SECOND CYCLE

Fascicule 3

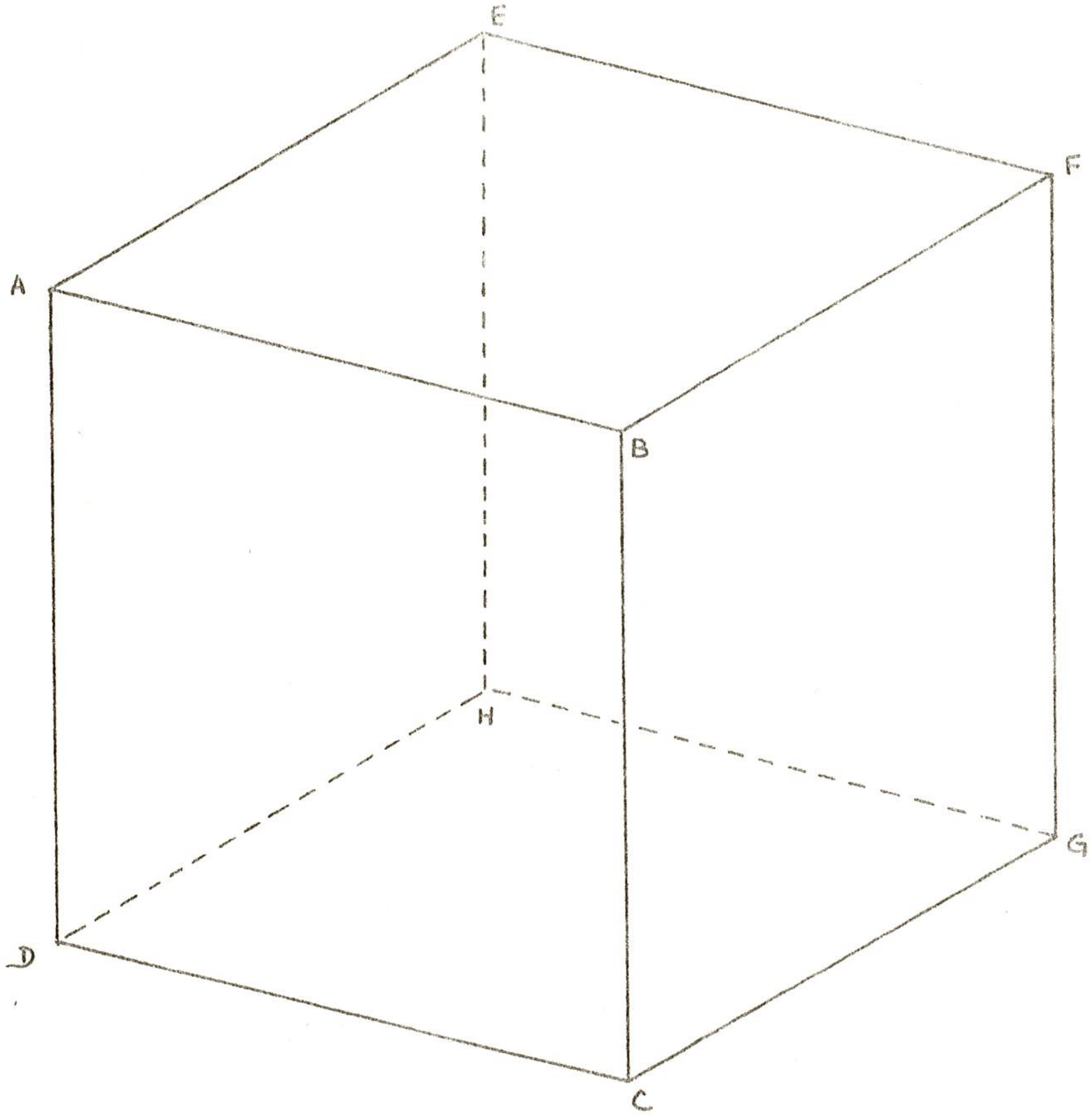
LA GEOMETRIE DANS L'ESPACE

classe de seconde

IREM PARIS-NORD

UNIVERSITE PARIS XIII

IREM PARIS NORD



- LA GEOMETRIE dans L'ESPACE -

classe de seconde

Jean BOUDAREL

(dessins : Patrick GOETGHELUCK)

et l'équipe GREFFE de PARIS :

Madeleine BOUDAREL

Jeannine GOETGHELUCK

MAI 1983

UNIVERSITE PARIS-NORD.- I.R.E.M.-
Jean BOUDAREL, Patrick GOETGHELUCK
et l'équipe de Paris / Géométrie
dans l'espace : LE CUBE.- 1983,
Villetaneuse, 65 pages dactylo.,
29 cm.

ISBN 2 86240 070 X

Dépôt légal : juin 1983

Tirage : 500 ex.

Prix : 7,00 F.

Voici le programme officiel de "Géométrie dans l'Espace" de la classe de Seconde.

GEOMETRIE dans L'ESPACE

Cette partie du programme se propose d'organiser, vis-à-vis de l'espace dans lequel nous vivons, les connaissances de l'élève, et de l'amener à raisonner et à calculer.

On se gardera de tout édifice axiomatique.

L'espace est muni d'une distance. Dans tout plan de l'espace les théorèmes de géométrie plane sont vrais, ils suffisent à la conduite des calculs.

Propriétés d'incidence ; parallélisme.
Orthogonalité. Symétrie par rapport à un plan ; plan médiateur.
Projection. Projections orthogonales.
Repère cartésien : coordonnées d'un point.
Calculs de distances, d'aires de volumes.

Thèmes (à titre indicatif) :

- Perpendiculaire commune à deux droites. Distance de deux droites ;
- Représentation d'un solide par des projections orthogonales sur deux plans perpendiculaires bien choisis ;
- Représentation par perspective cavalière ;
- Exemples de figures admettant un centre, un axe, un plan de symétrie ; cercle, cube, tétraèdre régulier,...

Le programme de 1^{e}S ou E suppose le programme de Seconde compris, et l'utilise pour organiser vectoriellement et analytiquement les propriétés de l'espace.

Toutefois, les élèves de 1ère n'ayant jamais entendu parler du programme de géométrie dans l'espace précédent, ils étaient au même niveau que ceux de 2^{e} et ont travaillé sur les mêmes constructions.

Plan de L'ouvrage

Introduction

I - Pour commencer, il m'a paru nécessaire de faire un bilan oral avec les élèves de leurs acquis en géométrie dans l'espace :

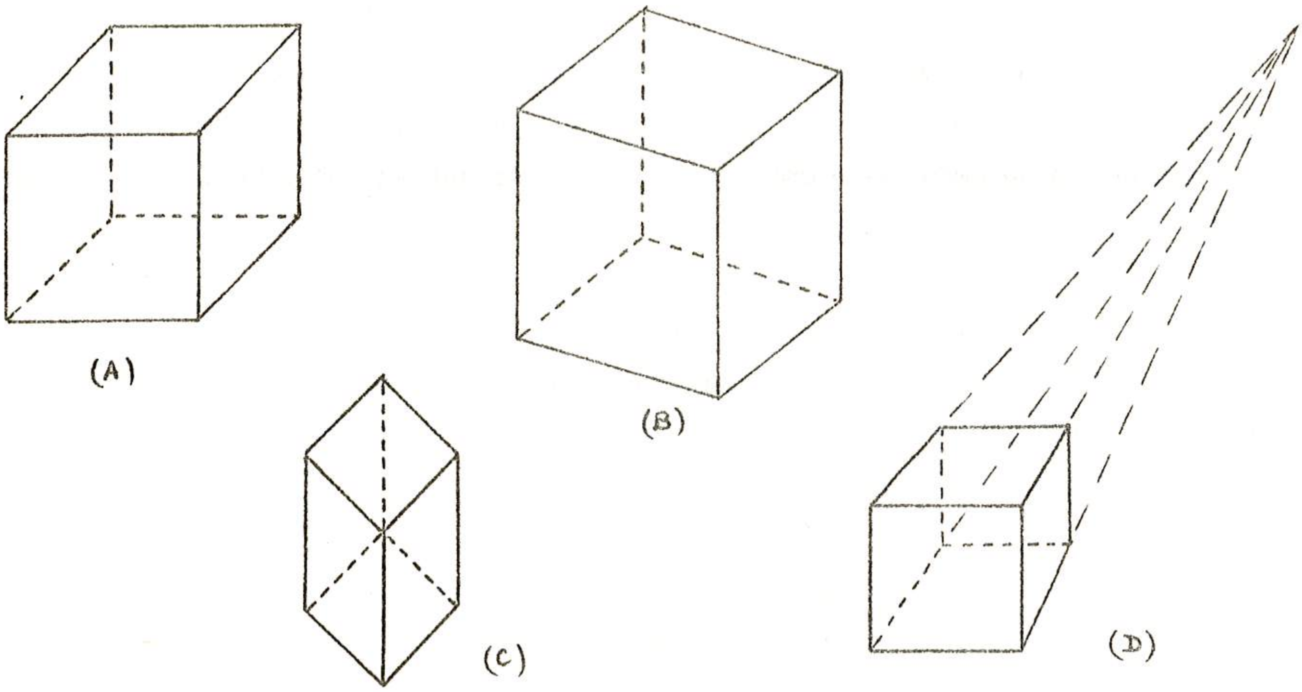
- les éléments constitutifs de solides simples (tels que cube, parallélépipède, cylindre, prisme, ...) étaient peu connus. Les mots arête, sommet, face, ... étaient dans leur esprit, imprécis et confus. Les volumes étaient mal vus.

une présentation d'objets tels qu'un dé, une boîte de conserve, un chapeau de clown, ... a été nécessaire pour observer puis dénombrer les arêtes, les faces, les sommets. Il leur a été demandé ensuite de réaliser à l'aide d'une feuille de papier ces solides : de toute évidence, aucun élève n'avait jamais réalisé un patron quelconque au préalable ! (Peut-être n'avaient-ils pas fait de 5^{e} ?)

travail à la maison : pour compléter ces observations, dénombrer et classer les différents "polygônes" constitutifs d'un ballon de football (2 sortes). Que peut-on constater en un "sommet" (point commun à plusieurs polygônes) ?

- les représentations d'un solide dans un plan posaient d'énormes difficultés.

pour préciser leur pensée, j'ai dessiné, au tableau, les 4 représentations suivantes du cube.



pour la grosse majorité, les représentations (B) et (D) étaient les plus lisibles (mes collègues, étonnés de cette remarque, ont expérimenté dans leurs classes, les mêmes représentations, et ont obtenu, de la part de leurs élèves, des réactions équivalentes).

en revenant à l'observation du cube et à leur choix de représentation, il a été décidé d'utiliser continuellement la représentation (B), plus "fidèle" que la représentation (D), car conservant le parallélisme, bien qu'aucune face ne soit un carré.

II - Pour traiter ce programme de "Géométrie dans l'Espace", il m'est apparu que l'idée directrice essentielle était l'étude des positions relatives des plans et des droites de l'espace. Pour cela, j'ai décidé de construire les sections d'un cube par des plans successifs (et d'observer les positions relatives de ces sections, et les transformations de l'espace permettant de passer d'un plan de section à un autre), voir par d'autres solides (tels que les tétraèdres).

Les élèves travaillaient devant des projections sur le tableau permettant de visualiser et d'expliquer les diverses constructions (en les refaisant à la craie, et en éteignant le rétroprojecteur).

Cette méthode visuelle, réalisée dans plusieurs classes, a eu un énorme succès. Les élèves répondaient : " Si on faisait toute la géométrie comme çà, on comprendrait mieux ! " : c'est peut être une idée à creuser !.

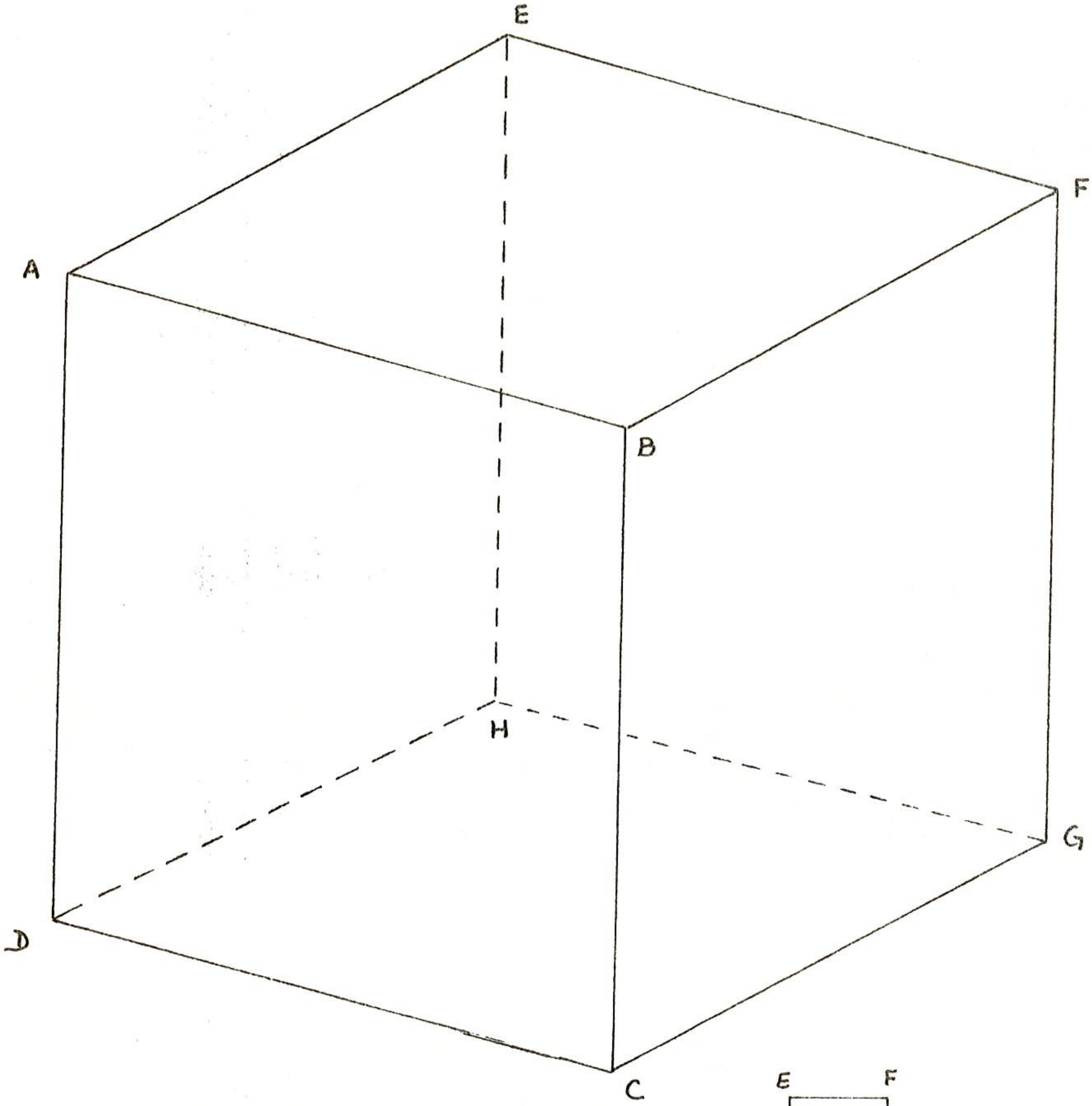
Le but de cette brochure est de présenter un descriptif des activités réalisées dans la classe, et de mettre en évidence les prérequis, les énoncés admis, les théorèmes démontrés, et les concepts atteints par ces activités.

Au fur et à mesure, je mettrai (entre crochets) les réactions des élèves et leurs commentaires. Les résultats importants à retenir seront encadrés.

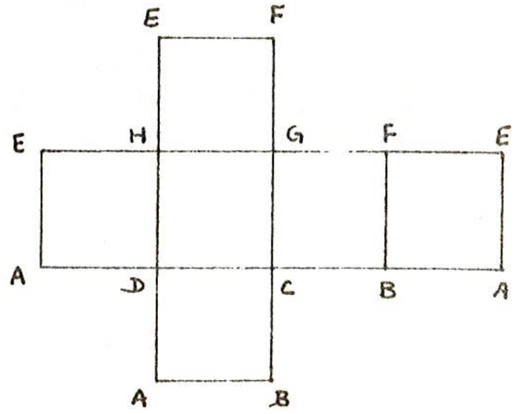
Deux remarques très importantes :

1. Pour maintenir constante l'attention des élèves, tous les dessins ont été réalisés (par mon ami architecte Patrick GOETGHELUCK, que je remercie) sur la même configuration (B) du cube (c'est-à-dire que tous les transparents peuvent être superposés). On évite ainsi les efforts visuels de changement de représentation qui auraient été nécessaires pour passer d'un dessin à l'autre.

Le cube ABCDEFGH est donc toujours le suivant :



un des patrons possibles de ce cube est

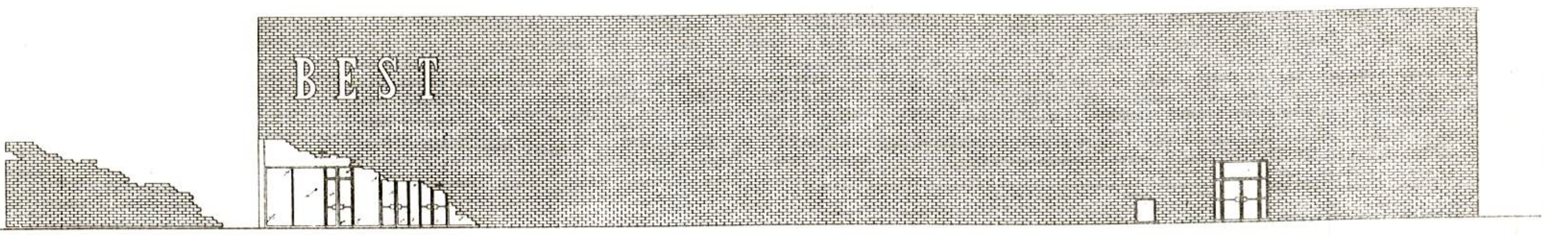


2. Après chaque section, on montre le solide obtenu, c'est-à-dire la réalisation "en volume" de la section.

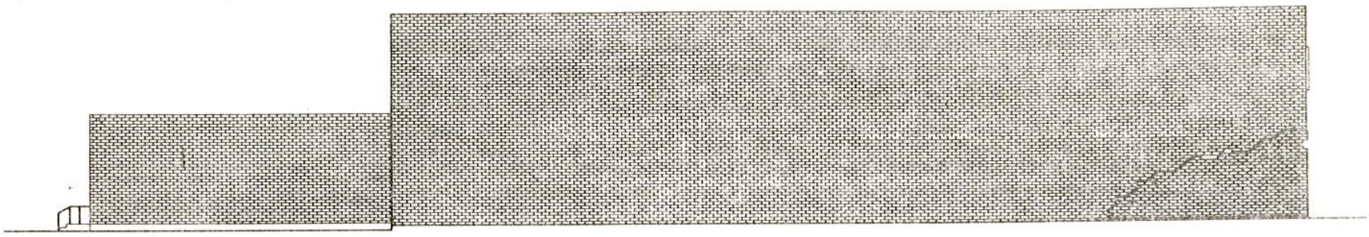
(A) MOTIVATION des ELEVES

Présentation du "Projet Encoche" de la Galerie Marchande "BEST", d'Arden Fair, Sacramento, Californie (1976,1977), où

l'entrée principale est une vaste brèche aux arêtes brutes, pratiquée sur l'un des angles de l'édifice. Un dispositif mécanique en forme de coin vient s'y encastrer et permet l'ouverture et la fermeture du magasin.



FRONT ELEVATION



LEFT SIDE ELEVATION

(B) DEUX EXEMPLES D'INTERSECTION du CUBE par un PLAN (particulier).

a) Préliminaire : Comment déterminer un plan ?

Il n'a pas été évident de faire constater aux élèves que 3 points déterminent un plan ; pourtant, j'ai proposé l'exercice traditionnel :

Quel est le tabouret le plus stable ? Celui qui a 3 pieds ? 4 pieds ? 5 pieds ? (la table portant le rétroprojecteur possède 5 pieds).

La majorité des réponses furent fausses.

On dira que : Trois points non alignés déterminent un plan et un seul.

Par contre, en prenant deux règles, et une feuille de papier posée sur ces deux règles, il a été plus facile de dire que

Deux droites sécantes déterminent un plan et un seul

Certains élèves ont, à ce propos, posé une question astucieuse :

Deux droites parallèles déterminent-elles un plan ?

J'ai répondu (rapidement) " oui " , mais me suis vite rendu compte, que dans l'espace, il était impossible d'isoler et de définir deux droites parallèles, si, au préalable, elles n'avaient pas été prises dans un même plan. On tourne en rond !

b) (Transparents 1 et 2) . Chercher l'intersection du plan (MNP) avec les faces du cube . (Quelle forme aurait la section du cube par le plan déterminé par les 3 points M, N, P ou les deux droites (MN) et (NP) ?)

(Les points M, N et P ont été choisis sur les arêtes respectives [AD], [BC] et [BF])

Il a fallu :

1. *Visualiser dans quelles faces du cube étaient situées les droites (NM) et (NP)*

2. *Comprendre (à l'aide de 2 livres) que*

L'intersection de deux plans (sécants) est une droite

3. *Constater que* $(MN) \in$ *plan* (MNP)

et $(MN) \in$ *plan* $(ABCD)$

donc $(MN) = (MNP) \cap (ABCD)$.

4. *Constater que* $(NP) = (MNP) \cap (BFGC)$.

Mais, pour les élèves, la difficulté était de trouver l'intersection du plan (MNP) avec les autres faces. Certains, même, proposaient de joindre M et P ! .

5. *Faire constater que*

Si un point appartient à deux plans (P) et (Q), il appartient à la droite d'intersection de ces deux plans (et réciproquement)

(Transparent 3) Donc que $\{\alpha\} = (NM) \cap (AB) \Longrightarrow \alpha \in (MNP)$ *et* $\alpha \in (ABCD)$

Comme $(AB) = (ABCD) \cap (ABFE)$, *alors* $\alpha \in (ABEF)$.

6. *Faire constater que*

Si deux points A et B appartiennent à un plan (P), la droite (AB) appartient à ce plan (P) .

$$\left.\begin{array}{ll} \alpha \in (ABFE) \text{ et } P \in (ABFE) \Longrightarrow (\alpha P) \in (ABFE) \\ \text{de même } \alpha \in (MNP) \text{ et } P \in (MNP) \Longrightarrow (\alpha P) \in (MNP) \end{array}\right\}$$

donc $(\alpha P) = (MNP) \cap (ABFE)$.

(Transparent 4)

7. $(\alpha P) \cap (AE) = \{\beta\}$

$\beta \in (AE) \Longrightarrow \beta \in (ABFE)$ *et* $\beta \in (ADHE)$ *(car* $(AE) = (ABFE) \cap (ADHE)$*)*

$M \in (AD) \Longrightarrow M \in (ADHE)$

donc $(\beta M) \in (ADHE)$

$\beta \in (\alpha P)$ $\quad$ $\left.\begin{array}{l}\beta \in (MNP) \\ M \in (MNP)\end{array}\right\} \Rightarrow (\beta M) \in (MNP)$

La section du cube par le plan (MNP) est le quadrilatère (MβPN) (Transparent 5)

Observation du Transparent 5 (et du Transparent 9 : le volume "tronqué")

Les droites (Mβ) et (NP) sont parallèles. Or elles appartiennent aux deux faces parallèles (ADHE) et (BCGF) .

<u>Théorème</u> :	Un plan coupe deux plans parallèles selon deux droites parallèles .

et si une droite (D) d'un plan (P) est parallèle à une droite (Δ) d'un plan (Q), alors (D) et (Δ) sont coplanaires

mais si (P) et (Q) sont parallèles, toute droite de (P) n'est pas parallèle à n'importe quelle droite de (Q)

c) (Transparent 6) . Contrôle de l'acquisition des connaissances précédentes : <u>Chercher l'intersection du plan (MNP) avec les faces du cube.</u>

Les élèves construisent les points α et γ sur les droites (AB) et (BF) et raisonnent sur la droite (αβ) qui coupe les arêtes [AE] et [EF] en β et δ. La section obtenue est un pentagone (M β δ P N)

(Transparent 7 et 10)

<u>Question</u> : Quelles autres figures planes pourrait-on obtenir en coupant un cube par un plan ?

(C) NATURE des SECTIONS d'un CUBE par un PLAN

En coupant un cube par un plan, on peut obtenir

- un point [image d'un livre appuyé sur l'un des coins du bureau]
- une droite [image d'un livre appuyé sur une arête du bureau]

- un triangle (troncature du cube) (transparent 8)
- un quadrilatère (tansparent 9)
- un pentagone (transparent 10)
- un hexagone (transparent 11)

Question : *Serait-il possible d'obtenir un polygône de 7,8... côtés ? La réponse, justifiée, (le cube n'ayant que 6 faces), fusa dans la classe. Ouf !*

Le transparent 12 montre, sur la même représentation, les quatre derniers polygônes précédents, obtenus en coupant le cube par quatre plans.

Question : Comment sont placés les plans les uns par rapport aux autres ? Par quelle transformation (bijection) peut-on passer d'un plan à un autre ?

Les élèves observent rapidement que certains côtés sont parallèles, et en "déduisent" tout aussi rapidement que les plans sont parallèles.

Evidemment, question de ma part, "combien faut-il de segments parallèles pour que les plans le soient ?".

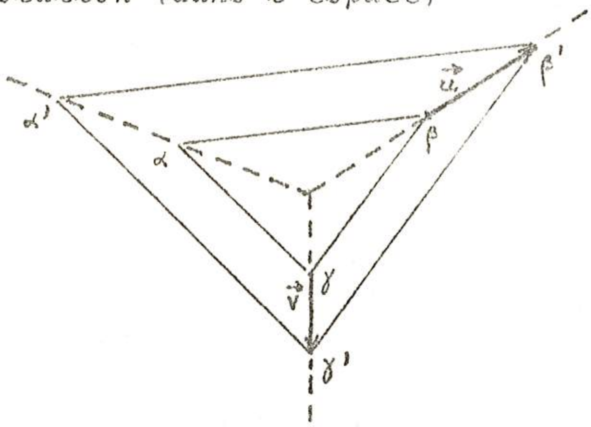
Après observation des sections, il ressort que

Si deux droites sécantes d'un plan (P) sont respectivement parallèles à deux droites (sécantes) d'un plan (Q), alors les deux plans (P) et (Q) sont parallèles et toute droite de (P) est parallèle à <u>une</u> droite de (Q) .

Après de longues minutes silencieuses, il a été, difficilement, prononcé le mot "Translation" pour passer d'un plan à un plan parallèle.

Il a fallu revenir dans le plan, à deux droites parallèles, pour montrer qu'il existait une infinité de translations permettant de passer d'un plan à un plan parallèle.

Alors deux élèves ont exhibé chacun un vecteur possible de translation (dans l'espace)



plan $(\alpha\beta\gamma) \xrightarrow{T_{\vec{u}}}$ *plan* $(\alpha'\beta'\gamma')$

ou $T_{\vec{v}}$

(Je n'ai pas trop insisté, ici, sur cette notion, car mes sections ne sont pas des plans, mais des morceaux de plan, et la généralisation n'est peut être pas évidente).

Remarque : Ces parties (A) (B) (C) ont nécessité un travail d'environ 3 heures avec les élèves .

Je leur ai alors proposé d'étudier une situation particulière sur le cube (de côté 1), et chez eux, de répondre aux questions suivantes : (transparents 13 et 14). (I et J étant les milieux des arêtes [AD] et [FG])

1. Montrer que (ICJE) est une section plane du cube
2. Calculer IJ , EC .

   Calculer IE , EJ , JC , IC .

   En déduire la nature du quadrilatère (IEJC) .

   Que peut-on dire du point O ?
3. Observer les plans (AEHD) et (ABCD) et les droites (AB), (AD) puis les plans (AFGD) et (EBCH) .

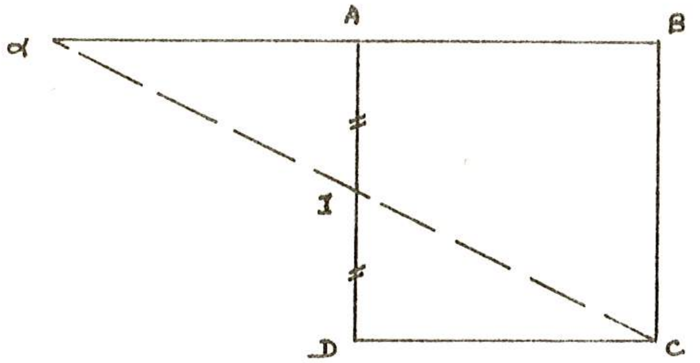
(D) UN PLAN COUPE le CUBE SELON un LOSANGE

1. Est-il possible de couper le cube selon la figure (IEJC) ? En d'autres termes : les 4 points I, E, J, C sont-ils coplanaires ?

Les points I,C,J constituent un plan. Reprenant l'étude faite au (B) b), la droite (JC) coupe (BF) en β et la droite (CI) coupe (BA) en α . (voir 13)

. BF = Fβ et BA = Aα

en effet

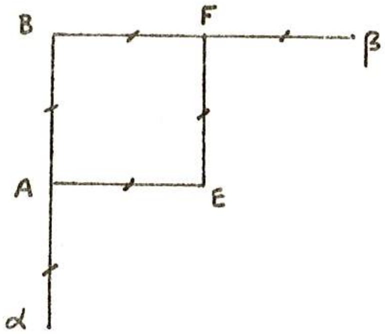


Considérant la symétrie de centre I transformant D en A donc la droite (DC) en la droite (AB), donc le point C en le point α .

(IA) est la droite des milieux du triangle (αCB) donc Aα = AB

de même on démontre que BF = Fβ .

. le plan (ICJ) coupe la face (ABFE) selon la droite (αβ)



AB = Aα = BF = Fβ = AE

[AE] est donc le segment des milieux du triangle (Bαβ)

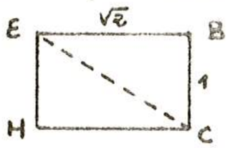
donc E ε plan (ICJ) .

<u>Conséquence</u> : Les droites (IJ) et (EC) sont sécantes en O. (EC) est une <u>diagonale</u> du cube. (IJ) est une droite joignant les milieux des arêtes "opposées" du cube. (les autres diagonales sont (BH) , (AG) et (DF)).

O s'appelle le <u>centre</u> du cube (point d'intersection des diagonales).

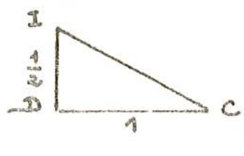
2. *Les élèves observent que* AF = IJ = DG = $\sqrt{2}$ *(diagonale d'un carré de côté 1).*

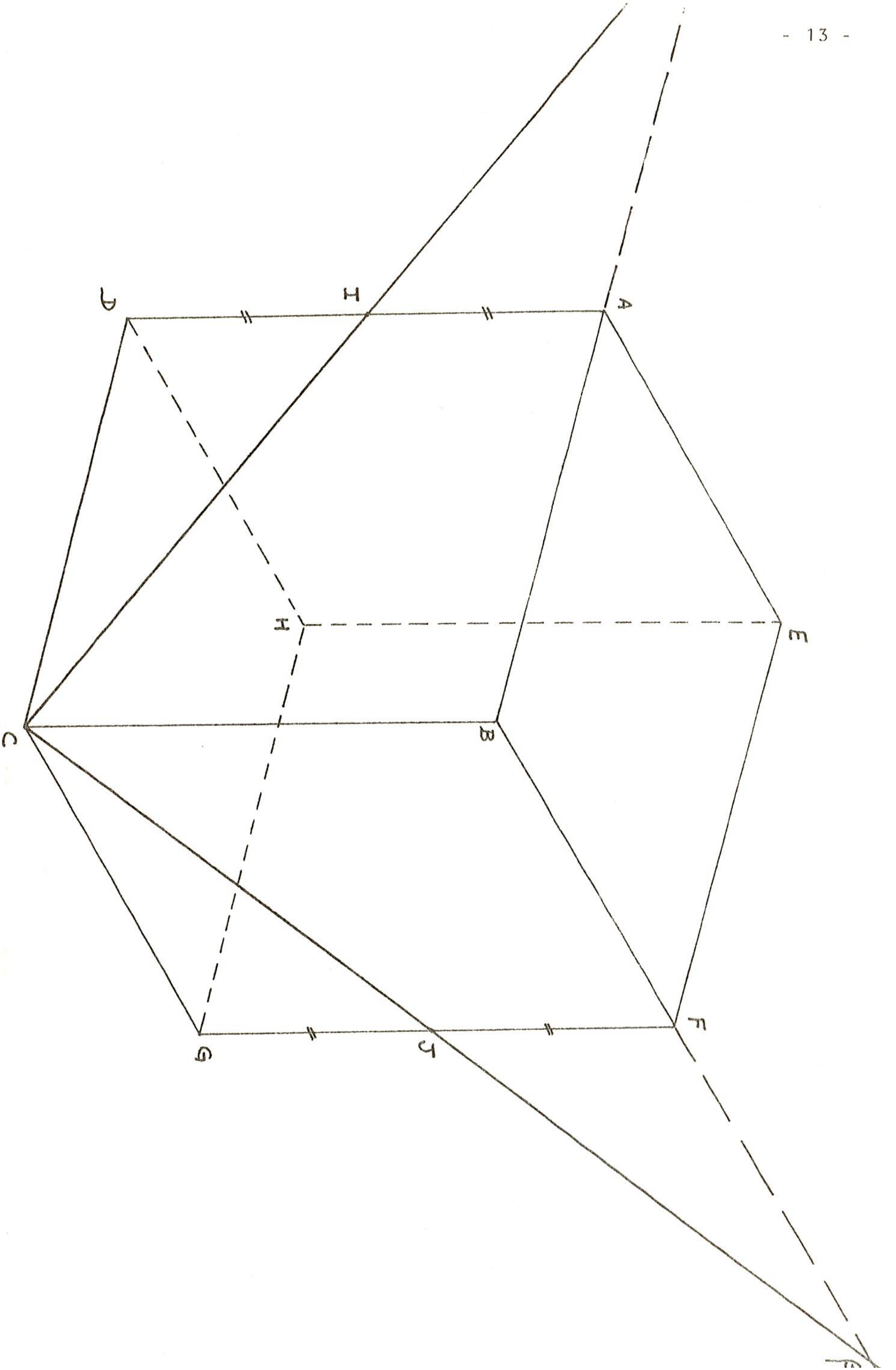
Les élèves observent que (EBCH) *est un rectangle*



EC = $\sqrt{3}$

En appliquant 4 fois le théorème de Pythagore, les élèves calculent IE = EJ = JC = IC = $\frac{\sqrt{5}}{2}$





D
I
A
H
E
C
B
G
J
F

D'autre part : le plan (ICJE) coupe les 2 plans parallèles (ABCD) et (EFGH) selon 2 droites parallèles (IC) et (EJ) et les 2 plans parallèles (AEHD) et (BFGC) selon 2 droites parallèles (IE) et (JC) . Donc (IEJC) est un parallélogramme .

De plus, les 4 côtés sont égaux. (IEJC) est donc un losange

Question : "Est-ce un carré" ?

Réponse rapide : non (les diagonales (EC) et (IJ) ne sont pas égales)

Le centre du cube est le milieu des diagonales du cube

3. Les 2 plans (AEHD) et (ABCD) sont deux faces du cube ayant en commun l'arête [AD], qui sont orthogonaux (notion intuitive comme depuis longtemps).

On observe que $(AB) \perp (AD)$ et $(AE) \perp (AD)$ et que $(AB) \perp (AE)$

On dira

une droite (D) est orthogonale à un plan (P) si elle est orthogonale à toutes les droites de ce plan .

Conséquence : on voit apparaître, ce qui n'existait pas dans le plan, des droites non sécantes et non parallèles.
Ici, (AB) et (DH) non sécantes, non parallèles
mais $(AB) \perp$ plan(AEHD) $\Rightarrow (AB) \perp (DH)$
et plus étrange ! $(AB) \perp (IE)$ ou $(AB) \perp (ED)$

On démontre que :

Pour qu'une droite soit orthogonale à un plan, il faut et il suffit qu'elle soit orthogonale à deux droites sécantes de ce plan.

Remarque :

$$\left.\begin{array}{l}(AE) \perp (AB)\\(AE) \perp (AD)\end{array}\right] \Rightarrow (AE) \perp \text{plan}(ABCD)$$

et $(AE) // (DH)$

$$\left.\begin{array}{l}(DH) \perp (DC)\\(DH) \perp (AD)\end{array}\right] \Rightarrow (DH) \perp \text{plan}(ABCD)$$

> Deux droites perpendiculaires à un même plan sont parallèles

de plus $\left.\begin{array}{l}(AE) \perp (EF) \\ (AE) \perp (EH)\end{array}\right] \Rightarrow (AE) \perp$ plan (EHGF) (faces (ABCD) et (EHGF) parallèles)

> Deux plans perpendiculaires à une même droite sont parallèles

(AD) = (AEHD) $\cap$ (ABCD) et (AD) $\perp$ plan (ABCD)

(AD) $\perp$ plan (AEHD)

> Deux plans sont perpendiculaires si l'un d'eux contient une droite perpendiculaire à l'autre

$\left.\begin{array}{l}(CH) \perp (DG) \text{ (diagonales d'un carré} \\ (CH) \perp (AD) \text{ car } (AD) \perp \text{ plan } (DHGC)\end{array}\right] \Rightarrow (CH) \perp$ plan (ADGF)

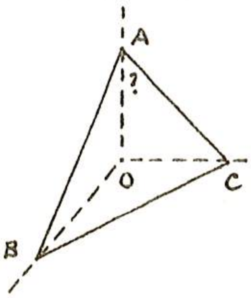
(CHEB) $\perp$ (ADGF)

(IJ) $\in$ (AFDG) $\Longrightarrow$ (IJ) $\perp$ (EBCH)

O milieu de (IJ)

> Le plan médiateur d'un segment est le plan orthogonal à ce segment en son milieu.

<u>Exercice</u> : Démontrer que (IE) n'est pas orthogonal à (IC) (sans utiliser le losange IEJC). (il est facile, en utilisant Pythagore, de montrer que le triangle (ABC) ne peut être rectangle en A). On peut constater que le plan (EBCH) est un plan de symétrie du cube et définir la symétrie par rapport à son plan.



> La symétrie par rapport à un plan (P) est l'application qui, à tout point M de l'espace associe le point M' tel que (P) soit le plan médiateur de [MM']. (M $\notin$ (P)) (P) est invariant pour cette symétrie.

Chercher d'autres plans de symétrie du cube :

notamment le plan passant par (I) et orthogonal aux plans (ABCD) et (AEHD) .

(E) ROTATIONS d'un PLAN AUTOUR d'un AXE

Faisons "tourner" le plan (ICJE) autour de l'axe (IJ)

La rotation dans l'espace, autour de l'axe (IJ) est définie par l'angle d'une droite et de son image dans le plan médiateur du segment $[IJ]$.

> La rotation autour d'un axe (Δ) est l'application qui, à tout point M de l'espace associe le point M' tel que :
>
> $(MM') \in$ plan (P) orthogonal à (Δ)
>
> $\begin{cases} (\widehat{\vec{OM}, \vec{OM'}}) = \alpha \\ OM = OM' \end{cases}$ (O étant le point d'intersection de (Δ) avec (P)

Que devient la section ?

La section, était un losange, et devient aussitôt un hexagone ($Ie_1e_2\ Jc_2c_1$) . (transparents 15 - 15 bis)

- Et si l'on continuait de tourner ?

- L'hexagone, qui avait "2 petits côtés", s'agrandit !
(transparents 16 - 16 bis)

Puis les points e_1 et e_2 viennent se confondre respectivement avec A et F
" " " c_1 et c_2 " " " " G et D

et l'hexagone devient un rectangle AFGD (transparent 17) .

Comparaison des aires.

Aire du losange (ICJE) $= IJ \times \frac{EC}{2} = \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{2}$

Aire du rectangle (AFGD) $= AF \times AD = \sqrt{2} \times 1 = \sqrt{2}$

Il semblerait que le rectangle (AFGD) soit la section du cube par un plan qui ait la plus grande aire possible.

(est-il possible au niveau de la classe de 1ère, de répondre à cette question ?)

Exercice à la maison :

1) Recherche, dans le plan, des figures régulières à 3, 4, 5, 6 côtés

2) Une section du cube par un plan peut-elle être une de ces figures ?

(F) LES PLANS COUPANT le CUBE SELON des POLYGONES REGULIERS

1. Triangle équilatéral

Les élèves, pour trouver la réponse, ont déplacé le plan (du transparent 12) donnant une section triangulaire jusqu'à ce que ce triangle ait ses trois côtés égaux.

Ils ont pour la plupart, obtenu le triangle équilatéral (ACF) de côté $\sqrt{2}$ (au passage d'air $\frac{1}{2}$ $(\sqrt{2} \times \frac{3}{2}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$).

transparents 18 et 19)

2. Carré

Toute face du cube est un carré (d'aire 1).

3. Pentagone régulier

Aucun élève n'a trouvé la position exacte du plan donnant une section pentagonale régulière. Et vous ? .

4. Hexagone régulier

Même méthode que pour le triangle équilatéral : on déplace le plan (transparent 12) donnant une section hexagonale jusqu'à ce que cet hexagone ait ses 6 côtés égaux. (Le succès fut beaucoup moins grand ; les meilleurs élèves m'ont dit qu'il fallait que le plan coupe les 6 faces du cube, donc qu'il y ait un segment de même longueur sur chacune des faces. Ainsi, ils ont exhibé l'hexagone régulier (MNPQRS) dont les sommets sont les milieux de certaines arêtes du cube). (transparents 20 et 21)

chaque côté a pour mesure $\sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

l'aire de l'hexagone est :

$$3 \times \text{aire losange côté } \frac{\sqrt{2}}{2} = 3 \times \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{3\sqrt{3}}{4}$$

(ou 6 x aire triangle équilatéral coté $\frac{\sqrt{2}}{2}$*)*

Aussitôt d'autres ont réagi en demandant pourquoi on choisissait ces arêtes là. Il en existe d'autres !. Bonne question à laquelle on répondra ultérieurement.

5. Le plan de cet hexagone régulier (MNPQRS) coupe certainement les autres arêtes du cube . (transparent 22) .

Pour cela prolongeons les côtés de l'hexagone.

$$\left.\begin{array}{l} (MN) \cap (RS) = \{I\} \\ \text{mais} \quad (MN) \in \text{plan}(ADHE) \\ \qquad (RS) \in \text{plan}(DCGH) \\ \qquad (ADHE) \cap (DCGH) = (DH) \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{l} \text{I appartient aux deux} \\ \text{plans (ADHE) et (DCGH)} \\ \text{donc } I \in (DH) . \end{array}$$

De même (MN) et (PQ) se coupent en un point J appartenant à (EH)

De même (PQ) et (SR) " " K " à (GH) .

<u>Nature du triangle (IJK)</u> (on est ici revenu en géométrie plane).

Les élèves ont refait, dans le plan, le dessin d'un hexagone régulier, et construit les points I, J, K.

Par des considérations d'angles, ils ont montré que (IJK) était un triangle équilatéral de côté 3 x côté hexagone $= 3 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$

<u>Nature du tétraèdre (HIJK)</u> (il a été facile de prouver que $IH = JH = KH$)

et que $IH = ID + DH = DS + DH = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$

Le tétraèdre (HIJK) n'est pas un tétraèdre régulier.

De même les tétraèdres (DISM), (GRKQ), (ENPJ) ont une base sous forme d'un triangle équilatéral de côté $\frac{\sqrt{2}}{2}$, et les autres faces sont des triangles rectangles isocèles.

On vient, malgré tout, de visualiser l'intersection du cube avec un tétraèdre particulier, de sommet H.

Chercher les tétraèdres ayant les mêmes dimensions, donnant par intersections avec le cube des hexagones réguliers de côté $\frac{\sqrt{2}}{2}$

ce petit travail de recherche a été effectué à la maison,

et j'ai en classe montré les transparents 23 - 23 bis - 23 ter
24 - 24 bis - 24 ter
25 - 25 bis - 25 ter

le transparent 26 montre la superposition des 4 hexagones.
quelques volumes (transparents 26 bis - 26 ter)

(G) TROIS POINTS MNP QUELCONQUES ETANT DONNES sur les FACES du CUBE

TRACER L'INTERSECTION du PLAN (MNP) avec les FACES du CUBE

Le problème est posé par la figure du transparent 27

Pour résoudre ce problème, il suffit de connaître une droite (Δ) de ce plan (MNP) passant par M (par exemple) et situé dans la face du cube contenant M (ici ABCD). (transparent 28)

Cette droite (Δ) coupe l'arête [BC] en K.

(Si l'on connait le point K, on connait (Δ) et on peut finir la construction à l'aide des propriétés étudiées précédemment).

1) Projection orthogonale sur un plan donné

Par un point M donné, on peut mener une perpendiculaire (Δ) et une seule à un plan (P) donné. $\{M'\} = (\Delta) \cap (P)$

M' est le projeté orthogonal de M sur (P)

Exemple : a) Projetons orthogonalement M sur le plan (DCGH)
M appartient au plan (ABCD) qui est orthogonal au plan (DCGH) donc la perpendiculaire issue de M au plan (DCGH) appartient au plan (ABCD) et est orthogonale à (DC). D'où la construction du projeté m de M sur (DCGH)

b) Projetons orthogonalement P sur le plan (DCGH)
Raisonnement analogue au précédent pour trouver le point $p \in [CG]$.

c) Exercice : Trouver la projection orthogonale de N sur le plan (DCGH) .

Les élèves ont facilement tracé la parallèle (Δ) passant par N à (Mm) ou (Pp), mais où faut-il l'arrêter ?

Je les ai aidé en montrant que (Δ) appartenait au plan (Q) orthogonal au plan (DCGH) qui coupe le plan (ADHE) selon (n'v). D'où la construction du point n projeté de N sur le plan (DCGH).

(exercice trouvé <u>très</u> difficile par tous les élèves)
(transparent 29) .

2) Revenons au problème posé :

on remarque que le point K cherché se projette orthogonalement en C sur le plan (DCGH) .

Toute droite passant par K et parallèle à (MP) se projettera sur le plan (DCGH) en une droite passant par C et parallèle à (mp)

Soit (CT) la parallèle à (mp) passant par C qui coupe la droite (mn) en r .

r ε (mn) $\Rightarrow$ Il existe un point R ε (MN) tel que r soit la projection de R sur (DCGH) . (transparent 30)

Le point R appartient au plan (MNP) et sa projection r appartient à la droite passant par C et parallèle à (mp), donc R appartient à la droite passant par K et parallèle à (MP) .

On trace (Rz) parallèle à (MP) qui coupe l'arête (BC) en K
(transparent 31)

Le point K étant obtenu, il suffit de finir la construction
(transparents 32 et 33)

Ce travail a été long, difficile à faire assimiler, et vous serez d'accord avec moi, l'exemple était simple).

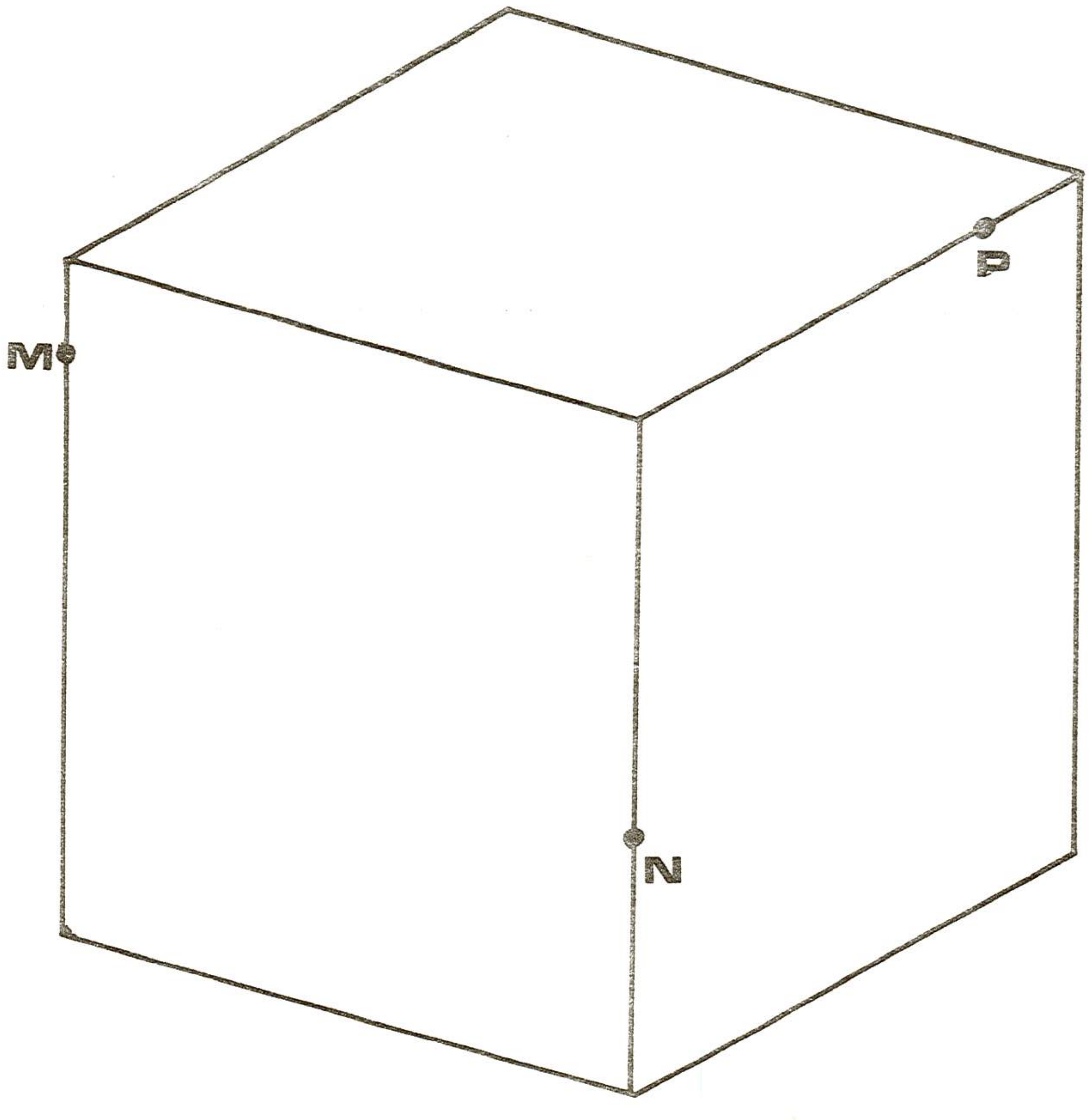
Remarque :

Pour préciser davantage, et relier ces notions au programme de 1°, il eut été bon dans ce dernier exemple de préciser les positions des points M, N, P par leurs coordonnées dans un repère orthonormé (H, D, C, G) ou par leurs distances aux arêtes.

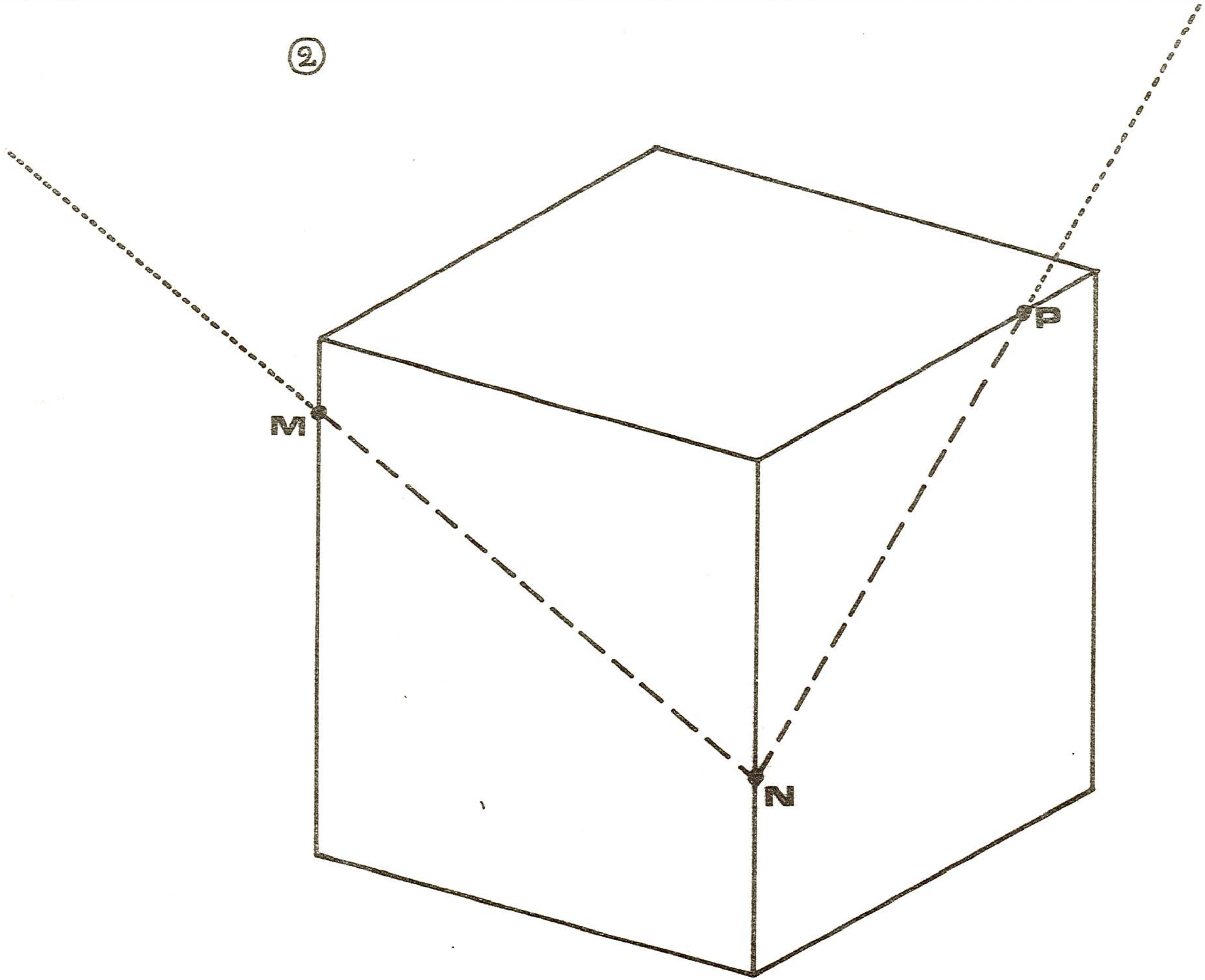
Après ces manipulations, ces observations et ces déductions, il semble plus facile d'assimiler les concepts de vecteurs de l'espace, de produit scalaire, de produit vectoriel, de produit mixte.

(Quelques fautes : cherchez l'erreur ; transparents 34 et 35)

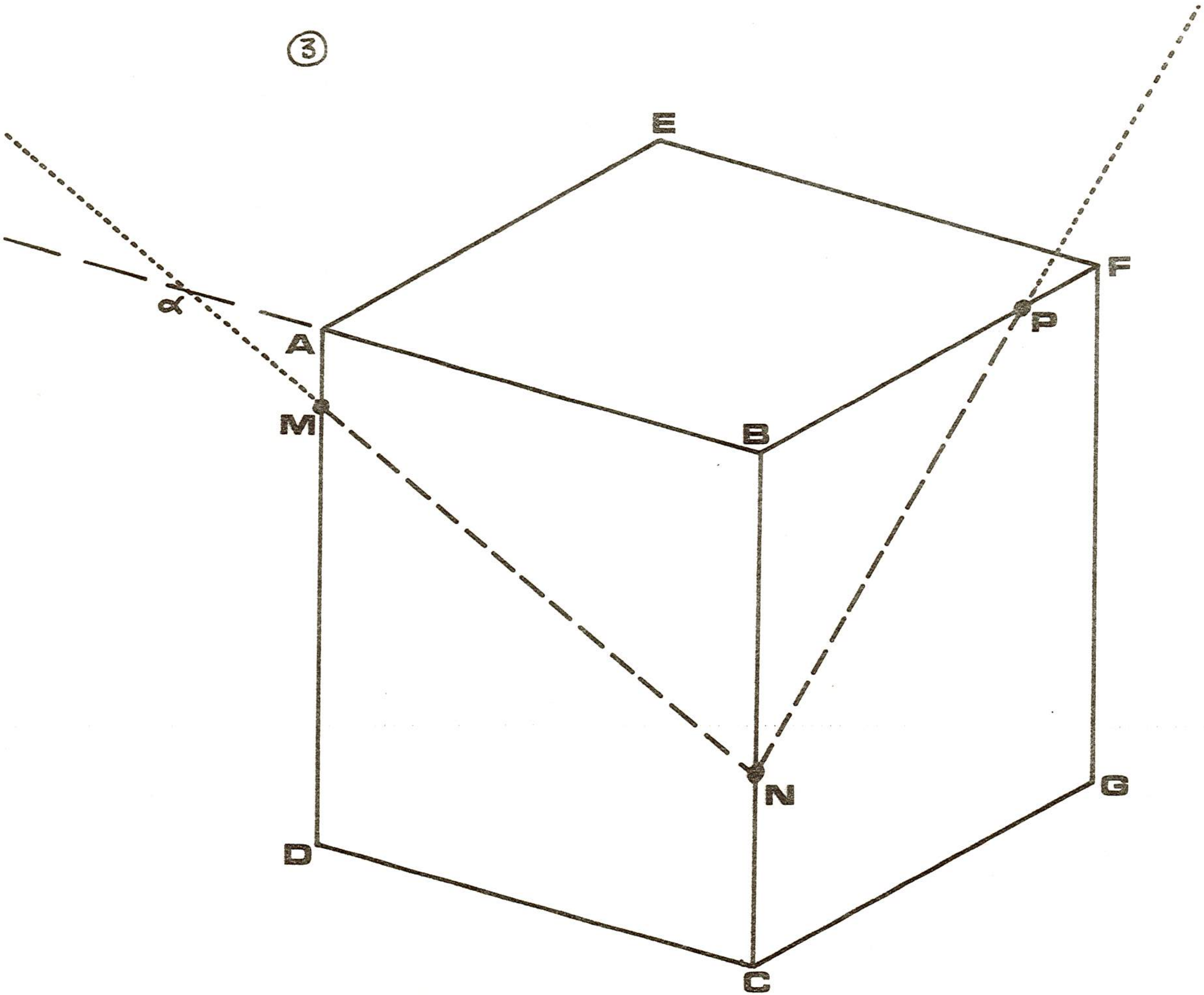
1



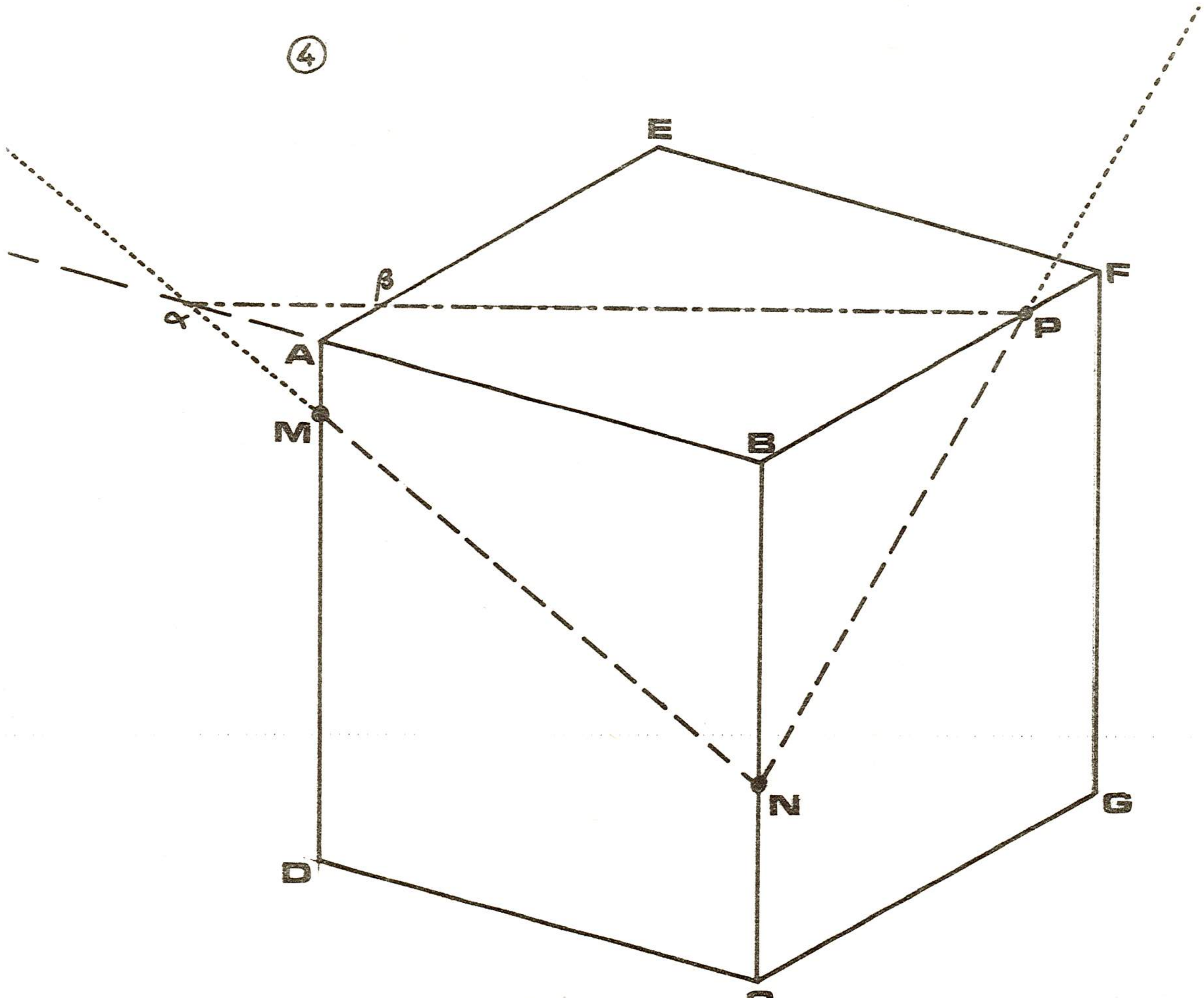
②



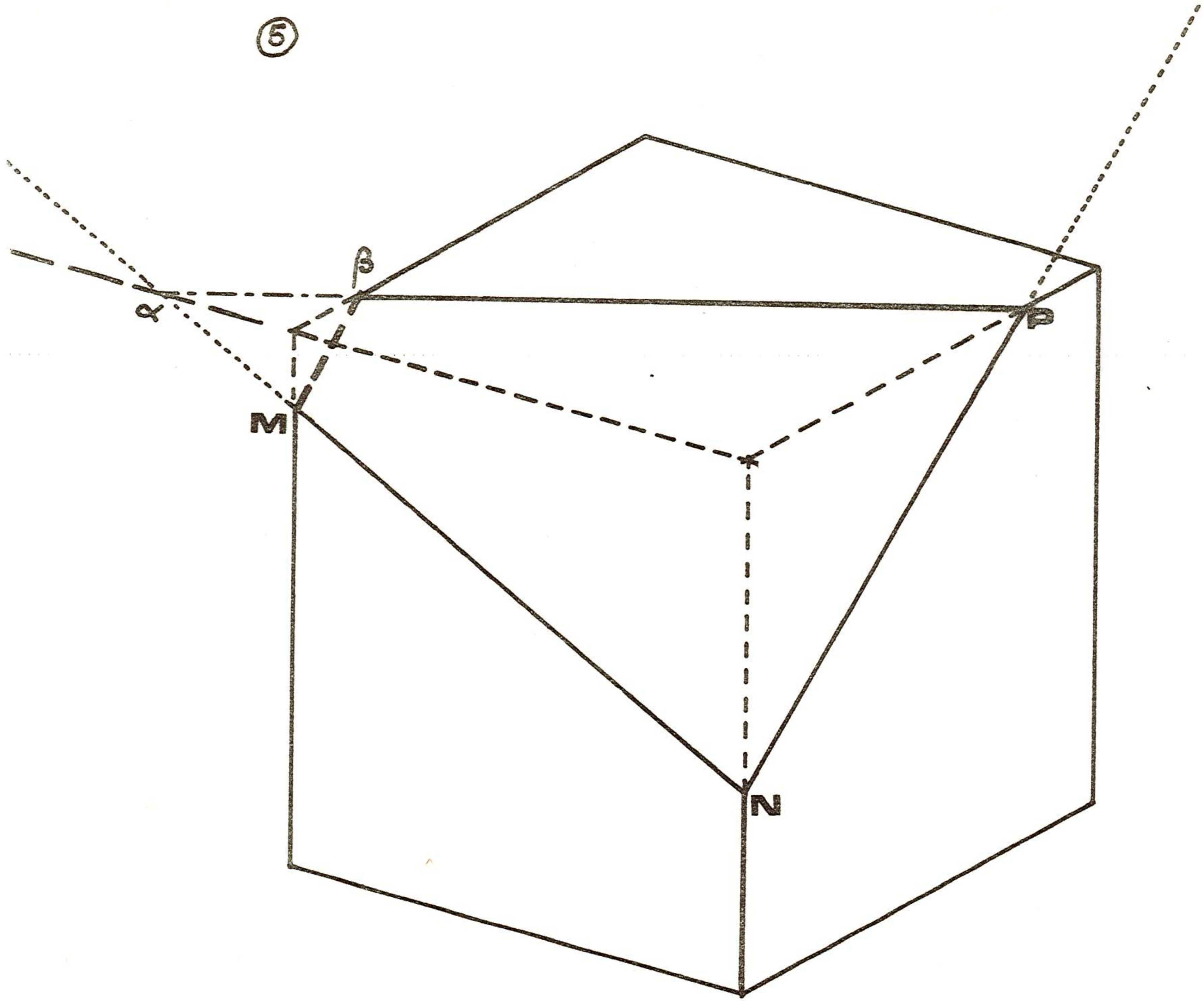
③



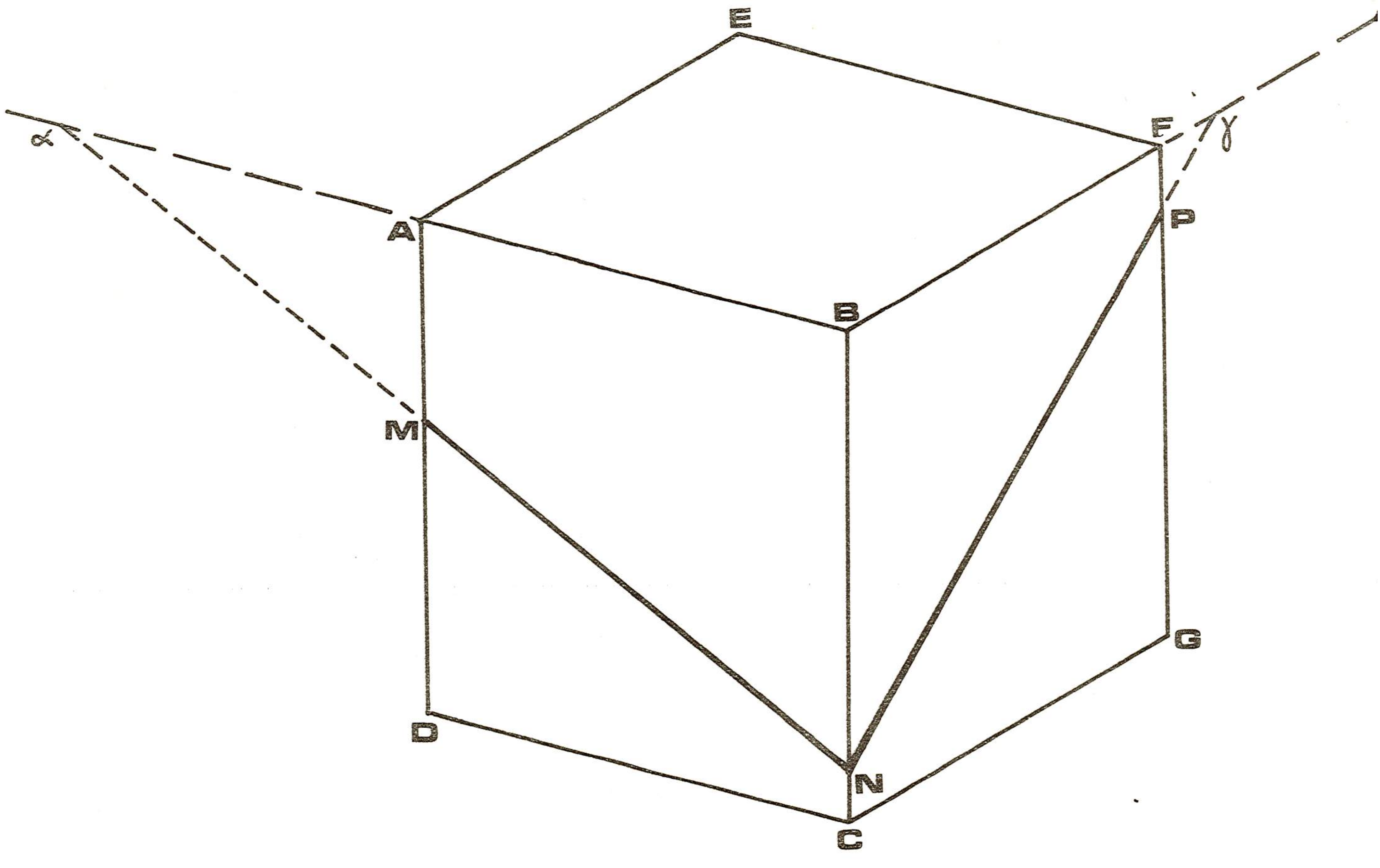
④



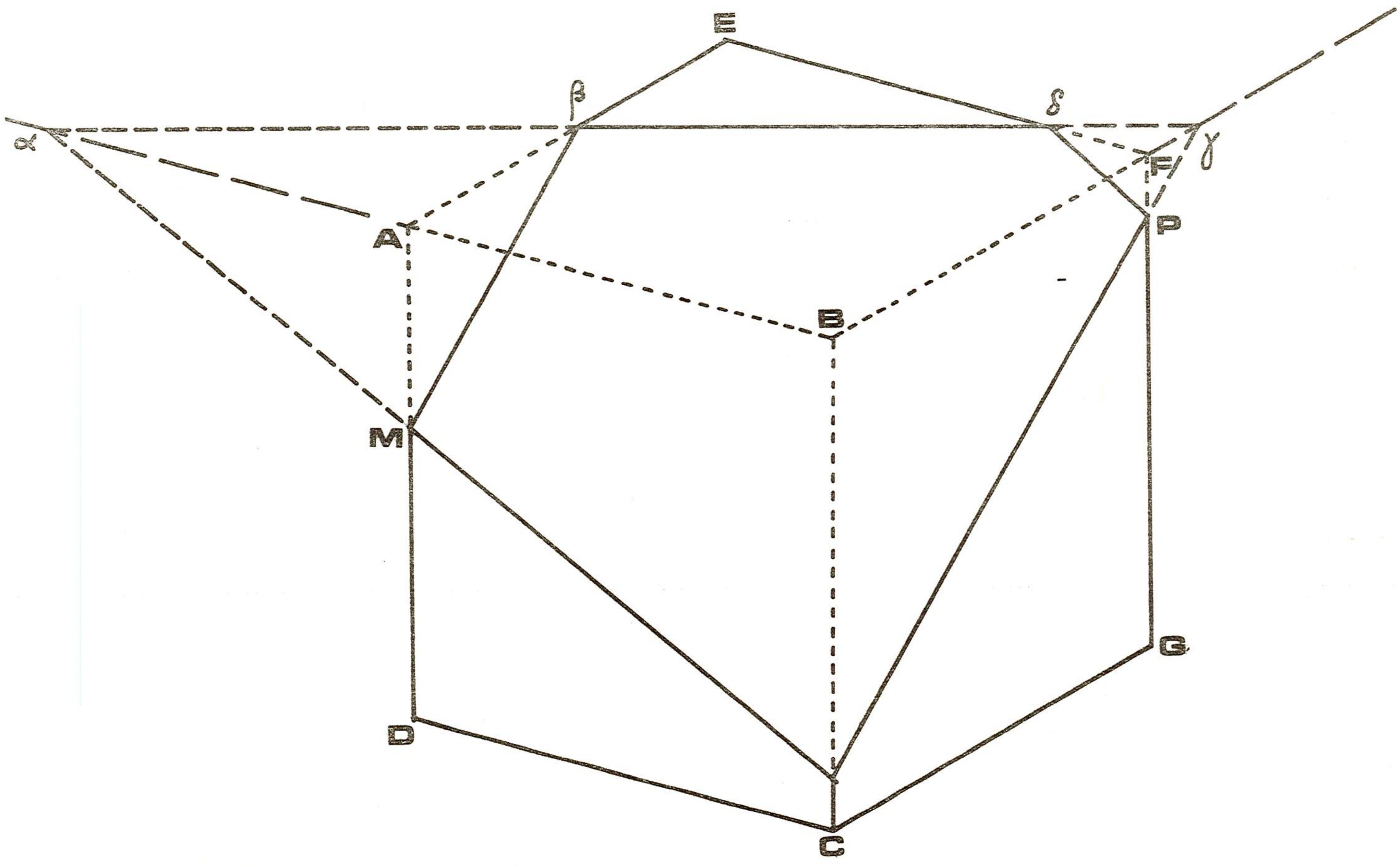
5

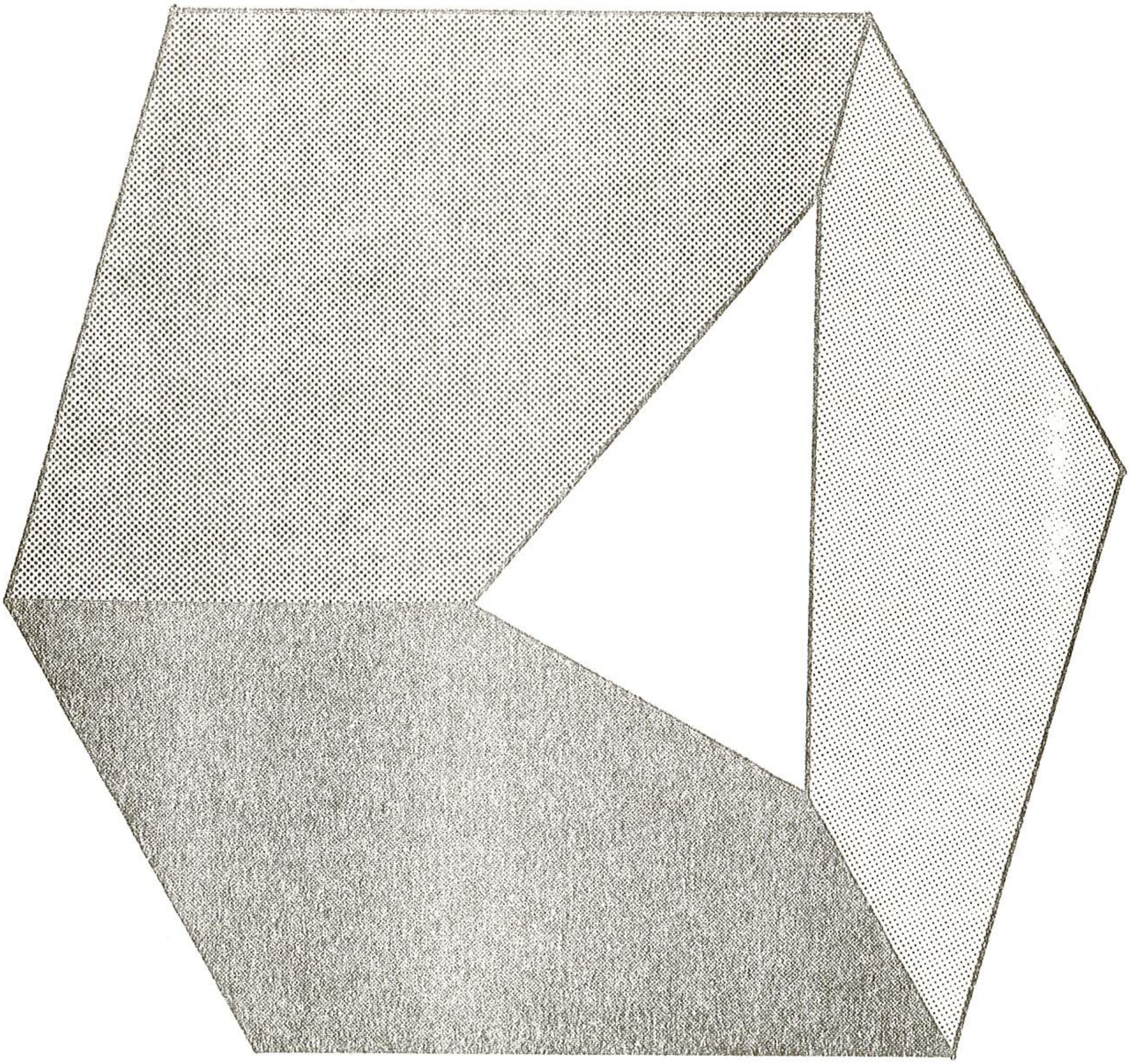


6

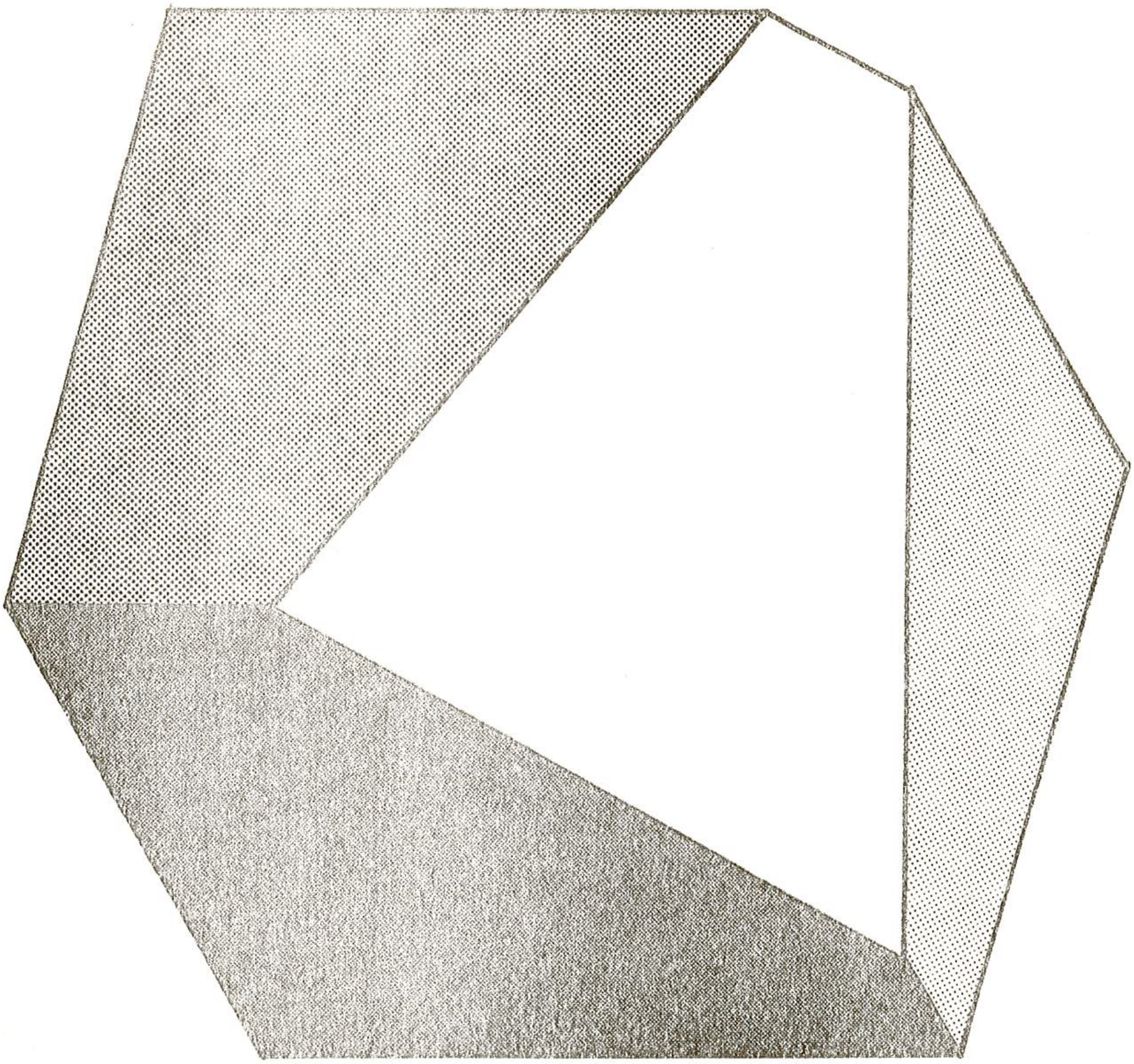


7



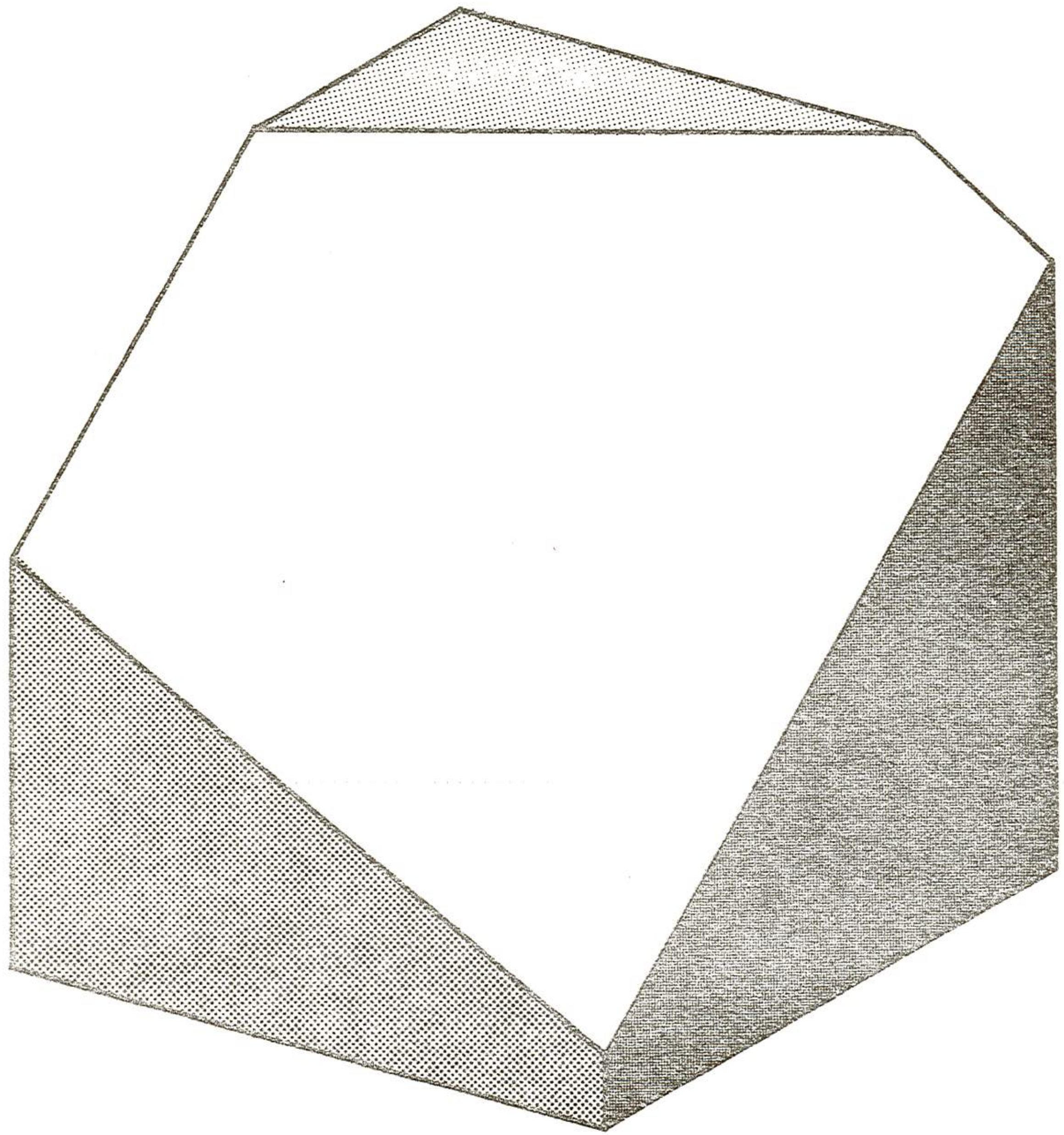


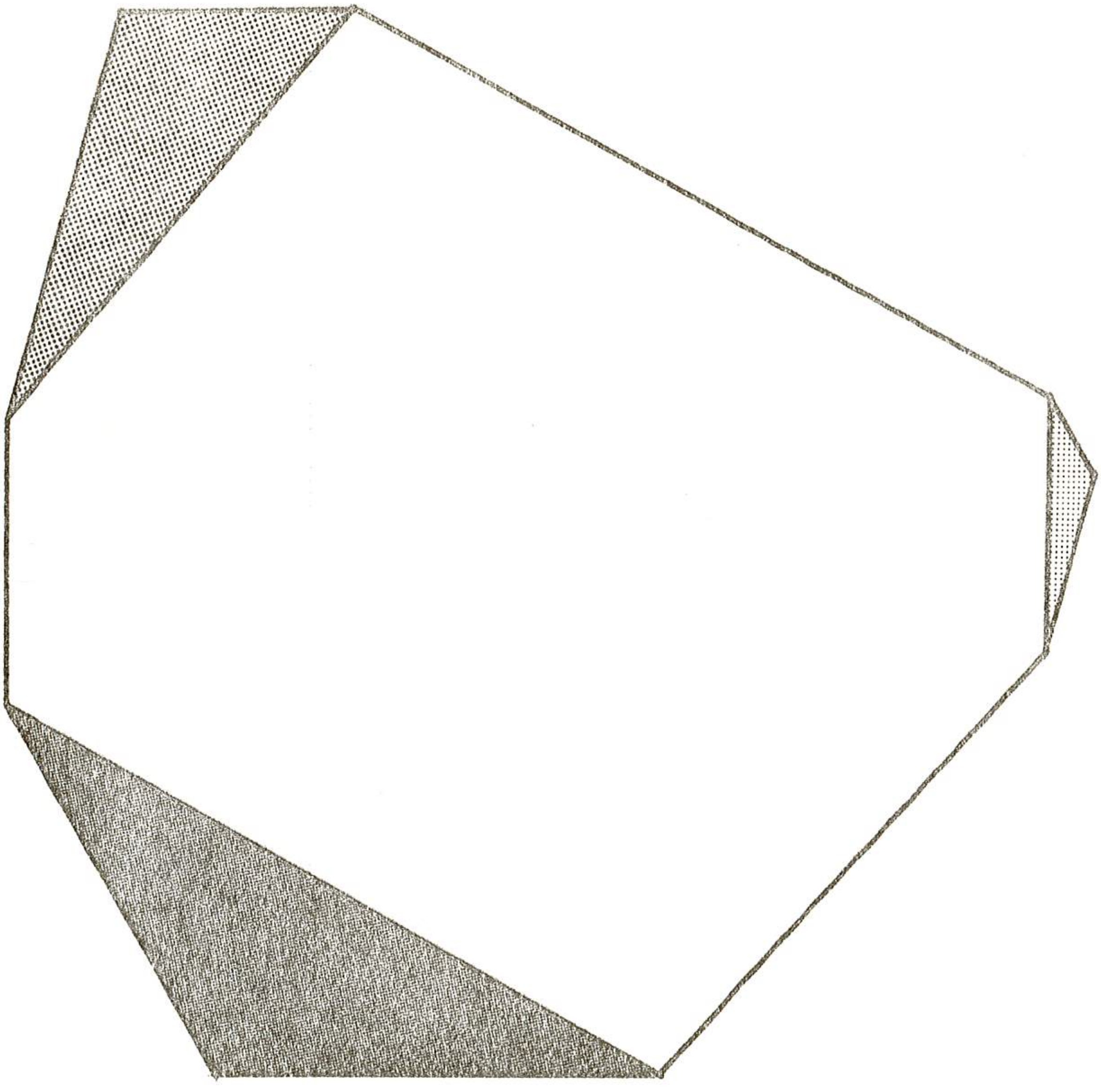
8



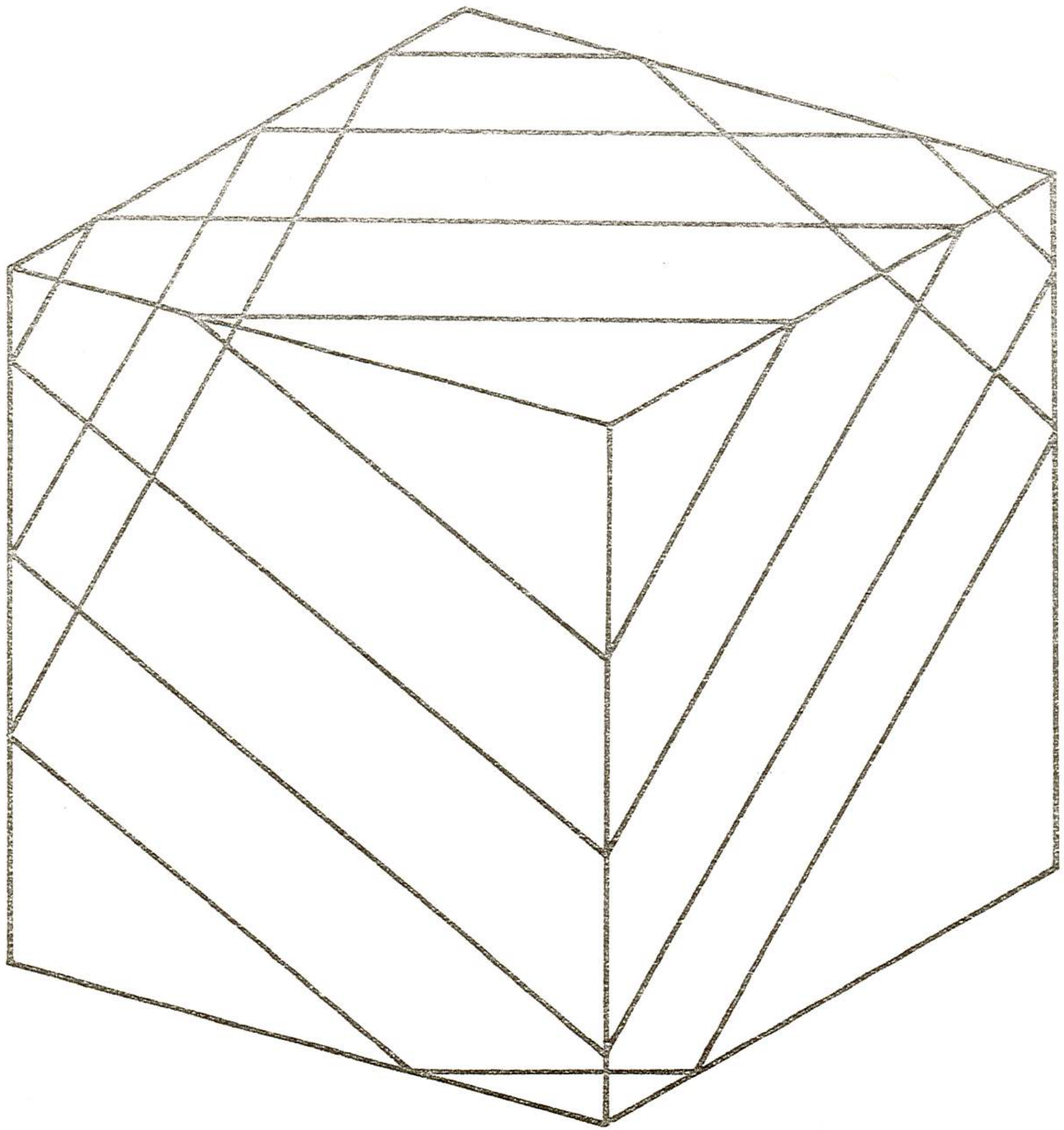
6

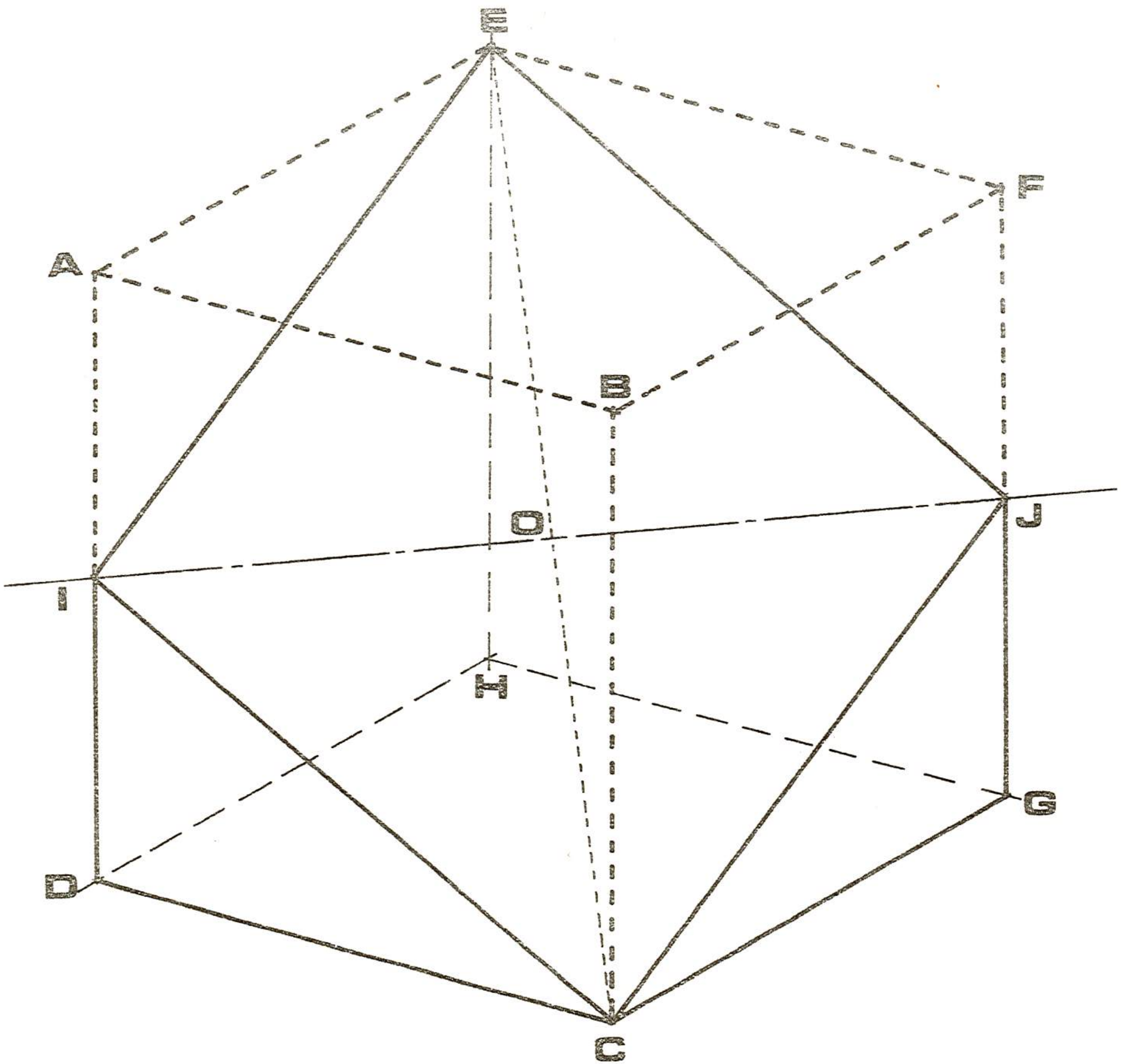
10



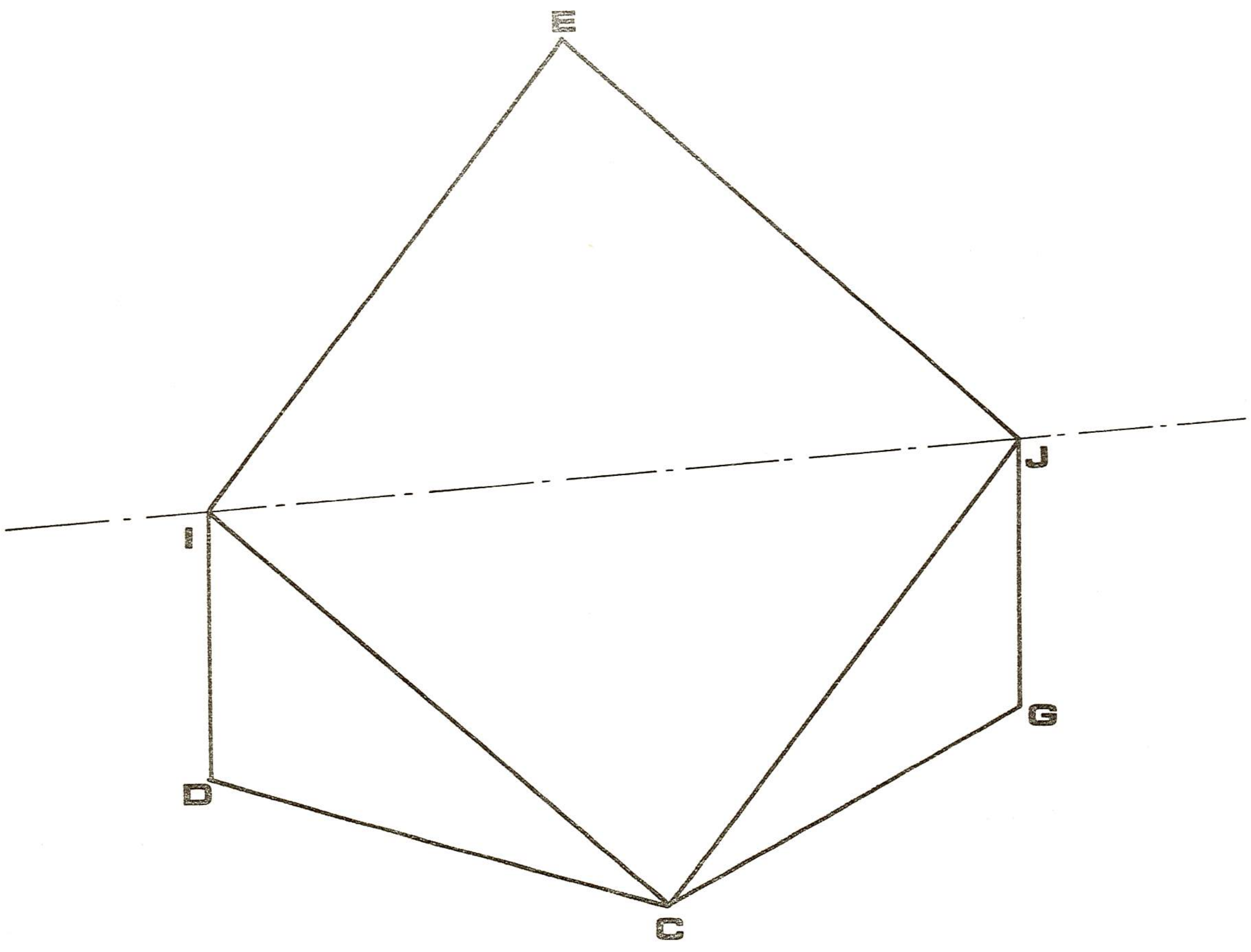


44

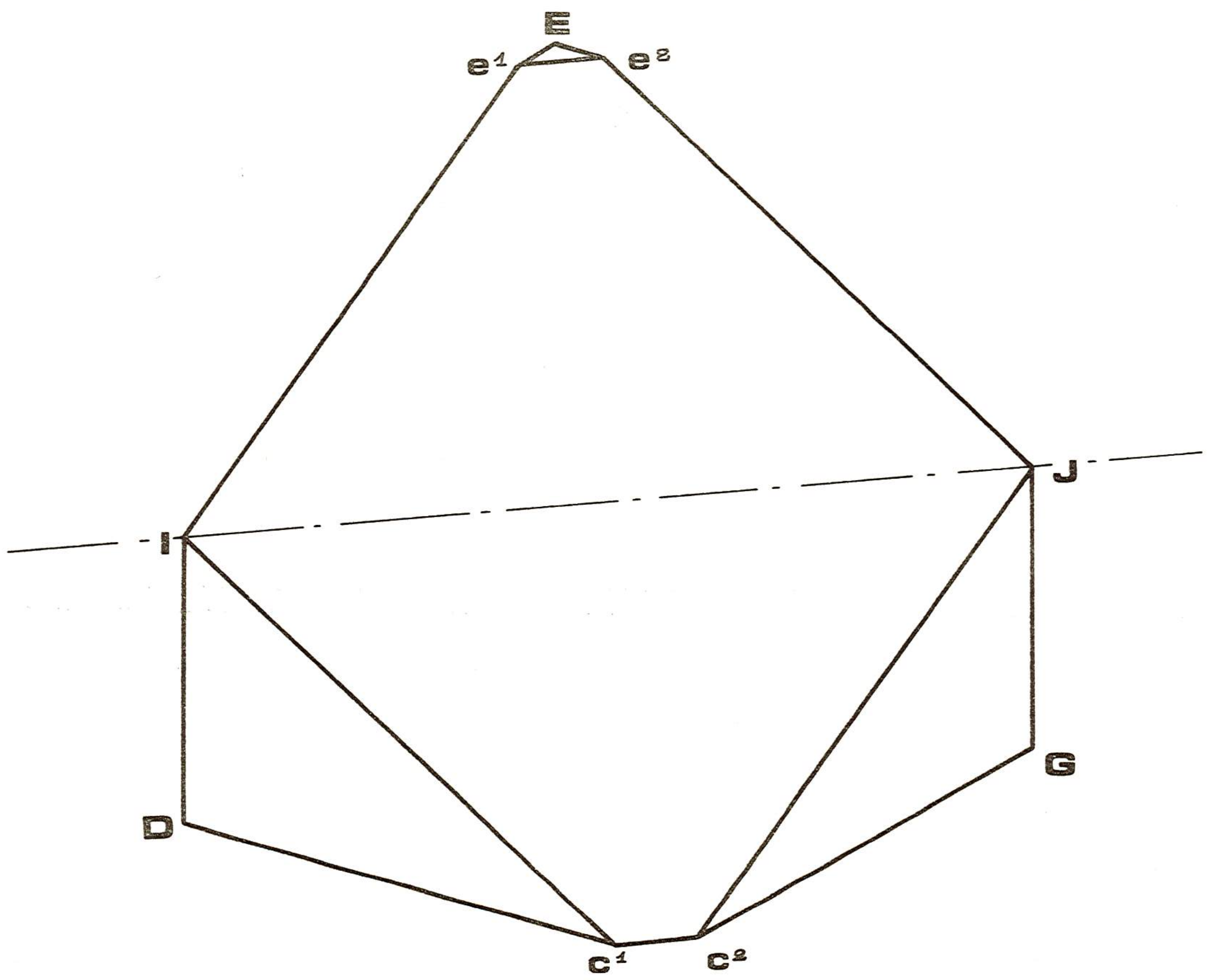



E
F
A
B
O
J
I
H
G
D
C

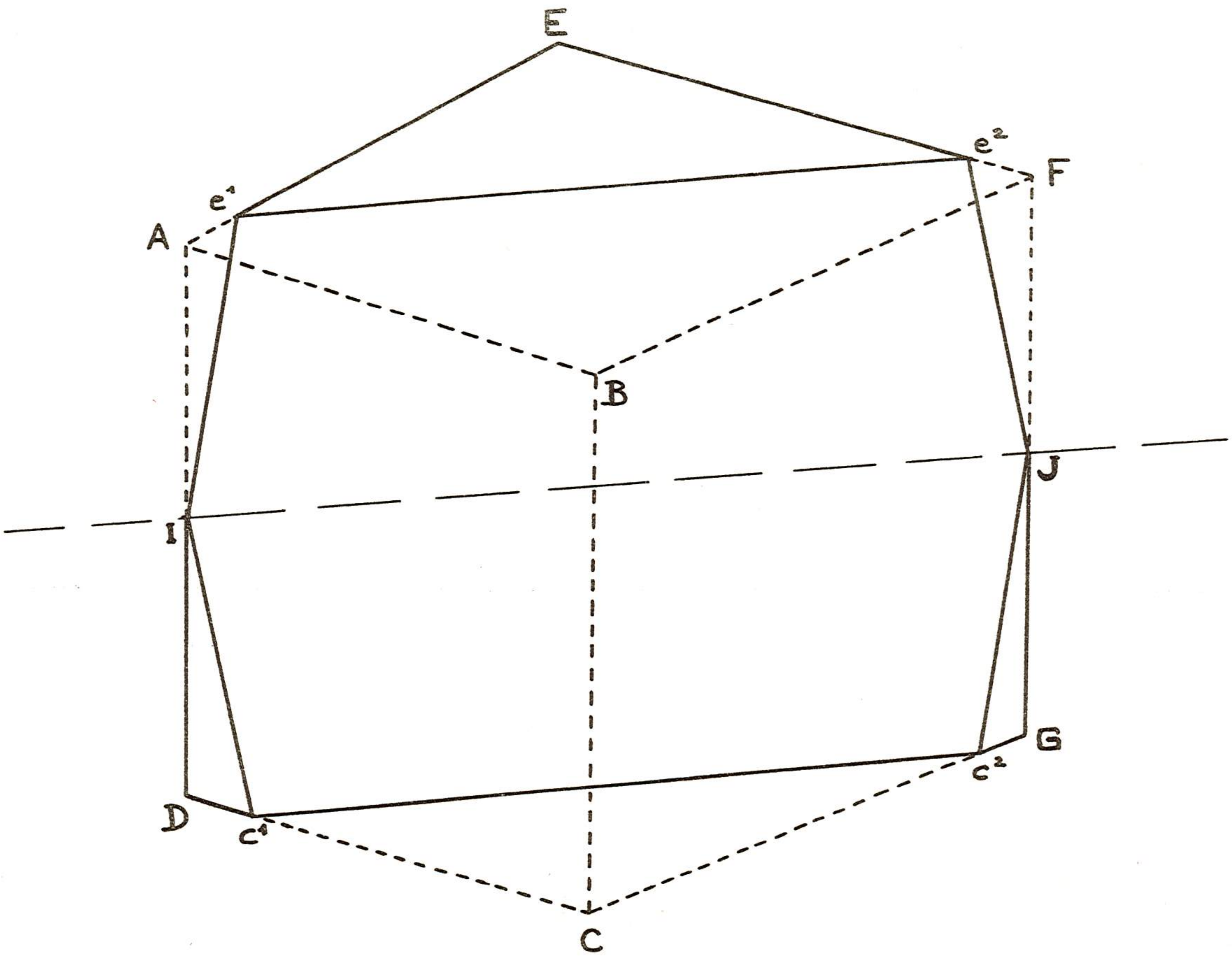
14



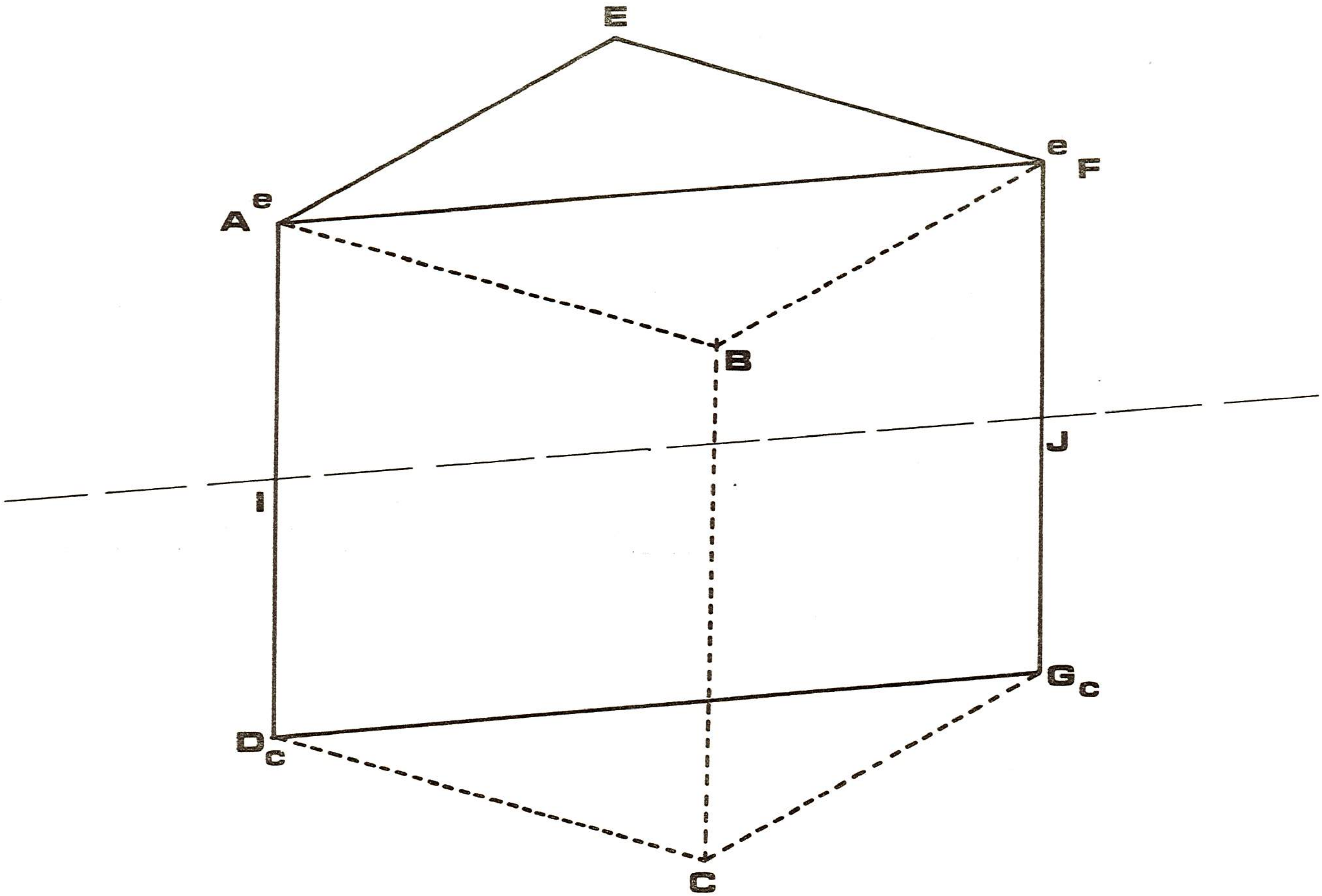
15 bis



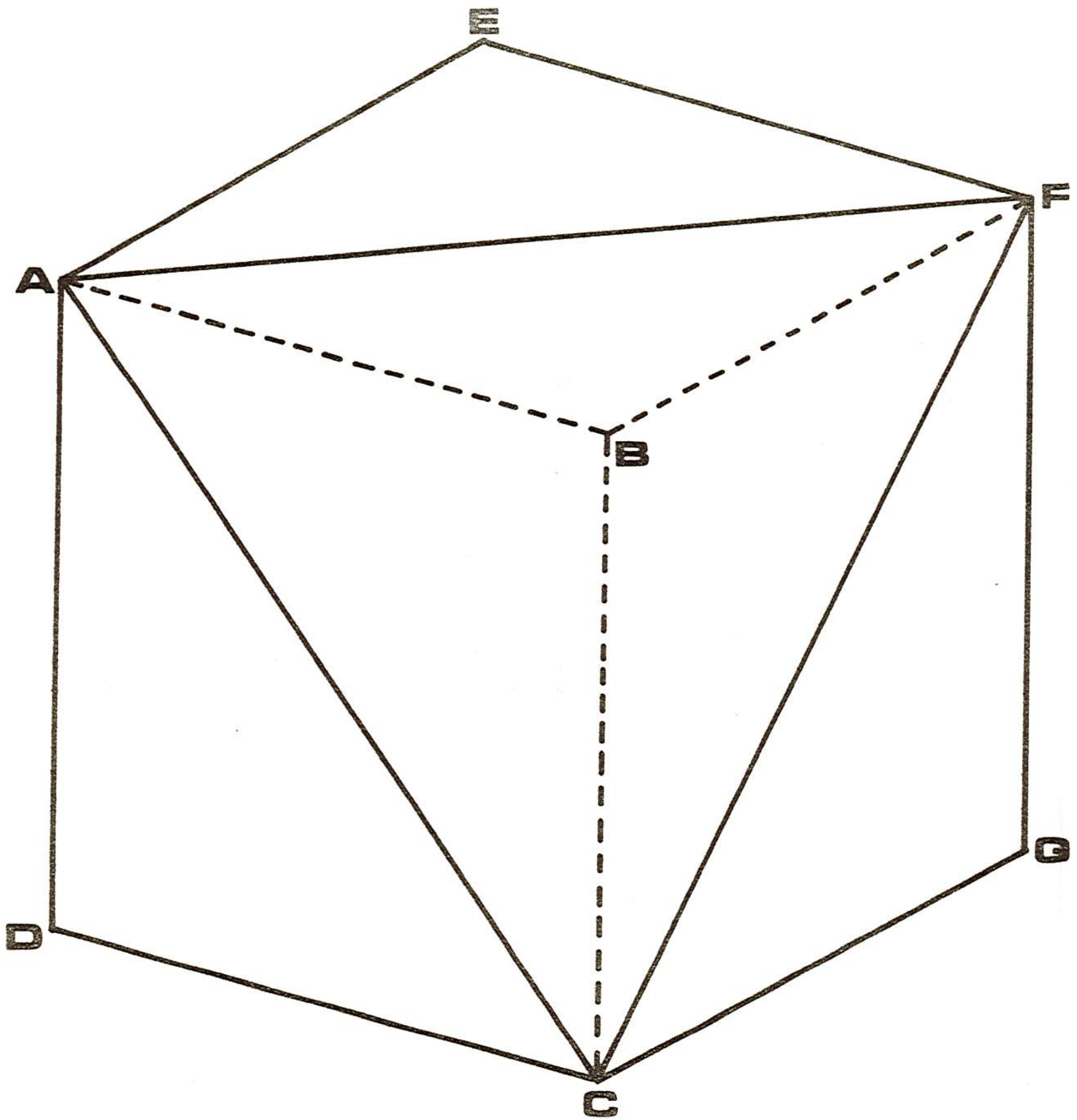
16

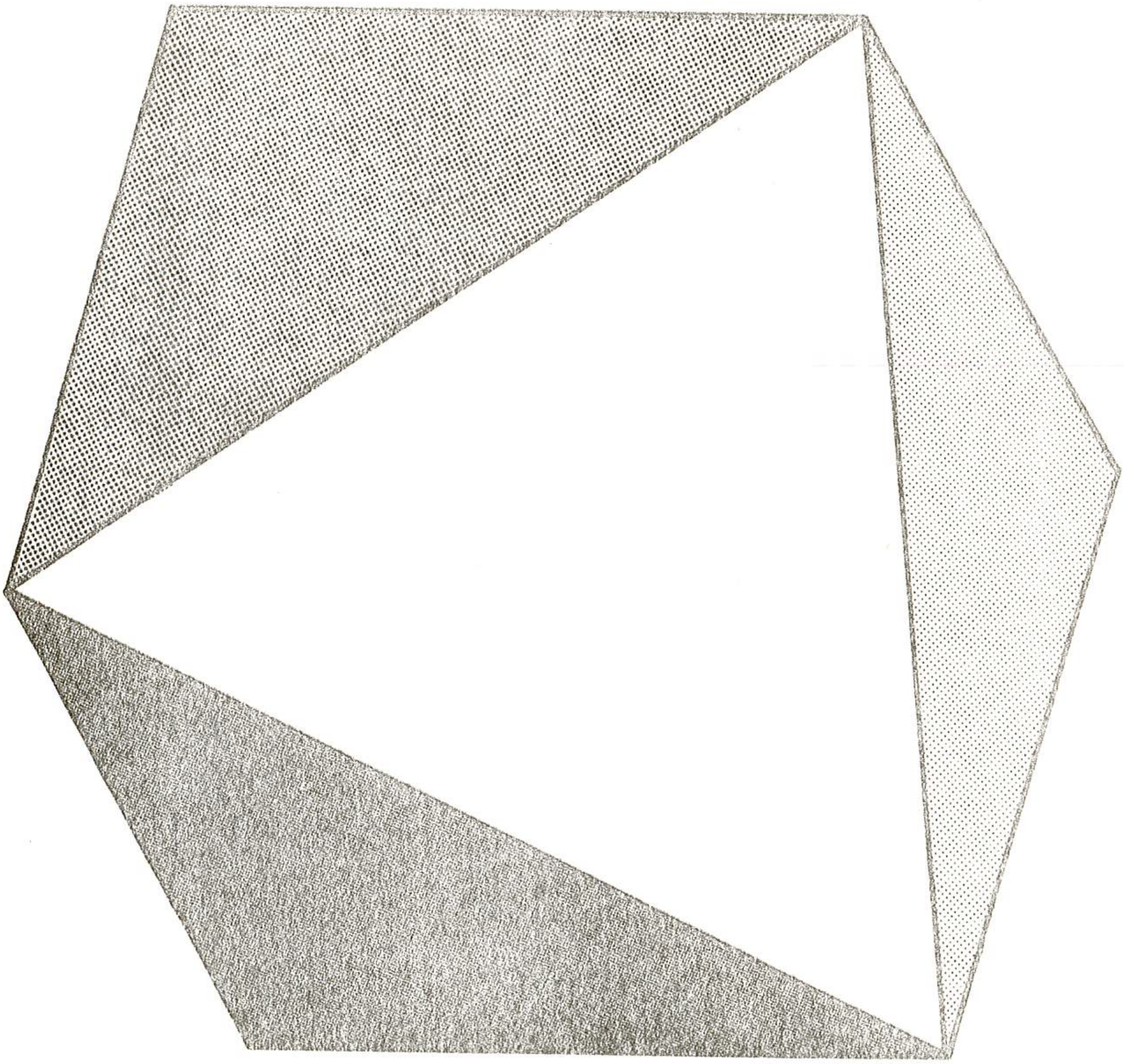


17

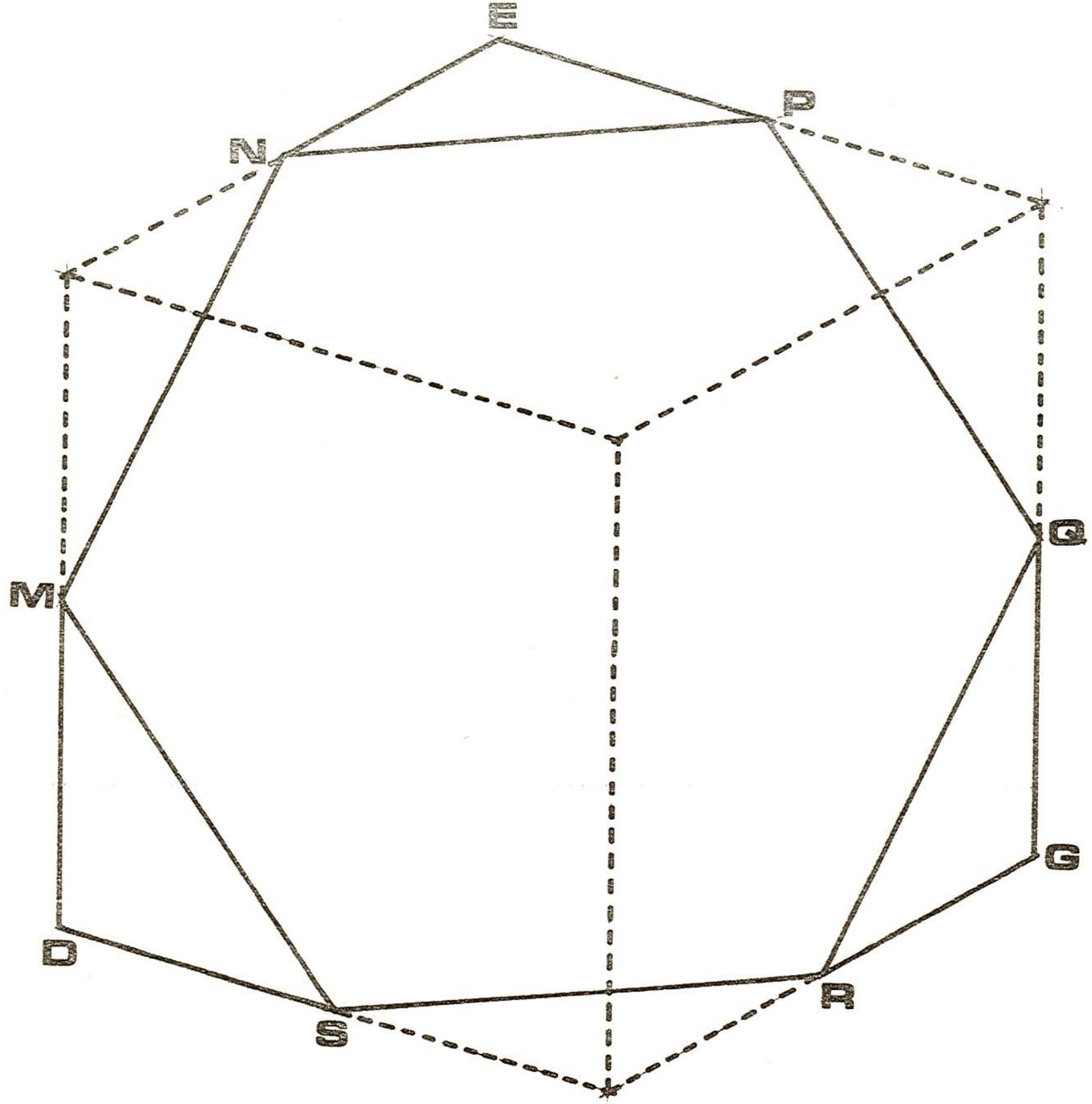


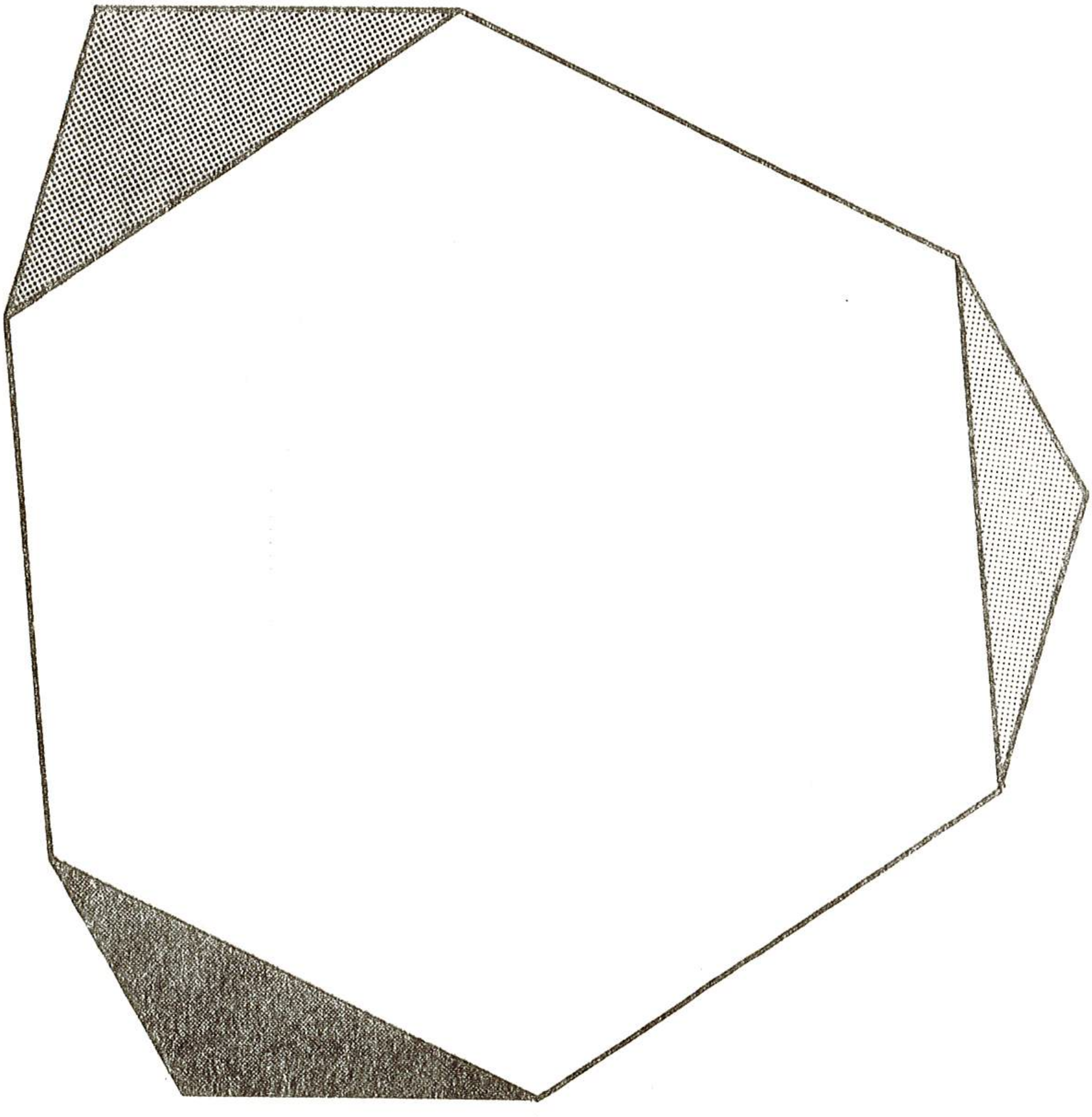
18



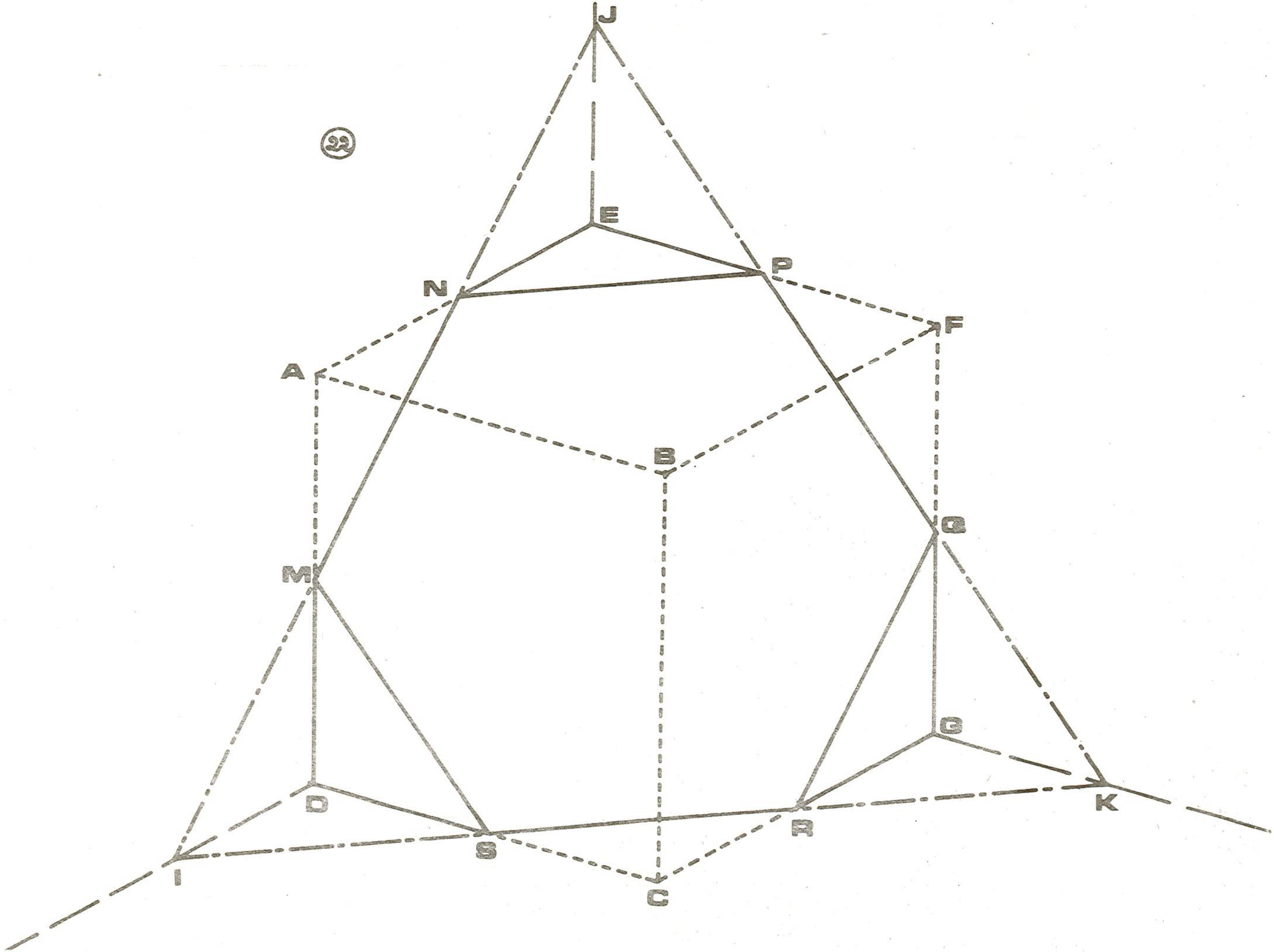


20

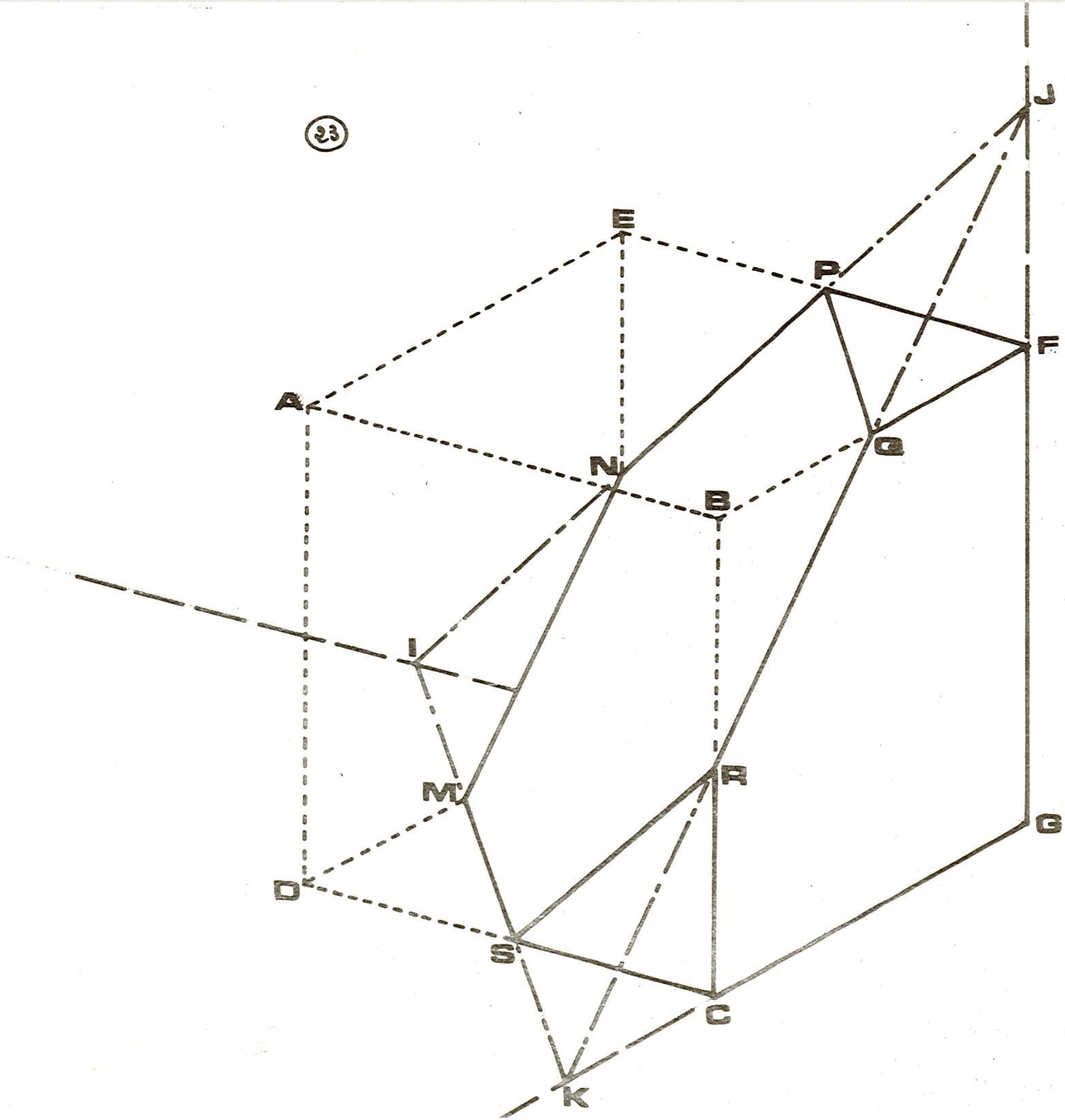


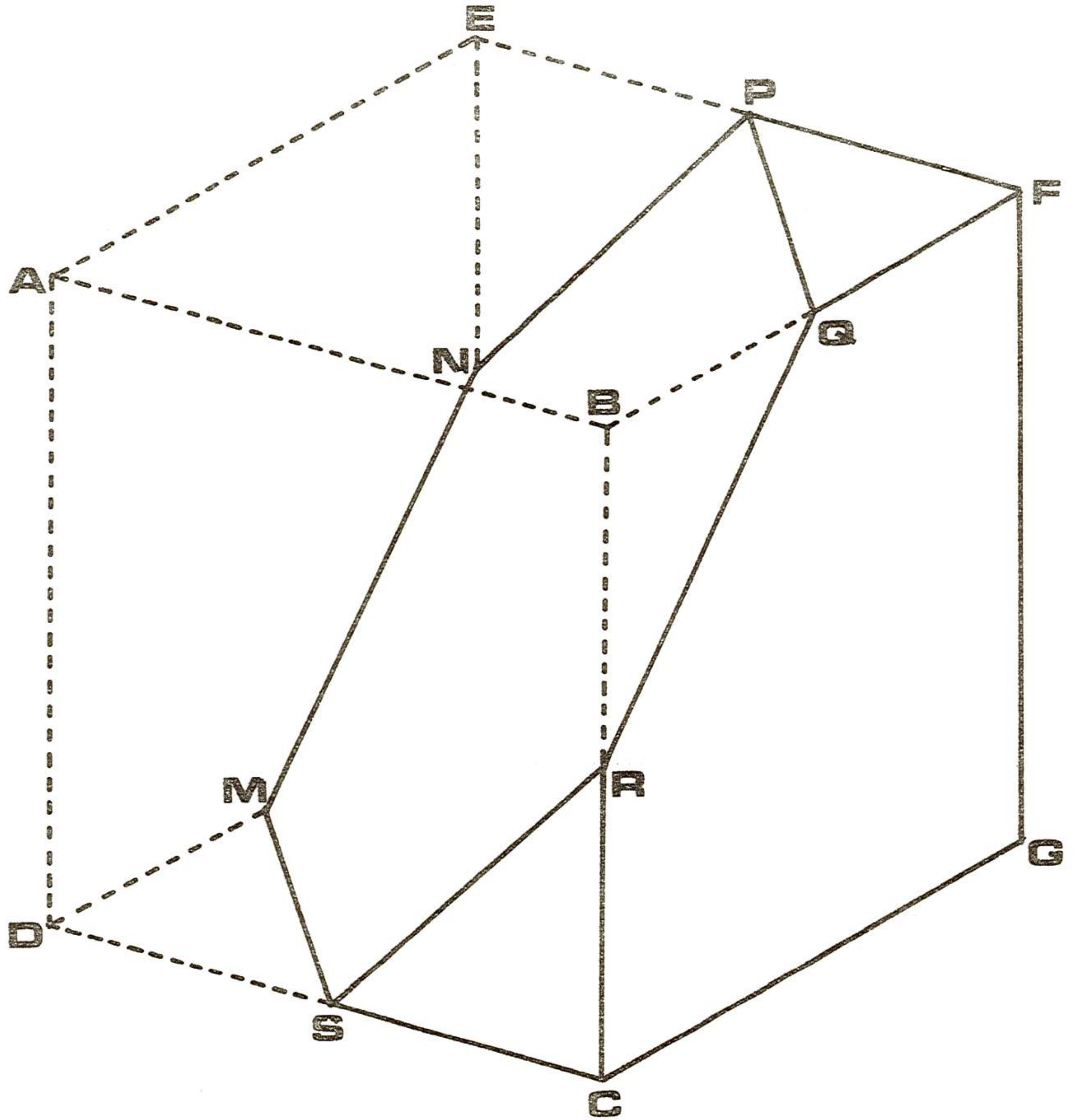


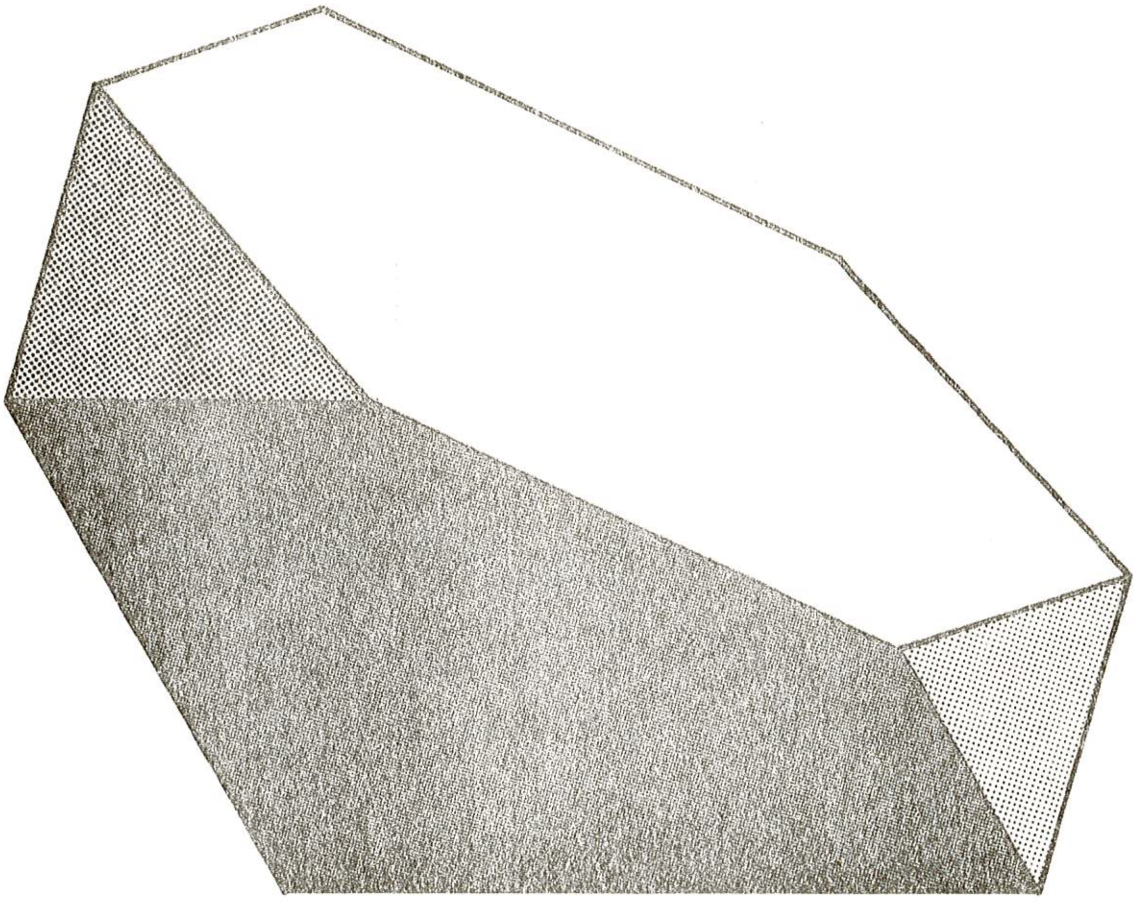
㉒



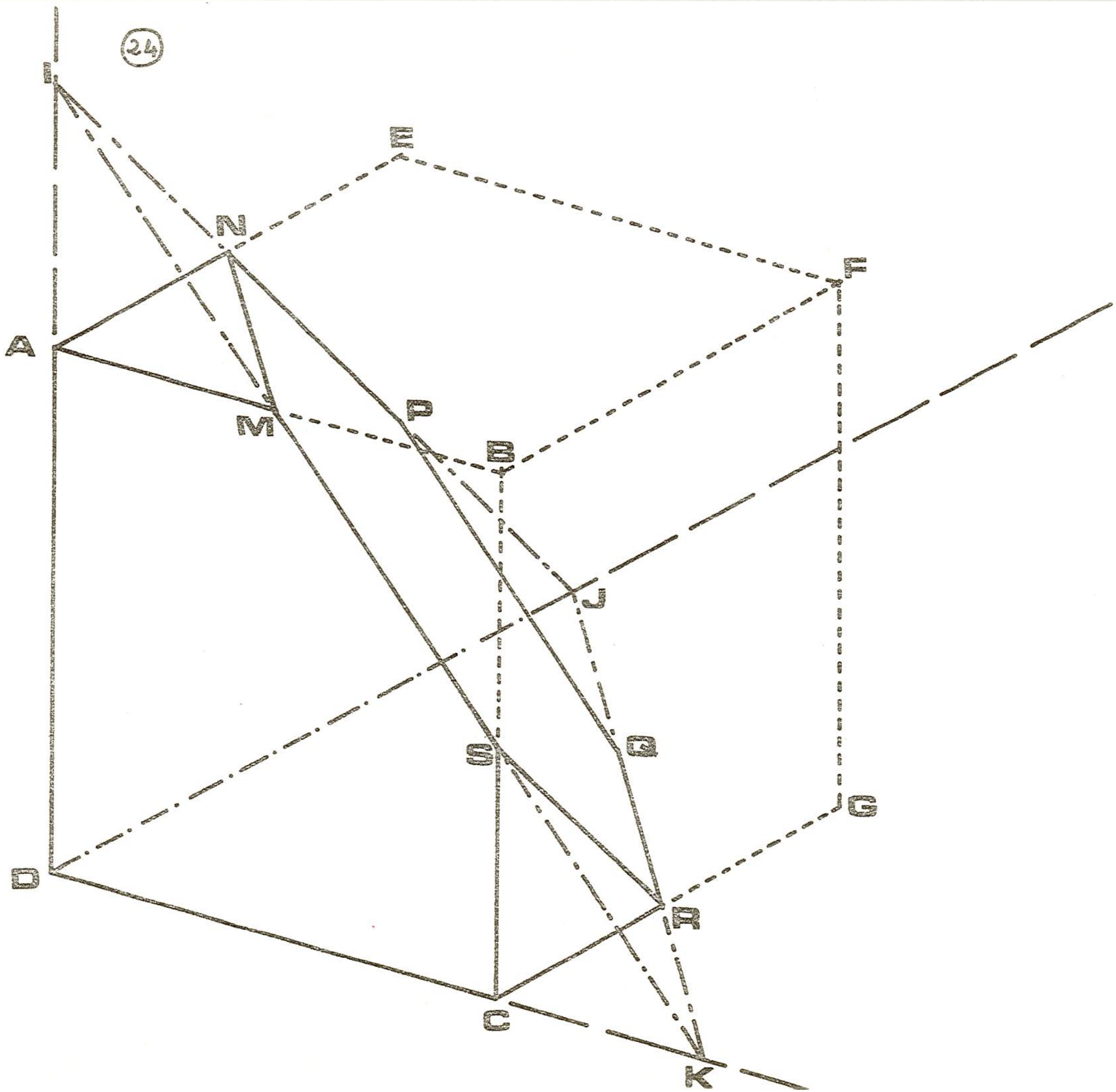
(23)



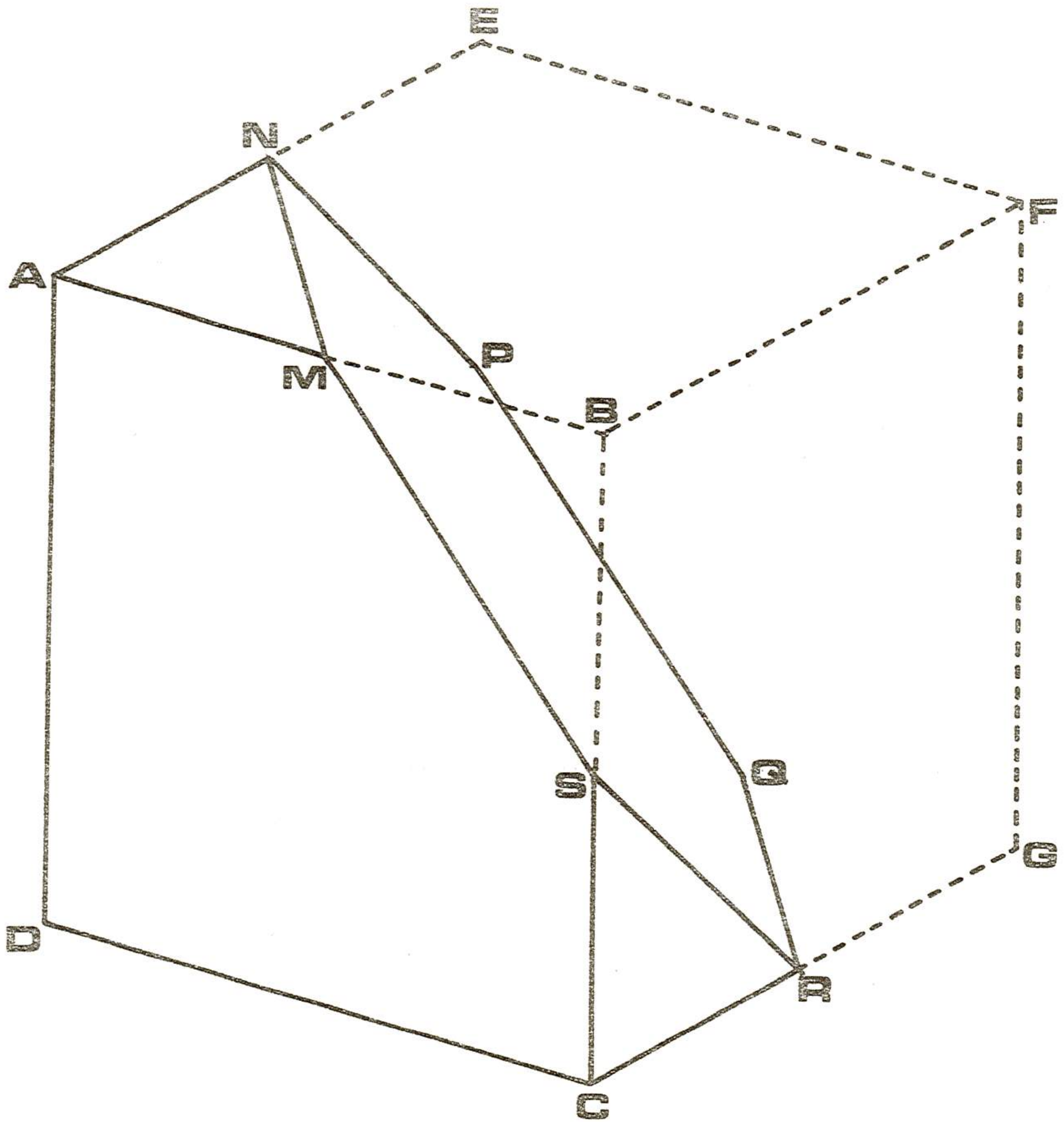

E
P
F
A
N
Q
B
M
R
G
D
S
C

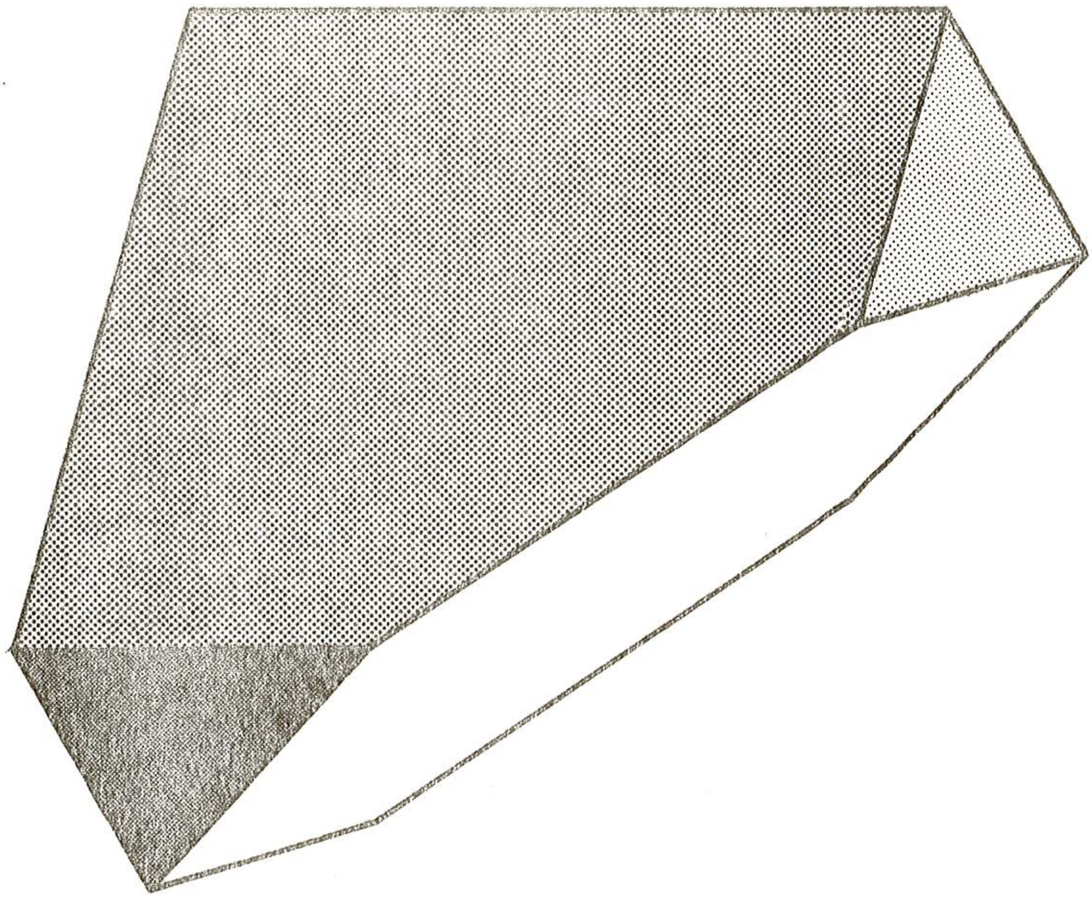


23ter

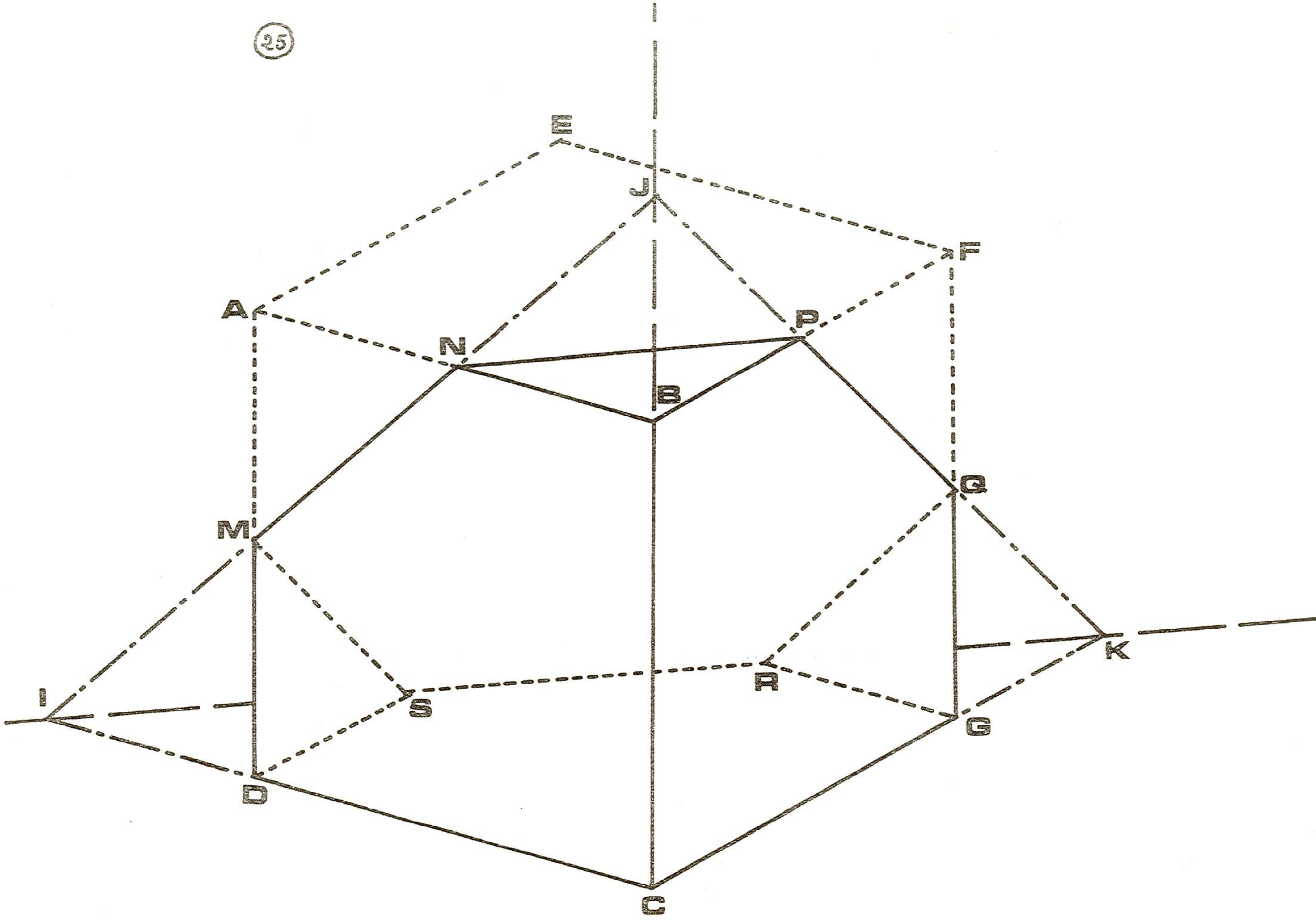

I
E
N
F
A
M
P
B
J
Q
S
G
D
R
C
K

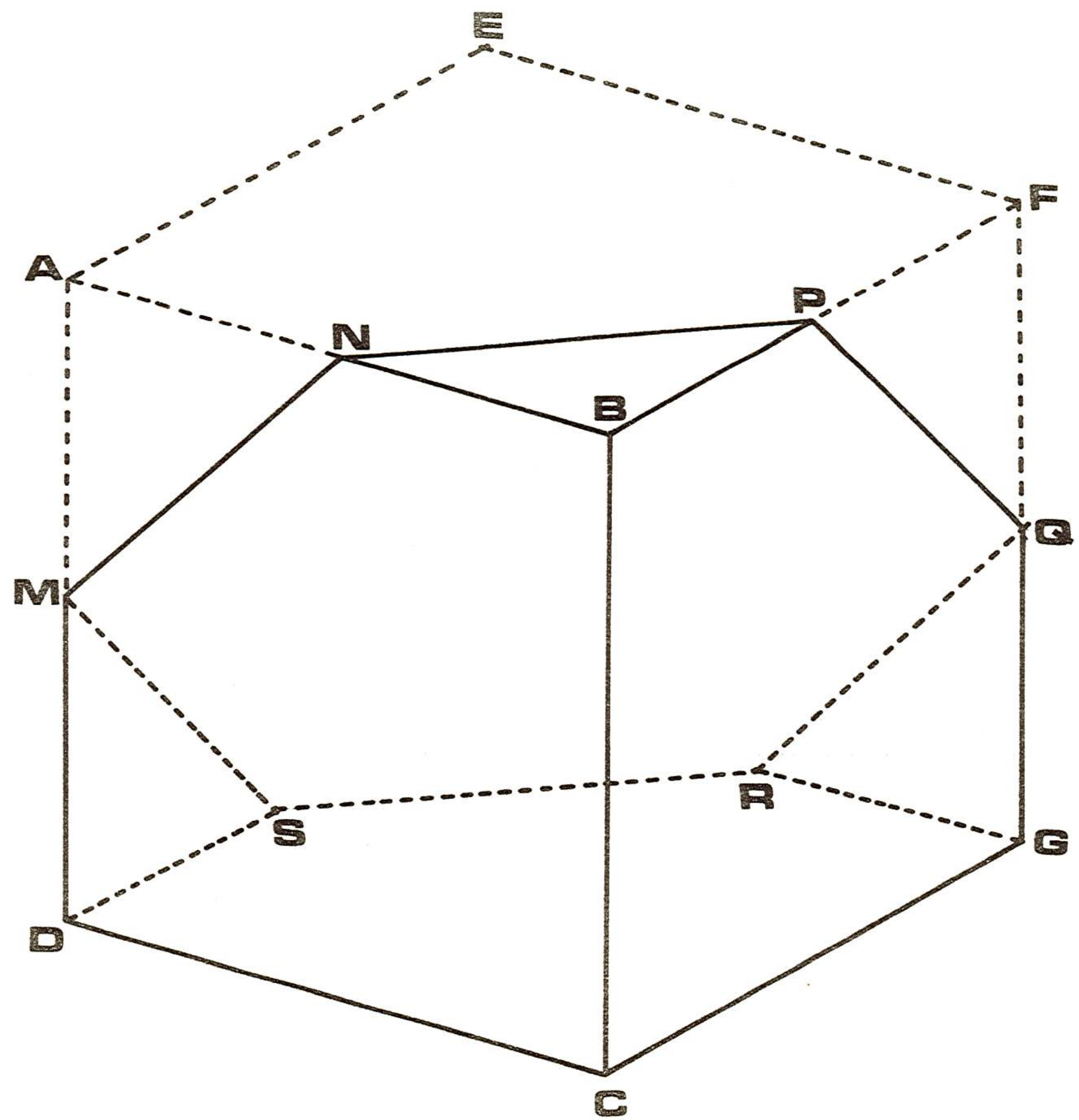
24 bis



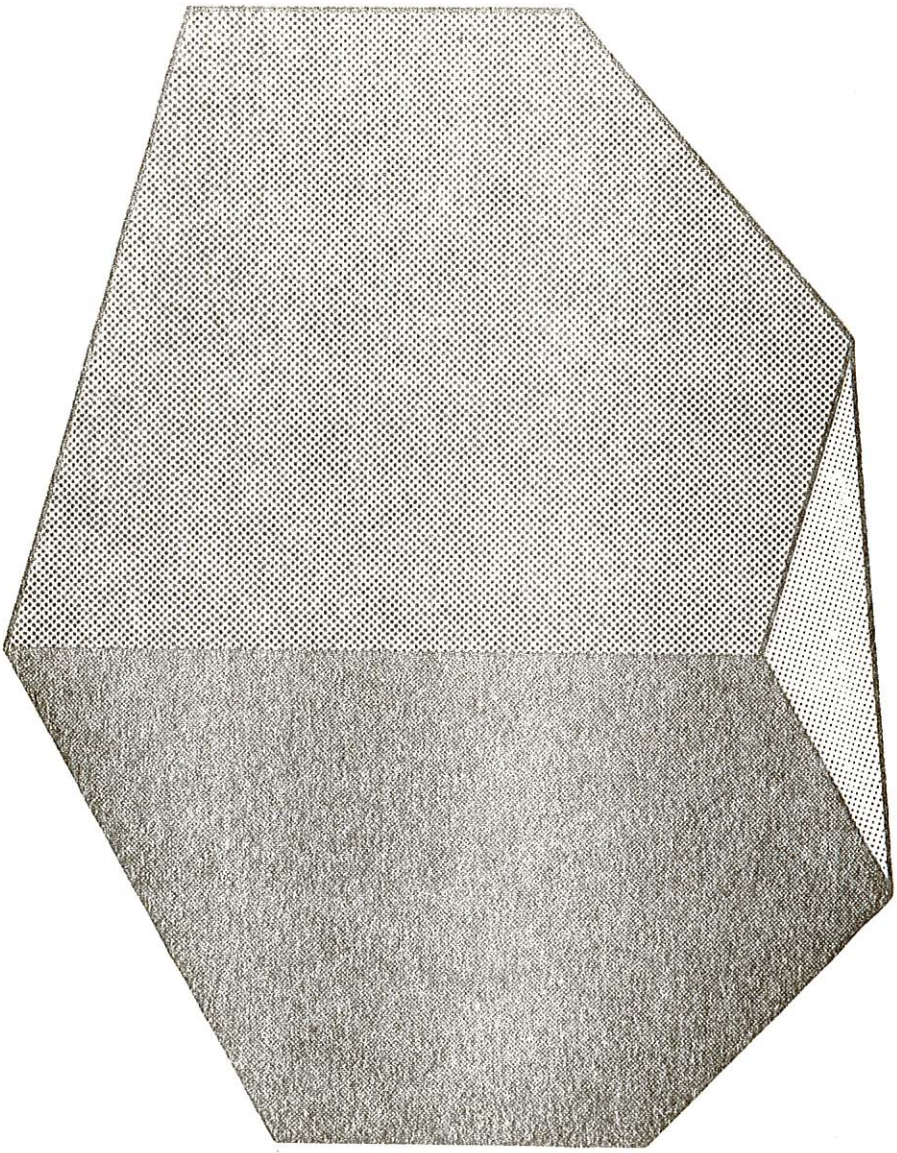


25

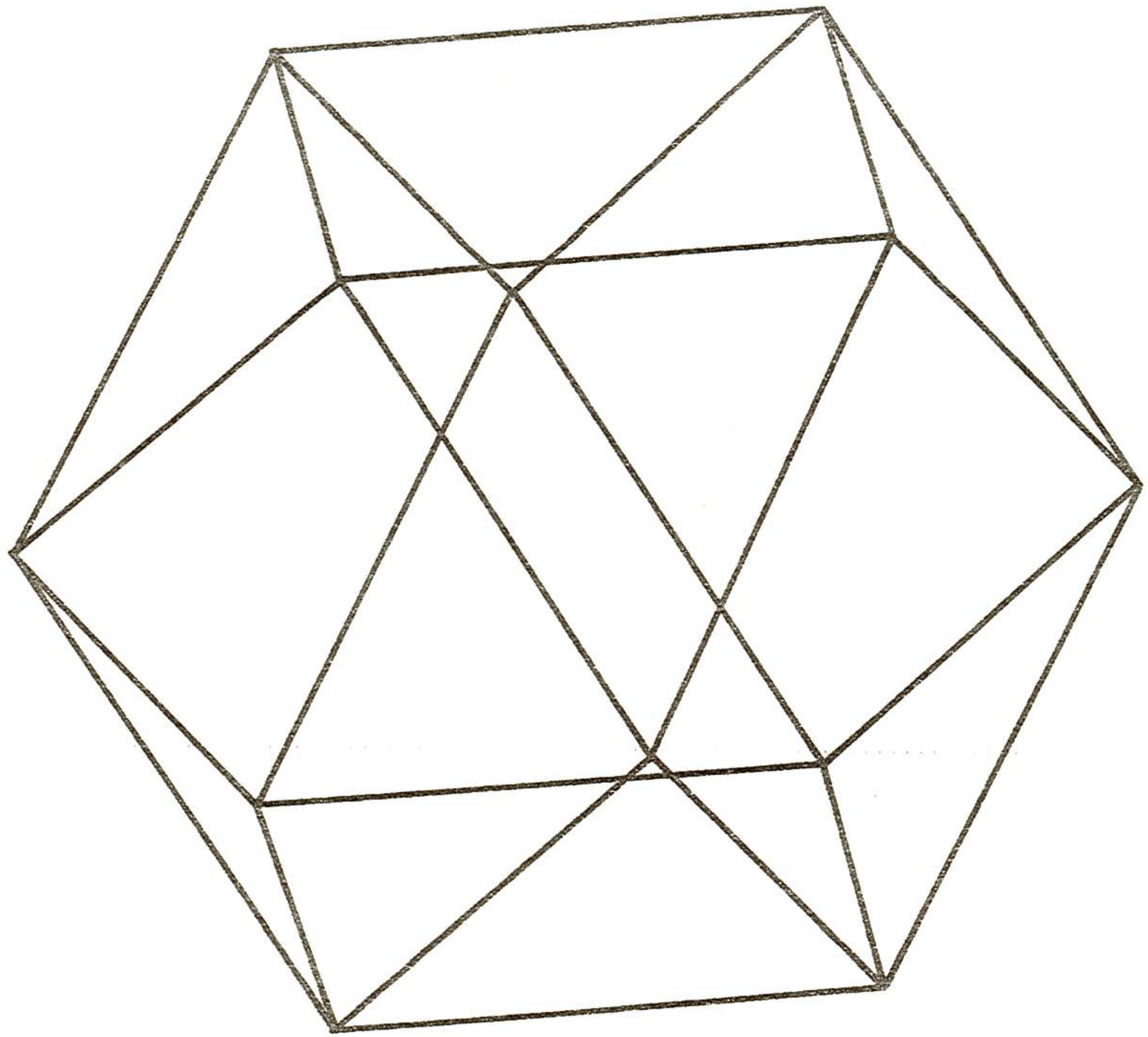


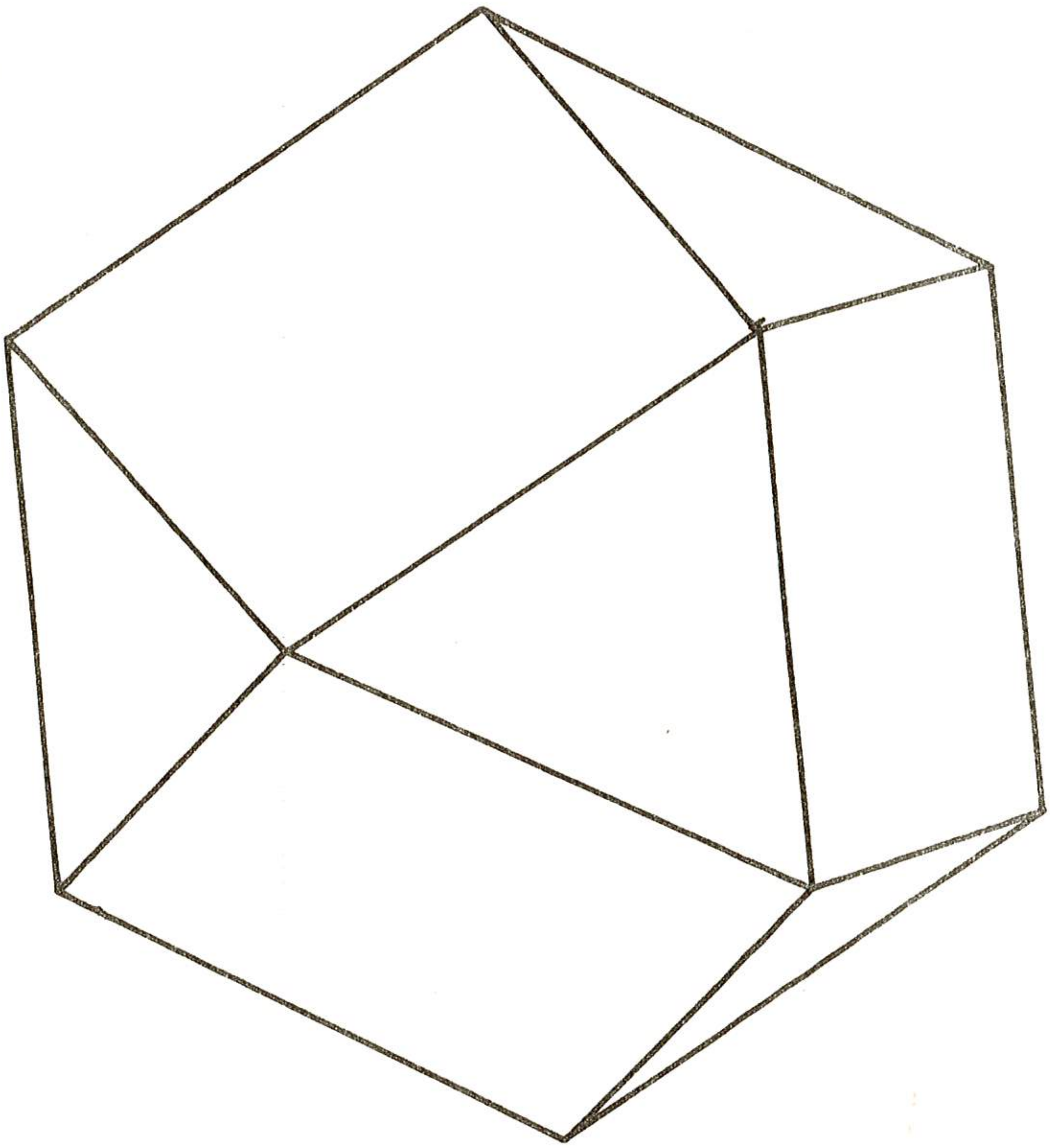


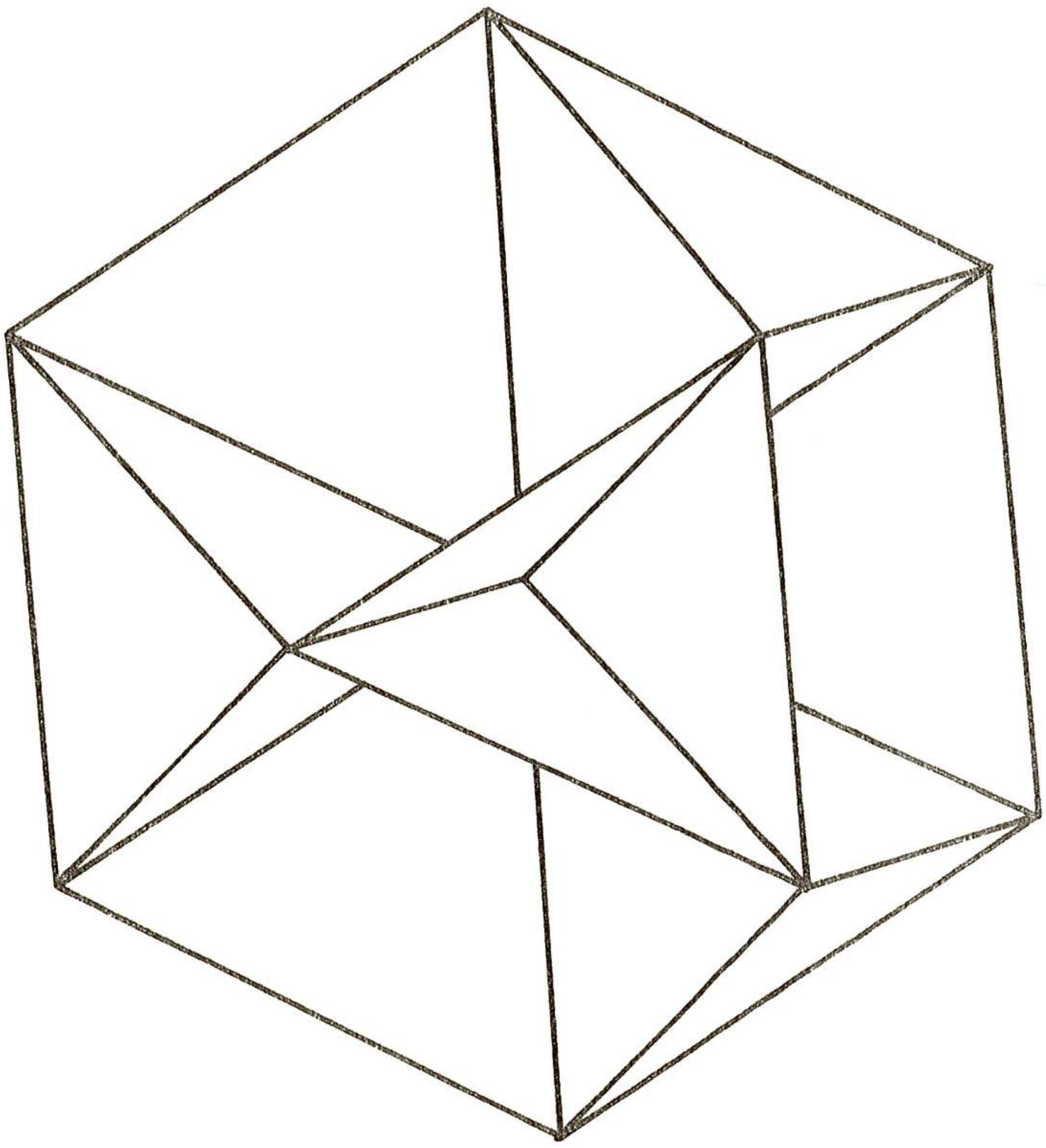
E
F
A
P
N
B
Q
M
R
S
G
D
C



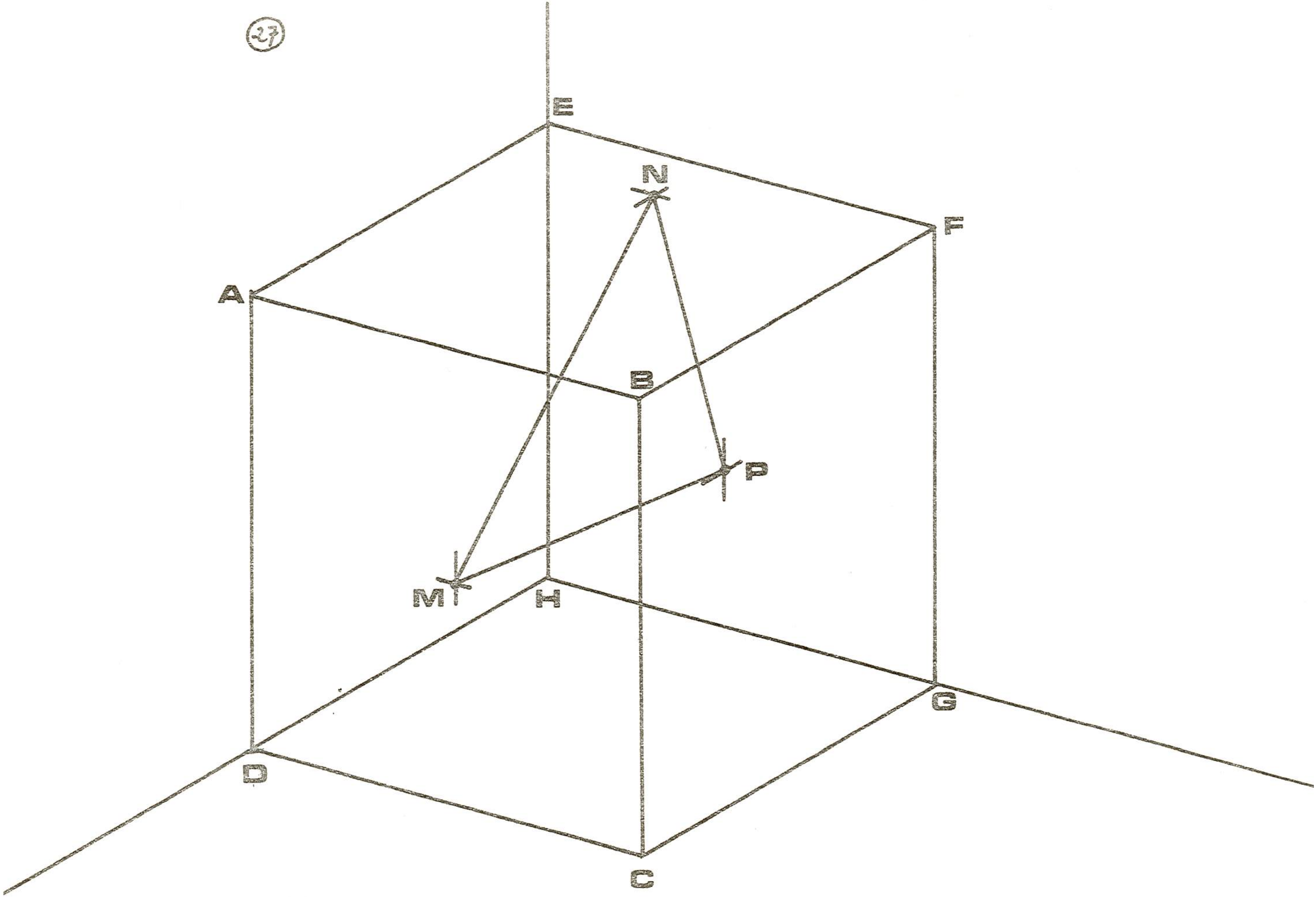
25ter

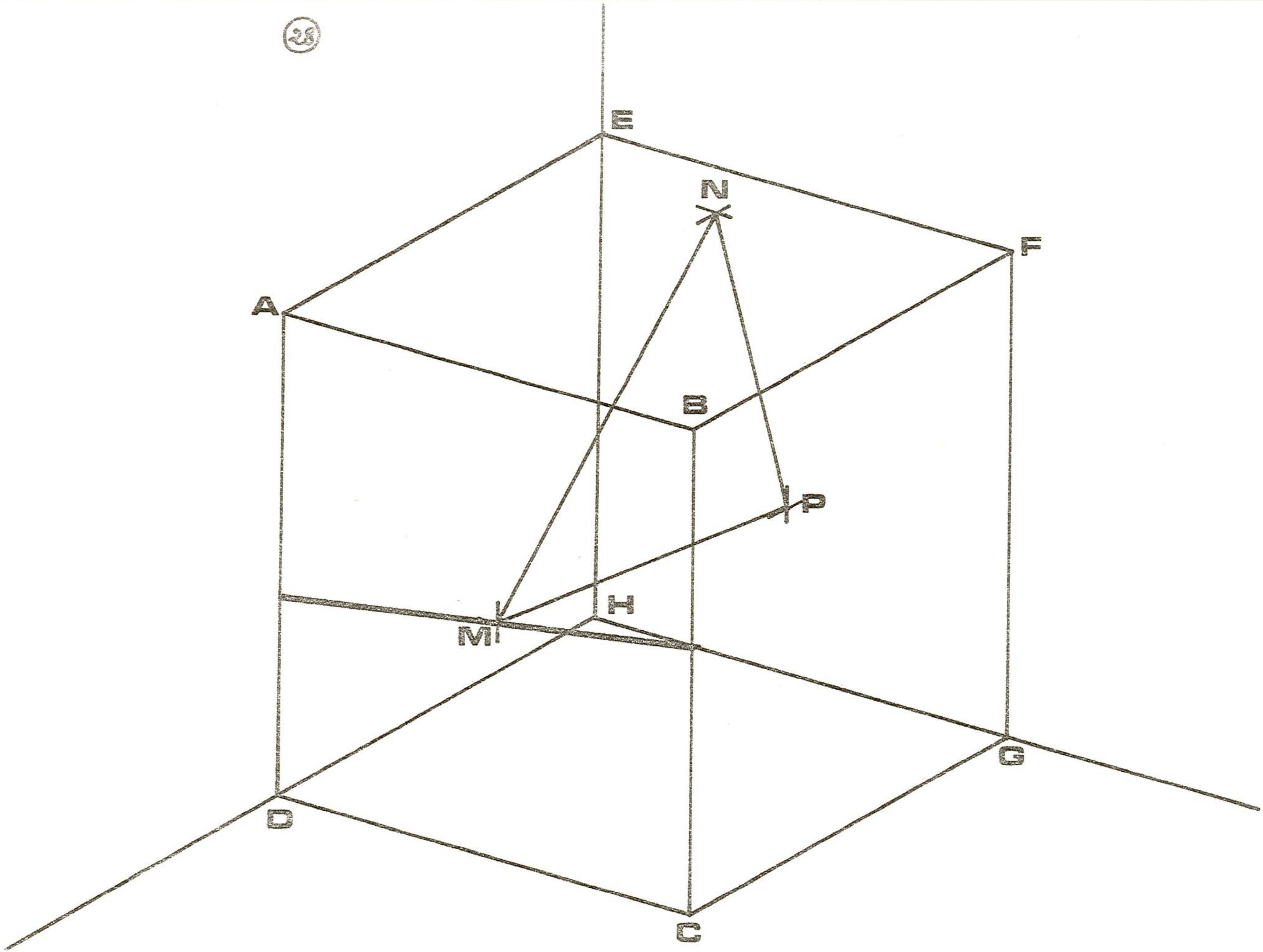




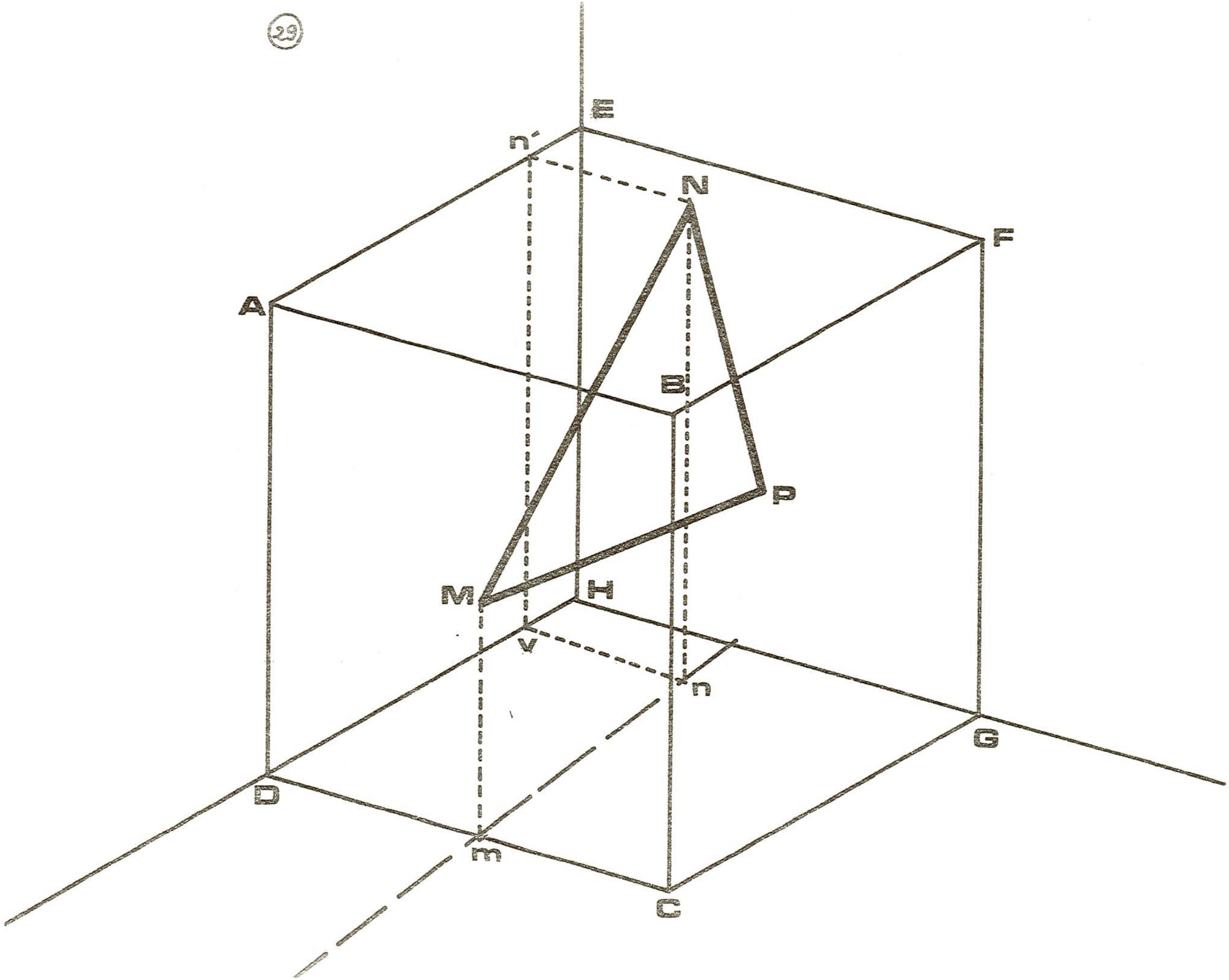


27

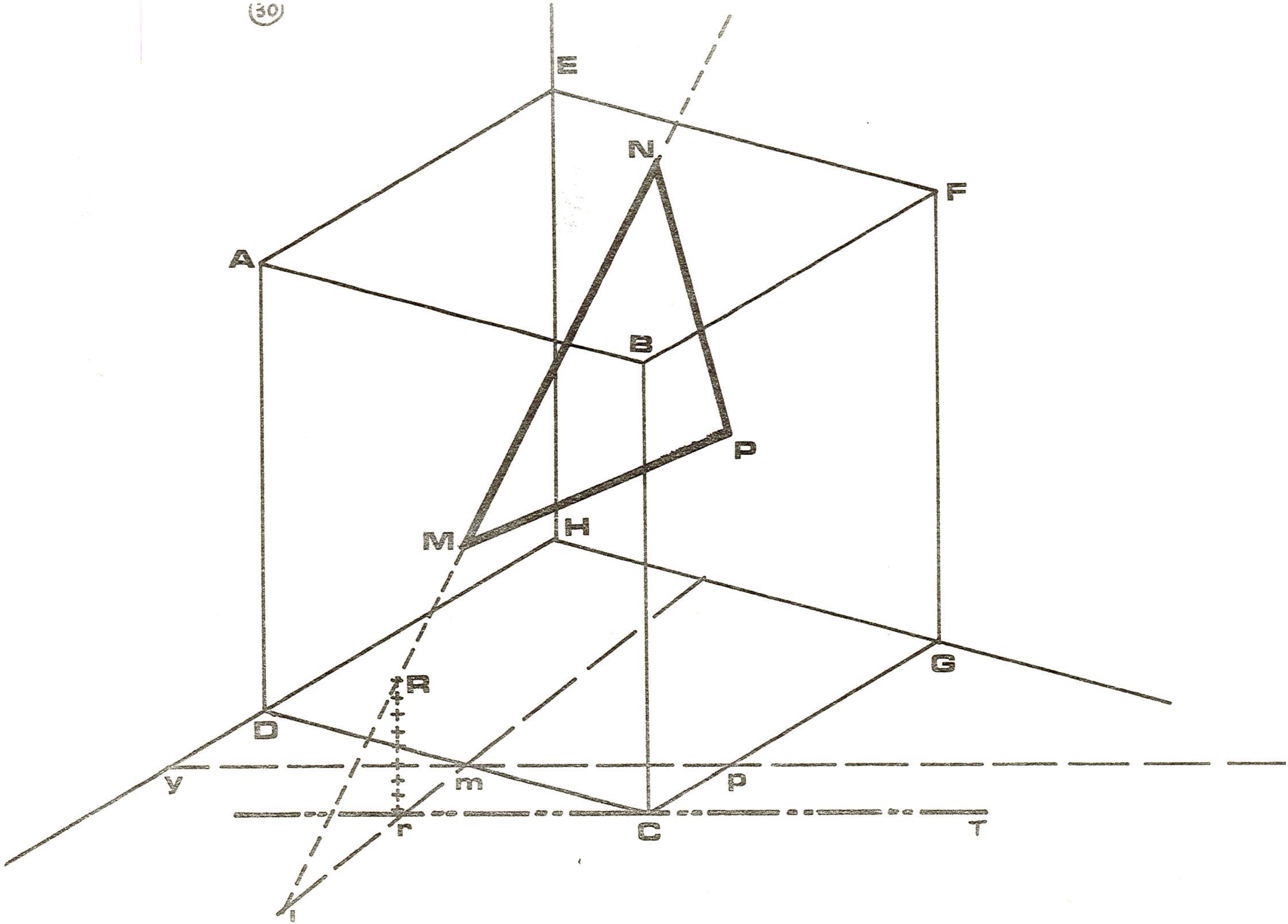



E
N
F
A
B
P
H
M
G
D
C

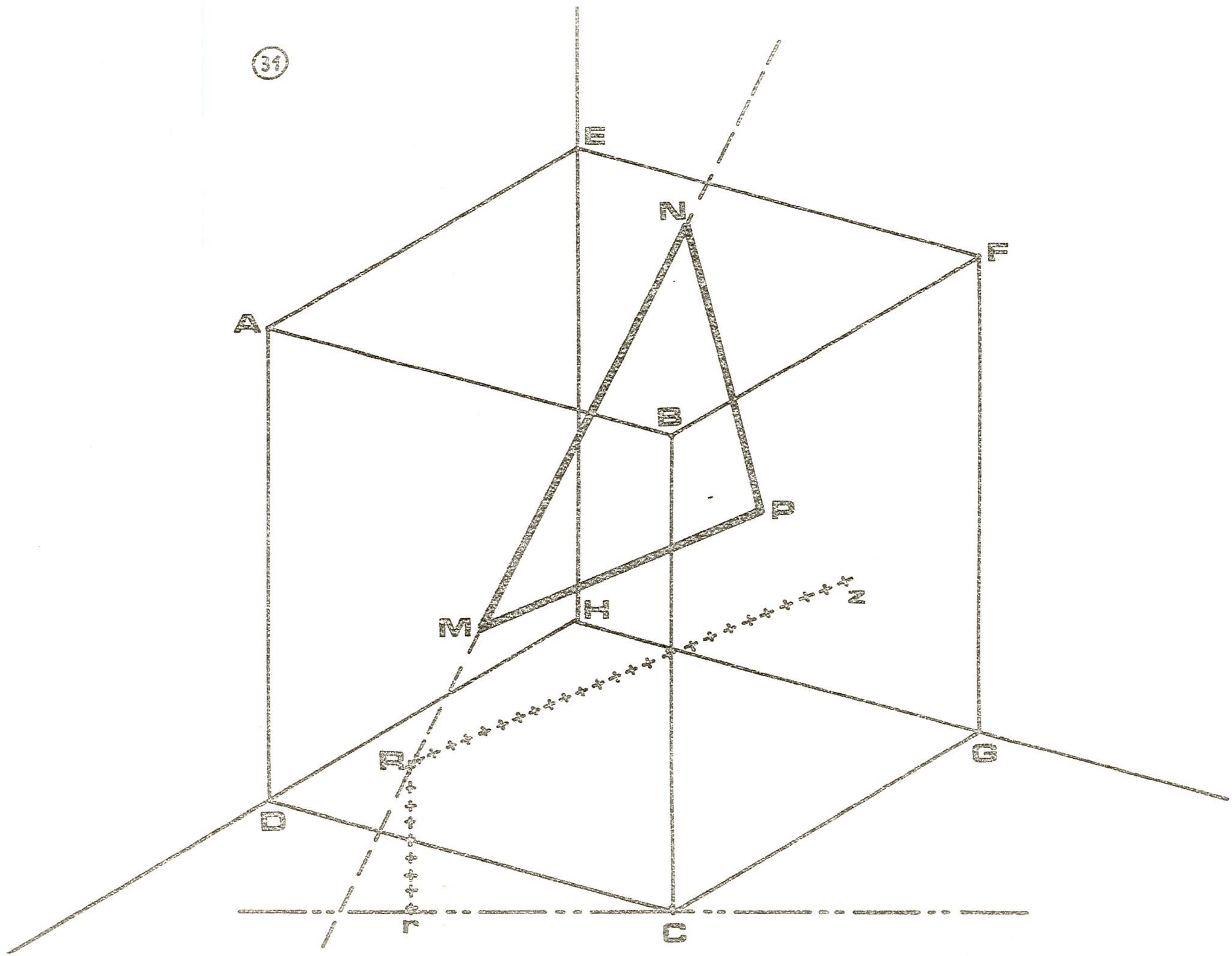
29



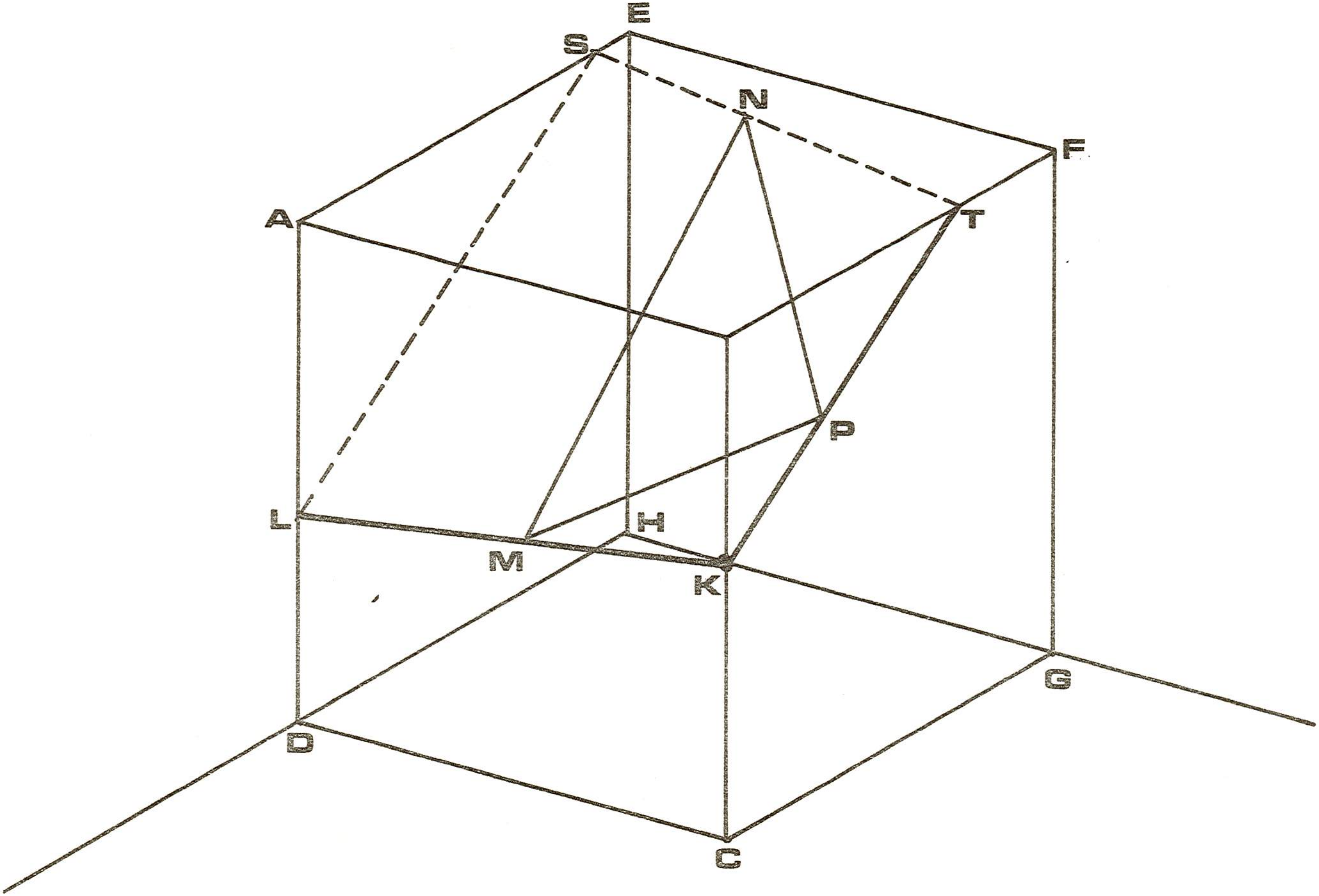
(30)



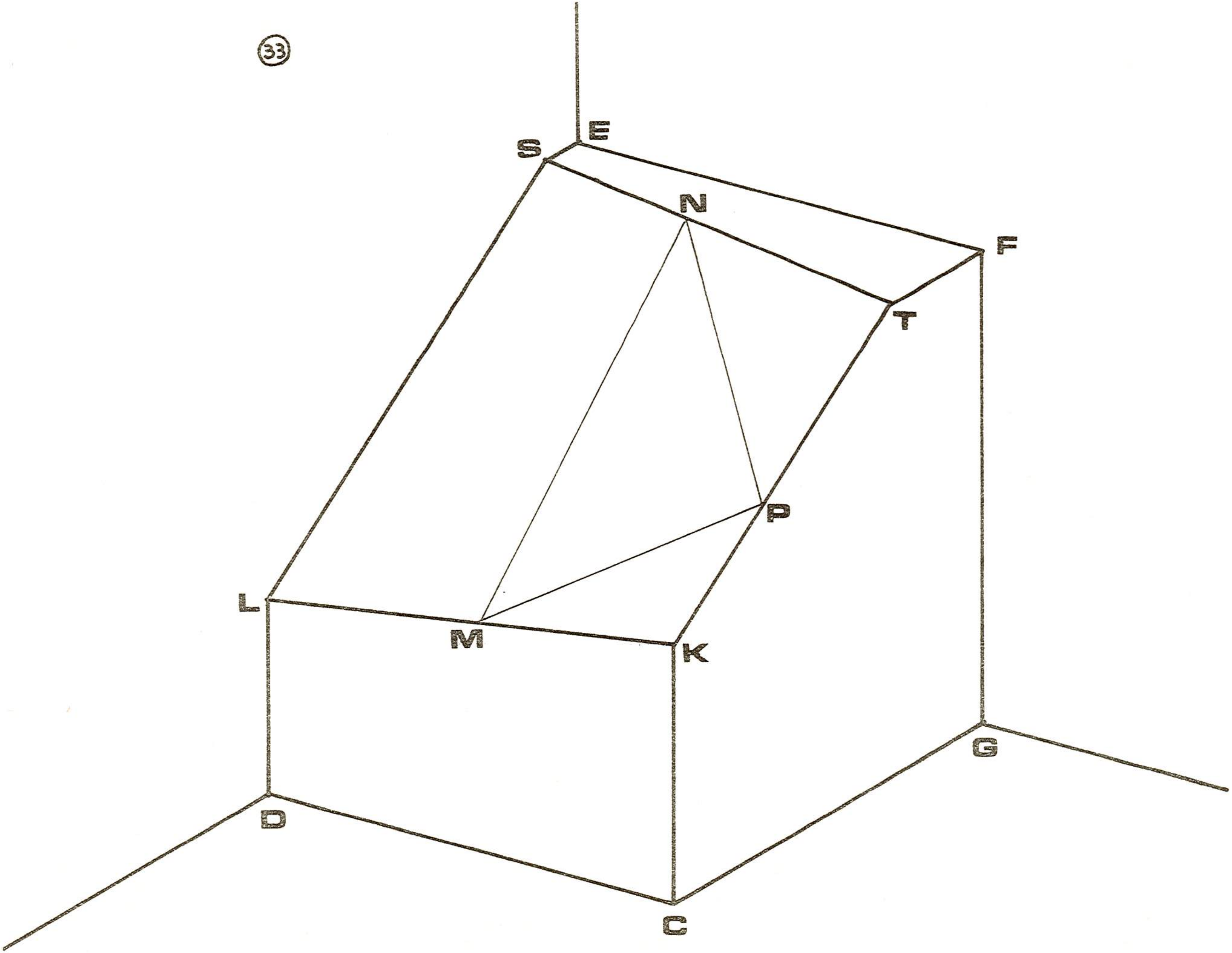
31



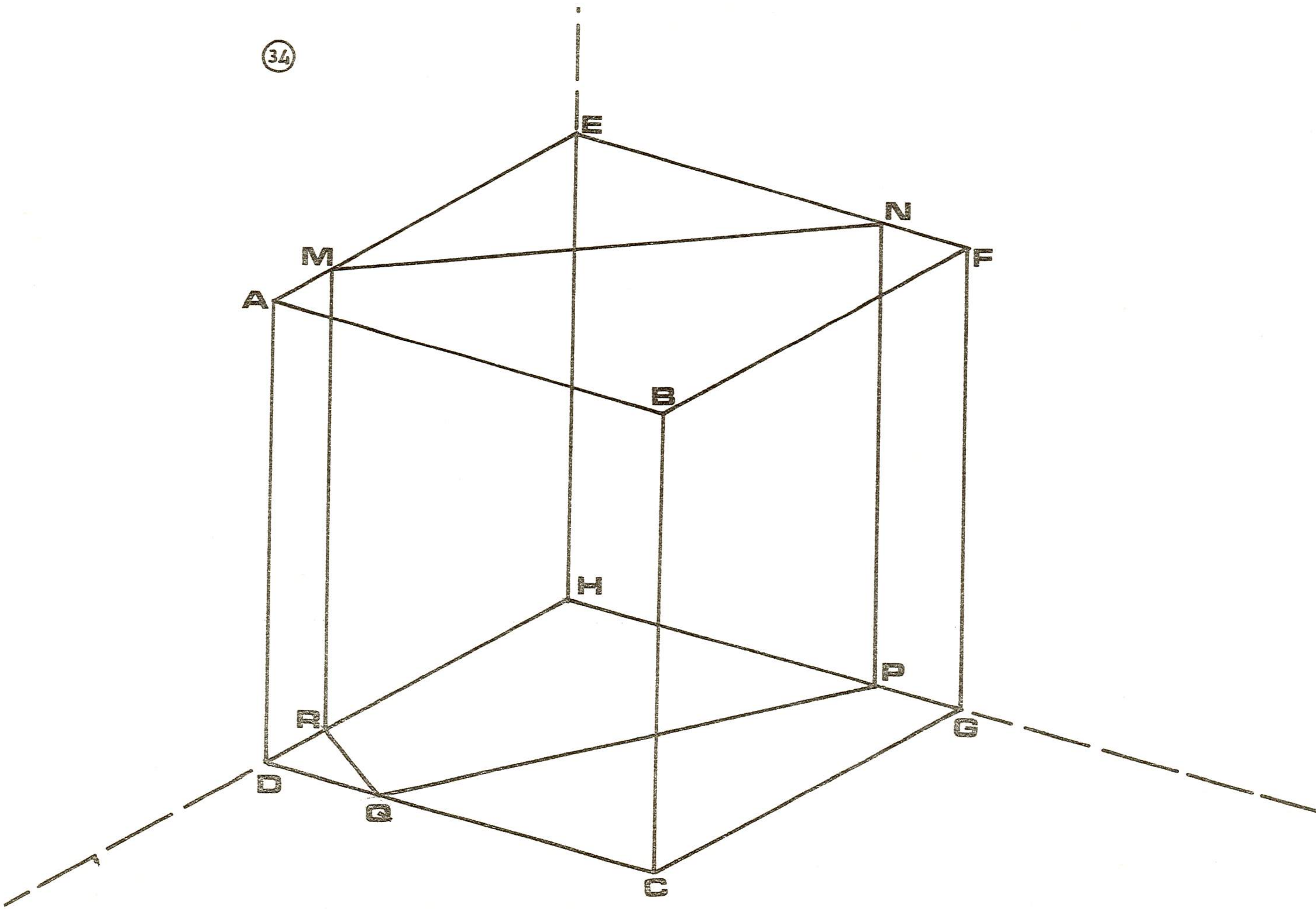
32

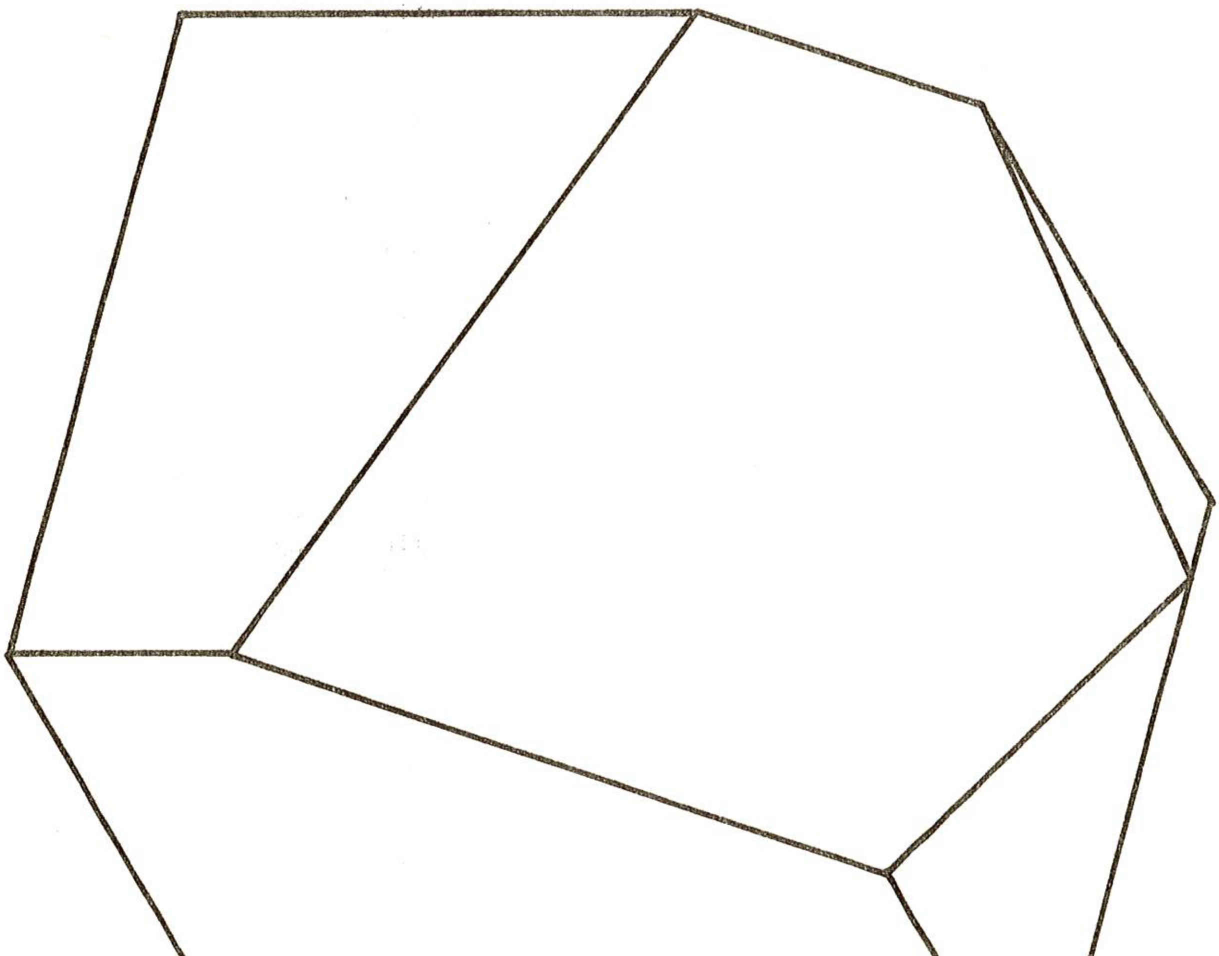


33



34





35