, $P_{\text{A}}(\text{D})$ et $P_{\text{B}}(\text{D})$.
(On rappelle que $P_{\text{A}}(\text{D}) = P(\text{D}/\text{A})$ est la probabilité de l'événement D sachant que l'événement A est réalisé.)
2. a. Calculer $P(\text{A} \cap \text{D})$ et $P(\text{B} \cap \text{D})$.
   b. En déduire $P(\text{D})$.
3. Calculer la probabilité qu'une pièce ait été fabriquée par la machine M_1 sachant qu'elle est défectueuse. Arrondir à 10^{-2}.

B. Loi binomiale

On admet dans cette partie que $P(\text{D}) = 0,012$. On prélève au hasard pour vérification 50 pièces dans un stock important. Le stock est assez important pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise de 50 pièces. On note X la variable aléatoire qui à chaque prélèvement de ce type associe le nombre de pièces défectueuses de ce prélèvement.

1. Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale dont on donnera les paramètres.
2. Calculer la probabilité que, dans un tel prélèvement, deux pièces exactement soient défectueuses. Arrondir à 10^{-2}.
3. Calculer la probabilité que, dans un tel prélèvement, au plus deux pièces soient défectueuses. Arrondir à 10^{-2}.

C. Loi normale

Dans cette question on s'intéresse à la masse des pièces.
On prélève une pièce au hasard dans un lot important. On admet que la variable aléatoire Y qui à chaque pièce de ce lot associe sa masse en kilogrammes suit la loi normale de moyenne 2 et d'écart type $0,1$.

1. Calculer $P(2 \leqslant Y \leqslant 2,1)$. Arrondir à 10^{-2}.

2. Calculer $P(Y \geqslant 2)$.

Retour au sommaire : 3

C.G.O. métropole, mai 2008

Exercice 1 **10 points**

A. Étude d'une fonction

Soit f la fonction définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x) = \frac{3}{1 + 125\,504\mathrm{e}^{-1,9x}}.$$

On désigne par $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormal $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ où l'unité est 2 cm.

1. **a.** On admet que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(125\,504\mathrm{e}^{-1,9x}\right) = 0$; en déduire $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

   b. En déduire que la courbe $\mathscr{C}$ admet une asymptote Δ dont on donnera une équation.

2. **a.** Démontrer que pour tout nombre réel x de $[0\ ;\ +\infty[$, $f'(x) = \dfrac{715\,372,8\mathrm{e}^{-1,9x}}{\left(1 + 125\,504\mathrm{e}^{-1,9x}\right)^2}$.

   b. Étudier le signe de $f'(x)$ lorsque x varie dans $[0\ ;\ +\infty[$.

   c. Donner le tableau de variations de f sur $[0\ ;\ +\infty[$.

3. **a.** Compléter, après l'avoir reproduit, le tableau de valeurs suivant dans lequel les valeurs approchées sont à arrondir à 10^{-2}.

x	0	3	4	5	6	7	8	9
$f(x)$	0	0,01						

   b. Tracer la droite Δ et la courbe $\mathscr{C}$ dans le repère défini au début. Sur l'axe des abscisses, commencer la graduation à 3.

4. Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = 2,5$. On fera apparaître sur la figure les constructions utiles.

B. Calcul intégral

1. Vérifier que, pour tout nombre réel x de $[0\ ;\ +\infty[$, $f(x) = \dfrac{3\mathrm{e}^{1,9x}}{\mathrm{e}^{1,9x} + 125\,504}$.

2. Soit F la fonction définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par $F(x) = \dfrac{3}{1,9}\ln\left(\mathrm{e}^{1,9x} + 125\,504\right)$.
   Démontrer que F est une primitive de f sur $[0\ ;\ +\infty[$.

3. **a.** Calculer la valeur moyenne V_m de f sur $[0\ ;\ 9]$.

   b. Donner la valeur approchée de V_m arrondie à 10^{-2}.

C. Application de la partie A

Dans cette partie, utiliser des résultats obtenus à la partie A.

On admet que le nombre de systèmes GPS vendus en France au cours de l'année $(2000 + n)$ est égal à $f(n)$ millions où f est la fonction définie dans la partie A.

1. Déterminer le nombre de systèmes GPS vendus en France en 2005.
2. Donner le nombre total de systèmes GPS vendus pendant les quatre années 2004, 2005, 2006 et 2007.
3. Indiquer au cours de quelle année les ventes de systèmes GPS dépassent 2 500 000 unités.

Exercice 2 **10 points**

Les trois parties de cet exercice sont indépendantes.

Dans cet exercice on s'intéresse aux factures comptabilisées chaque mois dans un grand garage.

A. Loi binomiale

Dans cette partie, les résultats approchés sont à arrondir à 10^{-2}.

À la fin d'un mois donné, on considère une liasse importante de factures.
On note E l'événement : « une facture prélevée au hasard dans la liasse de factures est erronée. »
On suppose que $P(E) = 0,03$. On prélève au hasard 20 factures dans la liasse pour vérification.
La liasse contient assez de factures pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise de 20 factures.
On considère la variable aléatoire X qui, à tout prélèvement ainsi défini, associe le nombre de factures de ce prélèvement qui sont erronées.

1. Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale dont on déterminera les paramètres.
2. Calculer la probabilité qu'aucune facture de ce prélèvement ne soit erronée.
3. Calculer la probabilité que, dans un tel prélèvement, au plus deux factures soient erronées.

B. Loi normale

Dans cette partie, les résultats approchés sont à arrondir à 10^{-2}.

À la fin d'un autre mois, on s'intéresse au montant de l'ensemble des factures éditées pendant ce mois.
On note Y la variable aléatoire qui, à chaque facture prélevée au hasard dans l'ensemble des factures éditées pendant le mois, associe son montant en euros. On suppose que la variable aléatoire Y suit la loi normale de moyenne 840 et d'écart type 400.

1. Calculer $P(Y \leqslant 1500)$.
2. Pour les factures dont le montant est supérieur ou égal à 600 euros et inférieur ou égal à 1 500 euros, le garage propose le paiement en trois fois sans frais.
   Calculer la probabilité qu'une facture prélevée au hasard dans l'ensemble des factures éditées pendant le mois puisse être réglée en trois fois sans frais, c'est-à-dire : $P(600 \leqslant Y \leqslant 1\,500)$.

C. Probabilités conditionnelles

Les factures du garage sont de deux types : les factures provenant de l'atelier de mécanique et les factures provenant de l'atelier de carrosserie.
On admet, qu'un autre mois, 65 % des factures proviennent de l'atelier de mécanique et le reste de l'atelier de carrosserie.
Dans l'ensemble des factures de ce mois, 2 % des factures provenant de l'atelier de mécanique sont erronées et 1 % des factures provenant de l'atelier de carrosserie sont erronées.
On prélève au hasard une facture dans l'ensemble des factures de ce mois. Toutes les factures ont la même probabilité d'être prélevées.
On considère les événements suivants :

M : « la facture prélevée provient de l'atelier de mécanique » ;
C : « la facture prélevée provient de l'atelier de carrosserie » ;
D : « la facture est erronée. »

1. Déduire des informations figurant dans l'énoncé les probabilités $P(M)$, $P(C)$, $P_M(D)$ et $P_C(D)$.
   (*On rappelle que* $P_M(D) = P(D/M)$ *est la probabilité de l'événement* D *sachant que l'événement est réalisé*).
2. **a.** Calculer les valeurs exactes des probabilités $P(D \cap M)$ et $P(D \cap C)$.
   b. Déduire de ce qui précède $P(D)$.
3. Calculer la probabilité que la facture prélevée provienne de l'atelier de carrosserie sachant qu'elle est erronée. Arrondir à 10^{-4}.

Retour au sommaire : 3

C.G.O. Polynésie, mai 2008

Exercice 1 **12 points**

Les parties A, B et C de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.

A. Utilisation d'un ajustement affine

La Fédération Française de Franchise a publié le nombre de franchisés établis en France entre 2000 et 2005. Le tableau suivant, où t_i désigne le rang de l'année, donne, en milliers, le nombre y_i de ces franchisés, au premier janvier de chaque année.

Année	2000	2001	2002	2003	2004	2005
Rang de l'année : t_i	1	2	3	4	5	6
Nombre de franchisés : y_i	30,63	31,781	33,26	34,745	36,773	39,51

1. On effectue le changement de variable : $x_i = t_i^2$.
Compléter, après l'avoir reproduit, le tableau suivant :

$x_i = t_i^2$						
y_i	30,63	31,781	33,26	34,745	36,773	39,51

2. Déterminer, à l'aide d'une calculatrice, le coefficient de corrélation linéaire de la série statistique de variables x et y. Arrondir à 10^{-2}.

3. **a.** Déterminer, à l'aide d'une calculatrice, une équation de la droite de régression de y en x, sous la forme $y = ax + b$, où a et b sont à arrondir à 10^{-3}.

b. En déduire une expression de y en fonction de t.

4. À l'aide de la question précédente :

a. Donner une estimation du nombre de franchisés installés en France au premier janvier 2008 ;

b. Estimer l'année au cours de laquelle, le nombre de franchisés installés en France dépassera, pour la première fois, les 60 000.

B. Utilisation d'une suite géométrique

On peut constater qu'entre 2004 et 2005 le nombre de franchisés considéré dans la partie A a augmenté d'environ 8 %.

Dans les questions qui suivent, on admet qu'à partir du premier janvier 2005, le nombre de franchisés augmente de 5 % par an.

1. Le premier janvier 2005, il y avait 39 510 franchisés. Calculer le nombre de franchisés au premier janvier 2006.

2. On note u_n le nombre de franchisés au premier janvier de l'année $(2005 + n)$, où n est un entier naturel. On a donc $u_0 = 39510$.

a. Montrer que la suite (u_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison.

b. Pour tout entier naturel n, exprimer u_n en fonction de n.

3. **a.** Déterminer le plus petit entier p tel que $u_p > 60000$.

b. L'affirmation suivante :
« le nombre de franchisés dépassera 60 000 pour la première fois au cours de l'année 2010 » est-elle vraie ou fausse ?
Donner la réponse sans justification.

C. Étude d'une fonction

Soit f la fonction définie sur [1 ; 10] par

$$f(x) = 8\ln(16x - 10) + 7.$$

1. On désigne par f' la fonction dérivée de f sur [1 ; 10].

a. Calculer $f'(x)$ pour tout nombre réel x de [1 ; 10].

b. Étudier le signe de $f'(x)$ quand x varie dans [1 ; 10].

2. Établir le tableau de variations de f sur [1 ; 10].

3. **a.** Compléter, après l'avoir reproduit, le tableau de valeurs suivant dans lequel les valeurs approchées sont à arrondir à 10^{-1}.

b. Construire la courbe représentative $\mathscr{C}$ de f dans un repère orthogonal.
On prendra pour unité 1 cm pour 1 sur l'axe des abscisses et 1 cm pour 2 sur l'axe des ordonnées, la graduation commençant à 0 sur l'axe des abscisses et à 20 sur l'axe des ordonnées.

c. Résoudre graphiquement dans [1 ; 10] l'équation $f(x) = 35$. On fera apparaître sur le graphique les constructions utiles.

D. Application des résultats de la partie C

On admet que le chiffre d'affaires, en millions d'euros, d'un ensemble d'entrepreneurs est donné, pour l'année $(2000 + n)$, par $f(n)$ où f est la fonction étudiée dans la partie C.

1. Déterminer le chiffre d'affaires en millions d'euros, arrondi à 10^{-1}, pour l'année 2008.

2. En quelle année le chiffre d'affaires a-t-il dépassé 35 millions d'euros ?

Exercice 2 **8 points**

Les trois parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.

Dans une grande chaîne de magasins, on s'intéresse au fonctionnement d'un certain modèle de téléviseur.

A. Loi binomiale

Dans cette partie les résultats approchés sont à arrondir à 10^{-1}

On considère un stock important de téléviseurs de ce modèle.
On note E l'événement : « un téléviseur prélevé au hasard dans le stock est défectueux. »
On suppose que $P(\text{E}) = 0,02$.
On prélève au hasard 100 téléviseurs dans le stock. Le stock est assez important pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise de 100 téléviseurs.
On considère la variable aléatoire X qui, à tout prélèvement ainsi défini, associe le nombre de téléviseurs de ce prélèvement qui sont défectueux.

1. Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale dont on déterminera les paramètres.
2. Calculer la probabilité que, dans un tel prélèvement, il y ait exactement quatre téléviseurs défectueux.
3. Calculer la probabilité que, dans un tel prélèvement, il y ait au moins deux téléviseurs défectueux.

B. Loi normale

Dans cette partie, les résultats approchés sont à arrondir à10^{-2}

Soit Y la variable aléatoire qui, à chaque téléviseur de ce modèle prélevé au hasard dans le stock de la chaîne associe sa durée de fonctionnement sans panne, en années.
On admet que Y suit la loi normale de moyenne 6 et d'écart type 1.

1. Calculer $P(4 \leqslant Y \leqslant 8)$.
2. Un téléviseur est dit « amorti » si sa durée de fonctionnement sans panne est supérieure ou égale à 5 ans.
   Calculer la probabilité qu'un téléviseur prélevé au hasard dans le stock soit amorti.

C. Probabilités conditionnelles

Les téléviseurs de ce modèle proviennent de deux fournisseurs notés « fournisseur 1 » et « fournisseur 2 ».
Le fournisseur 1 a fourni 60 % des téléviseurs d'un lot important et le fournisseur 2 a fourni le reste de ce lot.
Dans ce lot, 1 % des téléviseurs provenant du fournisseur 1 sont défectueux et 1,5 % des téléviseurs provenant du fournisseur 2 sont défectueux.
On prélève au hasard un téléviseur dans ce lot. On considère les événements suivants :
A : « le téléviseur prélevé provient du fournisseur 1 » ;
B : « le téléviseur prélevé provient du fournisseur 2 » ;
D : « le téléviseur prélevé est défectueux ».

Dans cette partie, on demande les valeurs exactes des probabilités.

1. Déduire des informations figurant dans l'énoncé les probabilités $P(\mathrm{A})$, $P(\mathrm{B})$, $P_{\mathrm{A}}(\mathrm{D})$ et $P_{\mathrm{B}}(\mathrm{D})$.
   (On rappelle que $P_{\mathrm{A}}(\mathrm{D}) = P(\mathrm{D}/\mathrm{A})$ est la probabilité de l'événement D sachant que l'événement A est réalisé.)
2. **a.** Calculer les valeurs exactes des probabilités $P(\mathrm{D} \cap \mathrm{A})$ et $P(\mathrm{D} \cap \mathrm{B})$.
   b. Déduire de ce qui précède la probabilité que le téléviseur prélevé soit défectueux.

Retour au sommaire : 3

C.G.O. Nouvelle-Calédonie, novembre 2008

Exercice 1 **10 points**

A. Étude d'une fonction

Soit f la fonction définie sur $[4\,;\,20]$ par

$$f(x) = 20 - 3x + 6\mathrm{e}^{0,12x}.$$

On note $\mathscr{C}$ la courbe representative de f dans un repère orthonormal où l'unité est 1 cm pour 2.

1. **a.** Démontrer que, pour tout nombre réel x de $[4\,;\,20]$,
$f'(x) = 3\left(-1 + 0,24\mathrm{e}^{0,12x}\right)$.
   b. Résoudre dans $[4\,;\,20]$ l'équation : $-1 + 0,24\mathrm{e}^{0,12x} = 0$. Donner la valeur exacte de la solution x_0, puis sa valeur approchée arrondie à 10^{-2}.
   c. Résoudre dans $[4\,;\,20]$ l'inéquation : $-1 + 0,24\mathrm{e}^{0,12x} \geqslant 0$.
   d. Déduire du c. le signe de $f'(x)$ lorsque x varie dans $[4\,;\,20]$.
2. Compléter, après l'avoir reproduit, le tableau de valeurs suivant dans lequel les valeurs approchées sont à arrondir à 10^{-2}.

x	4	8	11,89	16	18	20
$f(x)$			9,32			

3. Établir le tableau de variations de f. Dans ce tableau, on fera figurer les valeurs approchées de x_0 et $f(x_0)$ obtenues dans le tableau ci-dessus.
4. Construire la courbe $\mathscr{C}$ dans le repère défini au début de cette partie.
5. Résoudre graphiquement dans $[4\,;\,20]$ l'équation $f(x) = 20$. On fera apparaître sur la figure les constructions utiles.

B. Calcul intégral

On note $I = \displaystyle\int_4^{20} f(x)\,\mathrm{d}x$.

1. Démontrer que $I = 50\left(\mathrm{e}^{2,4} - \mathrm{e}^{0,48}\right) - 256$.
2. **a.** En déduire la valeur moyenne V_m de la fonction f sur $[4\,;\,20]$.
   b. Donner la valeur approchée arrondie à 10^{-2} de V_m.

C. Application de la partie A

Une entreprise produit, chaque jour, entre 4 et 20 tonnes de sel pour l'industrie. On admet que lorsque x tonnes de sel sont produites, avec $4 \leqslant x \leqslant 20$, le coût moyen de la production d'une tonne de sel est $f(x)$ dizaines d'euros, où f est la fonction définie au début de la partie A.

1. Déterminer la quantité de sel à produire pour que le coût moyen de production d'une tonne de sel soit minimal. Déterminer alors ce coût moyen en euros.
2. Déterminer la quantité de sel qu'il faut produire pour que le coût moyen de production d'une tonne de sel soit de 200 euros.

Exercice 2 **10 points**

Les trois parties de cet exercice sont indépendantes

Dans une société, on assemble et on installe un certain type d'équipement informatique pour les sièges sociaux de grandes entreprises.

A Probabilités conditionnelles

L'un des éléments de l'équipement, noté élément a, provient de deux fournisseurs, le fournisseur 1 et le fournisseur 2.
75 % des éléments a d'un stock important proviennent du fournisseur 1, le teste, provient du fournisseur 2.
1 % des éléments a provenant du fournisseur 1 sont défectueux.
2 % des éléments a provenant du fournisseur 2 sont défectueux.
On prélève au hasard un élément a dans le stock.
Tous les éléments a ont la même probabilité d'être prélevés.
On considère les événements suivants :

F_1 : « l'élément prélevé provient du fournisseur 1 » ;
F_2 « l'élément prélevé provient du fournisseur 2 » ;
D : « l'élément prélevé est défectueux ».

1. Déduire des informations figurant dans l'énoncé les probabilités $P(F_1)$, $P(F_2)$, $P_{F_1}(D)$ et $P_{F_2}(D)$.
(On rappelle que $P_{F_1}(D) = P(D/F_1)$ est la probabilité de l'événement D sachant que l'événement F_1 est réalisé).
2. a. Calculer les valeurs exactes des probabilités $P(D \cap F_1)$ et $P(D \cap F_2)$.
   b. En déduire la probabilité que l'élément prélevé soit défectueux.
3. Calculer la probabilité que l'élément provienne du fournisseur I sachant qu'il est défectueux.

B Loi binomiale

Dans cette partie, les résultats approchés sont à arrondir à10^{-2}

Dans cette question on s'intéresse à un autre élément de l'équipement, noté b.
On considère un lot important d'éléments b.
On note E l' événement « un élément b prélevé au hasard dans le lot est défectueux ».
On suppose que $P(E) = 0,025$.
On prélève au hasard 20 éléments b dans le lot pour vérification. Le lot est assez important pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise de 20 éléments b.
On considère la variable aléatoire X qui, à tout prélèvement ainsi défini, associe le nombre d'éléments b de ce prélèvement qui sont défectueux.

1. Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale dont on déterminera les paramètres.
2. Calculer la probabilité que, dans un tel prélèvement, il y ait exactement deux éléments b défectueux.
3. Calculer la probabilité que, dans un tel prélèvement, il y ait au moins deux éléments b défectueux.

C. Lois normales

Dans cette partie on s'intéresse au temps nécessaire pour la mise en service du système constitué par un élément a et un élément b.
On note Y_a la variable aléatoire qui, à chaque élément a prélevé au hasard dans un stock important d'éléments a, associe le temps, en heures, nécessaire à sa mise en service.
On admet que la variable aléatoire Y_a suit la loi normale de moyenne 22 et d'écart type 3.
On note Y_b la variable aléatoire qui, à chaque élément b prélevé au hasard dans un stock important d'éléments b, associe le temps, en heures, nécessaire à sa mise en service.
On admet que la variable aléatoire Y_b suit la loi normale de moyenne 25 et d'écart type 4.
On admet que les deux variables aléatoires Y_a et Y_b sont indépendantes.
On note Z la variable aléatoire qui à tout système constitué par un élément a et un élément b prélevés au hasard dans les stocks, associe le temps nécessaire, en heures, à sa mise en service.
On admet que $Z = Y_a + Y_b$.

1. Justifier que la variable aléatoire Z suit la loi normale de moyenne 47 et d'écart type 5.
2. Déterminer la probabilité qu'un système constitué par un élément a et un élément b prélevés au hasard dans les stocks, soit mis en service en moins de 50 heures.
   Arrondir à 10^{-3}.

Retour au sommaire : 3

C.G.O. métropole, mai 2009

Exercice 1 **10 points**

Les trois parties de cet exercice sont indépendants.

Une entreprise réalise et commercialise des compositions florales ainsi que des produits pour le jardin.

A. Événements indépendants

Dans cette partie, on demande les valeurs exactes des probabilités

L'entreprise confectionne ses compositions florales avec des bulbes de fleurs qu'elle reçoit en grande quantité. Chaque bulbe peut présenter deux défauts que l'on désigne par défaut a et défaut b.
On prélève un bulbe au hasard dans un stock important.
On note A l'événement : « le bulbe présente le défaut a » et on note B l'événement : « le bulbe présente le défaut b ».
On admet que les probabilités des événements A et B sont $P(A) = 0,015$ et
$P(B) = 0,02$. On suppose que les deux événements A et B sont indépendants.

1. Calculer la probabilité de l'événement E_1 : « le bulbe présente le défaut a et le défaut b ».
2. Calculer la probabilité de l'événement E_2 ; « le bulbe présente au moins un des deux défauts ».
3. Calculer la probabilité de l'événement E_3 : « le bulbe ne présente aucun des deux défauts ».

Dans ce qui suit, tous les résultats approchés sont à arrondir à10^{-2}.

B. Loi binomiale

On s'intéresse à une livraison importante de compositions florales d'un certain type, destinée à une chaine d'hypermarchés.
On note D l'événement : « une composition florale prélevée au hasard dans la livraison est défectueuse ».
On suppose que $P(D) = 0,025$.
On prélève au hasard 12 compositions dans la livraison pour vérification. La livraison contient assez de compositions pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise de 12 compositions.
On considère la variable aléatoire X qui à tout prélèvement ainsi défini, associe le nombre de compositions de ce prélèvement qui sont défectueuses.

1. Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale dont on déterminera les paramètres.
2. Calculer la probabilité que, dans un tel prélèvement il y ait exactement deux compositions défectueuses.
3. Calculer la probabilité que, dans un tel prélèvement, il y ait au plus une composition défectueuse.

C. Loi normale et somme de variables indépendantes

L'entreprise commercialise deux types d'engrais : le type C_1 en poudre, et le type C_2 en granulés.

1. On note X_1, la variable aléatoire qui, à toute semaine prise au hasard pendant une année associe la demande en kilogrammes d'engrais de type C_1, pour cette semaine.

On suppose que la variable aléatoire X_1, suit la loi normale de moyenne 160 et d'écart type 32.

Calculer $P\left(X_1 \leqslant 200\right)$.

2. On note X_2, la variable aléatoire qui, à toute semaine prise au hasard pendant une année associe la demande en kilogrammes d'engrais de type C_2, pour cette semaine.

On suppose que la variable aléatoire X_2, suit la loi normale de moyenne 77 et d'écart type 28.

On note Y la variable aléatoire qui, à toute semaine prise au hasard pendant une année associe la demande totale en kilogrammes d'engrais de type C_1, et de type C_2, pour cette semaine.

On a $Y = X_1 + X_2$. On suppose que les variables aléatoires X_1 et X_2 sont indépendantes. On admet que Y suit une loi normale de moyenne m et d'écart type a.

a. Justifier que $m = 237$ et qu'une valeur approchée de a arrondie à 10^{-2}, est $42,52$.

b. Calculer la probabilité $P(Y \geqslant 340)$.

c. Le coût de stockage de cet engrais est élevé. L'entreprise a-t-elle raison de limiter Ia production totale hebdomadaire de cet engrais à 340 kilogrammes ?

Exercice 2 **10 points**

A. Résolution graphique d'une inéquation

Soit f la fonction définie sur $[1~;~10]$ par

$$f(x) = \frac{10}{\ln(2x+3)}$$

La courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction f dans un repère orthonormal est tracée sur l'annexe à rendre avec la copie.

Résoudre graphiquement dans $[1~;~10]$ I'inéquation $f(x) \leqslant 3,5$. Faire apparaître sur la figure les constructions utiles.

B. Étude d'une fonction

Soit g la fonction définie sur [0 ; 10J par

$$g(x) = 5 - \mathrm{e}^{-0,2x+1}$$

1. **a.** Calculer $g'(x)$ pour tout nombre réel x de $[1~;~10]$.

b. Étudier le signe de $g'(x)$ sur $[1~;~10]$,

2. Donner la tableau de variation de g sur $[1~;~10]$,

3. **a.** Compléter, après l'avoir reproduit, le tableau de valeurs suivant dans lequel les valeurs approchées sont à arrondir à 10^{-2}.

x	1	2	3	4	5	6	8	10
$g(x)$				3,78	4			

b. Tracer la courbe représentative Γ de g sur l'annexe à rendre avec la copie, dans le même repère que la courbe $\mathscr{C}$.

4. Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = g(x)$ où f est la fonction définie dans la partie A. Faire apparaître sur la figure les constructions utiles.

C. Calcul intégral

1. Soit G la fonction définie sur $[1\,;\,10]$ par

$$G(x) = 5x + 5\mathrm{e}^{-0,2x+1}.$$

Démontrer que la fonction G est une primitive sur $[1\,;\,10]$ de la fonction g définie au début de la partie B.

2. **a.** Démontrer que la valeur moyenne de la fonction g sur $[1\,;\,10]$ est :

$$V_m = \frac{45 + 5\mathrm{e}^{-1} - 5\mathrm{e}^{0,8}}{9}.$$

b. Donner la valeur approchée arrondie à 10^{-2} de V_m.

D. Application des parties A et B

On considère un produit dont le prix de la tonne, exprimé en dizaines d'euros, est noté x.
La **demande**, $d(x)$ est la quantité de ce produit, exprimée en milliers de tonnes que les consommateurs sont prêts à acheter au prix de x dizaines d'euros la tonne.
L'offre, $o(x)$ est la quantité de ce produit, exprimée en milliers de tonnes, que les producteurs sont prêts à vendre au prix de x dizaines d'euros la tonne.
On appelle **prix d'équilibre** de ce produit le prix pour lequel l'offre et la demande sont égales.
On admet que, pour un prix du produit de x dizaines d'euros la tonne, avec $1 \leqslant x \leqslant 10$, la demande est $d(x) = f(x)$ et l'offre est $o(x) = g(x)$, où f et g sont les fonctions définies dans les parties A et B.

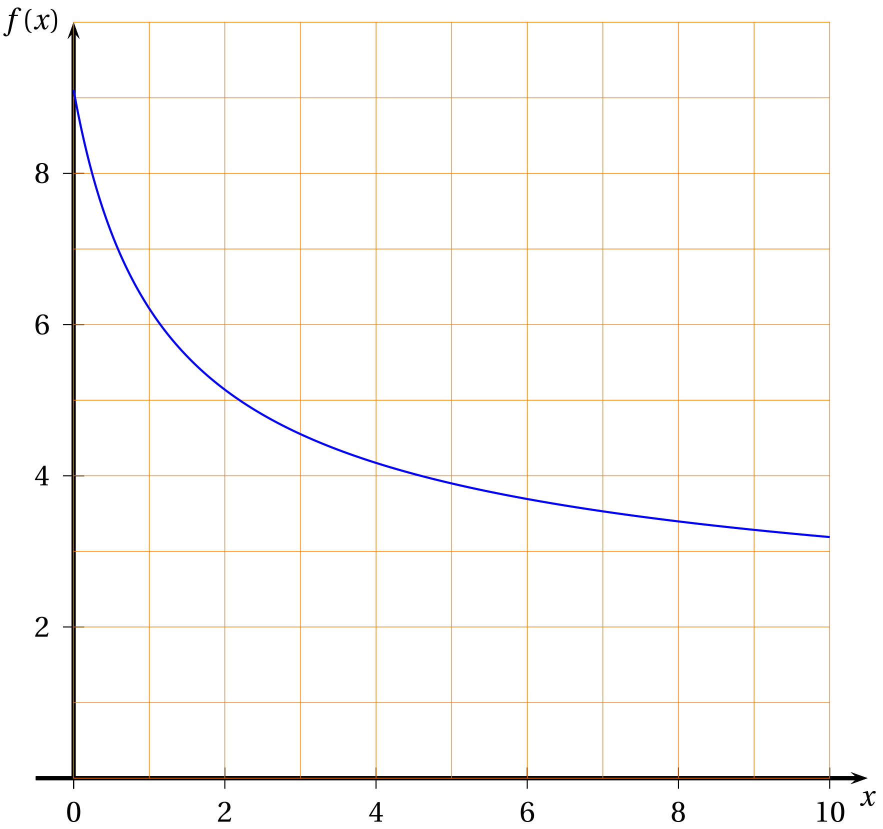
1. En utilisant un résultat de la partie A ou de la partie B, indiquer à partir de quel prix de la tonne en euros, la demande est inférieure ou égale à 3 500 tonnes.

2. **a.** Déduire d'un résultat de la partie B une valeur approchée du prix d'équilibre en euros.

b. Donner une valeur approchée de la demande correspondant au prix d'équilibre.

Annexe

Exercice 2



Retour au sommaire : 3

C.G.O. Polynésie, mai 2009

Exercice 1 **9 points**

Les deux parties de cet exercice sont indépendantes

A. Loi binomiale et loi normale

Dans cette partie, sauf mention particulière, les résultats approchés sont à arrondir à 10^{-3}

Dans le cadre de la lutte contre l'obésité et le diabète, on a testé un nouveau régime. Les patients sont suivis durant quatre ans. Si au terme de ces quatre ans, le poids est stabilisé à une valeur satisfaisante, le régime est considéré comme un succès.

Quatre ans après le début de l'étude, on considère le fichier constitué par les dossiers d'un grand nombre de patients ayant suivi le régime.
On note E l'événement : « un dossier prélevé au hasard dans le fichier est celui d'un patient ayant suivi Ie régime avec succès ».
On suppose que $p(E) = 0,375$.
On prélève au hasard 100 dossiers médicaux dans le fichier. Le nombre de dossiers dans le fichier est assez important pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise de 100 dossiers.
On considère la variable aléatoire X qui, à tout prélèvement ainsi défini, associe le nombre de dossiers correspondant à des patients ayant suivi le régime avec succès.

1. **a.** Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale dont on donnera les paramètres.

   b. Calculer la probabilité que 25 dossiers de ce prélèvement correspondent à des patients ayant suivi le régime avec succès.
   Pour ce calcul. on peut prendre $\mathrm{C}_{100}^{25} \approx 2,425 \times 10^{23}$.

2. On décide d'approcher la loi de la variable aléatoire X par la loi normale de moyenne 37,5 et d'écart type 4,8.
   On note Y une variable aléatoire suivant la loi normale de moyenne 37,5 et d'écart type 4,8.

   a. Justifier les valeurs des paramètres de cette loi normale (4,8 est une valeur approchée à 10^{-1}).

   b. Calculer la probabilité qu'au moins la moitié des dossiers prélevés correspondent à des patients ayant suivi le régime avec succès, c'est-à-dire calculer $P(Y \geqslant 49,5)$.

B. Probabilités conditionnelles

Dans un département, on dispose des informations suivantes sur l'effet de deux types de régime.
70 % des patients de ce département ont suivi le régime de type 1 et 30 % ont suivi un régime de type 2.
Parmi les patients ayant suivi le régime de type 1,30 % seulement l'ont suivi avec succès, alors qu'il y a 55 % de réussite pour les patients ayant suivi le régime de type 2.
On prélève un dossier au hasard dans l'ensemble des dossiers des patients de ce département.
On considère les événements suivants :

– A : « Le dossier prélevé est celui d'un patient qui a suivi le régime de type 1 » ;
– B : « Le dossier prélevé est celui d'un patient qui a suivi le régime de type 2 » ;
– R : « Le dossier prélevé est celui d'un patient qui a suivi un des deux régimes avec succès ».

1. Déduire des informations figurant dans l'énoncé les probabilités $P(A)$, $P(B)$, $P_A(R)$ et $P_B(R)$.
(On rappelle que $P_A(R) = P(R/A)$ est la probabilité de l'événement R sachant que l'événement A est réalisé.)

2. **a.** Calculer $P(R \cap A)$ et $P(R \cap B)$.

b. En déduire $P(R)$.

3. Calculer la probabilité qu'un patient qui a suivi un des deux régimes avec succès, ait suivi le régime de type 2.

Exercice 2 **11 points**

A. Étude d'une fonction

Soit f la fonction définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x) = 3,87\mathrm{e}^{-0,26x} + 0,76.$$

On désigne par $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.
On prendra comme unités : 1 cm sur l'axe des : abscisses et 4 cm sur l'axe des ordonnées.

1. **a.** On admet que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-0,26x} = 0$; en déduire $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

b. Déduire du a. que la courbe $\mathscr{C}$ admet une asymptote Δ dont on donnera une équation.

2. **a.** Calculer $f'(x)$ pour tout nombre réel x de $[0\ ;\ +\infty[$.

b. Étudier le signe de $f'(x)$ pour tout nombre réel x de $[0\ ;\ +\infty[$.

c. Établir le tableau de variations de f sur $[0\ ;\ +\infty[[$.

3. Compléter, après l'avoir reproduit sur votre copie le tableau de valeurs suivant dans lequel les valeurs approchées sont à arrondir à 10^{-2}.

x	1	2	3	5	7	9	12	15
$f(x)$	3,74						0,93	

4. Construire la droite Δ et la courbe $\mathscr{C}$ sur une feuille de papier millimétré.

5. **a.** Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = 1$. Faire apparaître sur la figure les constructions utiles.

b. Résoudre par le calcul l'équation $f(x) = 1$. Donner la valeur exacte de la solution.

6. **a.** On note $I = \displaystyle\int_0^{10} f(x)\,\mathrm{d}x$. Démontrer que $I = \dfrac{387}{26}\left(1 - \mathrm{e}^{-2,6}\right) + 7,6$.

b. Donner la valeur approchée de I arrondie à 10^{-2}.

B. Application

Dans le cadre d'études sur la gestion des ressources naturelles dans un pays en voie de développement, on s'intéresse à la quantité de bois de chauffe, en kilogrammes, consommée quotidiennement par personne, pendant la saison sèche.
On admet que la quantité de bois de chauffe consommée quotidiennement par une personne vivant dans une exploitation abritant x personnes est $f(x)$ kilogrammes, où f est la fonction définie dans la partie A.

1. Déduire de la partie A le nombre de personnes vivant dans une exploitation où la consommation de bois de chauffe quotidienne pour une personne est de 1 kilogramme.
2. Calculer la consommation quotidienne totale en kilogrammes d'une exploitation où vivent 12 personnes. Arrondir à l'unité.

Retour au sommaire : 3

C.G.O. Nouvelle-Calédonie, novembre 2009

Exercice 1 **10 points**

Les trois parties de cet exercice sont indépendantes

Dans cet exercice, on s'intéresse à la fabrication, dans une usine d'un grand groupe de l'industrie automobile, d'un certain modèle de véhicules à « moteur hybride ».
Dans cet exercice, les résultats approchés sont à arrondir à 10^{-2}.

A. Loi binomiale

Dans cette question on s'intéresse à un stock important de véhicules sortis des chaînes de montage de l'usine.
On appelle « véhicule défectueux » un véhicule possédant au moins un défaut. Il y a « beaucoup » de défauts possibles à la sortie d'une chaîne de montage.
On note E l 'événement : « un véhicule prélevé au hasard dans le stock est défectueux ». On suppose que $P(E) = 0,2$.
On prélève au hasard 20 véhicules dans le stock pour vérification. Le stock est assez important pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise de 20 véhicules.
On considère la variable aléatoire X qui, à tout prélèvement ainsi défini, associe le nombre de véhicules défectueux de ce prélèvement.

1. Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale dont on déterminera les paramètres.
2. Calculer la probabilité qu'un seul véhicule de ce prélèvement soit défectueux.
3. Calculer la probabilité que, dans un tel prélèvement, au plus un véhicule soit défectueux.

B. Loi normale

Dans cette partie, on s'intéresse au coût de remise en état des véhicules présentant un ceriain type de défaut. On considère la variable aléatoire C qui à chaque véhicule prélevé au hasard dans une grande série de véhicules présentant ce type de défaut associe le coût, en euros, de sa remise en état.
On suppose que la variable aléatoire C suit la loi normale de moyenne 500 et d'écart type 200.

1. Calculer $P(C \leqslant 700)$.
2. Calculer la probabilité que la remise en état d'un véhicule prélevé au hasard dans la série des véhicules présentant ce type de défaut coûte entre 200 et 800 euros.

C. Probabilités conditionnelles Les véhicules proviennent de deux ateliers notés a et b.

On admet que pendant un mois donné, l'atelier a produit 40 % des véhicules et que le reste est produit par l'atelier b.
On admet que 10 % des véhicules provenant de l'atelier a sont défectueux et que 15 % des véhicules provenant de l'atelier b sont défectueux.
On prélève au hasard un véhicule dans l'ensemble de la production du mois des deux ateliers. Tous les véhicules ont la même probabilité d'être prélevés.
On considère les événements suivants :
A : « le véhicule prélevé provient de l'atelier a » ;
B : « le véhicule prélevé provient de l'atelier b » ;
D : « le véhicule prélevé est défectueux ».

1. Déduire des informations figurant dans l'énoncé les probabilités $P(A)$, $P(B)$, $P_A(D)$ et $P_B(D)$.
(On rappelle que $P_A(D) = P(D/A)$ est la probabilité de l'événement D sachant que l'événement A est réalisé).
2. **a.** Calculer les valeurs exactes des probabilités $P(D \cap A)$ et $P(D \cap B)$.
   b. En déduire $P(D)$.
3. Calculer la probabilité qu'un véhicule provienne de l'atelier a sachant qu'il est défectueux.
Arrondir à 10^{-2}.

Exercice 2 **10 points**

A. Étude d'une fonction

Soit f la fonction définie sur $[6\,;30]$ par

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 36\ln x + 150.$$

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthogonal $\left(\text{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$. On prendra comme unités graphiques : 1 cm pour 5 sur l' axe des abscisses et 1 cm pour 100 sur l'axe des ordonnées.

1. **a.** Démontrer que, pour tout nombre réel x de $[6\,;30]$, $f'(x) = \dfrac{(x-6)(x+6)}{x}$.
   b. Étudier le signe de $f'(x)$ lorsque x varie dans $[6\,;30]$.
   c. Donner la tableau de variation de f sur $[6\,;30]$.
2. **a.** Compléter, après l'avoir reproduit sur la copie, le tableau de valeurs suivant dans lequel les valeurs approchées sont à arrondir à l'unité.

x	6	10	15	20	25	30
$f(x)$						

   b. Tracer la courbe $\mathscr{C}$ dans le repère défini au début.
   c. Tracer sur la figure du b. la droite Δ d'équation $y = 22,5x$.

B. Calcul intégral

1. **a.** Soit H la fonction définie sur $[6\,;30]$ par $H(x) = x\ln x - x$. Démontrer que H est une primitive sur $[6\,;30]$ de la fonction h définie par $h(x) = \ln x$.
   b. Déduire du a. une primitive F sur $[6\,;30]$ de la fonction f définie dans la partie A.
2. **a.** On note $I = \displaystyle\int_6^{30} f(x)\,\mathrm{d}x$. Démontrer que $I = 8928 - 1080\ln 30 + 216\ln 6$.
   b. En déduire la valeur moyenne V_m de f sur $[6\,;30]$.

C. Application économique

On s'intéresse à une entreprise qui fabrique et commercialise un certain type d'articles.
On admet que le coût total de production pour x articles produits, avec $6 \leqslant x \leqslant 30$, est $f(x)$ euros, où f est la fonction définie dans la partie A.

1. Chaque article fabriqué est vendu $22,50$ euros. Déterminer en fonction de x la recette $r(x)$, en euros, pour x articles vendus.

2. Déterminer le bénéfice en euros pour 20 articles fabriqués et vendus.

3. À l'aide du graphique réalisé dans la partie A, déterminer pour quelle valeur de x le bénéfice est maximal.

Retour au sommaire : 3

C.G.O. métropole, mai 2010

Exercice 1 **12 points**

Les trois parties de cet exercice sont indépendantes.

A. Loi binomiale

Dans cette partie, les probabilités sont à arrondir à 10^{-3}

On a observé que 87 % des entreprises créées en France en 2008 n'emploient aucun salarié.
On prélève au hasard huit entreprises parmi l'ensemble des entreprises créées en France en 2008. Le nombre d'entreprises créées est assez important pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise de huit entreprises.
On considère la variable aléatoire X qui, à tout prélèvement de ce type, associe le nombre d'entreprises qui n'emploient aucun salarié.

1. Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale dont on déterminera les paramètres.
2. Calculer la probabilité que dans un tel prélèvement les huit entreprises n'emploient aucun salarié.
3. Calculer la probabilité que dans un tel prélèvement au moins sept des entreprises n'emploient aucun salarié.

B. Loi normale

Cette partie est un questionnaire à choix multiples.

Pour chacune des deux questions, une seule réponse A, B, C est exacte. Indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie. On ne demande aucune justification.
Notation :
Chaque réponse juste rapporte $1,5$ *point. Une réponse fausse ou une absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de point.*

On appelle Y une variable aléatoire qui suit la loi normale de moyenne 874 et d'écart type $10,5$.

1. La valeur approchée arrondie à 10^{-2} de $P(859,5 \leqslant Y \leqslant 890,5)$ est :

Réponse A	Réponse B	Réponse C
0,58	0,03	0,86

2. La valeur approchée arrondie à 10^{-2} de $P(Y \geqslant 880,5)$ est :

Réponse A	Réponse B	Réponse C
0,27	0,73	0,84

C. Étude d'une suite

On se propose d'étudier l'évolution de la capacité mondiale de production d'énergie éolienne en mégawatts (MW).
On dispose des données suivantes : en 2008, cette capacité est égale à 120 791 MW. On prévoit que cette capacité augmente de 20 % chaque année à partir de 2008.

1. Déterminer les capacités mondiales prévues pour 2009 et 2010 sous cette hypothèse.

2. On note u_n la capacité mondiale de production d'énergie éolienne l'année $2008+n$. On a donc $u_0 = 120\,791$.

 a. Démontrer que la suite (u_n) est une suite géométrique dont on déterminera la raison.

 b. Donner l'expression de u_n en fonction de n.

3. **a.** Déterminer le plus petit entier p tel que : $(1,2)^p \geqslant \dfrac{250\,000}{120\,791}$.

 b. En déduire, en le justifiant, à partir de quelle année on peut prévoir que la capacité mondiale de production d'énergie éolienne dépassera
 250 000 MW.

Exercice 2 **8 points**

A. Étude d'une fonction

On considère la fonction f définie sur $[1\,;\,13]$ par :

$$f(x) = 3x + 14 - 12\ln(2x).$$

Sa courbe représentative $\mathscr{C}$, dans un repère orthonormal est donnée en annexe à rendre avec la copie.

1. On désigne par f' la fonction dérivée de f sur $[1\,;\,13]$.

 a. Calculer $f'(x)$ pour tout x de $[1\,;\,13]$.

 b. Montrer que, pour tout x de $[1\,;\,13]$, $f'(x) = \dfrac{3x-12}{x}$.

 c. En déduire le signe de $f'(x)$ sur $[1\,;\,13]$.

 d. Construire le tableau de variations de f sur $[1\,;\,13]$.

2. Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = 4$.
On fera apparaître sur la figure donnée en annexe les traits de constructions utiles et on donnera des valeurs approchées arrondies à 10^{-1} des solutions.

B. Calcul intégral

1. Soit F la fonction définie sur $[1\,;\,13]$ par

$$F(x) = \frac{3}{2}x^2 + 26x - 12x\ln(2x).$$

Vérifier que F est une primitive de f sur $[1\,;\,13]$.

2. On note $I = \displaystyle\int_1^{13} f(x)\,\mathrm{d}x$.
Démontrer que $I = 564 - 156\ln(26) + 12\ln(2)$.

3. En déduire la valeur exacte de la valeur moyenne V_m de la fonction f sur $[1\,;\,13]$. Donner la valeur approchée arrondie à 10^{-1} de V_m.

C. Application de la partie A

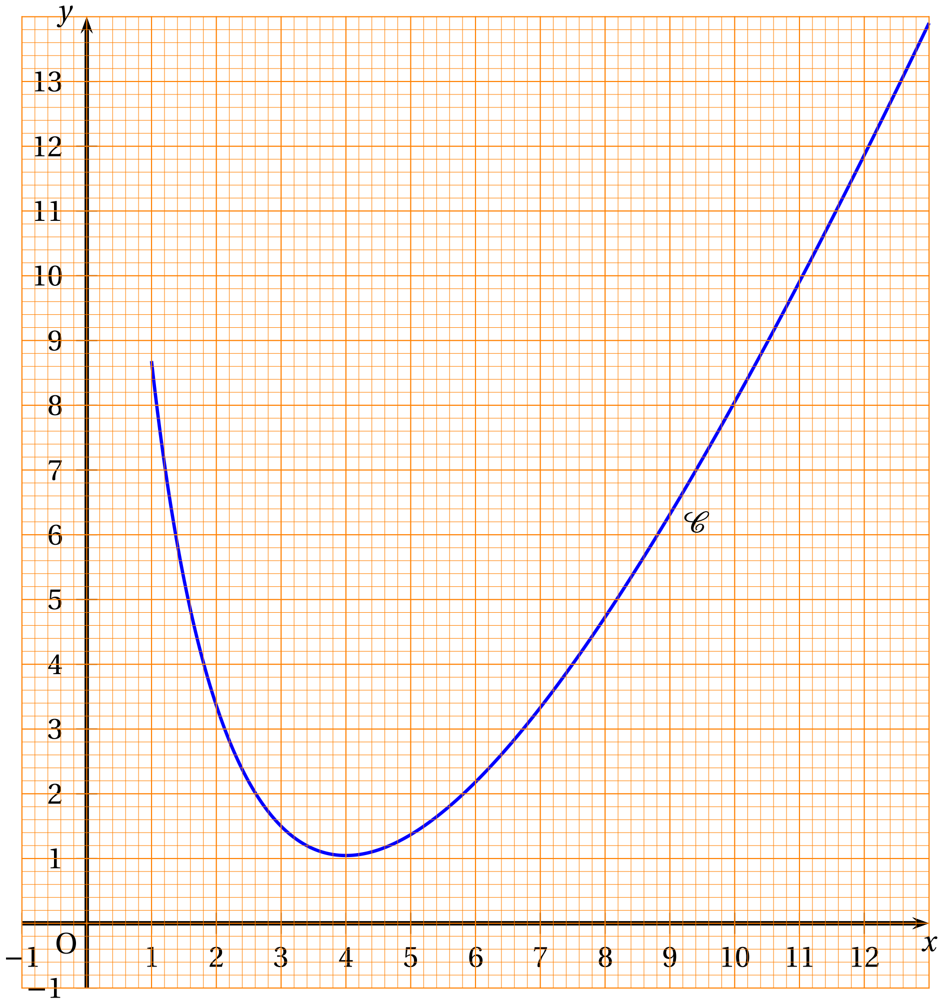
Une entreprise fabrique, chaque jour, entre 100 et 1 300 objets identiques.
On admet que lorsque x centaines d'objets sont fabriqués, $1 \leqslant x \leqslant 13$, le coût moyen de fabrication d'un objet est $f(x)$ euros où f est la fonction qui a été définie dans la partie A.

1. **a.** Déterminer la quantité de pièces à fabriquer pour que le coût moyen soit minimal.

   b. Déterminer alors ce coût moyen. Arrondir au centime d'euro.

2. Utiliser les résultats de la partie A pour déterminer les quantités d'objets à fabriquer afin que le coût moyen de fabrication d'un objet soit inférieur ou égal à 4 euros.

Annexe à rendre avec la copie



Retour au sommaire : 3

C.G.O. Nouvelle-Calédonie, novembre 2010

Exercice 1 **10 points**

A. Étude d'une fonction

Soit f la fonction définie sur $[1\,;\,100]$ par

$$f(x) = \frac{\mathrm{e}^{0,02x+0,28}}{x}.$$

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans le plan muni d'un repère orthogonal $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$. On prend comme unités graphiques 1 cm pour 10 sur l'axe des abscisses et 1 cm pour 0,1 sur l'axe des ordonnées.

1. On désigne par f' la fonction dérivée de la fonction f. e 0,02x+0,28
   a. Montrer que, pour tout x de $[1\,;\,100]$: $f'(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{0,02x+0,28}}{x^2}(0,02x-1)$.
   b. Étudier le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $[1\,;\,100]$.
2. Établir le tableau de variations de f sur $[1\,;\,100]$. On complètera ce tableau avec des valeurs exactes.
3. Compléter, après l'avoir reproduit, le tableau de valeurs suivant dans lequel les valeurs approchées sont à arrondir à 10^{-2}.

x	1	5	10	20	50	80	100
$f(x)$	1,35				0,07		

4. Construire la courbe $\mathscr{C}$ sur une feuille de papier millimétré.
5. Résoudre graphiquement dans $[1\,;\,100]$ l'inéquation $f(x) \leqslant 0,3$. On fera apparaître sur la figure les constructions utiles.

B. Calcul intégral

Soit g la fonction définie sur $[1\,;\,100]$ par

$$g(x) = 10\mathrm{e}^{0,02x+0,28}.$$

On note $I = \displaystyle\int_1^{100} g(x)\,\mathrm{d}x$.

1. Démontrer que $I = 500\left(\mathrm{e}^{2,28} - \mathrm{e}^{0,3}\right)$.
2. En déduire la valeur approchée arrondie à 10^{-2} de la valeur moyenne de la fonction g sur l'intervalle $[1\,;\,100]$.

C. Application des parties A et B

Une entreprise fabrique et vend chaque jour un certain type d'articles.
Le coût de production, en euros, d'un article en fonction du nombre x de dizaines d'articles fabriqués est $f(x)$, où f est la fonction définie au début de la partie A.

1. Déduire de la partie A le nombre d'articles que l'entreprise doit fabriquer pour que le coût unitaire de production soit inférieur ou égal à 30 centimes d'euros.

2. a. Justifier que le nombre $g(x)$ défini dans la partie B représente le coût total de production de x dizaines d'articles fabriqués par l'entreprise.
   b. Donner à l'aide d'une phrase, une interprétation économique du résultat obtenu à la question **2.** de la partie *B*.

Exercice 2 **10 points**

Les trois parties de cet exercice sont indépendantes

Une chaîne de magasins de bricolage commercialise deux types de ponceuses : des ponceuses « elliptiques » et des ponceuses « à bande ».

Dans cet exercice, les résultats approchés sont à arrondir à 10^{-2}

A. Loi binomiale

On note D l'événement : « Une ponceuse elliptique prélevée au hasard dans un stock important de la chaîne est défectueuse ».
On suppose que $P(D) = 0,08$.
On prélève au hasard 25 ponceuses elliptiques dans le stock pour vérification. Le stock est assez important pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise de 25 ponceuses.
On considère la variable aléatoire X qui, à tout prélèvement ainsi défini, associe le nombre de ponceuses défectueuses de ce prélèvement.

1. Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale dont on déterminera les paramètres.
2. Calculer la probabilité que, dans un tel prélèvement, il y ait exactement quatre ponceuses défectueuses.
3. Calculer la probabilité que, dans un tel prélèvement, il y ait au moins une ponceuse défectueuse.
4. a. Calculer l'espérance mathématique de la variable aléatoire X.
   b. La réparation d'une ponceuse défectueuse coûte 30 euros. Quelle est, pour un lot de 25 ponceuses elliptiques, le montant moyen des réparations des ponceuses elliptiques défectueuses ?

B. Approximation d'une loi binomiale par une loi normale

On note R l'événement : « Une ponceuse à bande prélevée au hasard dans un lot important provenant du fabricant nécessite un réglage avant sa commercialisation ».
On suppose que $P(R) = 0,45$.
On prélève au hasard un lot de 50 ponceuses à bande pour vérification. Le lot est assez important pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise de 50 ponceuses.
On considère la variable aléatoire Y qui, à tout prélèvement ainsi défini, associe le nombre de ponceuses à bandes de ce prélèvement nécessitant un réglage.
On admet que la variable aléatoire Y suit la loi binomiale de paramètres 50 et $0,45$ (**ce résultat n'a pas à être justifié**).
On décide d'approcher la loi de la variable aléatoire Y par la loi normale de moyenne $22,5$ et d'écart type $3,5$.
On note Z une variable aléatoire suivant la loi normale de moyenne $22,5$ et d'écart type $3,5$.

1. Justifier le choix des paramètres de cette loi normale
$\left(3,5\right.$ est une valeur approchée arrondie à $\left.10^{-1}\right)$.
2. Calculer la probabilité qu'au moins 25 ponceuses nécessitent un réglage c'est à dire calculer $P(Z \geqslant 24,5)$.

C. Probabilités conditionnelles

Les ponceuses à bande proviennent de deux fabricants, notés « fabricant 1 »et « fabricant 2 ».
50 % des ponceuses provenant du fabricant 1 nécessitent un réglage et 37 % des ponceuses provenant du fabricant 2 nécessitent un réglage.
On prélève au hasard une ponceuse dans un stock important contenant 60 % de ponceuses provenant du fabricant 1 et le reste du fabricant 2.
On définit les événements suivants :

A : « La ponceuse provient du fabricant 1 » ;
B : « La ponceuse provient du fabricant 2 » ;
E : « La ponceuse nécessite un réglage ».

1. Déduire des informations figurant dans l'énoncé les probabilités
$P(A)$; $P(B)$; $P_A(E)$ et $P_B(E)$.
2. Calculer $P(A \cap E)$ et $P(B \cap E)$. En déduire $P(E)$.
3. Calculer la probabilité que la ponceuse provienne du fabricant 1 sachant qu'elle nécessite un réglage.

Retour au sommaire : 3

C.G.O. métropole, mai 2011

Exercice 1 **10 points**

Les trois parties de cet exercice sont indépendantes

Un grossiste spécialisé dans le jardinage reçoit des sachets de graines d'aubergines « bio » (c'est-à-dire issues de l'agriculture biologique).

A. Événements indépendants, probabilités conditionnelles

Le grossiste reçoit ces sachets en grande quantité.
Chaque sachet peut présenter deux défauts notés respectivement « a » et « b ».
Le défaut « a » consiste en la présence de désherbants chimiques.
Le défaut « b » consiste en la présence de pesticides.
On prélève un sachet au hasard dans une importante livraison.
L'événement « le sachet présente le défaut « a » est noté A et l'événement « le sachet présente le défaut « b » est noté B.
Des études statistiques ont permis d'établir que $P(A) = 0,02$ et $P(B) = 0,03$. On suppose que ces deux événements sont indépendants.

1. On note E_1 l'événement : « le sachet présente les deux défauts « a » et « b » ».
   Calculer $P(E_1)$.
2. On dit qu'un sachet est défectueux s'il présente au moins un des deux défauts.
   On note E_2 l'événement : « le sachet est défectueux ».
   Calculer $P(E_2)$.
3. On note E_3 l'événement : « le sachet ne présente aucun défaut ».
   Calculer $P(E_3)$.
4. Calculer la probabilité que le sachet présente les deux défauts sachant qu'il est défectueux.
   Le résultat sera arrondi à 10^{-4}.

Dans tout ce qui suit, les probabilités sont à arrondir à 10^{-4}

B. Loi binomiale

On note D l'événement « un sachet prélevé dans un stock important est défectueux ». On suppose que $P(D) = 0,05$.
On prélève au hasard 40 sachets pour vérification, le stock étant assez important pour assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise.
On considère la variable aléatoire X qui à tout prélèvement de 40 sachets associe le nombre de sachets défectueux.

1. Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale dont on donnera les paramètres.
2. Calculer la probabilité pour que dans un tel prélèvement, il y ait exactement 2 sachets défectueux.
3. Calculer la probabilité pour que dans un tel prélèvement, il y ait au moins un sachet défectueux.

C. Loi normale

On s'intéresse dorénavant à la masse d'un sachet.
La variable aléatoire Y qui à chaque sachet associe sa masse en grammes est notée Y.
On suppose que Y suit la loi normale de moyenne 120 et d'écart-type 8.

1. Calculer $P(Y \geqslant 104)$.
2. Un sachet dont la masse en grammes n'est pas dans l'intervalle $[104\,;\,136]$ est rejeté. Calculer la probabilité qu'un sachet soit rejeté.

Exercice 2 **10 points**

A. Étude d'une fonction

La fonction f est définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par

$$f(t) = \frac{1}{1+4,9\mathrm{e}^{-0,125t}}.$$

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentant f dans un repère orthogonal (unités graphiques : 0,5 sur l'axe des abscisses et 10 cm sur l'axe des ordonnées).

1. On admet que $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} \mathrm{e}^{-0,125t} = 0$. Calculer la limite de f en $+\infty$.
   En déduire que la courbe $\mathscr{C}$ admet une asymptote D dont on donnera une équation.
2. Recopier et compléter le tableau suivant en arrondissant les résultats à 10^{-2}.

t	0	5	10	15	20	25	30
$f(t)$							

3. **a.** Calculer la dérivée de f et vérifier que $f'(t) = \dfrac{0,6125\mathrm{e}^{-0,125t}}{\left(1+4,9\mathrm{e}^{-0,125t}\right)^2}$.

   b. Établir le tableau de variations de f.
4. Tracer la courbe $\mathscr{C}$ et la droite D.
5. Résoudre graphiquement l'équation $f(t) = 0,5$. Faire apparaître les traits utiles sur le graphique.

B. Valeur moyenne

1. On admet que $f(t) = \dfrac{\mathrm{e}^{0,125t}}{4,9+\mathrm{e}^{0,125t}}$.
   Vérifier que la fonction F définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par $F(t) = 8\ln\left(4,9+\mathrm{e}^{0,125t}\right)$ est une primitive de f.
2. Démontrer que la valeur moyenne de f sur $[10\,;\,20]$ est : $\mathrm{V}_m = 0,8\ln\left(\dfrac{4,9+\mathrm{e}^{2,5}}{4,9+\mathrm{e}^{1,25}}\right)$.
3. Donner une valeur approchée de V_m à 10^{-3} près.

C. Applications des parties A et B

Une étude statistique a établi qu'à partir de l'année 1990, le pourcentage des ménages équipés d'un four à micro-ondes, dans un département, est donné approximativement par la formule :

$$f(t) = \frac{1}{1+4,9\mathrm{e}^{-0,125t}} \text{ où } t \text{ désigne le nombre d'années écoulées depuis 1990.}$$

Par exemple $f(0) \approx 0,17$; en 1990 il y avait 17 % des ménages équipés d'un four à micro-ondes.

1. Calculer le pourcentage des ménages ayant cet équipement en 2010.
   Le résultat sera arrondi à 10^{-2}
2. Déduire de la partie A., l'année à partir de laquelle 50 % des ménages sont équipés d'un four à micro-ondes.
3. À l'aide d'une phrase, interpréter le résultat obtenu au 3. de la partie B.

Retour au sommaire : 3

C.G.O. Polynésie, mai 2011

Exercice 1 **9 points**

Les trois parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante

Une usine fabrique en grande quantité deux types de pièces métalliques pour l'industrie : des pièces triangulaires et des pièces carrées.

A. Probabilités conditionnelles

On admet que 40 % des pièces de la production sont triangulaires, le reste est constitué par les pièces carrées.
Parmi les pièces triangulaires, 70 % ont une masse égale à 30 grammes, les autres ont une masse égale à 10 grammes.
Parmi les pièces carrées, 80 % ont une masse égale à 30 grammes, les autres ont une masse égale à 10 grammes.
On prélève au hasard une pièce dans la production d'une journée de ces deux types de pièces.
On considère les événements suivants :
T : « la pièce prélevée est triangulaire » ;
M : « la pièce prélevée a une masse égale à 30 grammes ».

1. Déduire des informations figurant dans l'énoncé : $P(T)$, $P_T(M)$ et $P_{\overline{T}}(M)$.
   (On rappelle que $P_T(M) = P(M/T)$ est la probabilité de l'événement M sachant que l'événement T est réalisé.)
2. Calculer $P(M \cap T)$ et $P\left(M \cap \overline{T}\right)$.
3. Déduire de ce qui précède que $P(M) = 0,76$.
4. Calculer la probabilité qu'une pièce soit carrée sachant que sa masse est égale à 30 grammes. Arrondir à 10^{-2}.

B. Événements indépendants

Les pièces sont susceptibles de présenter deux défauts appelés « défaut 1 » et « défaut 2 ».
On prélève une pièce au hasard dans un lot important.
On note D_1 l'événement : « la pièce présente le défaut 1 » ;
On note D_2 l'événement : « la pièce présente le défaut 2 ».
On admet que les probabilités des événements D_1 et D_2 sont : $P(D_1) = 0,01$ et $P(D_2) = 0,02$.
On suppose de plus que les deux événements D_1 et D_2 sont indépendants.

1. Calculer la probabilité qu'une pièce prélevée au hasard dans le lot présente les deux défauts.
2. Une pièce est jugée défectueuse si elle présente au moins l'un des deux défauts. Calculer la probabilité qu'une pièce prélevée au hasard dans le lot soit défectueuse.

C. Loi binomiale et loi normale

On note E l'événement : « une pièce prélevée au hasard dans un stock important de pièces est triangulaire ».
On suppose que la probabilité de E est $0,40$.
On prélève au hasard 60 pièces dans le stock. Le stock est suffisamment important pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise de 60 pièces.
On considère la variable aléatoire X qui, à tout prélèvement de 60 pièces, associe le nombre de pièces triangulaires de ce prélèvement.

1. Expliquer pourquoi la variable aléatoire X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
2. On décide d'approcher la loi de la variable aléatoire X par la loi normale de moyenne 24 et d'écart type 3,8.
   a. Justifier les paramètres choisis pour la loi normale.
   b. On note Y une variable aléatoire suivant la loi normale de moyenne 24 et d'écart type 3,8.
   Calculer la probabilité que le nombre de pièces triangulaires d'un prélèvement soit compris entre 20 et 28, c'est-à-dire : $P(19,5 \leqslant Y \leqslant 28,5)$. Arrondir à 10^{-2}.

Exercice 2 **11 points**

A. Étude d'une fonction

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0 ; 6]$ par

$$f(x) = \left(2x^2 + 3x\right)\mathrm{e}^{-x}.$$

1. a. Démontrer que, pour tout x de l'intervalle $[0 ; 6]$, $f'(x) = (-2x+3)(x+1)\mathrm{e}^{-x}$.
   b. Étudier le signe de $f'(x)$ sur $[0 ; 6]$.
   c. Établir le tableau de variation de f sur $[0 ; 6]$. On y fera figurer la valeur approchée arrondie à 10^{-2} du maximum de la fonction f.
2. a. Compléter, après l'avoir reproduit, le tableau de valeurs suivant dans lequel les valeurs approchées sont à arrondir à 10^{-2}.

x	0	1	2	3	4	5	6
$f(x)$							

   b. Construire la courbe représentative $\mathscr{C}$ de f dans un repère orthogonal $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.
   On prendra pour unités graphiques : 2 cm pour 1 sur l'axe des abscisses et 4 cm pour 1 sur l'axe des ordonnées.
   c. Résoudre graphiquement dans $[0 ; 6]$ l'équation $f(x) = 1$. Faire apparaître sur la figure les constructions utiles.

B Calcul intégral

1. Soit F la fonction définie sur l'intervalle $[0 ; 6]$ par :

$$F(x) = \left(-2x^2 - 7x - 7\right)\mathrm{e}^{-x}.$$

   Démontrer que F est une primitive de f sur $[0 ; 6]$.
2. On note $I = \displaystyle\int_0^6 f(x)\,\mathrm{d}x$. Démontrer que $I = 7 - 121\mathrm{e}^{-6}$.

C. Application des résultats des parties A et B.

Une société extrait du gravier pour la construction d'autoroutes. Elle envisage l'ouverture d'un nouveau site d'extraction. On admet, qu'au bout de x centaines de jours d'exploitation, la production journalière sur ce site, exprimée en milliers de tonnes, est $f(x)$, où f est la fonction qui a été définie au début de la partie A.

1. Déterminer au bout de combien de jours après l'ouverture du site, la production journalière sera maximale. Quelle est cette production maximale en milliers de tonnes ?
2. Déterminer au bout de combien de jours après l'ouverture du site la production journalière après avoir atteint son maximum sera revenue à 1 000 tonnes.
3. Déduire de la partie B. la valeur moyenne, V_m, de f sur $[0\,;\;6]$. Arrondir V_m à 10^{-3}.

Retour au sommaire : 3

C.G.O. Nouvelle-Calédonie, novembre 2011

Exercice 1 **8 points**

On jette un dé non truqué, la partie est gagnée si on obtient un 5 ou un 6. On joue 50 parties de suite.

Dans cet exercice les résultats approchés sont à arrondir à 10^{-2}

A. Loi binomiale

On considère la variable aléatoire X qui associe le nombre de parties gagnées au cours d'une suite de 50 parties.

1. Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale dont on déterminera les paramètres.
2. Calculer la probabilité de l'événement E : « on gagne 15 parties ».
3. Calculer la probabilité de l'événement F : « on gagne 15, ou 16, ou 17 parties ».

B. Approximation d'une loi binomiale par une loi normale

On décide d'approcher la loi de la variable aléatoire X par la loi normale de moyenne $m = \dfrac{50}{3}$ et d'écart type $\sigma = \dfrac{10}{3}$.
On note Y une variable aléatoire suivant cette loi normale.

1. Justifier le choix des valeurs de m et de σ.
2. Justifier que $P(Y \geqslant 17,5)$ est une approximation de la probabilité de l'événement : « le nombre de parties gagnées est au moins égal à 18 ».
3. Donner une valeur numérique de $P(Y \geqslant 17,5)$ arrondie à 10^{-2}.
4. En déduire une valeur approchée de la probabilité de l'événement : « le nombre de parties gagnées est compris entre 15 et 17 ».

Exercice 2 **12 points**

A. Étude d'une fonction et calcul intégral

Soit f la fonction définie sur $[0\,;\,15]$ par

$$f(x) = 0,2x + 1 + \mathrm{e}^{-0,2x+1}.$$

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ d'unité graphique 1 cm.

1. **a.** Calculer $f'(x)$ pour tout x de $[0\,;\,15]$.
   b. Résoudre dans $[0\,;\,15]$ l'inéquation : $1 - \mathrm{e}^{-0,2x+1} \geqslant 0$.
   c. En déduire le sens de variation de f sur $[0\,;\,15]$.
2. Tracer la courbe $\mathscr{C}$ sur une feuille de papier millimétré **à rendre avec la copie.**
3. On note $I = \displaystyle\int_5^{15} f(x)\,\mathrm{d}x$.
   a. Démontrer que $I = 35 - 5\mathrm{e}^{-2}$.

b. En déduire la valeur moyenne V_m de f sur $[5\,;\,15]$.

c. Donner la valeur approchée arrondie à 10^{-3} de V_m.

B. Application économique

Une entreprise fabrique du matériel informatique.
Lorsqu'elle fabrique x centaines d'objets d'un certain type ($5 \leqslant x \leqslant 15$), le coût total de production, en milliers d'euros, est modélisé par $f(x)$, où f est la fonction définie à la partie A.

1. Déterminer le coût total de production en milliers d'euros :

a. de 1 000 objets ;

b. de 1 100 objets.

Au a. et au b., arrondir à 10^{-3}.

2. **a.** Déterminer la valeur approchée arrondie à 10^{-3} de $f(11) - f(10)$·

b. $f(11) - f(10)$ représente la dépense occasionnée par la production d'une centaine d'objets supplémentaires lorsqu'on a déjà fabriqué dix centaines d'objets.

Plus généralement, $f(x+1) - f(x)$ représente la dépense occasionnée par la production d'une centaine d'objets supplémentaires lorsqu'on a déjà fabriqué x centaines d'objets.

En économie, on note $f(x+1) - f(x) = C_m(x)$ et $C_m(x)$ s'appelle le « *coût marginal au rang* x ».

On prend $f'(x)$ comme approximation de $C_m(x)$, où f' est la fonction dérivée de la fonction f.

En déduire, en milliers d'euros, la valeur approchée, arrondie à 10^{-3}, du coût de production de la onzième centaine d'objets en utilisant la fonction dérivée de f.

Vérifier que les résultats obtenus au a. et au b. ne diffèrent que de 7 euros.

3. On suppose que tous les objets produits sont vendus.

Chaque centaine d'objets est vendue 0,4 milliers d'euros. La recette pour x centaines d'objets vendus est donc donnée par $g(x) = 0,4x$.

a. Tracer la droite Δ d'équation $y = 0,4x$ sur le graphique précédent.

b. Par lecture graphique, indiquer la production x_0 à partir de laquelle l'entreprise réalise un bénéfice.

On fera apparaître sur la figure les constructions utiles.

Retour au sommaire : 3

C.G.O. métropole, mai 2012

Exercice 1 **10 points**

A. Probabilités conditionnelles.

Un garagiste a acheté 70 % de son stock de pneus à un premier fournisseur et 30 % à un deuxième fournisseur. Il observe que :

- 5 % des pneus provenant du premier fournisseur ont un défaut,
- 10 % des pneus provenant du deuxième fournisseur ont un défaut.

On prélève au hasard un pneu dans le stock. Tous les pneus ont la même probabilité d'être prélevés. On considère les événements suivants :

F : « le pneu provient du premier fournisseur » ;
G : « le pneu provient du deuxième fournisseur » ;
D : « le pneu a un défaut ».

1. Déduire des informations figurant dans l'énoncé les probabilités $P(F)$, $P(G)$, $P_F(D)$ et $PG(D)$.
2. a. Calculer les valeurs exactes des probabilités $P(F \cap D)$ et $P(G \cap D)$.
   b. Déduire de ce qui précède que $P(D) = 0,065$.
3. Calculer la probabilité que le pneu provienne du deuxième fournisseur sachant que le pneu choisi a un défaut. Arrondir à 10^{-4}.

B. Loi binomiale.

Le garagiste choisit dix pneus au hasard dans son stock. On suppose que le stock de pneus est suffisamment important pour assimiler ce choix de dix pneus à un tirage avec remise de dix pneus. On rappelle que la probabilité pour qu'un pneu pris au hasard ait un défaut est 0,065.
On considère la variable aléatoire X qui, à tout prélèvement de dix pneus, associe le nombre de pneus de ce prélèvement qui présentent un défaut.

1. Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale dont on déterminera les paramètres.
2. Calculer la probabilité qu'aucun pneu de ce prélèvement n'ait un défaut. Arrondir à 10^{-4}.
3. Calculer la probabilité qu'au plus deux des pneus choisis présentent un défaut. Arrondir à 10^{-4}.

C. Approximation d'une loi binomiale par une loi normale. En janvier le garagiste décide

de lancer une campagne promotionnelle sur les pneus. Pour cela, il envoie un courrier à 400 personnes prélevées au hasard dans sa banque de données de clients potentiels. On assimile ce prélèvement à un tirage avec remise de 400 personnes.
La probabilité pour qu'une personne, ayant reçu le courrier, vienne changer les pneus de son automobile chez ce garagiste est égale à 0,2.
On considère la variable aléatoire Y qui, à tout prélèvement de 400 personnes (auxquelles le garagiste a envoyé un courrier) associe le nombre de personnes venues changer les pneus de son automobile chez ce garagiste.
On admet que Y suit la loi binomiale de paramètres 400 et 0,2.
On décide d'approcher la loi de la variable aléatoire Y par la loi normale de paramètres $m = 80$ et $\sigma = 8$. On note Z une variable aléatoire suivant la loi normale de paramètres 80 et 8.

1. Justifier les valeurs de m et σ.
2. Calculer $P(Z \leqslant 92,5)$.

3. Calculer la probabilité que cette campagne promotionnelle ait amené au moins 100 clients c'est à dire calculer $P(Z \geqslant 99,5)$.

Exercice 2 **10 points**

A. Statistiques

Le tableau suivant donne la consommation de tabac en grammes par personne de 15 ans ou plus et par jour.

Année	1997	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009
Rang année	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Consommation de tabac (en grammes)	4,67	4,65	4,59	4,47	4,47	4,3	3,77	3,15	3,1	3,11	3,03	2,95	2,98

Source : Insee ; institut Gustave Roussy

Dans le plan muni d'un repère orthogonal on a représenté en annexe le nuage de points associé à la série statistique $(x_i\ ;\ y_i)$ pour i entier variant de 0 à 12.

1. Déterminer à l'aide d'une calculatrice, le coefficient de corrélation linéaire de la série statistique $(x_i\ ;\ y_i)$. Arrondir à 10^{-3}.
2. **a.** Déterminer, à l'aide d'une calculatrice, une équation de la droite de régression D de y en x, par la méthode des moindres carrés, sous la forme $y = ax + b$ où a et b sont à arrondir à 10^{-4}.

   b. Tracer la droite $\mathscr{D}$ sur la figure de l'annexe à rendre avec la copie.

B. Étude d'une fonction

Soit la fonction f définie sur $[0\,;\,12]$ par

$$f(x) = 4,64 - 0,024x - \frac{1,4\mathrm{e}^{2x}}{\mathrm{e}^{2x} + 160\,000},$$

$\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthogonal et f' sa fonction dérivée.

1. **a.** Démontrer que $f'(x) = -0,024 - \dfrac{448000e^{2x}}{\left(\mathrm{e}^{2x} + 160\,000\right)^2}$ pour tout x de $[0\,;\,12]$.

   b. Étudier le signe de $f'(x)$ lorsque x varie dans $[0\,;\,12]$ et établir le tableau de variation de f.
2. **a.** Compléter le tableau de l'annexe à rendre avec la copie dans lequel les valeurs sont à arrondir à $10^{-2.}$

   b. Construire la courbe $\mathscr{C}$ sur la figure de la partie A.
3. Laquelle de la droite $\mathscr{D}$ et la courbe $\mathscr{C}$ semble le mieux ajuster le nuage de points ? Justifier.

C. Calcul intégral et application

1. Soit F la fonction définie sur [0,12] par $F(x) = 4,65x - 0,012x^2 - 0,7\ln(\mathrm{e}^{2x} + 160\,000)$.
   Démontrer que F est une primitive de la fonction f sur $[0\,;\,12]$.
2. **a.** Démontrer que la valeur moyenne de f sur [0,12] est : $V_m = 4,506 + \dfrac{7}{120}\ln\left(\dfrac{160\,001}{\mathrm{e}^{24} + 160\,000}\right)$.

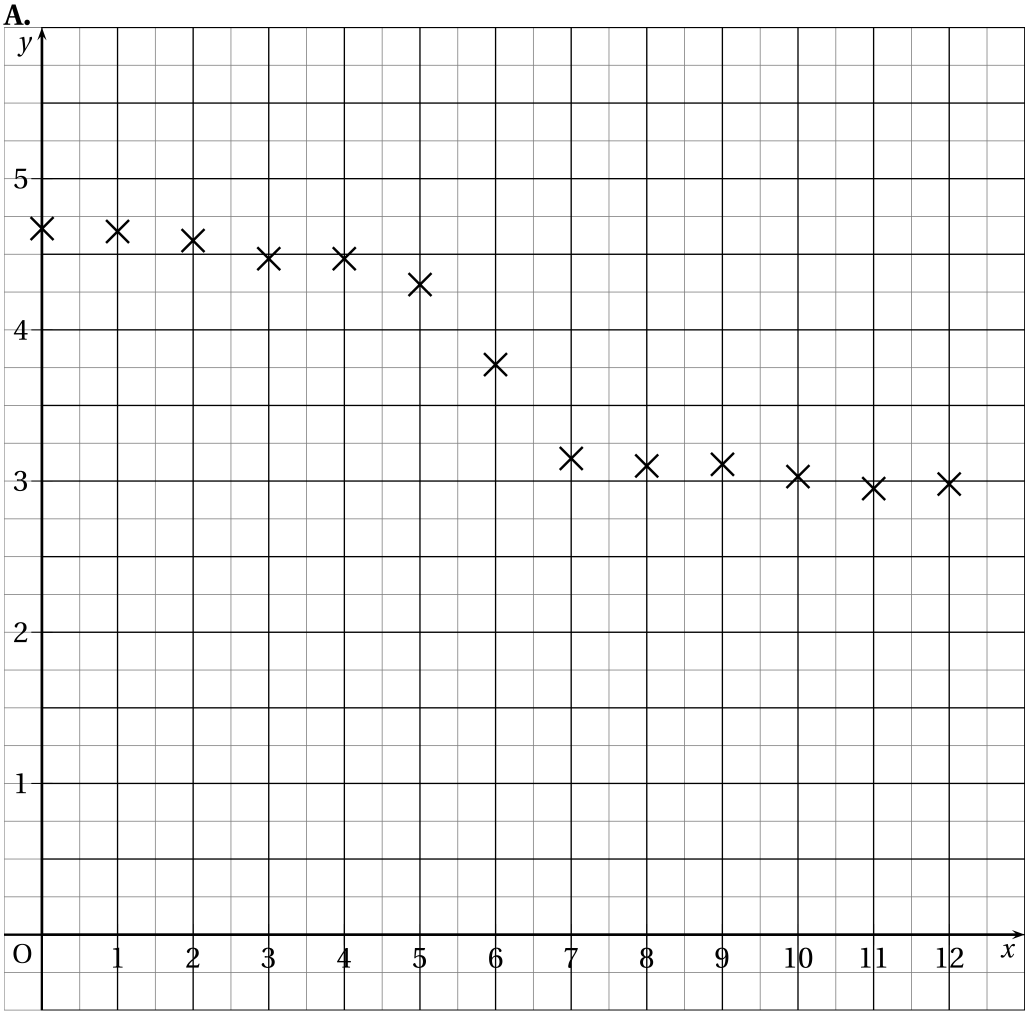
b. Donner la valeur approchée, arrondie à 10^{-1} de V_m.

3. On admet que $f(x)$ représente la consommation de tabac, par jour, en grammes d'une personne de 15 ans ou plus. Donner une interprétation du résultat obtenu à la question précédente.

Annexe à rendre avec la copie

Exercice 2

A.



B.2)a)

x	0	2	4	5	6	7	8	10	12
$f(x)$				4,36					

Retour au sommaire : 3

C.G.O. Polynésie, mai 2012

Exercice 1 **10 points**

A. Ajustement affine

Pour les besoins d'une usine qui fabrique des puces, l'entreprise TERRARE extrait du minerai rare. Sa production annuelle X (en tonnes) n'excède pas 2 tonnes et le coût total annuel de la production est noté Y en milliers d'euros (on notera 1 k€ = 10^3 €).
Les résultats des premières années d'exploitation sont consignés dans le tableau suivant.

année	2006	2007	2008	2009	2010
x_i (en tonnes)	0,52	0,77	1,01	1,36	1,81
y_i (en k€)	186,7	230,9	283,1	381,3	558,9

1. Le plan est muni d'un repère orthogonal.

Unités graphiques : 1 cm pour 0,1 unité sur l'axe des abscisses et 2 cm pour 100 unités sur l'axe des ordonnées.

Construire le nuage de points associé à cette série statistique sur une feuille de papier millimétré.

2. La nature de l'activité et le graphique laissent penser qu'un ajustement exponentiel est approprié.

On pose $z = \ln y$.

- **a.** Compléter le tableau donnée en annexe à rendre avec la copie.
  Arrondir à 10^{-3} les valeurs de $z;_i$.
- **b.** Déterminer le coefficient de corrélation linéaire entre x et z. Arrondir à 10^{-3}.
- **c.** À l'aide de la calculatrice, déterminer par la méthode des moindres carrés, une équation de la droite d'ajustement de z en x. Les coefficients seront arrondis à 10^{-2}.

3.
- **a.** Déduire du 2. c. une expression de y en fonction de x, de la forme $y = B\mathrm{e}^{ax}$. Arrondir B à l'entier le plus proche.
- **b.** En déduire une estimation du coût de production pour 2 tonnes.

B. Étude d'une fonction

On considère la fonction f définie sur $[0~;~+\infty[$ par

$$f(x) = 0,4\mathrm{e}^{0,3x}.$$

On désigne par C sa courbe représentative dans un repère orthogonal et par f' sa fonction dérivée.
Unités graphiques : 1 cm pour 1 unité sur l'axe des abscisses et 1 cm pour 2 unités sur l'axe des ordonnées.

1. Étudier la limite de f en $+\infty$.

2.
- **a.** Calculer $f'(x)$.
  Étudier le signe de $f'(x)$ et donner le tableau de variation de f sur $[0~;~+\infty[$.
  Tracer C sur une deuxième feuille de papier millimétré.

C. Calcul intégral et applications

On admet que le poids moyen de matière extraite, entre l'année 2006 de rang 1 et l'année 2010 de rang 5, est donné par

$$P_m = \frac{1}{4}\int_1^5 f(x)\,\mathrm{d}x.$$

1. Démontrer que $P_m = \frac{1}{3}\left(\mathrm{e}^{1,5} - \mathrm{e}^{0,3}\right)$.

2. Donner la valeur approchée de P_m arrondie à 10^{-3}.

Exercice 2 **10 points**

A. Probabilités conditionnelles

Un fabricant d'ampoules fluocompactes dispose de trois chaînes de montage A, B, C :
- la chaîne de montage A fournit 20 % de la production totale de l'usine,
- la chaîne de montage B fournit 20 % de la production totale de l'usine,
- la chaîne de montage C fournit 60 % de la production totale de l'usine.

Les ampoules qui sortent des trois chaînes sont testées :
- le pourcentage d'ampoules défectueuses issues de la chaîne de montage A est 1,2 %,
- le pourcentage d'ampoules défectueuses issues de la chaîne de montage B est 3,3 %,
- le pourcentage d'ampoules défectueuses issues de la chaîne de montage C est 1,5 %.

On note :
- A l'événement « l'ampoule est issue de la chaîne de montage A »
- B l'événement « l'ampoule est issue de la chaîne de montage B »
- C l'événement « l'ampoule est issue de la chaîne de montage C »
- D l'événement « l'ampoule est défectueuse »

1. Montrer que le pourcentage d'ampoules défectueuses sur la production totale de l'usine s'élève à 1,8 %.

2. Calculer la probabilité qu'une ampoule provienne de la chaîne B sachant qu'elle est défectueuse. Arrondir le résultat à 10^{-2}.

B. Loi binomiale

Dans cette partie les résultats seront arrondis à 10^{-2}

On prélève au hasard 50 ampoules dans la production totale d'une journée de l'usine.
On assimile ce tirage à un tirage avec remise.
On considère la variable aléatoire X qui, à tout prélèvement de 50 ampoules, associe le nombre d'ampoules qui sont défectueuses.
On rappelle que la probabilité pour qu'une ampoule prise au hasard soit défectueuse est de $0,018$.

1. Expliquer pourquoi la variable aléatoire X suit une loi binomiale, dont on déterminera les paramètres.

2. Calculer $P(X = 2)$.

3. Calculer la probabilité qu'au moins une pièce soit défectueuse.

C. Loi normale

Dans cette partie les résultats seront arrondis à 10^{-4}

On considère la variable aléatoire Y qui, à toute ampoule prélevée au hasard dans la production journalière de l'usine, associe sa durée de vie en heures.

1. On admet que Y suit une loi normale de moyenne 8 300 et d'écart type $\mathbf{250}$.
   Calculer la probabilité $P(Y \leqslant 8615)$.
2. Ces ampoules sont vendues dans le commerce, mais les informations concernant leur durée de vie ont dû être légèrement modifiées pour tenir compte du nombre moyen d'allumages et d'extinctions.
   On admet que Y suit une loi normale de moyenne m et d'écart type σ.
   On trouve, avec les précisions fournies par la table ou la calculatrice, que $P(Y \leqslant 7436) = 0{,}2912$ et $P(Y \leqslant 8204) = 0{,}8531$.
   a. Vérifier que m et σ vérifient l'équation $1{,}05\sigma + m = 8204$.
   b. En admettant que m et σ vérifient également l'équation $-0{,}55\sigma + m = 7436$, déterminer m et σ.

Annexe (à rendre avec la copie)

Exercice 1

A. 2. a. **tableau 1**

année	2006	2007	2008	2009	2010
x_i	0,52	0,77	1,01	1,36	1,81
y_i	186,7	230,9	283,1	381,3	558,9
z_i					

Retour au sommaire : 3

C.G.O. Nouvelle-Calédonie, novembre 2012

Exercice 1 **10 points**

Une entreprise fabrique des conserves alimentaires dont l'étiquette annonce une masse de 250 grammes.
Les masses obtenues pour un échantillon de 500 conserves prises au hasard sont données dans le tableau suivant :

Masse (en g)	[235 ; 240[	[240 ; 245[	[245 ; 250[	[250 ; 255[	[255 ; 260[
Nombre de conserves	33	67	217	132	51

Partie A : Probabilités conditionnelles

1. **a.** À l'aide de la calculatrice, calculer, en utilisant les milieux des classes, la masse moyenne ainsi que l'écart type a des conserves de cet échantillon. On fournira les valeurs arrondies au dixième.

   b. Calculer le pourcentage des conserves alimentaires ayant une masse comprise entre 240 et 255 grammes.

2. On prélève au hasard une conserve de l'échantillon. On considère les deux événements suivants :

   A : « la conserve a une masse strictement inférieure à 250 grammes » ;

   B : « la conserve a une masse au moins égale à 240 grammes ».

   a. Calculer $P(A)$ et $P(B)$.

   b. Déterminer $P_B(A)$. Arrondir au millième.

   c. Les événements A et B sont-ils indépendants ?

Partie B : Loi binomiale

Parmi l'échantillon de 500 conserves, on choisit successivement, au hasard et avec remise, 30 conserves. On note X la variable aléatoire qui à un tel prélèvement associe le nombre de conserves de masse strictement inférieure à 250 grammes.

1. Justifier que X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
2. **a.** Calculer l'espérance mathématique $\mathrm{E}(X)$ de X.

   b. Interpréter ce résultat par une phrase.
3. Calculer $P(X = 15)$ et $P(X = 20)$ (arrondir au millième).
   Interpréter à l'aide d'une phrase.

Partie C : Loi normale

Dans cette partie, on admet que la variable aléatoire Y qui à chaque conserve associe sa masse suit la loi normale de paramètres $m = 249$ et $\sigma = 5$.
On précisera la méthode utilisée (lecture de tables ou utilisation de la calculatrice).

1. Calculer $P(240 < y < 255)$ et comparer avec le résultat obtenu à la question 1 b de la partie A.

2. Déterminer le nombre réel a tel que $P(249 - a \leqslant Y \leqslant 249 + a) = 0,97$.
   Interpréter à l'aide d'une phrase.

Exercice 2 **10 points**

Les trois parties peuvent être traitées de manière indépendante

Partie A : Valeur actuelle et valeur acquise

On place une somme d'argent notée S_0 au taux annuel de 5,5 %, ce placement étant à intérêts composés.
Pour tout entier naturel n, S_n désigne le capital disponible au bout de n années.

1. Justifier que la suite (S_n) est géométrique. Préciser la raison de cette suite.
2. Exprimer S_n en fonction de S_0 et de n.
3. En déduire S_0 en fonction de S_n et de n.

Partie B : Valeur actuelle d'une suite d'annuités constantes

Un artisan souhaite acheter un nouveau matériel en janvier 2013.
Le fournisseur lui fait une offre d'achat à crédit au taux annuel de 5,5 % qui consiste en le versement de quatre annuités du même montant égal à **3000** € comme l'indique le tableau ci-dessous.

	1er versement Décembre 2013	2e versement Décembre 2014	3e versement Décembre 2015	4e versement Décembre 2016
Achat du nouveau matériel livré en janvier 2013	$u_0 = 3000$ €	$u_1 = 3000$	$u_2 = 3000$	$u_3 = 3000$

Le prix comptant que l'artisan pourrait demander au fournisseur du matériel est la somme **des valeurs actuelles au début 2013** des quatre annuités u_0, u_1, u_2 et u_3.
On notera a_0, a_1, a_2, et a_3 les valeurs actuelles correspondantes.

1. Justifier que $a_0 = \dfrac{u_0}{1,055}, a_1 = \dfrac{u_0}{1,055^2}, a_2 = \dfrac{u_0}{1,055^3}$ et $a_3 = \dfrac{u_0}{1,055^4}$.
2. En déduire que le prix comptant du matériel facturé à l'artisan est :

$$C = \frac{3000}{1,055^4} + \frac{3000}{1,055^3} + \frac{3000}{1,055^2} + \frac{3000}{1,055}.$$

3. Justifier que : $C = \dfrac{3000}{1,055^4}\left(1 + 1,055 + 1,055^2 + 1,055^3\right)$.
4. On rappelle que pour q différent de 1 et pour tout entier naturel n,

$$1 + q + q^2 + \ldots + q_n = \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}$$

   En déduire que $C = 3000 \times \dfrac{1 - 1,055^{-4}}{0,055}$.

5. Donner l'arrondi, au centime d'euro, du prix comptant que l'artisan acceptera de payer pour son nouveau matériel.

Partie C : Étude d'une fonction

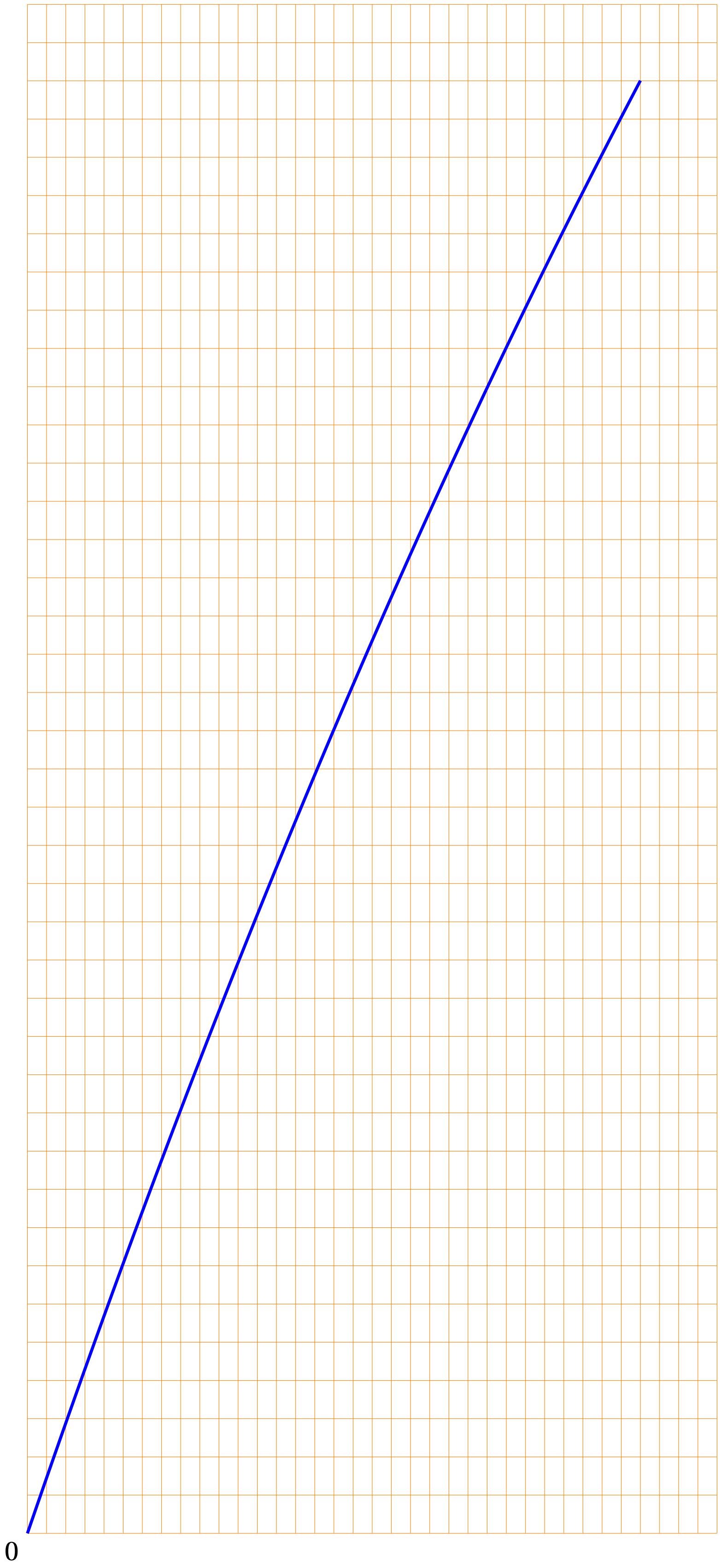
On admet que le prix comptant au taux d'actualisation de 5,5 % d'une suite de $\boldsymbol{n}$ annuités constantes égales à 3 000 € est $\boldsymbol{C = 3000 \times \dfrac{1-1,055^{-n}}{0,055}}$.
Dans la partie précédente, on a obtenu ce résultat avec $\boldsymbol{n = 4}$.
On considère la fonction $\boldsymbol{f}$ définie sur [0 ; 8] par

$$\boldsymbol{f(x) = \frac{3000}{0,055}\left(1-1,055^{-x}\right).}$$

On rappelle que $\boldsymbol{1,055^{-x}} = \mathrm{e}^{\boldsymbol{-x\ln(1,055)}}$.
Sa courbe $\mathscr{C}_f$ est donnée en annexe.

1. On envisage soit un paiement comptant soit un paiement à crédit.
   Quel est le prix comptant associé à un crédit de deux ans an taux de 5,5 % (annuités constantes égales à 3 000 €) ?
   Quelle est l'économie réalisée si on choisit le paiement comptant ?
2. a. Justifier que $\boldsymbol{f'(x) = \dfrac{3000}{0,055} \times \ln(1,055) \times 1,055^{-x}}$ où $\boldsymbol{f'}$ est la fonction dérivée de $\boldsymbol{f}$ sur [0 ; 8].
   b. Déterminer le signe de $\boldsymbol{f'(x)}$ sur [0 ; 8].
   c. Construire le tableau de variations de la fonction $\boldsymbol{f}$ sur l'intervalle [0 ; 8].
3. Déterminer graphiquement le nombre d'années de versements de crédit correspondant à un prix comptant inférieur à 15 000 €.
   Les constructions utiles seront reportées sur l'**annexe à rendre avec la copie**.

Annexe (à rendre avec la copie)
Exercice 2



Retour au sommaire : 3

C.G.O. métropole, mai 2013

Exercice 1 **12 points** L'objectif de cet exercice est d'utiliser une modélisation du pourcentage de bacheliers en France entre 1951 et 1985 puis d'en bâtir une deuxième sur la période allant de 1985 à 2010.

Partie A : étude d'une fonction logistique.

Considérons la fonction f définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par la relation : $f(x) = \dfrac{33}{1+1417\mathrm{e}^{-0,11x}}$

On désigne par $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de cette fonction dans un repère orthonormé.

1. On admet que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-0,11x} = 0$.
   En déduire $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)$. Donner l'interprétation graphique de ce résultat.
2. **a.** Calculer la dérivée f' de la fonction f et montrer que pour tout x de $[0\,;\,+\infty[$, $f'(x) = \dfrac{5\,143,71\mathrm{e}^{-0,11x}}{\left(1+1\,417\mathrm{e}^{-0,11x}\right)^2}$.
   b. En déduire le tableau de variations complet de la fonction f sur $[0\,;\,+\infty[$

Partie B : une fonction rationnelle.

Considérons maintenant la fonction g définie sur $[85\,;\,+\infty[$ par la relation $g(x) = \dfrac{-871}{x-70} + 87,5$.
On donne ci-dessous le tableau des variations complet de la fonction g.

x	85		$+\infty$
$g'(x)$		+	
$g(x)$	$\approx 29,4$	$\nearrow$	87,5

1. Déterminer une primitive G de la fonction g sur l'intervalle $[85\,;\,+\infty[$.
2. Montrer que : $\displaystyle\int_{85}^{110} g(x)\,\mathrm{d}x = 871\ln\left(\frac{3}{8}\right) + 2\,187,5$
3. En déduire une valeur approchée au dixième de la valeur moyenne de la fonction g sur l'intervalle $[85\,;\,110]$.

Partie C : modélisation du pourcentage de bacheliers en France entre 1951 et 1985.

Le pourcentage des bacheliers en France entre 1951 et 1985 et suivant une même classe d'âge est rapporté dans le tableau n° 1

Tableau n° 1

Année	1951	1956	1966	1968	1970	1974	1977	1980	1985
Rang	51	56	66	68	70	74	77	80	85
pourcentage	5,3	7,4	12,5	19,6	20,1	23,7	24,6	25,9	29,4

Source : RERS, ministère de l'éducation nationale

1. a. On donne en **annexe 1 à rendre avec la copie** le tracé du nuage de points associé au tableau n° 1. Construire sur ce même dessin la représentation graphique $\mathbb{C}_f$ de la fonction f étudiée partie A ainsi que l'asymptote. La courbe $\mathbb{C}_f$ sera tracée à partir de $x = 48$.
On remplira au préalable le tableau de valeurs fourni dans cette même annexe (arrondir à 0,1).
   b. La fonction f modélise-t-elle convenablement l'évolution du pourcentage de bacheliers sur la période 1951 - 1985 ?
2. À partir de ce modèle, donner une prévision, en utilisant la partie A, de la proportion maximale de bacheliers en France dans les années suivantes.

Partie D : modélisation de la proportion de bacheliers en France de 1985 jusqu'en 2010.

A partir de 1985. sous l'influence de facteurs divers, dont la création du baccalauréat professionnel, la proportion de bacheliers en France par classe d'âge augmente significativement.
Le tableau n° 2 en fournit quelques valeurs :

Tableau n° 2 :

Année	1985	1990	2005	2007	2010
Rang	85	90	105	107	110
Proportion en %	29,4	43,5	61,4	62,9	65,7

Source : RERS 2011, ministère de l'éducation nationale

1. Le modèle utilisé dans la partie C vous paraît-il fiable sur cette période ? Justifiez succinctement votre réponse.
2. On donne en annexe 2 le nuage de points associé au tableau n° 2 ainsi que le tracé d'une courbe qui approche au mieux ce nuage.
Le logiciel stipule que la courbe est la représentation graphique d'une fonction g définie par la relation $g(x) = \dfrac{a}{x-70} + b$ avec a et b deux réels fixés.
   a. Exprimer $g(85)$ et $g(110)$ en fonction des réels a et b.
   b. En admettant que la courbe associée à la fonction g passe par les points de coordonnées $(85\,;29,4)$ et $(110\,;65,7)$, justifier que les réels a et b vérifient le système (S) :
$$\left\{\begin{array}{rcr} a+15b & = & 441 \\ a+40b & = & 2628 \end{array}\right.$$
   c. Résoudre le système (S). On donnera les valeurs exactes de a et b.
3. On admet que la fonction g recherchée est celle fournie dans la partie B (les valeurs de a et b ont été arrondies).
En vous aidant des résultats donnés dans la partie B :
   a. Donner une prévision du pourcentage maximal de bacheliers en France par classe d'âge les années suivantes.
   b. Interpréter par une phrase le résultat obtenu à la question 3. de la partie B.

Exercice n° 2 **(8 points)**

Les parties A et B sont indépendantes.

Partie A : Q.C.M.

Cet exercice est un questionnaire à choix multiple. Pour chaque item, une seule des trois affirmations proposées est vraie.
Chaque réponse juste rapporte un point, chaque réponse fausse enlève **0,25** *point. Une absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de point. Si la somme des points est négative, elle est ramenée à zéro.*

1. Chaque année, plusieurs dizaines de milliers de personnes empruntent les chemins de Saint Jacques de Compostelle. Le tableau ci-dessous donne le nombre annuel de pèlerins arrivés à Compostelle en Espagne depuis 2005 (année 2010 exclue).

Année	2005	2006	2007	2008	2009	2011
Rang de l'année x	0	1	2	3	4	6
Nombre de pèlerins y	93 925	100 377	114 026	125 143	145 878	179 919

Source : bureau des pèlerins de Saint-Jacques de Compostelle

a. On admet que le nuage de points associé à cette série statistique est rectiligne. L'équation de la droite de régression de y en x associée à la série est :

- Réponse 1 : $\boldsymbol{y = 14\,664{,}4x + 87\,439{,}6}$
- Réponse 2 : $\boldsymbol{y = 16\,697{,}2x + 79\,054{,}2}$
- Réponse 3 : $\boldsymbol{y = 16\,502{,}6x + 85\,288{,}2}$

b. En 2010, le nombre de pèlerins enregistrés à Compostelle fut de 272 703.
Le taux de variation du nombre de pèlerins enregistrés par rapport au nombre théorique issu du modèle de la régression affine est approximativement égal à (arrondi à 0,1 %) :

- Réponse 1 : 69,6 %
- Réponse 2 : 41 %
- Réponse 3 : 1,7 %

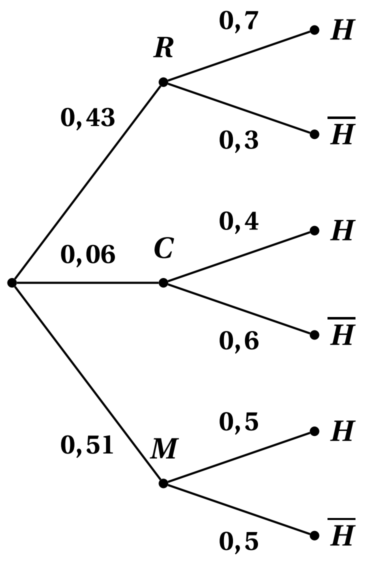
2. En 2011, les pèlerins arrivant à Compostelle ont répondu à un questionnaire leur demandant les principales motivations de leur pèlerinage. Les réponses sont les suivantes :
51 % l'ont fait pour des raisons culturelles et religieuses ;
43 % l'ont fait pour des raisons strictement religieuses ;
6 % l'ont fait pour des raisons strictement culturelles.
De plus, on sait que 58 % des pèlerins sont des hommes et 42 % des femmes.

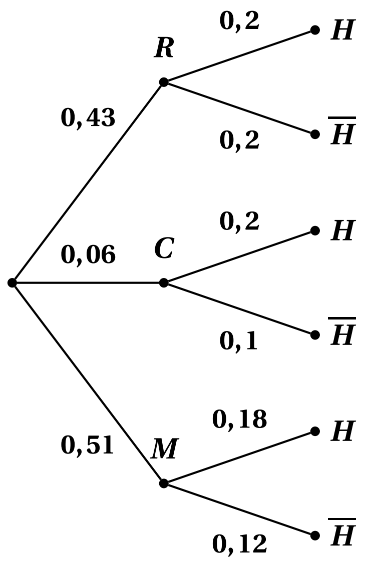
On choisit un pèlerin au hasard.

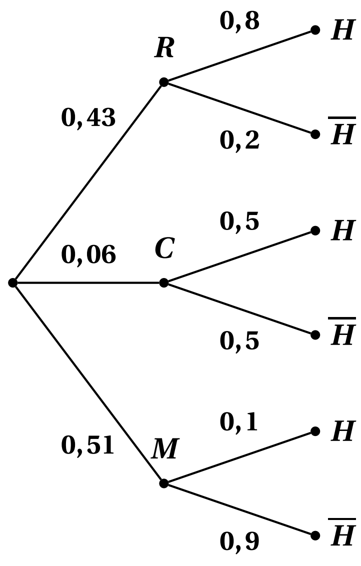
On considère les événements suivants :

$\boldsymbol{R}$: « le pèlerin choisi a fait le chemin pour des raisons strictement religieuses » ;
$\boldsymbol{C}$: « le pèlerin choisi a fait le chemin pour des raisons strictement culturelles » ;
$\boldsymbol{M}$: « le pèlerin choisi a fait le chemin pour des raisons culturelles et religieuses » ; $\boldsymbol{H}$: « le pèlerin choisi est un homme ».

Parmi les trois diagrammes proposés ci-dessous, lequel est un arbre de probabilité susceptible de décrire la situation donnée ?







3. On considère la suite (w_n) ainsi définie : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_{n+1} = 2w_n - 6$ et $w_0 = 4$.
Le terme w_{10} est égal à :

- Réponse 1 : 12
- Réponse 2 : -1018
- Réponse 3 : -2042

Partie B Tous les résultats de la partie B seront arrondis, si nécessaire, à 0,000 1 près.

En 2007, 38 % des Allemands venus en France le sont pour des raisons professionnelles, et 62 % pour des raisons touristiques ou personnelles.
Soit X la variable aléatoire qui, à tout groupe de dix Allemands présents en France, associe le nombre de ceux venus pour des raisons professionnelles.
On suppose que le nombre d'Allemands venus en France est suffisamment grand pour assimiler le choix aléatoire de dix de ces Allemands à un tirage avec remise.

1. Quelle loi suit la variable aléatoire X ? Justifier la réponse en précisant les paramètres de la loi.

2. Dix Allemands se retrouvent un soir dans une brasserie parisienne.

  a. Quelle est la probabilité que neuf d'entre eux soient présents en France pour des raisons touristiques ou personnelles ?

  b. Déterminer la probabilité $P(X \geqslant 1)$. Interpréter le résultat obtenu.

3. Soit Y la variable aléatoire qui, à tout Allemand présent en France, associe la distance en km qu'il aura parcourue pendant son séjour.
On admet que Y suit la loi normale de moyenne $m = 2000$ km et d'écart type $\sigma = 550$ km.

  a. Déterminer $P(Y \leqslant 3200)$ et interpréter, à l'aide d'une phrase, le résultat obtenu.

  b. Déterminer la probabilité qu'un Allemand, choisi au hasard, parcoure en France une distance comprise entre 1 300 km et 2 700 km.

Annexe 1 à rendre avec la copie Nuage de points associé au tableau n° 1

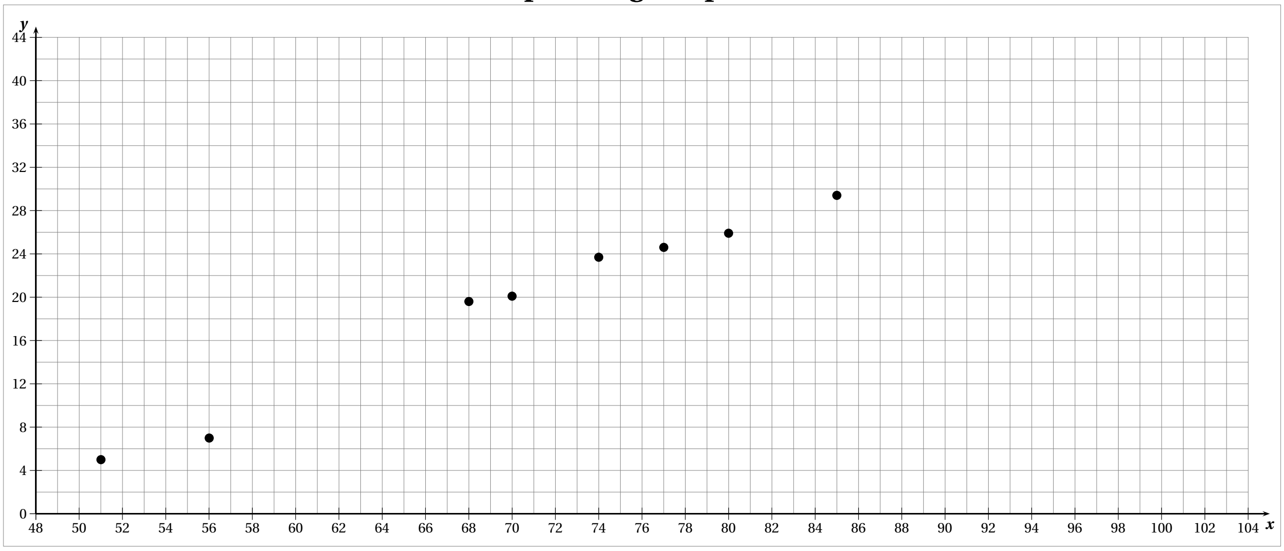
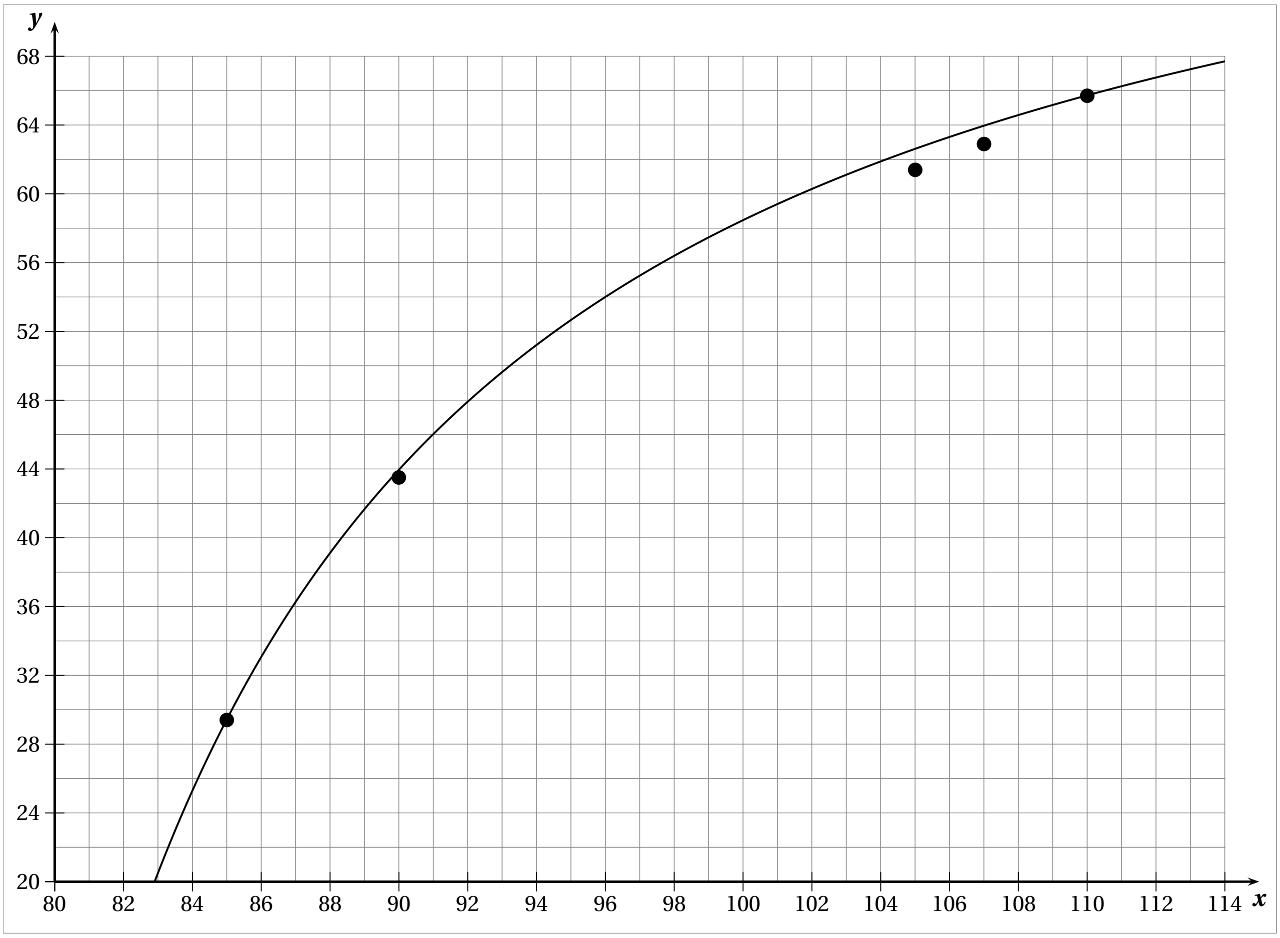


Tableau de valeurs

x	48	51	55	60	65	70	75	80	85
$f(x)$									

Annexe 2

Nuage de poins associé au tableau nø2 et courbe associée à la fonction g



Retour au sommaire : 3

C.G.O. Polynésie, mai 2013

Exercice 1 **8 points**

Dans cet exercice les résultats sont à arrondir à $\mathbf{10^{-3}}$.
Les trois parties sont indépendantes.

Un fabricant produit des tondeuses dans deux usines. Le coût de fabrication est de 160 € par machine.
L'usine A produit **400** unités par mois et l'usine B en produit **600**.
Le fabricant a fait réaliser un test de conformité, dans les mêmes conditions, dans les deux usines sur une très grande quantité de tondeuses fabriquées.
Une tondeuse est déclarée conforme si le test est positif.
Dans l'usine A, le test est positif dans 90 % des cas.
Dans l'usine B, le test est positif dans 95 % des cas.
Une tondeuse conforme est vendue 250 €, sinon, elle est bradée à un sous-traitant pour 100 €.

Partie A : Probabilités conditionnelles

On prélève, au hasard, une tondeuse produite par ce fabricant.
On note $\boldsymbol{A}$, l'évènement : « La tondeuse est produite dans l'usine A ». On note $\boldsymbol{C}$, l'évènement : « La tondeuse est conforme ».

1. À l'aide de l'énoncé, donner les probabilités suivantes : $\boldsymbol{P\left(\overline{A}\right), P_A(C), P_{\overline{A}}(C)}$ et $\boldsymbol{P_A\left(\overline{C}\right)}$.
2. Calculer $\boldsymbol{P(A\cap C)}$ puis $\boldsymbol{P\left(\overline{A}\cap C\right)}$.
3. En déduire la probabilité que la tondeuse soit conforme.

Partie B : Loi binomiale

On admet que chaque tondeuse qui sort des usines a une probabilité de 7 % d'être non conforme.
On note $\boldsymbol{X}$ la variable aléatoire qui indique le nombre de tondeuses conformes dans un lot de **250** tondeuses prises au hasard dans le stock. On admet que le nombre de tondeuses fabriquées est suffisamment grand pour assimiler ce tirage à un tirage avec remise.

1. Justifier que la variable aléatoire $\boldsymbol{X}$ suit une loi binomiale dont on déterminera les paramètres.
2. Calculer la probabilité de l'évènement E : « exactement 240 tondeuses sont conformes ».
   Interpréter ce résultat.
3. Calculer l'espérance mathématique de $\boldsymbol{X}$.
4. On note $\boldsymbol{Y}$ la variable aléatoire qui donne le bénéfice réalisé sur un lot de **250** tondeuses.
   a. Montrer que $\boldsymbol{Y = 150X - 15000}$.
   b. Calculer l'espérance mathématique de $\boldsymbol{Y}$. Interpréter le résultat obtenu.

Partie C : Approximation d'une loi binomiale par une loi normale

On décide d'approcher la loi de la variable aléatoire $\boldsymbol{X}$ par la loi normale de moyenne $\boldsymbol{m = 232,5}$ et d'écart type $\boldsymbol{\sigma = 4}$. On note $\boldsymbol{Z}$ la variable aléatoire suivant cette loi normale.

1. Justifier le choix des valeurs de $\boldsymbol{m}$ et de $\boldsymbol{\sigma}$.

2. On veut calculer la probabilité que le nombre de tondeuses conformes de ce lot de $\mathbf{250}$ soit au moins égal à $\mathbf{240}$. Pour cela, donner une valeur numérique de $P(Z \geqslant 239,5)$.
3. Donner une valeur approchée de la probabilité de l'évènement : « le nombre de tondeuses conformes est compris entre $\mathbf{225}$ et $\mathbf{245}$ », c'est-à-dire la probabilité de l'évènement :« $224,5 \leqslant Z \leqslant 245,5$ ».

Exercice 2 **12 points**

Partie A : Droite de régression

Une marque a lancé sur le marché un nouveau produit destiné aux entreprises. Elle a relevé à six dates précises le taux d'équipement des entreprises concernées pour ce nouveau produit. On a présenté dans le tableau suivant ce taux noté y en fonction du rang t du nombre de mois écoulés depuis le lancement. Ce taux est écrit sous la forme d'un nombre décimal compris entre $\mathbf{0}$ et $\mathbf{1}$, et non pas en pourcentage.

t	1	4	6	8	10	12
y	0,03	0,09	0,18	0,33	0,50	0,70

1. Représenter le nuage des six points dans le repère de l'annexe à rendre avec la copIe.
2. À l'aide de la calculatrice, donner une équation de la droite de régression de y en t ainsi que le coefficient de corrélation linéaire de cette série statistique. Arrondir à $\mathbf{0,001}$.
3. Tracer la droite obtenue sur le graphique précédent.
4. Si la tendance se poursuit, quel sera, à $\mathbf{1}$ % près, le taux d'équipement des entreprises concernées pour ce nouveau produit 15 mois après le lancement.
5. Expliquer pourquoi cette droite de régression ne pourra pas servir de modèle très longtemps.

Partie B : Étude d'une fonction et calcul intégral

On considère la fonction f définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par

$$f(t) = \frac{1}{1+50\mathrm{e}^{-0,4t}}$$

et on désigne par C sa courbe représentative dans le repère défini dans la partie A.

1. On rappelle que $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-x} = 0$. Donner la limite en $+\infty$ de la fonction f et interpréter graphiquement le résultat.
2. Justifier que $f'(t) = \dfrac{20\mathrm{e}^{-0,4t}}{\left(1+50\mathrm{e}^{-0,4t}\right)^2}$ où f' est la fonction dérivée de la fonction f et en déduire le sens de variation de f sur $[0\,;\,+\infty[$.
3. Tracer la courbe C sur le graphique de la partie A.
4. a. Montrer que $f(t)$ peut s'écrire sous la forme $f(t) = \dfrac{\mathrm{e}^{0,4t}}{\mathrm{e}^{0,4t}+50}$.
   b. En déduire que la fonction F définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par
   $$F(t) = \frac{1}{0,4}\ln\left(\mathrm{e}^{0,4t}+50\right)$$
   est une primitive de f sur $[0\,;\,+\infty[$.

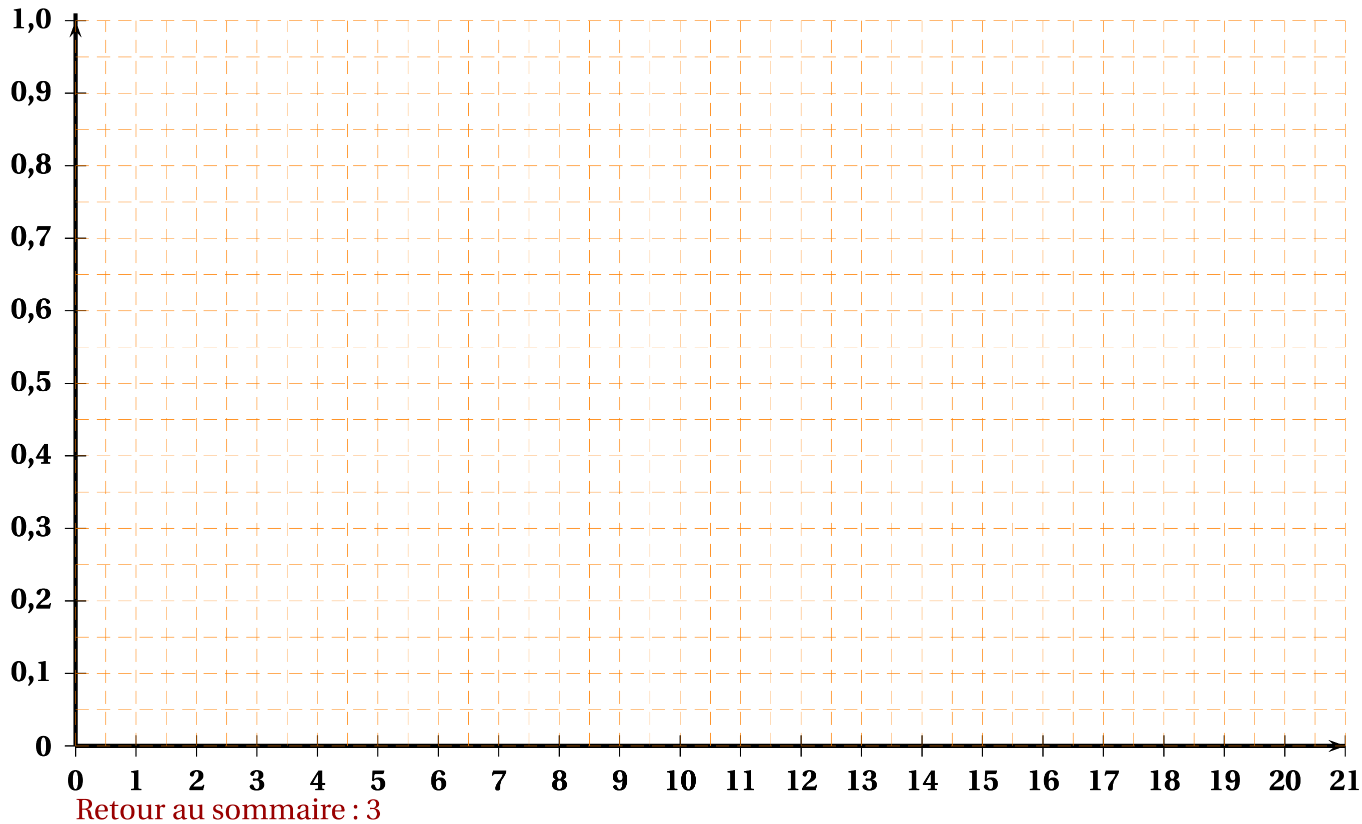
5. Calculer la valeur exacte de l'intégrale $\int_{12}^{24} f(t)\,\mathrm{d}t$. En déduire la valeur moyenne de f sur $[12\,;\,24]$ arrondie à 10^{-2}.

Partie C : Application économique

Le modèle donné par la droite de régression ayant ses limites, on considère que la fonction f définie dans la partie B est un meilleur modèle d'approximation du taux d'équipement des entreprises concernées pour ce nouveau produit. La variable t est le temps écoulé, exprimé en mois, depuis le lancement du produit.

1. Déterminer une estimation à 0,1 % près du taux d'équipement des entreprises concernées pour ce nouveau produit au bout de deux ans.
2. Déterminer graphiquement, au bout de combien de mois le taux d'équipement dépassera 95 %.
3. Donner une interprétation de la valeur moyenne de f sur $[12\,;\,24]$.

Annexe à rendre avec la copie



Retour au sommaire : 3

C.G.O. Nouvelle-Calédonie, novembre 2013

Exercice 1 **8 points**

A. Étude d'une fonction

f est la fonction définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par

$$f(t) = 9 - 6\mathrm{e}^{-0,2t}.$$

Sa courbe représentative C dans le plan muni d'un repère orthonormal est donnée en annexe.

1. On admet que $\lim\limits_{t\to+\infty} \mathrm{e}^{-0,2t} = 0$. Calculer la limite de la fonction f en ∞.
   En déduire que la courbe C admet une asymptote D dont on donnera une équation.
   Construire la droite D sur le graphique de l'annexe à rendre avec la copie.
2. **a.** Justifier que $f'(t) = 1,2\mathrm{e}^{-0,2t}$ où f' est la fonction dérivée de la fonction f.
   b. Étudier le signe de $f'(t)$ sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.
3. Établir le tableau de variation de f sur $[0\,;\,+\infty[$. On complètera ce tableau avec des valeurs exactes.
4. Résoudre graphiquement dans $[0\,;\,15]$ l'inéquation $f(t) \geqslant 8,5$. On fera apparaître sur la figure de l'annexe à rendre avec la copie, les constructions utiles.

B. Calcul intégral

On note $I = \displaystyle\int_5^{10} f(t)\,\mathrm{d}t$.

1. **a.** g et G sont les fonctions numériques définies sur $[0\,;\,+\infty[$ respectivement par :

   $$g(t) = -6\mathrm{e}^{-0,2t} \quad \text{et} \quad G(t) = 30\mathrm{e}^{-0,2t}.$$

   Démontrer que G est une primitive de g sur $[0\,;\,+\infty[$.
   b. Démontrer que $I = 45 + 5\left(\mathrm{e}^{-2} - \mathrm{e}^{-1}\right)$.
2. **a.** En déduire la valeur exacte de la valeur moyenne V_m de la fonction f sur l'intervalle $[5\,;\,10]$.
   b. Donner une valeur arrondie à 10^{-2} de V_m.

C. Application

Dans une entreprise ·on admet que pour une production journalière de n dizaines d 'articles, lorsque $1 \leqslant n \leqslant 15$, la marge unitaire sur coût de production, en euros, est donnée par f(n) où ! est la fonction définie dans la partie A.

En utilisant les résultats de la partie A., répondre aux questions suivantes :

1. Donner la marge unitaire sur coût de production, arrondie au centime d'euro, pour une production journalière de 50 articles.
2. Pour quelles productions journalières, la marge unitaire sur coût de production est-elle supérieure ou égale à $8,50$ euros ?

Exercice 2 **12 points**

Les parties A, B et C de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante

A. Ajustement affine

Les ventes de voitures particulières et d'utilitaires légers en Chine sont données dans le tableau suivant où t_i désigne le rang de l'année et v_i le nombre de ventes en millions au cours de la même année.

Année	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010
Rang t_i	1	2	3	4	5	6	7	8
Ventes v_i	4,3	4,8	5,4	6,8	8,8	9,4	13,5	15

La forte croissance des ventes au cours des quatre dernières années suggère de renoncer à un ajustement affine pour le nuage de points correspondant. On effectue donc le changement de variable $y_i = \ln v_i$, où ln désigne le logarithme népérien.

1. Compléter, après l'avoir reproduit sur votre copie, le tableau suivant dans lequel les valeurs approchées sont à arrondir à 10^{-3}.

Rang t_i	1	2	3	4	5	6	7	8
$y_i = \ln v_i$	1,459				2,175			2,708

2. Déterminer, à l'aide d'une calculatrice, le coefficient de corrélation linéaire de la série statistique $(t_i\ ;\ y_i)$. Arrondir à 10^{-3}.

3. Déterminer, à l'aide d'une calculatrice, une équation de la droite de régression de y en t sous la forme $y = at + b$ où a et b sont arrondis à 10^{-3}.

4. On pose $v = \mathrm{e}^y$ où y a été défini à la question précédente et où v désigne le nombre de ventes en millions au bout de t années (on rappelle que $t = 1$ en 2003).
Vérifier que $v = 3,31\mathrm{e}^{0,19t}$ où les coefficients ont été arrondis à 10^{-2}.

5. Utiliser le résultat précédent pour déterminer en quelle année on peut estimer que les ventes annuelles de voitures particulières en Chine auront dépassé 20 millions.

B. Événements indépendants

Cette partie est un questionnaire à choix multiples

Pour chacune des deux questions, une seule réponse $\boldsymbol{a, b, c, d}$ *est exacte.*
Indiquer sur la copie le numéro de la question et recopier la réponse choisie. On ne demande aucune justification.
Chaque réponse juste rapporte **1** *point, une réponse fausse ou une absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de point.*

Une entreprise fabrique des chariots composés d'un panier monté sur un support à roulettes.
On a constaté qu'après trois mois d'utilisation certains chariots présentent une détérioration des roulettes ou du panier.
On observe après trois mois d'utilisation un chariot prélevé au hasard dans la production.
On note A l'événement : « les roulettes du chariot sont détériorées ».

On note B l'événement : « le panier du chariot est détérioré ».
On admet que les probabilités des événements A et B sont $P(A) = 0,005$ et $P(B) = 0,01$, et on suppose que ces deux événements sont indépendants.

1. La valeur exacte de la probabilité de l'événement : « le chariot prélevé présente des roulettes et un panier détériorés » est :

Réponse ***a***	Réponse ***b***	Réponse ***c***	Réponse ***d***
0,015	0,014 9	0,000 5	0,000 05

2. La valeur exacte de la probabilité de l'événement : « le chariot prélevé présente au moins une détérioration des roulettes ou du panier »est :

Réponse ***a***	Réponse ***b***	Réponse ***c***	Réponse ***d***
0,015	0,985	0,014 95	0,149

C Loi binomiale et loi normale

On note E l'événement : « un chariot prélevé au hasard dans la production est inutilisable après deux ans de service ». On admet que $P(E) = 0,35$.
L' entreprise livre **60** chariots à un client. La production est suffisamment importante pour qu'on puisse assimiler cette livraison à un tirage avec remise de 60 chariots.
On considère la variable aléatoire X qui, à toute livraison de **60** chariots associe le nombre de chariots de cette livraison inutilisables après deux ans de service.

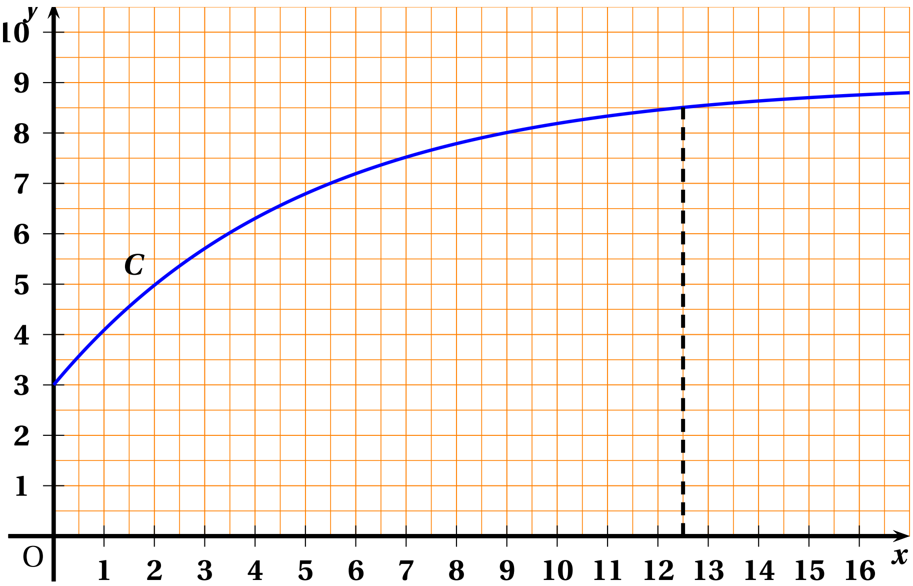
1. Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale dont on déterminera les paramètres.
2. **a.** Calculer la probabilité qu'exactement trente chariots livrés soient inutilisables après deux ans de service. Arrondir à 10^{-1}.

   b. Calculer l'espérance mathématique et la variance de la variable aléatoire X.
3. On décide d'approcher la loi de la variable aléatoire X par la loi normale de paramètres $m = 21$ et $\sigma = 3,7$. On note Y une variable aléatoire suivant la loi normale $\mathcal{N}(21\ ;\ 3,7)$.

   a. Justifier les valeurs de m et σ.

   b. On note E l'événement « Au moins 45 chariots sont utilisables après deux ans de service ».
   Exprimer cet événement à l'aide de X.
   On approche la probabilité de l'événement E à l'aide de $P(Y \leqslant 14,5)$.
   Calculer $P(Y \leqslant 14,5)$. Arrondir à 10^{-2}.

Annexe à rendre avec la copie



Retour au sommaire : 3

Index