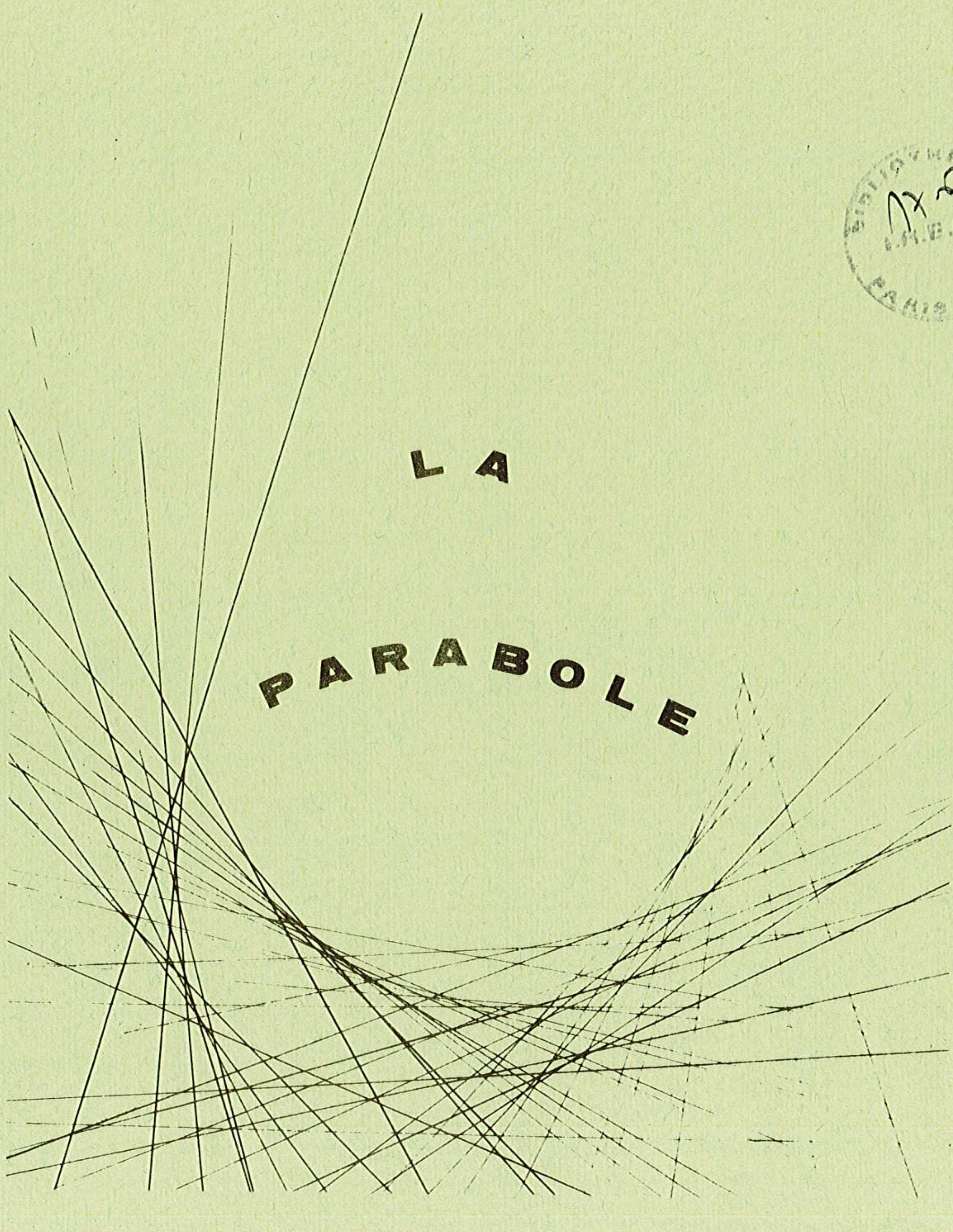
SECOND CYCLE

Fascicule 1



IREM PARIS-NORD

UNIVERSITE PARIS-NORD.- I.R.E.M.-
A Propos de Parabole / P. KNERR,
M. LAURA, M. THEBAULT.- Villeta-
neuse, juin 81, 36 pages dactyl.,
29 cm.

ISBN 2 86240 066 1

Dépôt légal : 3ème trimestre 1981

500 ex.
5,00 F

A travers le thème "Parabole", nous avons voulu mettre en évidence différentes approches possibles de l'objet "PARABOLE" et dégager certains savoir faire : choisir un repère dans une étude analytique, mettre en place une discussion géométrique, donner certaines méthodes de calcul, etc ...

C'est un travail évidemment partiel dont les trois chapitres peuvent apparaître disparates. Nous pensons cependant que chacun pourra l'utiliser en l'adaptant à ses besoins et goûts personnels.

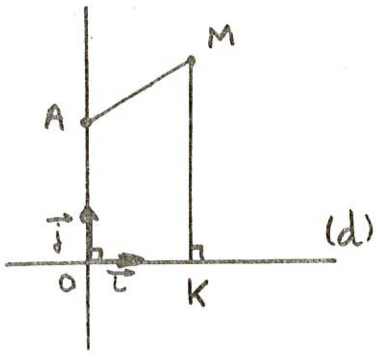
S O M M A I R E

ETUDE ANALYTIQUE

de l'ensemble E des points M du plan tels que :

$$MA - MK = k$$

où A est un point donné situé à une distance a d'une droite donnée d,
où K est la projection orthogonale de M sur la droite d,
où k est un réel donné.



Choix d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$

O est la projection orthogonale de A sur d.

$\vec{i}$ est un vecteur unitaire directeur de la droite d.

$\vec{j}$ est un vecteur unitaire tel que $\overrightarrow{OA} = a\vec{j}$.

Des conditions qui caractérisent l'ensemble E cherché.

Soient les points $A(0,a)$, $M(x,y)$, $K(x,0)$.

Soient les vecteurs $\overrightarrow{MA}\begin{pmatrix}-x\\a-y\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{MK}\begin{pmatrix}0\\-y\end{pmatrix}$

Soient les égalités $MA = \sqrt{x^2 + (a-y)^2}$ et $MK = |y|$

L'ensemble E est défini par :

$$\sqrt{x^2 + (a-y)^2} = k + |y|$$

ou encore par :

$$k + |y| \geqslant 0 \quad \text{et} \quad 2k|y| + 2ay = x^2 + a^2 - k^2$$

L'ensemble E est donc défini par les conditions $\boxed{C}$:

$$|y| \geqslant -k \quad \text{et} \quad \begin{cases} y < 0 \quad \text{et} \quad 2(a-k)y = x^2 + a^2 - k^2 \\ \quad\text{ou} \\ y = 0 \quad \text{et} \quad x^2 + a^2 - k^2 = 0 \\ \quad\text{ou} \\ y > 0 \quad \text{et} \quad 2(a+k)y = x^2 + a^2 - k^2 \end{cases}$$

Le point A appartient à la droite d $(a = 0)$.

$\boxed{k < 0}$ Comme d'après $\boxed{C}$

$y < 0$ et $y = -\frac{1}{2k}x^2 + \frac{k}{2}$,

donc $\frac{k}{2} \leqslant y < 0$.

Comme d'après $\boxed{C}$ $y > 0$ et $y = \frac{1}{2k}x^2 - \frac{k}{2}$,

donc $0 < y \leqslant -\frac{k}{2}$.

On déduira que (sans oublier $y = 0$) :

$$0 \leqslant |y| < -\frac{k}{2} < -k.$$

Ainsi la condition $|y| \geqslant -k$ n'est pas vérifiée.

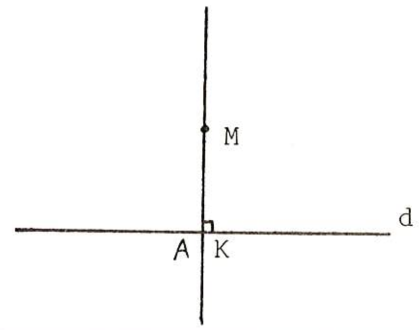
E est l'ensemble vide

$\boxed{k = 0}$ Comme $k = 0$, donc $|y| \geqslant -k$

Les conditions $\boxed{C}$ caractérisent :

la droite d'équation $x = 0$.

E est la droite perpendiculaire en A à la droite d :



$\boxed{k > 0}$ Comme $k > 0$, donc $|y| \geqslant -k$

Les conditions $\boxed{C}$ caractérisent :

- Pour $y < 0$, une partie de parabole d'équation :

$$y = -\frac{1}{2k}x^2 + \frac{k}{2}$$

et de sommet $S_1(0,\frac{k}{2})$.

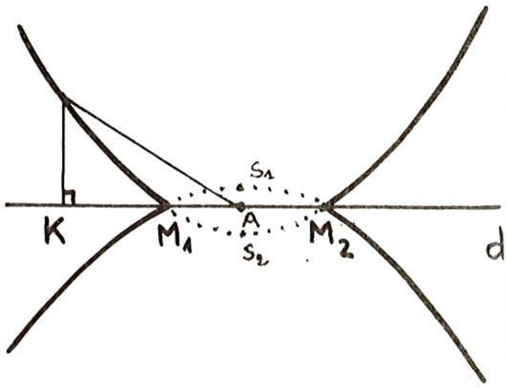
- Pour $y = 0$, une paire de points $M_1(-k,0)$ et $m_2(k,0)$.

- Pour $y > 0$, une partie de parabole d'équation :

$$y = \frac{1}{2k}x^2 - \frac{k}{2}$$

et de sommet $S_2\ (0,-\frac{k}{2})$

E est la réunion des parties de 2 paraboles et ne contenant pas les sommets de ces paraboles.



$\boxed{\text{Le point A n'appartient pas à la droite d } (a > 0)}$

$\boxed{k < -a < 0}$ donc $a+k < 0$ et $a-k > 0$.

D'après $\boxed{C}$ $y > 0$ et $y = \frac{1}{2(a+k)} x^2 + \frac{a-k}{2}$

ou $y < 0$ et $y = \frac{1}{2(a-k)} x^2 + \frac{a+k}{2}$

On déduira que $\frac{a+k}{2} \leqslant y \leqslant \frac{a-k}{2}$.

On montrera que $k < \frac{a+k}{2} < \frac{a-k}{2} < -k$,

ainsi $|y| < -k$.

Ainsi, la condition $|y| \geqslant -k$ n'est pas vérifiée.

E est l'ensemble vide.

$\boxed{k = -a}$ donc $a+k = 0$ et $a-k > 0$.

D'après $\boxed{C}$, $|y| \geqslant a$

D'après $\boxed{C}$, $y < 0$ et $y = \frac{1}{4a} x^2$, mais ces conditions sont incompatibles.

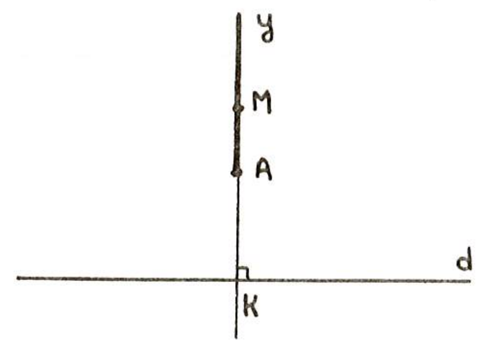
D'après $\boxed{C}$, $y > 0$ et $x = 0$.

Par suite, E est caractérisé par :

$y \geqslant a$ et $x = 0$.

E est donc une demi-droite.

E est la demi-droite [Ay) perpendiculaire à la droite d.



$\boxed{-a < k < a}$ donc $a+k > 0$ et $a-k > 0$.

D'après $\boxed{C}$, $y < 0$ et $y = \frac{1}{2(a-k)} x^2 + \frac{a+k}{2}$

Les conditions sont incompatibles.

D'après $\boxed{C}$, $y > 0$ et $y = \frac{1}{2(a+k)} x^2 + \frac{a-k}{2}$

Ainsi $y \geqslant \frac{a-k}{2} > 0$.

On montrera que $-k < \frac{a-k}{2} < a$

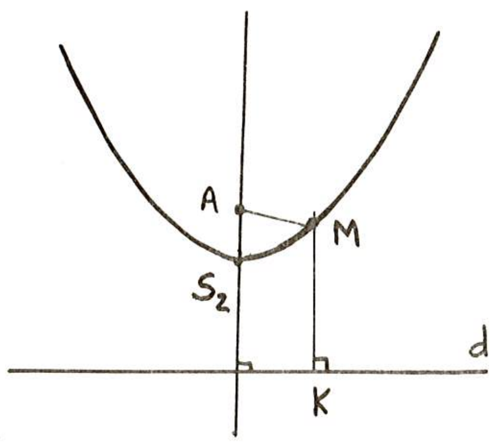
donc $|y| > -k$.

E est caractérisé par :

$$y = \frac{1}{2(a+k)} x^2 + \frac{a-k}{2}$$

E est donc une parabole de sommet $S_2(0, \frac{a-k}{2})$.

E est une parabole



Le point A n'appartient pas à la droite d $(a > 0)$

$\boxed{k = a}$ donc $a+k > 0$ et $a-k = 0$.

Comme $k > 0$ donc $|y| > -k$.

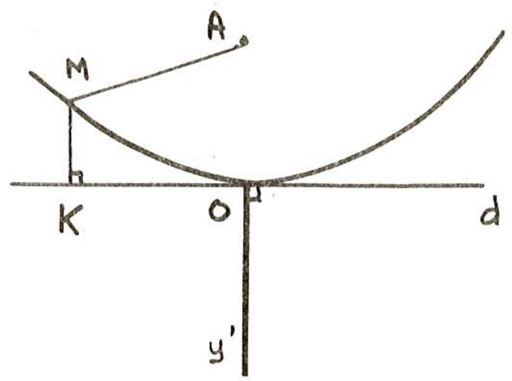
Les conditions $\boxed{C}$ caractérisent :

. pour $y \leqslant 0$, la demi-droite $[Oy')$ d'équation $x = 0$.

. pour $y \geqslant 0$, la parabole d'équation

$$y = \frac{1}{4a} x^2$$ et de sommet $O(0,0)$.

E est la réunion d'une parabole de sommet O et de la demi-droite $[Oy')$ extérieure à la parabole.



$\boxed{k > a}$ donc $a+k > 0$ et $a-k < 0$

Comme $k > 0$ donc $|y| > -k$.

Les conditions $\boxed{C}$ caractérisent :

. pour $y < 0$, une partie de parabole d'équation :

$$y = \frac{1}{2(a-k)} x^2 + \frac{a+k}{2}$$

et de sommet $S_1(0,\frac{a+k}{2})$.

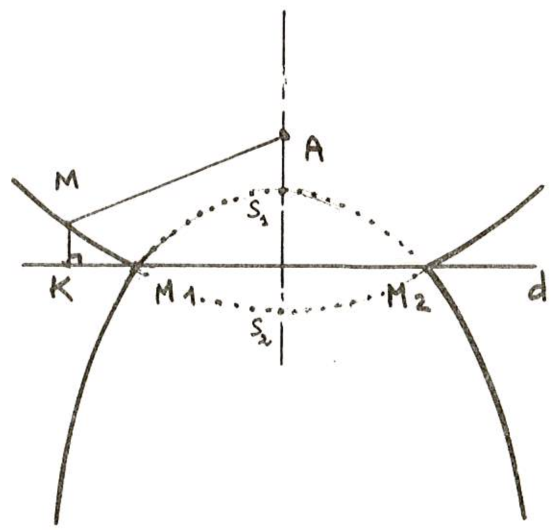
. pour $y = 0$, une paire de points $M_1(-k,0)$ et $M_2(k,0)$.

. pour $y > 0$, une partie de parabole d'équation :

$$y = \frac{1}{2(a+k)} x^2 + \frac{a-k}{2}$$

et de sommet $S_2(0,\frac{a-k}{2})$.

E est la réunion des parties de deux paraboles et ne contenant pas les sommets de ces paraboles.



UNE ETUDE GEOMETRIQUE DE LA PARABOLE

A - Ensemble des points du plan équidistants d'une droite donnée (D) et d'un point donné A.

La figure formée par la droite (D) et le point A admet pour axe de symétrie la droite (Δ) perpendiculaire à (D) passant par A ; (Δ) sera axe de symétrie de l'ensemble cherché (P).

. Si A appartient à (D), alors (Δ) est l'ensemble cherché.

. Supposons dans ce qui suit que A n'appartient pas à (D) et soit H la projection orthogonale de A sur (D). S milieu du segment [AH] est un point particulier de (P), (P) est non vide.

1. Construction géométrique de (P) par points.

Soit M point quelconque de (P) et K sa projection orthogonale sur (D). $M \in (P)$ équivaut à $d(M,A) = d(M,K)$, K étant choisi arbitrairement sur (D), M est l'intersection de la médiatrice de [AK] et de la perpendiculaire en K à (D).

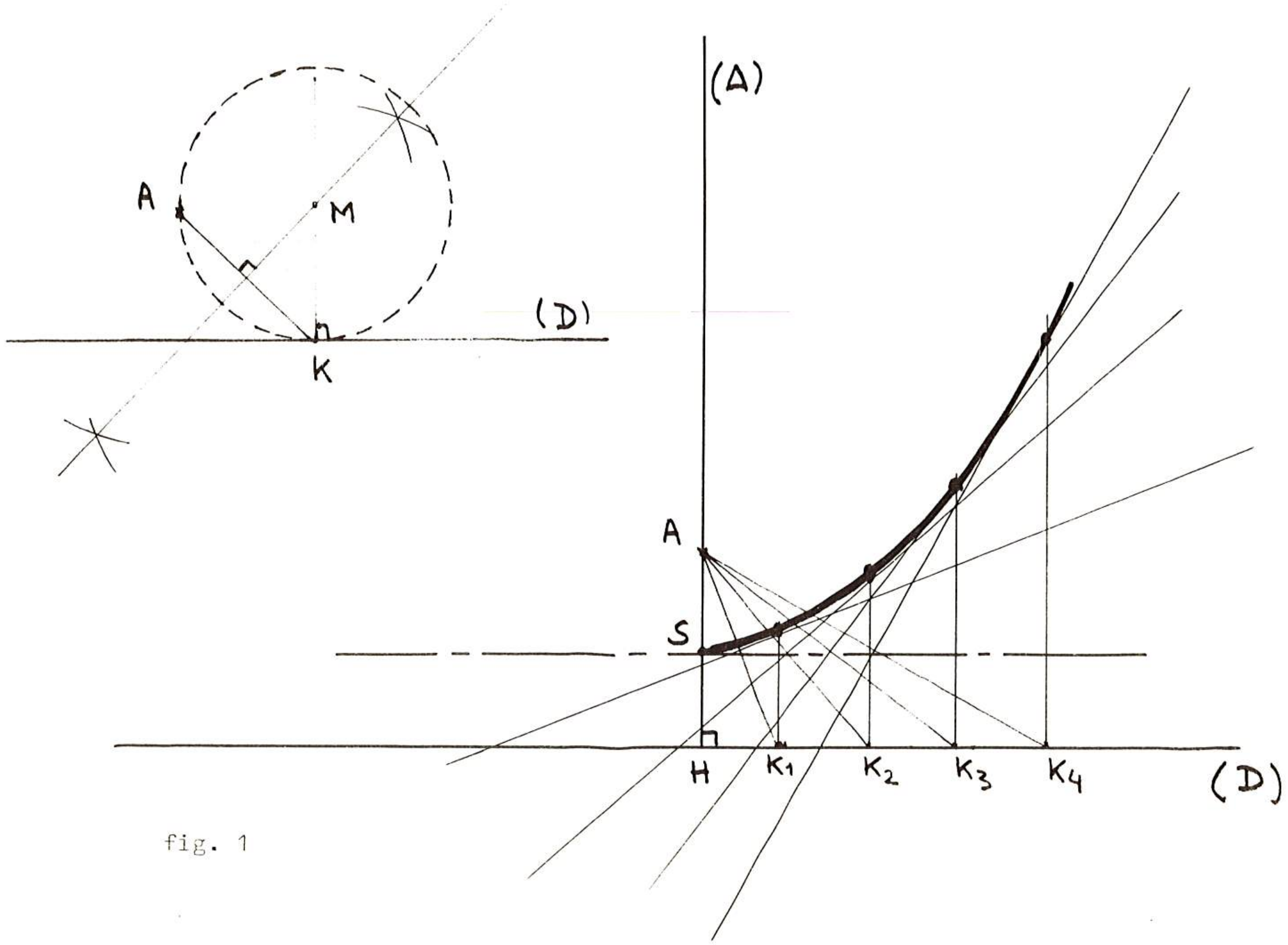


fig. 1

2. On peut obtenir un tracé "continu" d'une partie de (P) à l'aide d'une équerre et d'une règle plate.
Fixer en A et B (extrémité du plus grand côté de l'angle droit de l'équerre) un fil de longueur BK (voir fig. 2) et en le maintenant tendu par la pointe traçante M, glisser l'équerre le long de la règle plate appliquée sur (D). Compléter la figure par la symétrie d'axe (Δ).

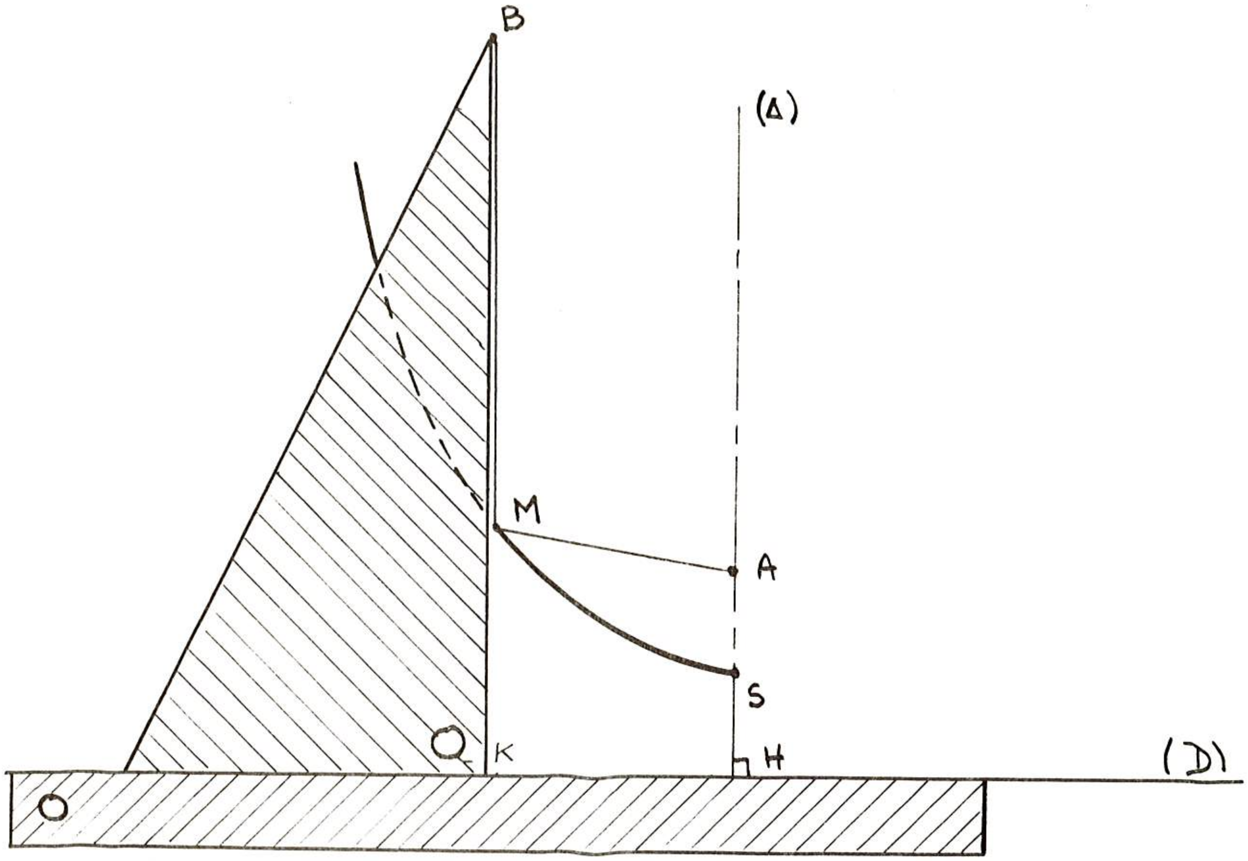


fig. 2

3. Tout point M de (P) est centre du cercle de rayon $r = d(M,A)$ tangent en K à (D).
Réciproquement ω centre d'un cercle tangent à (D) et passant par A est un point de (P), que A appartienne ou non à (D).
L'ensemble (P) peut donc être défini comme l'ensemble des centres de cercles passant par un point donné A et tangents à une droite donnée (D) du plan).

4. Détermination analytique de (P)

Le plan étant rapporté à un repère orthonormal direct (S,I,J), choisi de telle sorte que la droite (SI) soit parallèle à (D) et que l'ordonnée de A soit positive.

Soit $d(A,H) = p$ $\qquad \overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x \\ y-\frac{p}{2} \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{MK}\begin{pmatrix} 0 \\ y+\frac{p}{2} \end{pmatrix}$

$M \in (P)$ équivaut à $d(M,A) = d(M,K)$

$$x^2 + (y - \frac{p}{2})^2 = (y + \frac{p}{2})^2$$

. Si $A \in (D)$ $\quad p = 0$ $\quad$ (P) est la droite d'équation $x = 0$
C'est la droite $(SJ) = (\Delta)$

. Si $A \notin (D)$ $\quad p \neq 0$ $\quad$ (P) est l'ensemble des points du plan rapporté au repère (S,I,J) dont les coordonnées vérifient l'équation $y = \frac{1}{2p}x^2$.

(P) est une parabole.
S est appelé le sommet, A le foyer et (D) la directrice de (P).

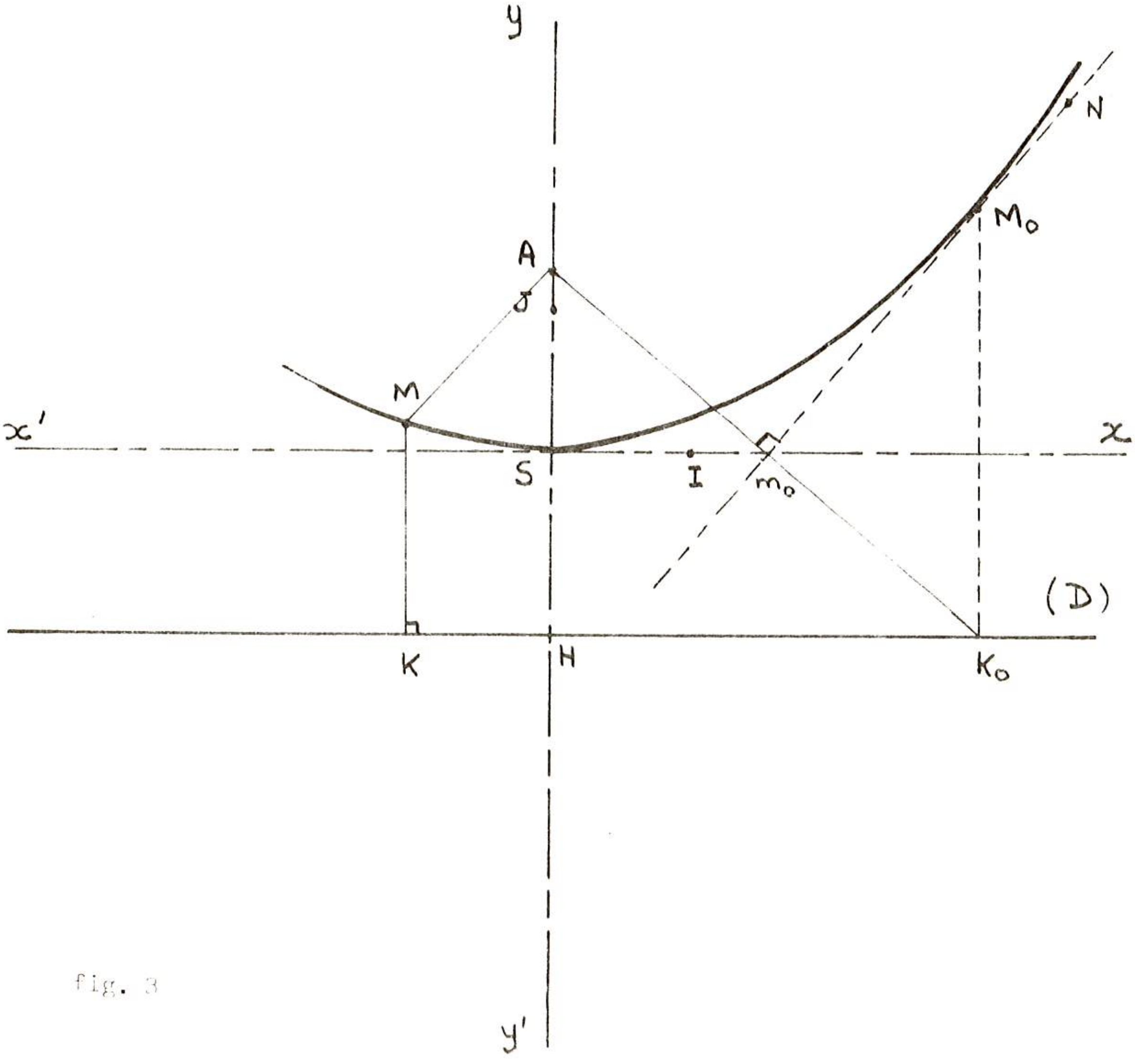


fig. 3

5. Intersection de la médiatrice du segment [AK] et de la parabole (P) $(A \notin (D))$.

Soit $M_o(x_o, y_o)$ point donné de (P). (fig. 3)

$m_o(\frac{x_o}{2}, 0)$ milieu du bi-points (A, K_o)

Les points N(x,y) de la médiatrice de $[AK_o]$ vérifient $\overrightarrow{m_oN} \perp \overrightarrow{AK_o}$ qui équivaut à $\overrightarrow{m_oN} \cdot \overrightarrow{AK_o} = 0$.

$$\overrightarrow{m_oN} \begin{pmatrix} x - \frac{x_o}{2} \\ y \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{AK_o} \begin{pmatrix} x_o \\ -p \end{pmatrix}$$

Equation de la médiatrice de $[AK_o]$: $x_o(x - \frac{x_o}{2}) - py = 0$.

Intersection de cette médiatrice et de (P) :

$$\begin{cases} y = \dfrac{x^2}{2p} \\ x_o x - py - \dfrac{x_o^2}{2} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} (x - x_o)^2 = 0 \\ y = \dfrac{x^2}{2p} \end{cases}$$

(x_o, y_o) est solution double du système.
La médiatrice du segment $[AK_o]$ est donc tangente à la parabole (P) en M_o.
Observer la première construction géométrique de (P) où les tangentes sont apparentes (fig. 1).

6. Construction de (P) par pliage

Tracer (D) et A sur une feuille de papier pelure puis amener par pliage A sur (D).
Répéter l'opération un nombre suffisant de fois pour faire "apparaître" la parabole enveloppe de ses tangentes.

(Voir fig. 4 page suivante)

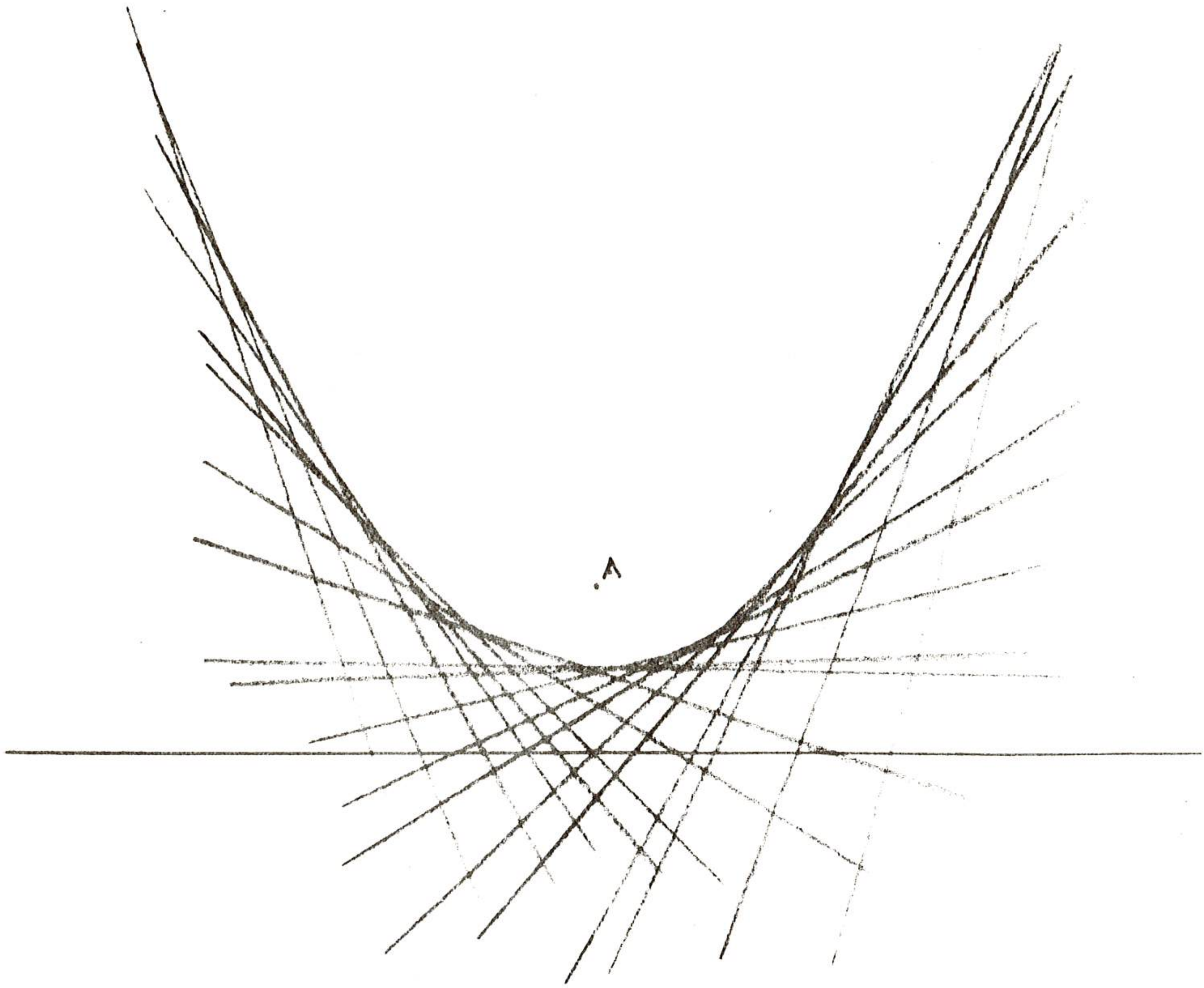


fig. 4

7. Adaptation d'un problème antique

Un rectangle a une dimension constante "a" ($a \neq 0$) et l'autre dimension variable : y. Pour une quelconque valeur de y, construire, à la règle et au compas, le carré ayant la même aire que le rectangle initial.

Soit x la longueur du côté du carré cherché : $x^2 = ay$.
La construction de la longueur x utilise les propriétés métriques des triangles rectangles.
En disposant les constructions relatives à différentes valeurs de y, comme dans la figure 5, on obtient une suite de points M_o, M_1, M_2, etc ... appartenant à une parabole.

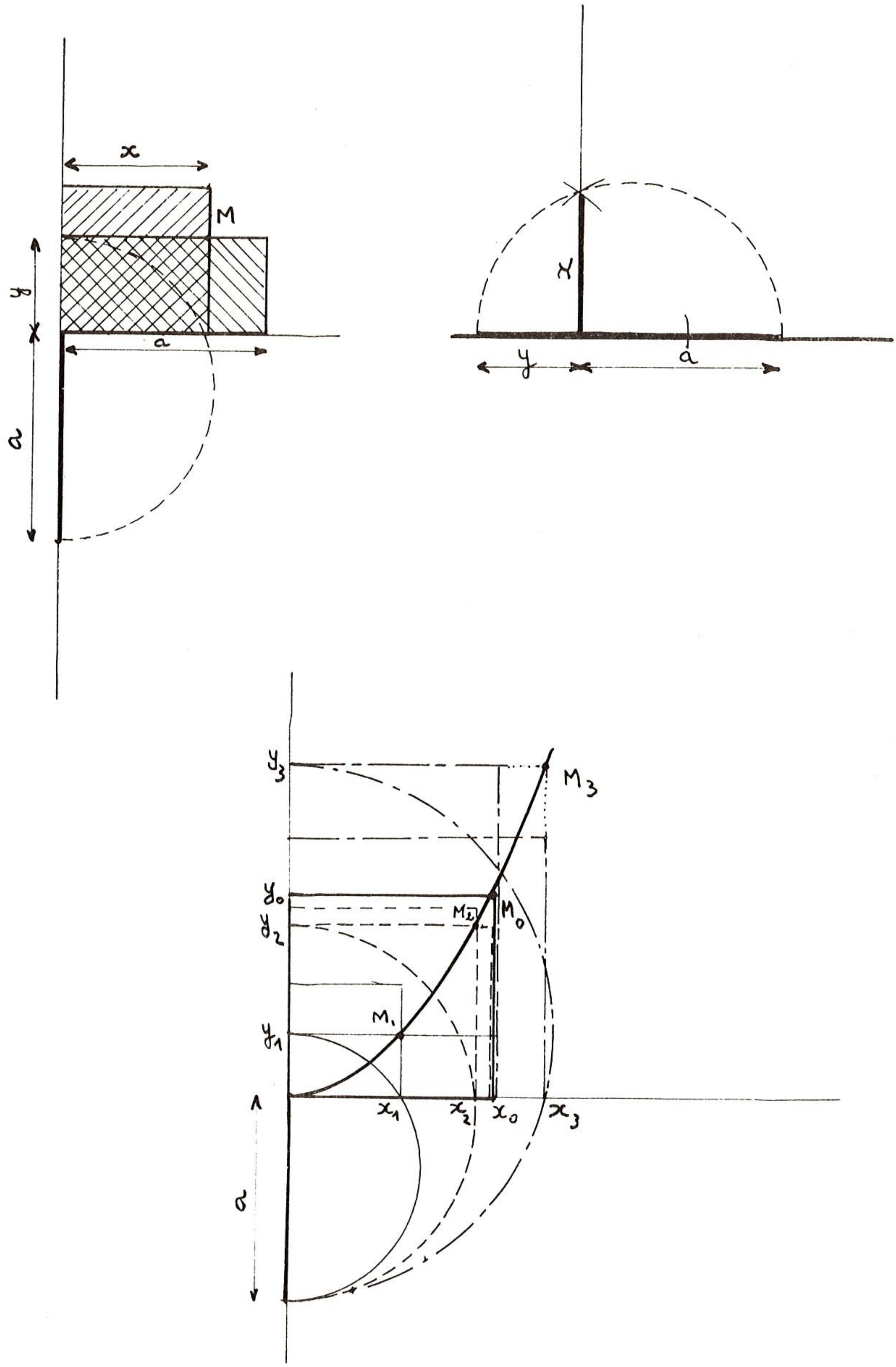


Fig. 5

8. Intersection d'une parabole et d'une droite du plan.

(Ce paragraphe permet de revoir l'étude des tangentes à un cercle et la puissance d'un point par rapport à un cercle).

Soit dans le plan la parabole (P) de foyer A et de directrice (D) et (δ) une droite quelconque.
L'intersection de (δ) et de (P) est non vide si et seulement si on peut trouver au moins un point M de (δ) centre d'un cercle passant par A et tangent à (D).

Soit A' le symétrique de A par rapport à (δ) et ω l'intersection éventuelle de (AA') avec (D).
Si M existe, soit (C) le cercle de centre M et de rayon $r = d(M,A)$ et T le point de contact de (C) et de (D).
(C) passe par A' et la puissance de ω par rapport à (C) est :

$$P_{(C)} = \overline{\omega A} \times \overline{\omega A'} = \overline{\omega T}^2$$

C'est aussi la puissance de ω par rapport à un quelconque cercle passant par A et A'.
Soit (O) un tel cercle et (ωT') une des tangentes menée de ω à (O).

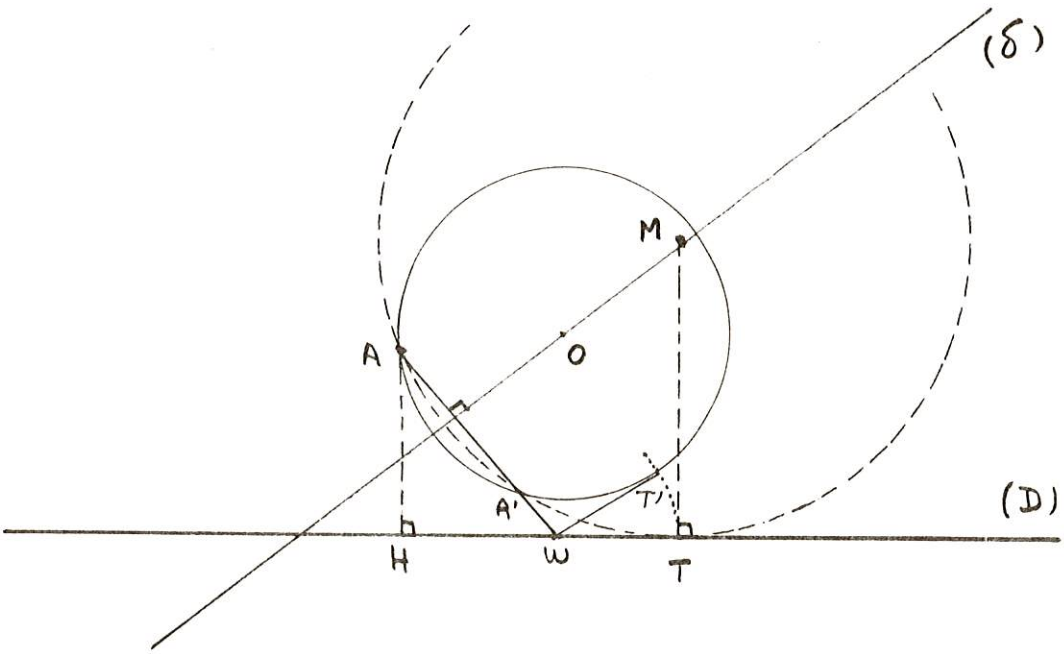


fig. 6

$$P_{(C)} = P_{(O)} = \overline{\omega A} \, . \, \overline{\omega A'} = \overline{\omega T'}^2$$

on en déduit $d(\omega, T) = d(\omega, T')$ ce qui permet d'obtenir le point de contact du cercle cherché (C) avec (D).

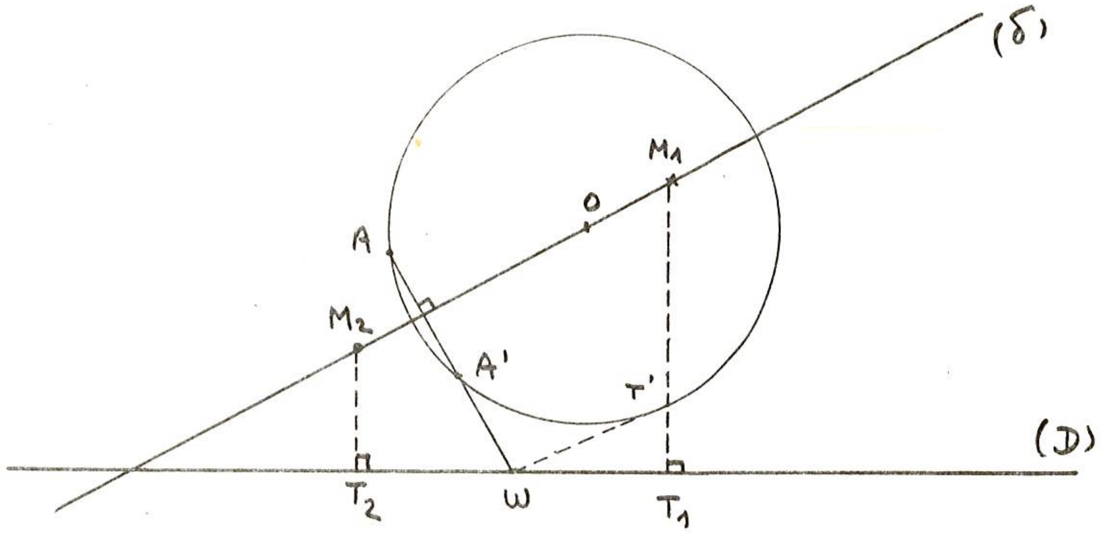


fig. 8

Si A' ∈ (D), il existe un seul cercle (C) tangent en A' à (D).

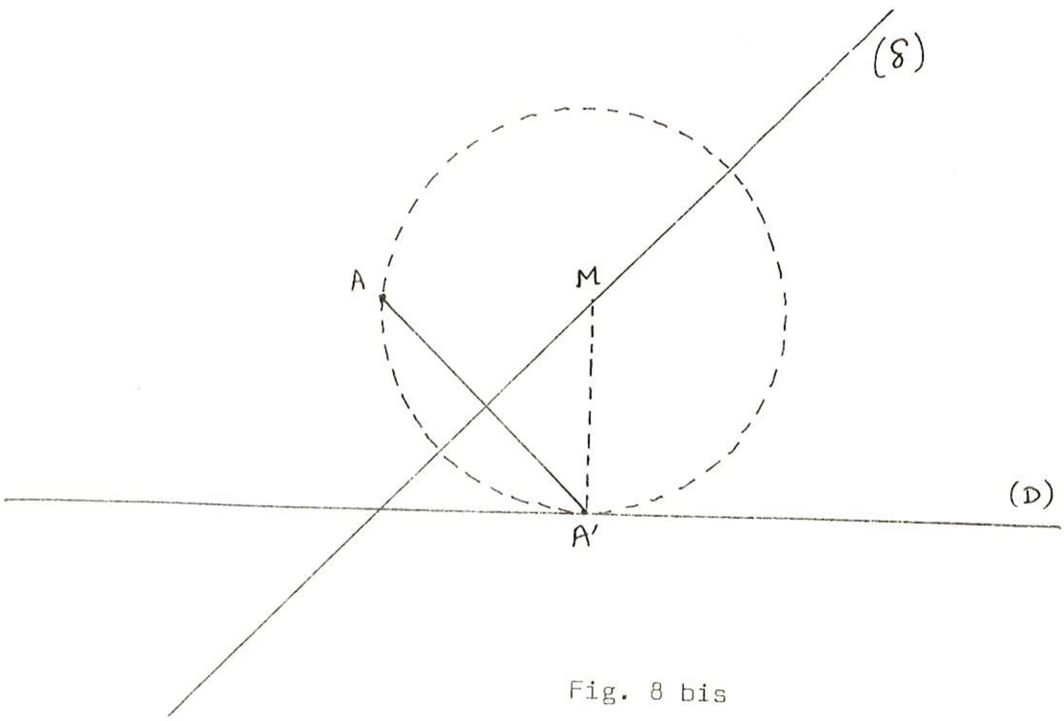


Fig. 8 bis

. Si $A \in (\delta)$ et (δ) non perpendiculaire à (D)

- A' est situé dans le demi-plan ouvert limité par (D) et ne contenant pas A :

$$(\delta) \cap (P) = \emptyset$$

La droite (δ) est dite extérieure à (P).

- A' est situé dans le demi-plan fermé limité par (D) et contenant A : (δ) coupe (P) en deux points distincts si $A' \notin (D)$ et confondus si $A' \in (D)$; dans ce cas limite (δ) est tangente à (P).

. Si $A \in (\delta)$ et $(\delta) \perp (D)$

Le cercle cherché est alors tangent à (D) en T, intersection de (δ) et de (D).

(δ) coupe (P) en un seul point.

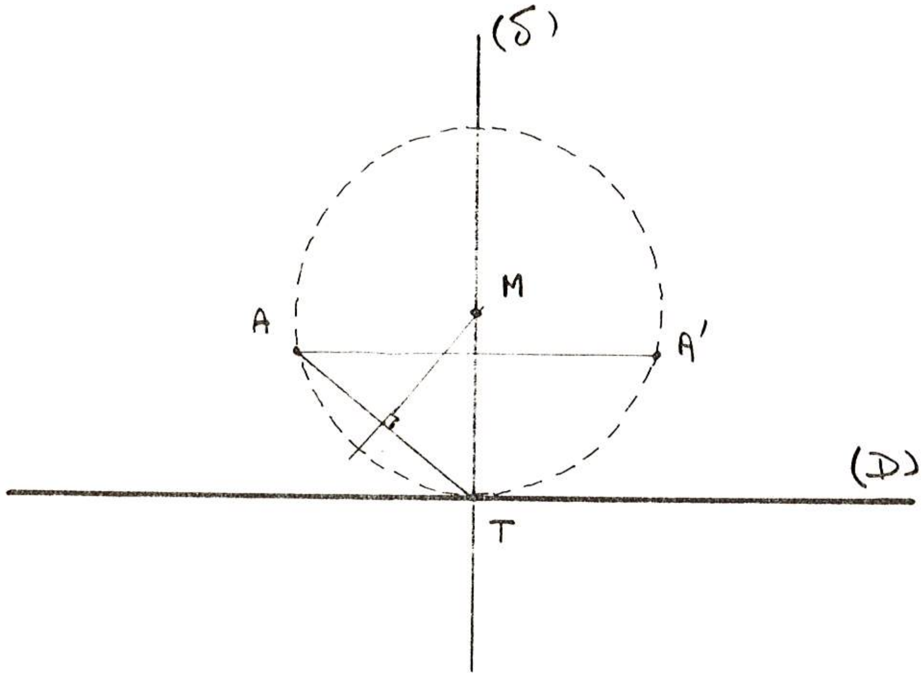


Fig. 9

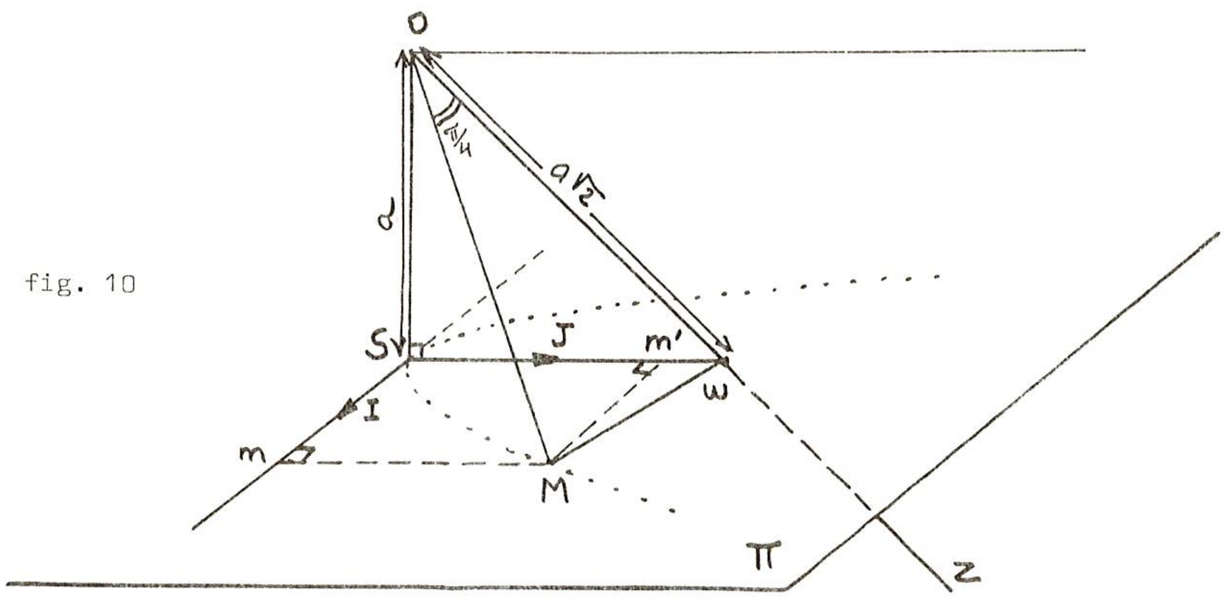
9. La parabole intersection d'une surface conique de révolution et d'un plan.

Problème : On considère une surface conique de révolution de sommet O, d'axe de révolution (Oz) et dont l'angle au sommet est droit. On coupe cette surface par un plan (M) mené perpendiculairement à l'une des génératrices (OS) de la surface. On pose d(O,S) = a. Déterminer l'intersection de la surface conique et du plan (π).

Solution : Soit ω l'intersection de (Oz) avec (π). On munit (π) d'un repère orthonormal direct (S,I,J), J appartenant à la demi-droite Sω.
L'intersection cherchée n'est pas vide, elle contient au moins S.
Si M de coordonnées (x,y) appartient à cette intersection, la droite (OM) est une génératrice de la surface conique

$$\text{mes } \widehat{MO\omega} = \frac{\pi}{4} \text{ rd} = \text{mes } \widehat{SO\omega}$$

fig. 10



Dans le triangle quelconque (O,M,ω)

$$d^2(\omega,M) = 2a^2 + d^2(O,M) - 2a \,.\, d(O,M) \qquad (1)$$

or, dans le plan (π) $\overrightarrow{\omega M}\begin{pmatrix} x \\ y-a \end{pmatrix}$

$$d^2(\omega,M) = x^2 + y^2 + a^2 - 2ay \qquad (2)$$

enfin dans le triangle (O,S,M) rectangle en S :

$$d^2(O,M) = a^2 + x^2 + y^2 \qquad (3)$$

(2) et (3) $\Longrightarrow d^2(\omega,M) = d^2(O,M) - 2ay$ (4)

(1) et (4) $\Longrightarrow d(O,M) = a + y$.

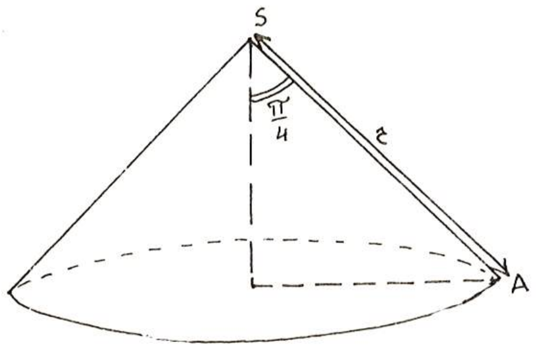
En reportant ce résultat dans (3)

$$(a+y)^2 = a^2 + x^2 + y^2 \Longleftrightarrow y = \frac{1}{2a}x^2$$

L'intersection cherchée est la parabole de sommet S et d'axe focal (Sω).

On peut matérialiser ce problème en construisant un cône de révolution dont le demi-angle géométrique au sommet a pour mesure $\frac{\pi}{4}$ rd (soit en pâte à modeler, soit en bois tourné) et en le sectionnant selon un plan perpendiculaire à l'une des génératrices.

La section est une portion de plan limitée par un arc de parabole et la corde qui le sous-tend.



Soit S le sommet du cône

et $r = d(S,A)$

Longueur du cercle de base :

$\ell = \pi r\sqrt{2}$

Si α est la mesure en radians du secteur de cercle constituant le développement de la surface conique

$$r\alpha = \pi r\sqrt{2}$$

$$\alpha = \pi\sqrt{2} \text{ rd} \simeq 4,443 \text{ rd}$$

$$\alpha \simeq 254° \; 33' \; 30''$$

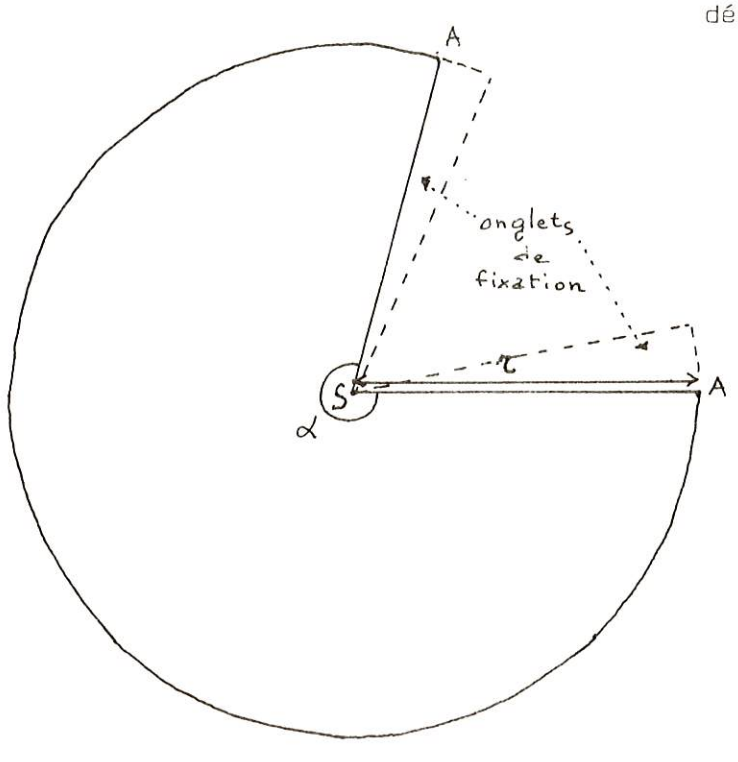


fig. 11

B - Lignes de niveau de l'application

$$f : \mathcal{P} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$M \longmapsto d(M,A) - d(M,K)$$

A et (D) étant un point et une droite donnés du plan $\mathcal{P}$ et K la projection orthogonale de M sur (D).

Soit (P_k) l'ensemble des points M du plan vérifiant $f(M) = k \quad k \in \mathbb{R}$.

On notera H la projection orthogonale de A sur (D) et "a" la distance de A à (D).

La droite (Δ) perpendiculaire à (D) passant par A est axe de symétrie de la figure.

1. Condition d'existence des points de (P_k).

On se donne A, (D) et $k \in \mathbb{R}$; il s'agit de trouver au moins un point M du plan vérifiant :

$$d(M,A) - d(M,K) = k .$$

Si M existe et si on pose :

$$m = d(A,M) \quad m \geqslant 0$$

alors $\quad d(M,K) = m - k \quad m \geqslant k$

et M appartient à l'intersection du cercle de centre A et de rayon m et des droites (D_1) et (D_2) menées parallèlement à (D) à la distance $m - k$.

a) Etude de l'intersection du cercle (A,m) et de (D_1) droite située dans le demi-plan limité par (D) et contenant A.

H_1 projection orthogonale de A sur (D_1)

$$d(A,H_1) = |a - (m-k)|$$

<u>1er cas</u> : $m - k \leqslant a \Longleftrightarrow m \leqslant a + k$

. Si $a + k < 0 \Longleftrightarrow k < -a$, l'hypothèse $m \geqslant 0$ est mise en contradiction ; il n'existe aucun point M répondant à la question. $(P_k) = \emptyset$.

. Si $k \geqslant -a$, m doit vérifier $k \leqslant m \leqslant a + k$.

$d(A,H_1) \leqslant m \Longleftrightarrow a - m + k \leqslant m \Longleftrightarrow m \geqslant \frac{a+k}{2}$.

(D_1) coupe le cercle (A,m) si et seulement si : $\sup(k ; \frac{a+k}{2}) \leqslant m \leqslant a + k$.

<u>2ème cas</u> : $m - k > a \Longleftrightarrow m > a + k$

$$d(A,H_1) \leqslant m \Longleftrightarrow m - k - a \leqslant m \Longleftrightarrow k \geqslant -a$$

<u>Conclusion</u> : Si $k \geqslant -a$, pour toute valeur de $m \geqslant \sup(k, \frac{a+k}{2})$, il existe deux points (confondus si $k = -a$) situés dans le demi-plan limité par (D) et contenant A, et vérifiant $f(M) = k$.

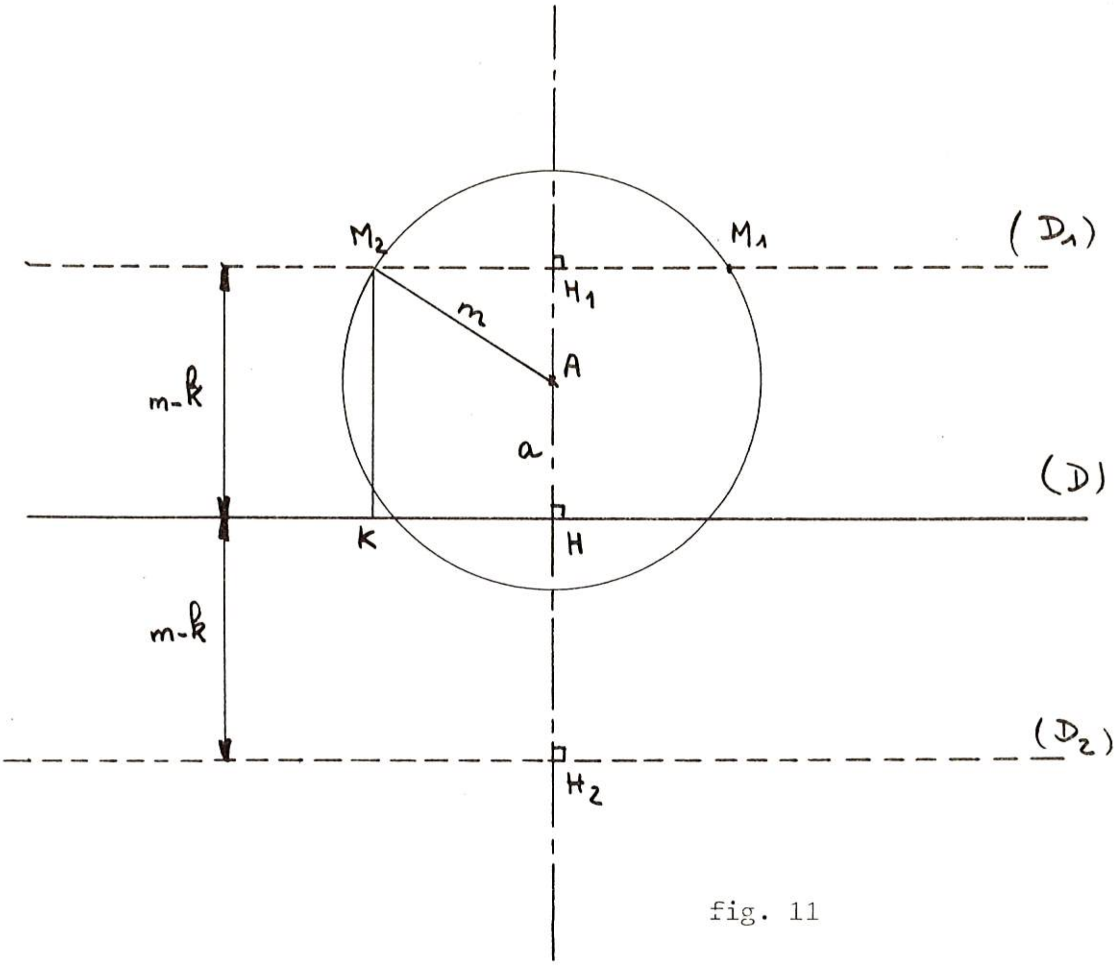


fig. 11

b) Etude de l'intersection du cercle (A,m) et de (D_2) droite située dans le demi-plan limité par (D) et ne contenant pas A.
H_2 projection orthogonale de A sur (D_2).

$$d(A,H_2) = a+m-k$$
$$d(A,H_2) \leqslant m \iff a+m-k \leqslant m \iff k \geqslant a.$$

Conclusion : Si $k \geqslant a$, pour toute valeur de $m \geqslant k$, il existe deux points (confondus si $k=a$) situés dans le demi-plan limité par (D) et ne contenant pas A et vérifiant $f(M) = k$.

Finalement $\boxed{\text{Pour tout } k \geqslant -a \quad (P_k) \neq \phi}$

On peut même affiner le résultat :

- si $-a \leqslant k < a$, (P_k) est situé dans le demi-plan limité par (D) et contenant A.
- si $k \geqslant a$, (P_k) possède des points d'un côté et de l'autre de (D).

2. Détermination de (P_k).

Si $k \geqslant -a$ alors $(P_k) \neq \emptyset$ et quel que soit M point de (P_k) le cercle de centre M et de rayon $m = d(M,A)$ coupe la demi-droite Mx contenant le point K en K' tel que :

$$d(K,K') = |d(M,A) - d(M,K)| = |k|$$

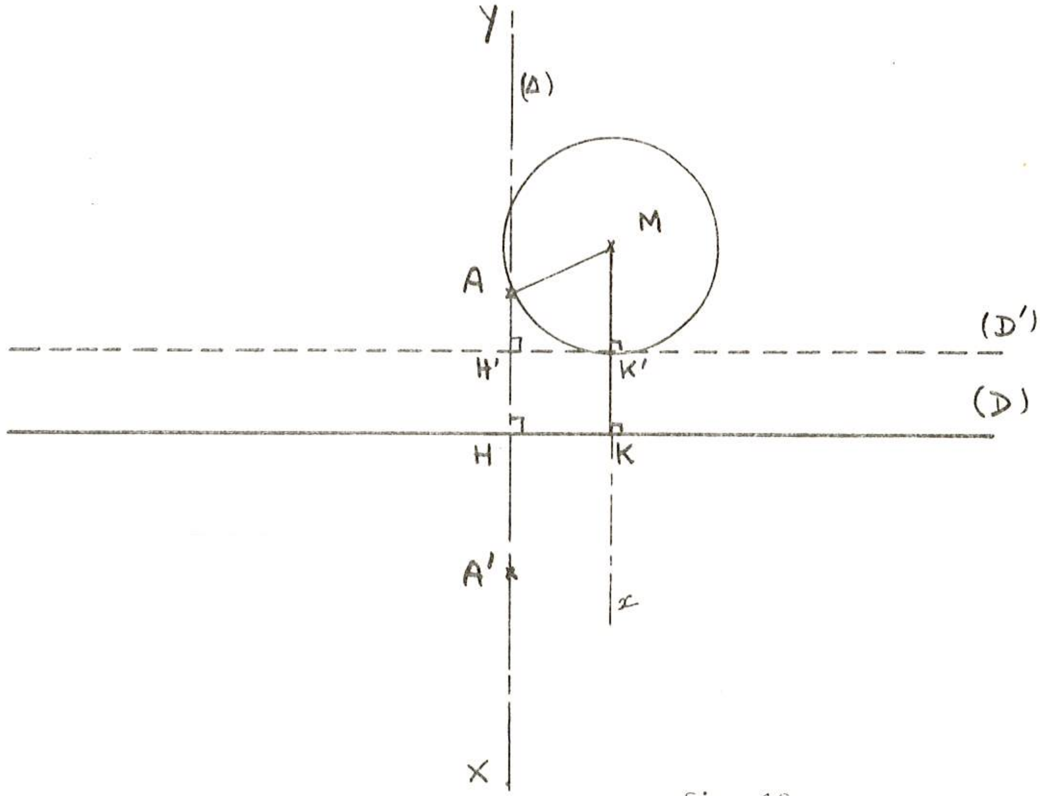


fig. 12

Soit (D') la parallèle menée à la droite (D) en K', elle coupe (Δ) en H'.
Si M appartient à (P_k) alors M est équidistant du point A et de la droite (D'), on est ramené à l'étude de la première partie.

Cas général : A n'appartient pas à (D) $(a > 0)$.
On appellera A' le symétrique de A par rapport à (D).
Considérons (Δ) munie du repère (A,H).

Discussion :

* $-a \leqslant k < a$ (P_k) est situé dans le demi-plan limité par (D) et contenant A.

Pour tout M de (P_k) :

$$\overline{HH'} = \overline{KK'} = \overline{MK'} - \overline{MK} = d(M,A) - d(M,K) = k$$

. $\underline{k=-a}$ $A \in (D')$

$M \in (P_k) \Leftrightarrow$ M équidistant de A et de (D') et situé dans le demi-plan contenant A et limité par (D).

(P_k) est la demi-droite fermée [AY portée par (Δ) et ne coupant pas (D).

. $\underline{-a<k<a}$ $A \notin (D')$

Si $M \in (P_k)$ alors M appartient à la parabole de foyer A et de directrice (D'), H' appartenant au segment ouvert]AA'[.

Réciproquement, tout point de la parabole est situé dans le demi-plan limité par (D) et contenant A, et véfifie

$$d(M,A) - d(M,K) = d(M,K') - d(M,K) = k$$

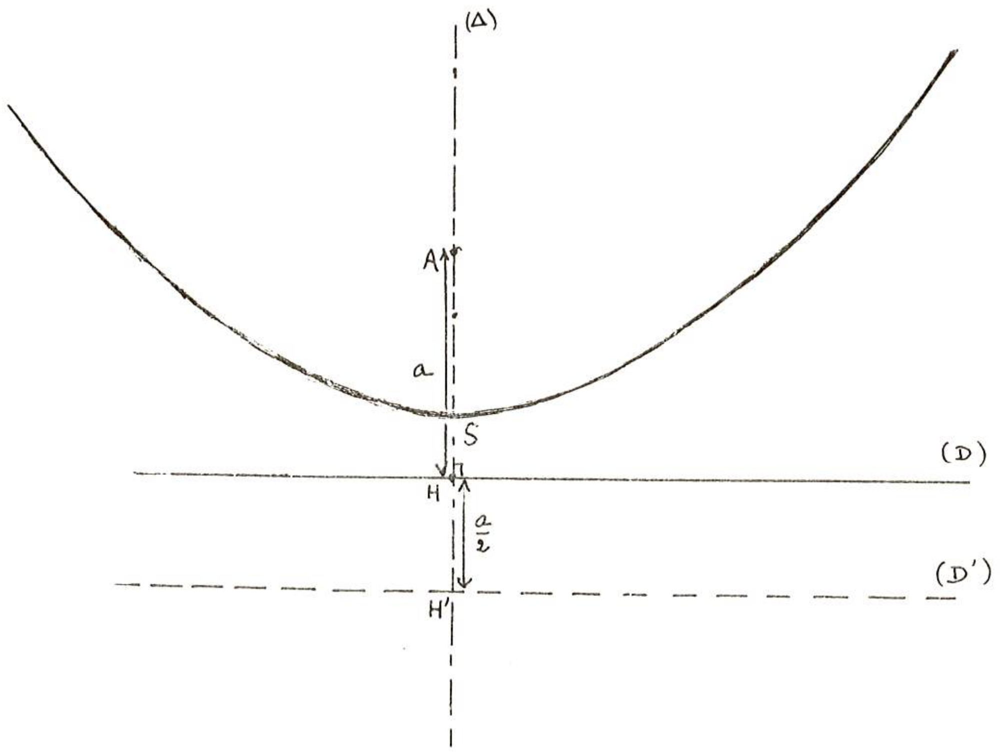


fig. 13 : construction de (P_k) pour $k = \frac{a}{2}$.

* $\underline{k \geqslant a}$, il existe des points de (P_k) dans chacun des demi-plans limités par (D).

1) M est du côté de A par rapport à (D).

$\overline{HH'_1} = k$. Soit (D'_1) parallèle à (D) en H'_1.

(D'_1) est dans le demi-plan limité par (D) et ne contenant pas A .

Si $M \in (P_k)$, alors M est équidistant de A et de (D'_1). M appartient à la parabole de foyer A et de directrice (D'_1).

On limitera la parabole aux deux axes situés dans le demi-plan contenant A par rapport à (D) en incluant les points frontières : M_o et M'_o situés sur (D) à la distance k de A.

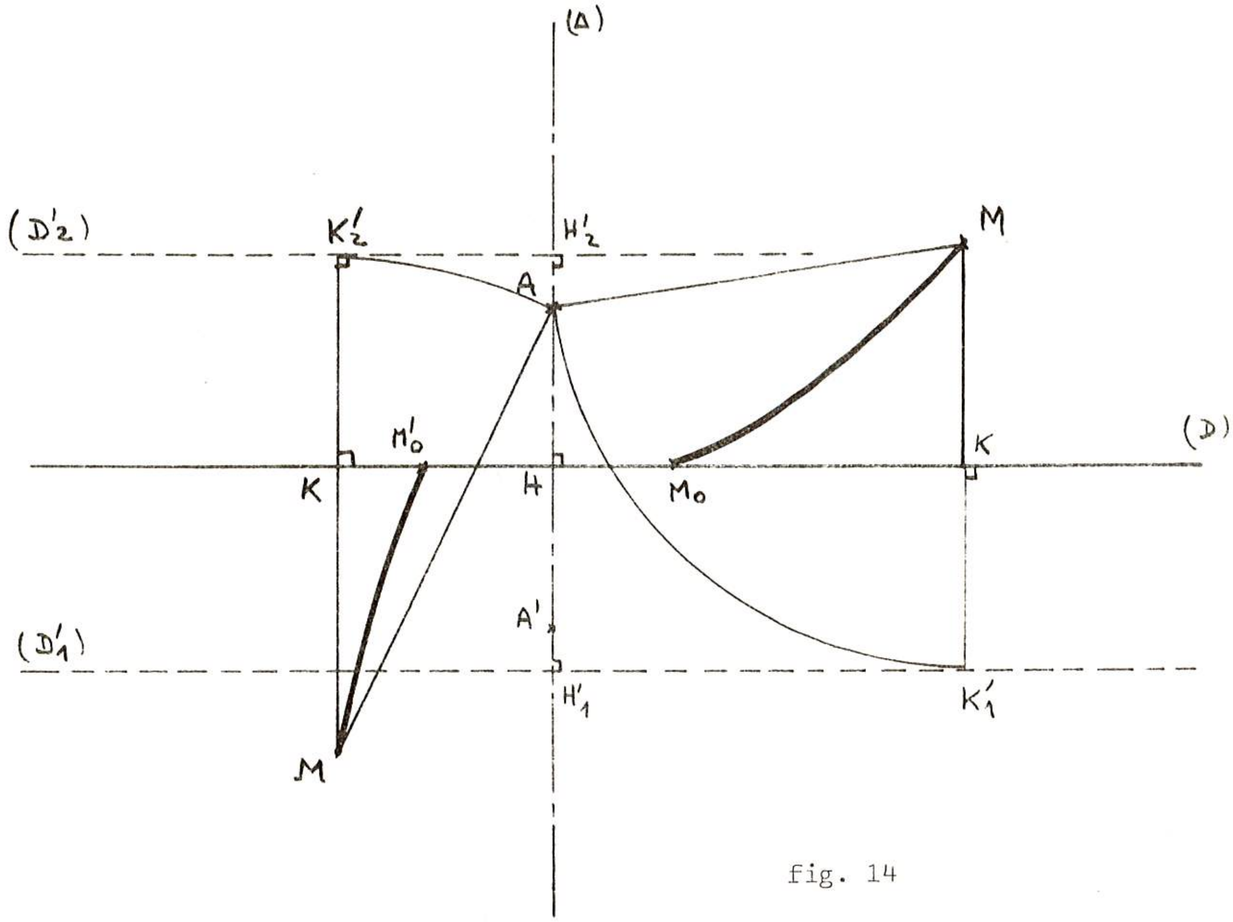


fig. 14

. <u>k = a</u> : A'∈ (D'_1) : M_o et M'_o sont confondus en H.

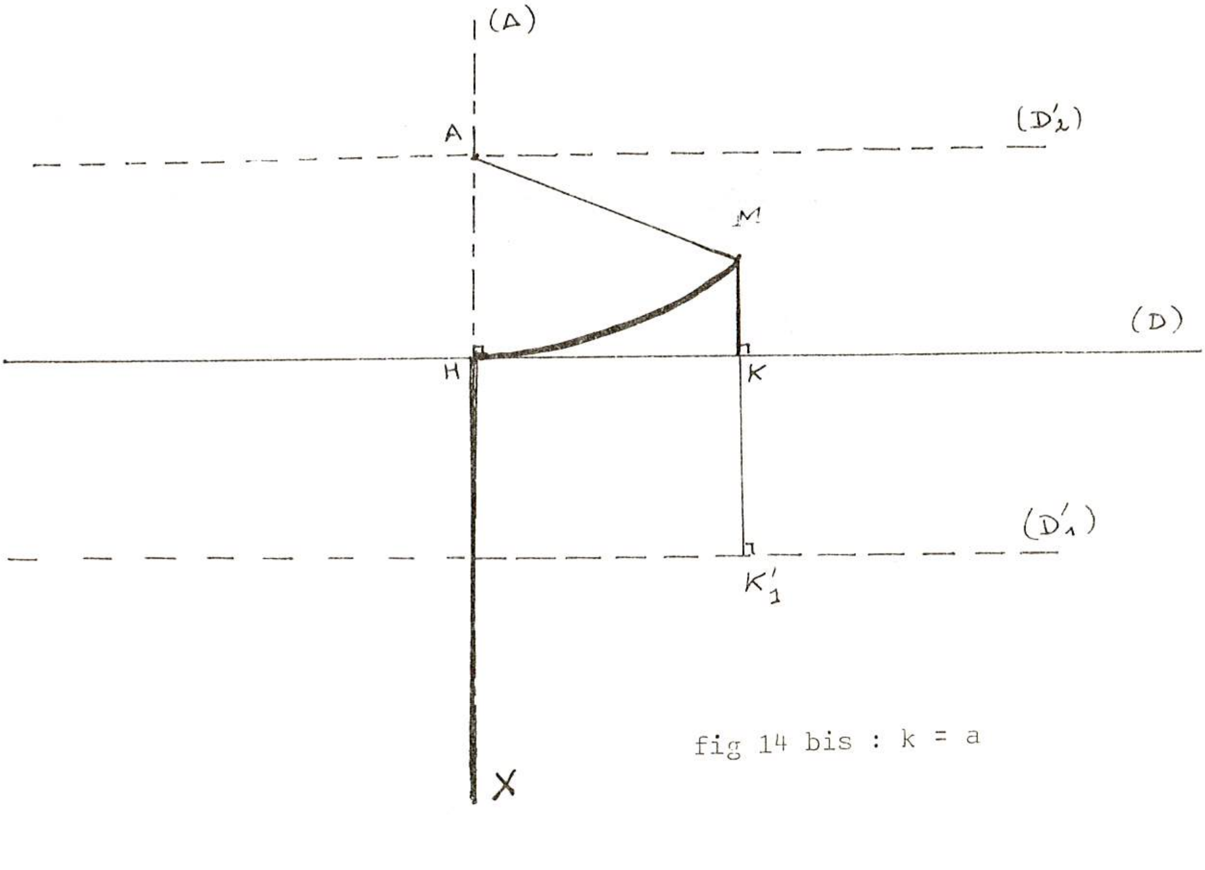


fig 14 bis : k = a

2) <u>M est dans le demi-plan ne contenant pas A</u>

$\overline{HH'_2} = \overline{KK'_2} = \overline{MK'_2} - \overline{MK} = -\ d(M,A) + d(M,K) = -k$

Soit (D'_2) la parallèle à (D) en H'_2.
(D'_2) est située dans le demi-plan contenant A.

. <u>k = a</u> $A \in (D'_2)$: $M \in (P_k) \iff M \in [HX$
$[HX$ demi-droite fermée, portée par (Δ) et ne contenant pas A.

. <u>k > a</u> Si $M \in (P_k)$, alors M appartient à la parabole de foyer A et de directrice (D'_2). On limitera la parabole aux deux arcs situés dans le demi-plan ne contenant pas A ; M_o et M'_o sont les points frontières inclus.

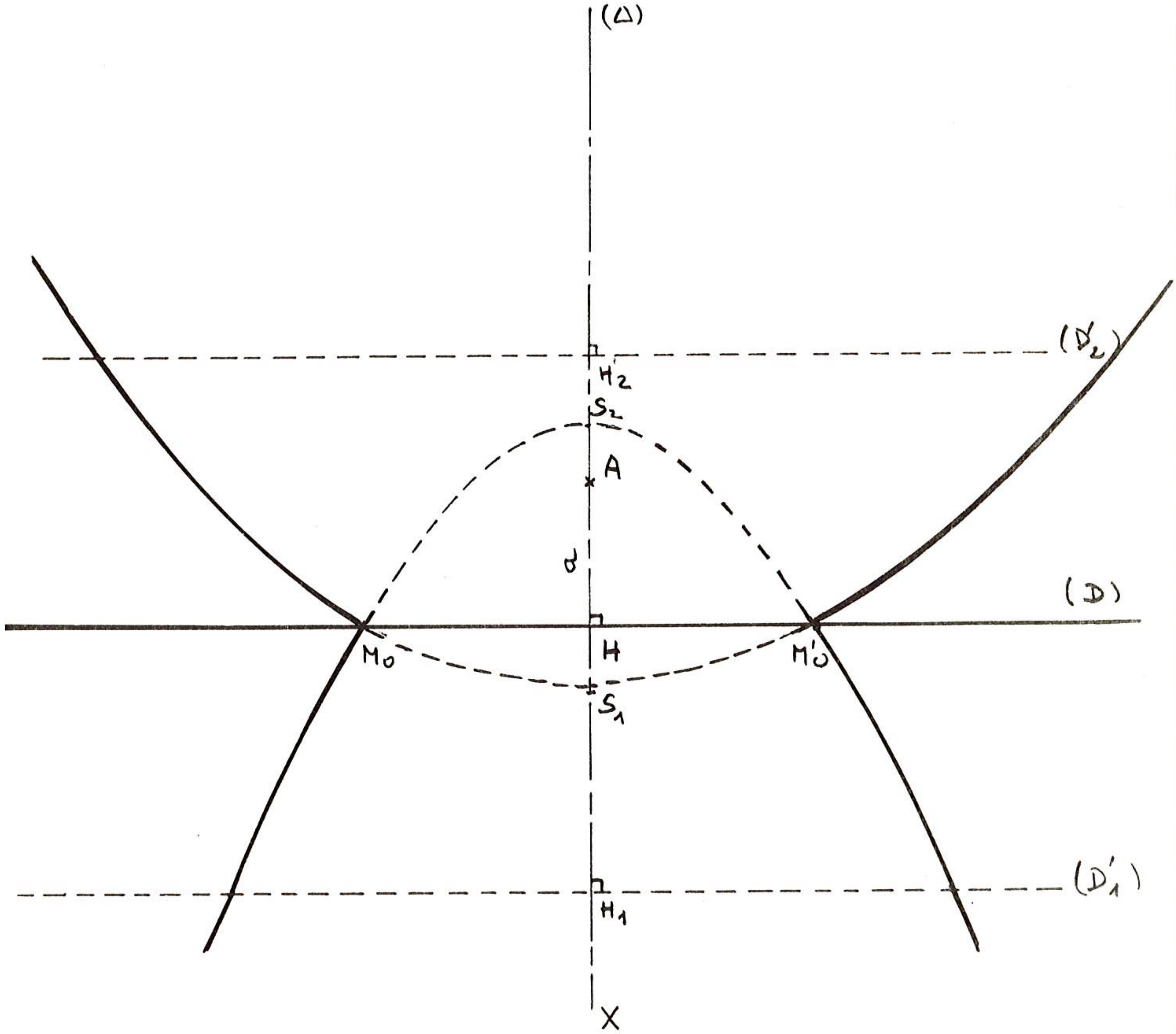


fig. 15 : Construction de (P_k) pour k = 2a.

Conclusion : $A \notin (D)$; k réel donné.

H projection orthogonale de A sur (D).

(Δ) munie du repère (A,H).

$(P_k) = \{M \in \mathcal{P} / f(M) = k\}$

. Si $k < -a$, $(P_k) = \phi$

. Si $k = -a$, (P_{-a}) est la demi-droite fermée [AY.

. Si $-a < k < a$, (P_k) est la parabole de foyer A et de directrice (D') menée parallèlement à (D) en H' tel que $\overline{HH'} = k$.

. Si $k = a$, (P_a) est la réunion de la demi droite fermée [HX et de la parabole de foyer A et de tangente au sommet (D).

. Si $k > a$, (P_k) est la réunion des arcs des paraboles de foyer A et de directrices (D_1') ou (D_2') menées parallèlement à (D) à la distance $|k|$. Ces arcs étant limités par (D), (intersections avec (D) incluses), et ne contenant pas les sommets.

(Voir figure 16 page suivante)

L'ensemble des (P_k) est la réunion d'un faisceau de paraboles (ou d'arcs de paraboles) homofocales de foyer A et d'axe de symétrie (Δ), et de la droite (Δ) privée du segment ouvert]AH[.

Cas particulier : $A \in (D)$

La figure admet deux axes de symétrie (D) et (Δ).

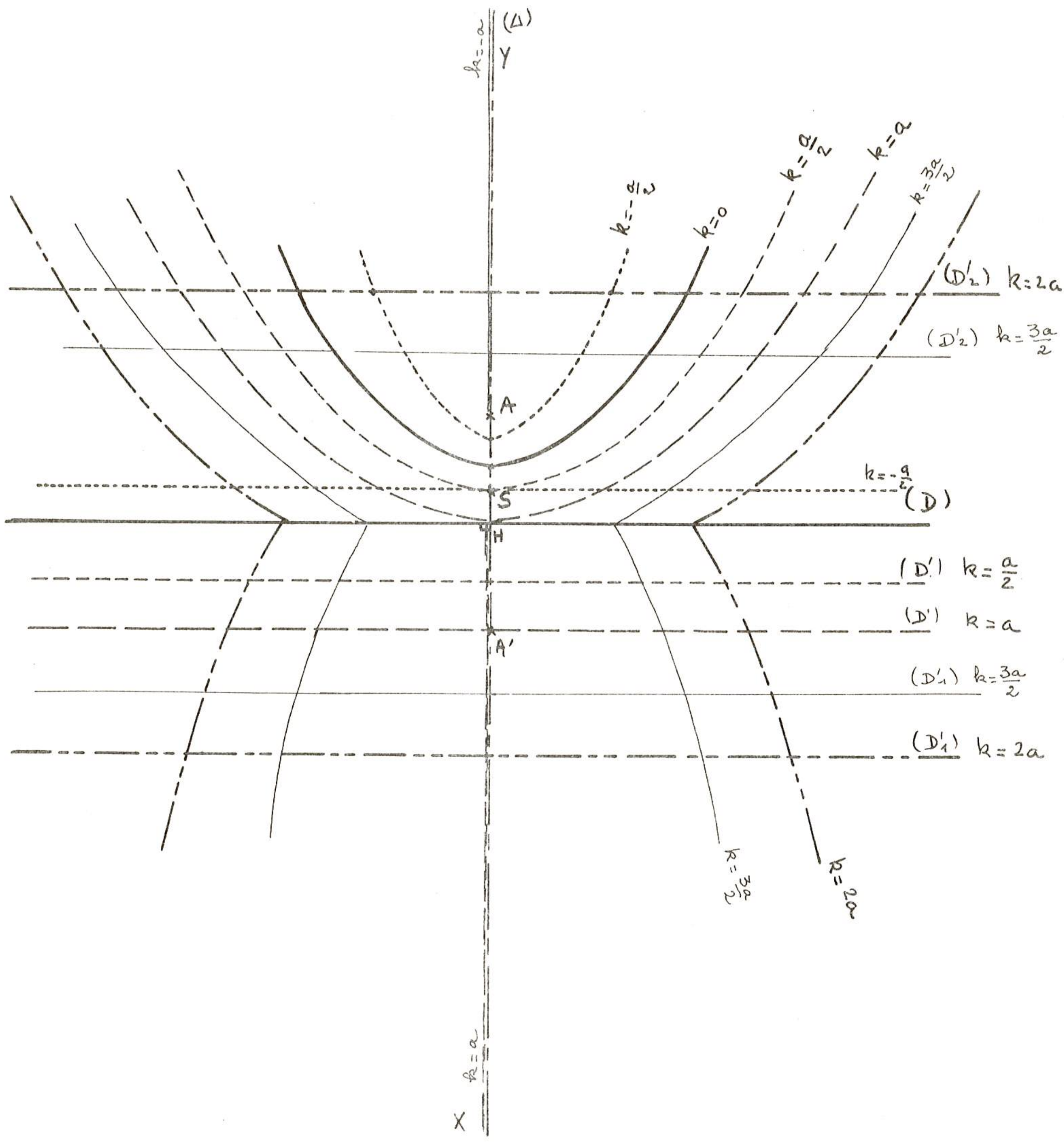
Quel que soit M dans le plan $\mathcal{P}$:

$$d(M,A) \geqslant d(M,K)$$

Discussion : . $k < 0$, $(P_k) = \phi$

. $k = 0$, $(P_o) = (\Delta)$

. $k > 0$, traçons les droites (D_1') et (D_2') parallèlement à (D) à la distance k de (D) et les paraboles $P_{(k,1)}$ et $P_{(k,2)}$ de foyer A et de directrices respectives (D_1') et (D_2') ; paraboles symétriques l'une de l'autre par rapport à (D).



(Δ)
Y
k = -a
k = a/2
k = a
k = 3a/2
k = -a/2
k = 0
(D'₂) k = 2a
(D'₂) k = 3a/2
A
k = -a/2
S
(D)
H
(D') k = a/2
(D') k = a
A'
(D'₁) k = 3a/2
(D'₁) k = 2a
k = 3a/2
k = 2a
k = a
X

Fig. 16

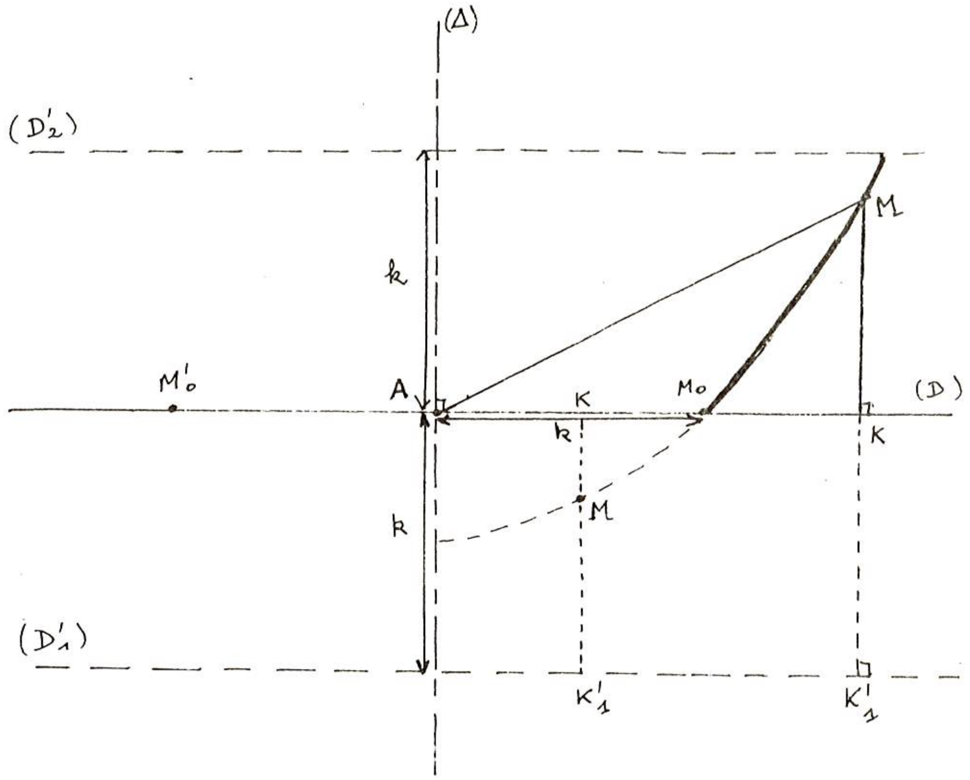


fig. 17

Soit M point quelconque de $P_{(k,1)}$ par exemple, K et K_1' ses projections orthogonales sur (D) et (D_1'). Si M est situé dans le demi-plan limité par (D) et ne contenant pas (D_1') : $K \in [MK_1']$.

$$d(M,A) - d(M,K) = d(M,K_1') - d(M,K) = d(K,K_1') = k \qquad M \in (P_k)$$

Si M est situé dans la bande de plan limitée par (D) et (D_1') :

$$M \in [KK_1'] \qquad M \notin (P_k)$$

Seuls conviennent les arcs de $P_{(k,1)}$ situés dans le demi-plan ne contenant pas (D_1') et fermés par les points M_o et M_o' de (D) tels que $d(A,M_o) = d(A,M_o') = k$.

L'étude de $P_{(k,2)}$ est analogue par symétrie.

Conclusion : $A \in (D)$

. $k < 0$, $(P_k) = \phi$

. $k = 0$, $(P_o) = (\Delta)$

. $k > 0$, (P_k) est la réunion des arcs des paraboles de foyer A, de directrices (D_1') ou (D_2') menées parallèlement à (D) à la distance k ; arcs limités par (D) (intersections avec (D) incluses) et ne contenant pas les sommets.

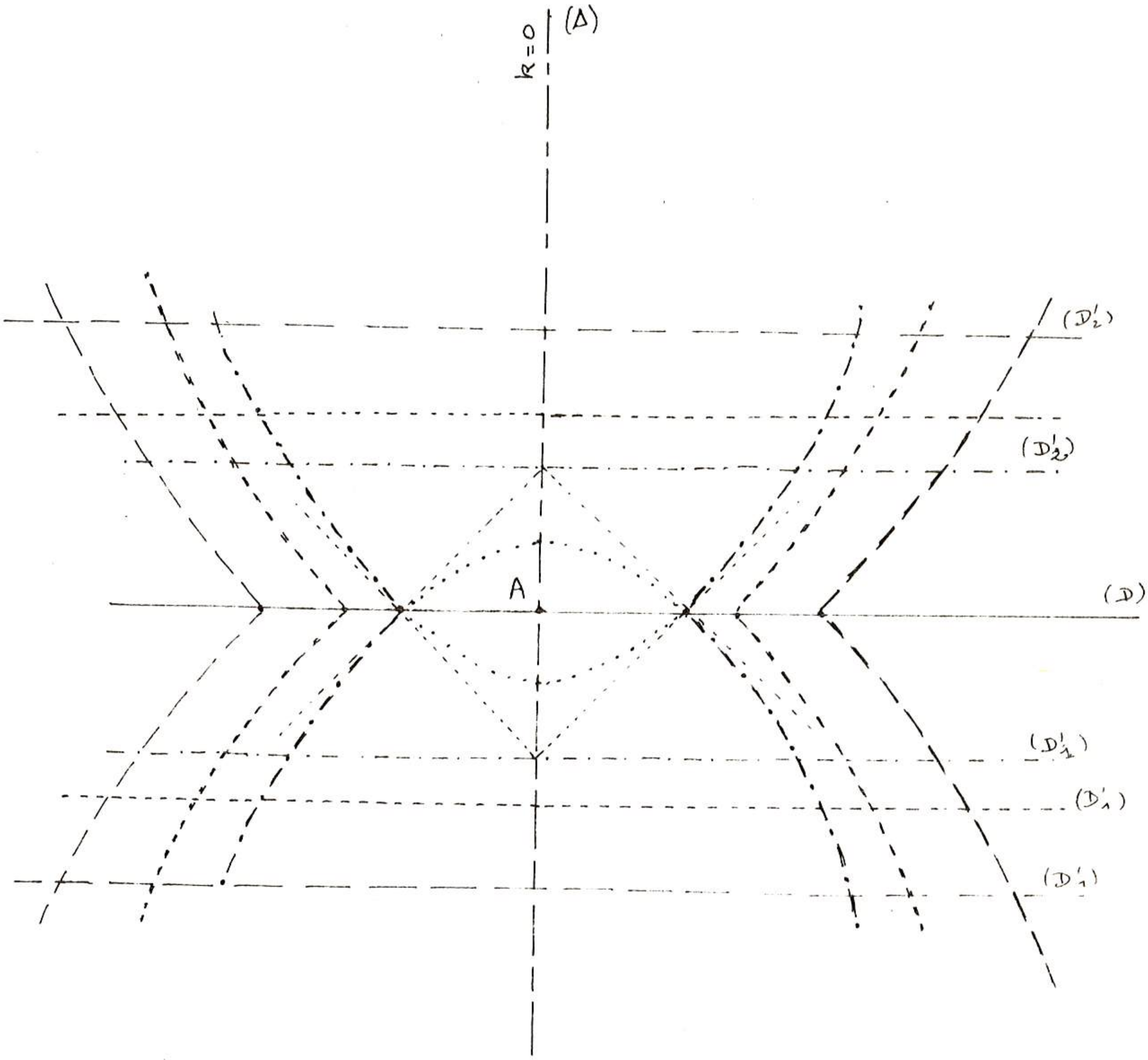


fig. 18

L'ensemble des lignes de niveau de l'application

$$f : M \longmapsto d(M,A) - d(M,K) = k$$

est la réunion de (Δ) et des arcs de paraboles homofocales de foyer A et d'axe de symétrie (Δ) ; ces arcs étant limités par (D), intersections avec (D) incluses et ne contenant pas les sommets.

DES CARRES A LA PARABOLE

(Activités numériques . Fonctions)

I CARRES dans N

Remarque : En seconde, alors que l'élève est supposé avoir accédé à une certaine pratique des réels, on constate que la manipulation des naturels et de leurs propriétés arithmétiques simples n'est pas familière, que le calcul numérique sur les nombres entiers ou à virgule est hésitant, et le calcul mental ignoré.

■ 1) Construction d'une table des carrés des naturels de 0 à 50

Modèle ci-contre. Les calculs, lorsque les résultats ne sont pas connus, sont faits à la main.

■ 2) Remarques à propos de cette table

a) Du carré d'un naturel à celui de son successeur :

$$(n+1)^2 - n^2 = 2n + 1$$

b) Le chiffre des unités du carré d'un naturel : 0, 1, 4, 5, 6 ou 9 .

(démonstration)

c) Comparaison des carrés de naturels situés à la même "hauteur" dans la table.

n	n^2	n^2	n
0			50
1			49
2			48
3			47
4			46
5			45
6			44
7			43
8			42
9			41
10			40
11			39
12			38
13	169	1369	37
14			36
15			35
16			34
17			33
18			32
19			31
20			30
21			29
22			28
23			27
24			26
25			25

Exemple : $13^2 = \underline{169}$ et $37^2 = 13\underline{69}$

(Démonstration : Utilisation de $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$)

d) Le point précédent peut être développé. On peut relever tous les assemblages "chiffre des dizaines - chiffre des unités" rencontrés dans cette table :

00, 01, 04, 09, 16, 21, 24, 25, 29, 36, 41, 44, 49, 56, 61, 64, 69, 76, 81, 84, 89, 96 .

D'une part, si l'on excepte 00 et 25, on constate que les nombres observés ne sont pas répartis au hasard.

D'autre part, le carré de tout naturel admet pour assemblage "chiffre des dizaines - chiffre des unités" l'un de ceux-là (démonstration).

■ 3) Calcul mental

a) Connaissance par coeur des carrés des n premiers naturels ($n = 15$?), des carrés des dizaines (10^2, 20^2, etc).

|a') Carrés de nombres à virgules simples :

Exemples : $0{,}01 = (0{,}1)^2$; $0{,}25 = (0{,}5)^2$; $1{,}21 = (1{,}1)^2$|

■ 4) Tel naturel est-il un carré parfait ?

a) chiffre des unités 2, 3, 7 ou 8 : il ne l'est pas .

b) chiffre des unités 0, 1, 4, 5, 6 ou 9 : il l'est peut être .

Pour le savoir :

- utilisation d'une table ou d'une calculatrice (ce qui n'est pas notre propos).
- décomposition en facteurs premiers.
- par encadrements et essais

exemple : $900 < 1369 < 1600$

$$30^2 < 1369 < 40^2$$

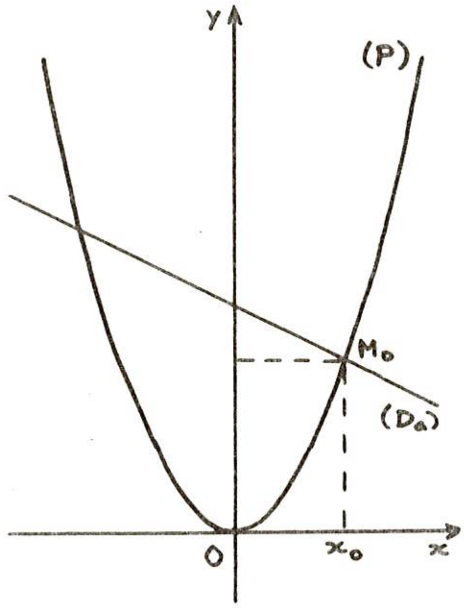
Si 1369 est un carré parfait, c'est celui d'un naturel compris entre 30 et 40. Tenant compte du chiffre des unités, il ne peut s'agir que de 33 ou 37. On essaie.

■ 5) Calcul de $S_1 = 1 + 2 + \ldots + (n - 1) + n$

$S_2 = 1^2 + 2^2 + \ldots + (n - 1)^2 + n^2$

(S_3 en exercice libre ?)

II TANGENTE A UNE PARABOLE EN UN POINT DE CELLE-CI



. Dans un repère orthonormé,

(P), parabole d'équation $y = x^2$;

x_o , réel quelconque ;

M_o , le point de la parabole d'abscisse x_o ;

a, un réel quelconque ;

(D_a) droite passant par M_o et de coefficient directeur a .

. Une équation de (D_a) :

$$y = ax - x_o\ (a - x_o)$$

. Etude de l'intersection de (P) et (D_a) :

$y = x^2$

$y = ax - ax_o + x_o^2$, système qui conduit à l'équation :

$$x^2 - ax + ax_o - x_o^2 = 0$$

. Une solution connue de cette équation : x_o

La factorisation du 1er membre peut utiliser ce fait. Ce n'est pas une nécessité :

$$x^2 - ax + ax_o - x_o^2 = (x^2 - x_o^2) - a(x - x_o)$$

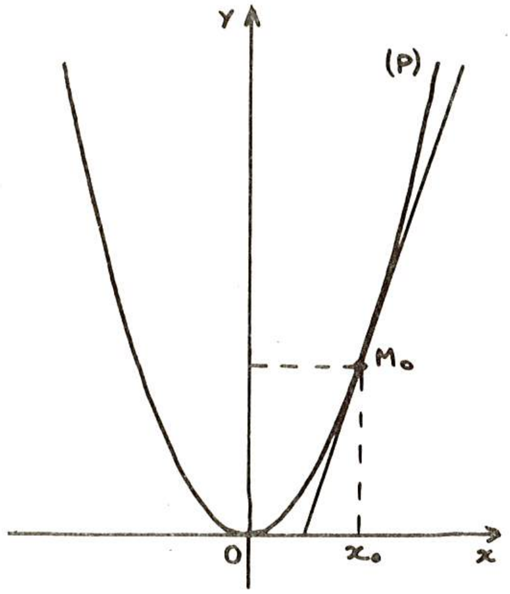
$$x^2 - ax + ax_o - x_o^2 = (x - x_o)\ (x + x_o - a)$$

. Deuxième solution de l'équation : $a - x_o$

. Les deux solutions sont égales lorsque $x_o = a - x_o$, soit $a = 2x_o$

. Equation de la droite particulière correspondante :

$$y = 2x_ox - x_o^2$$



. Donnons-lui son nom :

tangente à la parabole au point M_o d'abscisse x_o .

Le point M_o est appelé point de contact.

. Tracé de tangentes à la parabole pour plusieurs valeurs de x_o :

- à l'aide du coefficient directeur

ou - à l'aide de l'équation.

▶ Remarque : Autres thèmes abordables :

- Intersection d'une parabole d'équation $y = x^2$ et d'une droite d'équation $y = ax + b$. (Factorisation et discussion simples).

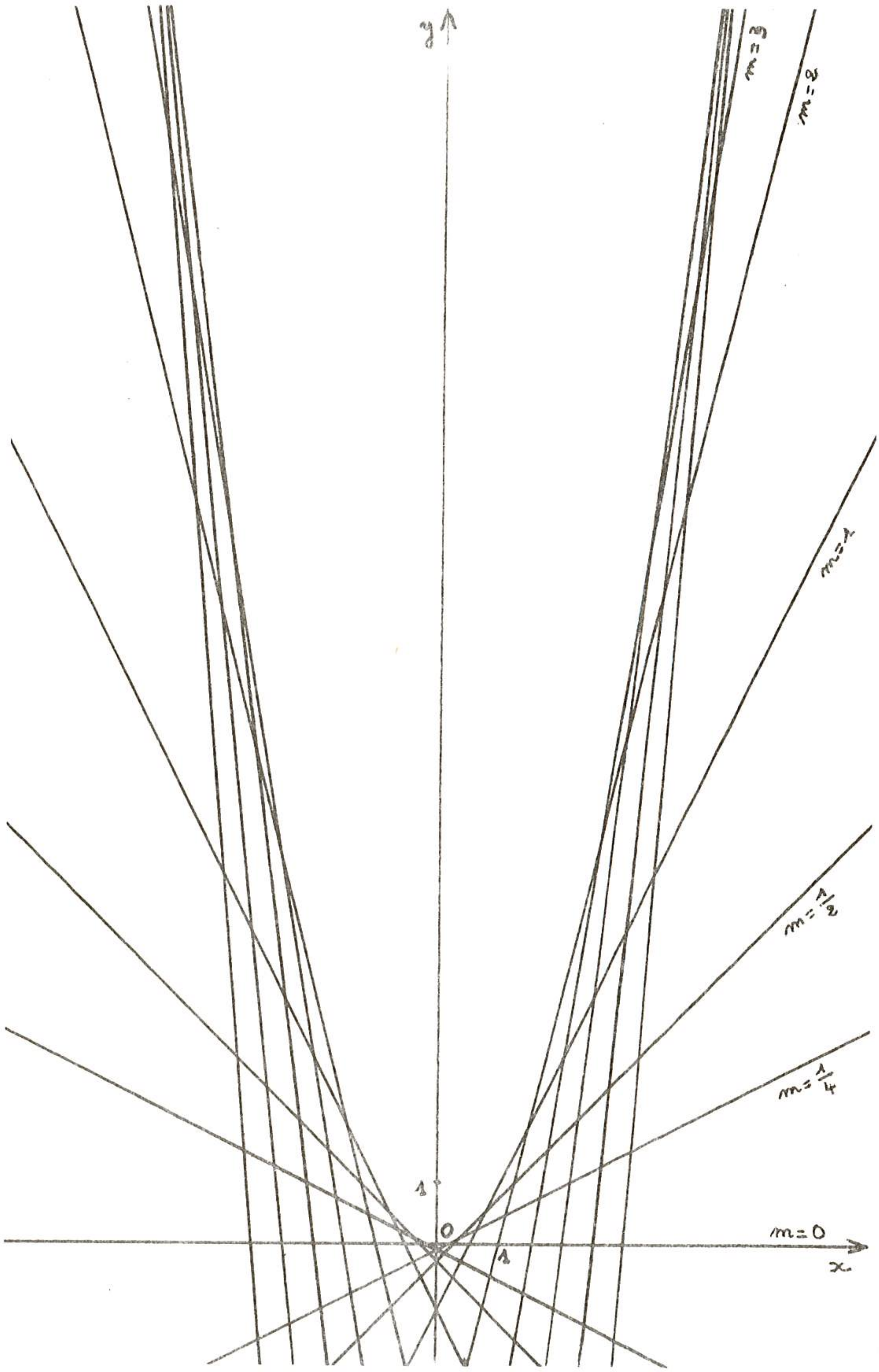
- Tangentes menées d'un point donné à une parabole (peut être sur un exemple. Cas particulier : le point est sur l'axe des ordonnées).

- Intersection d'une parabole d'équation $y = x^2$ et d'une droite de direction donnée.

III PARABOLE COMME ENVELOPPE D'UNE FAMILLE DE DROITES

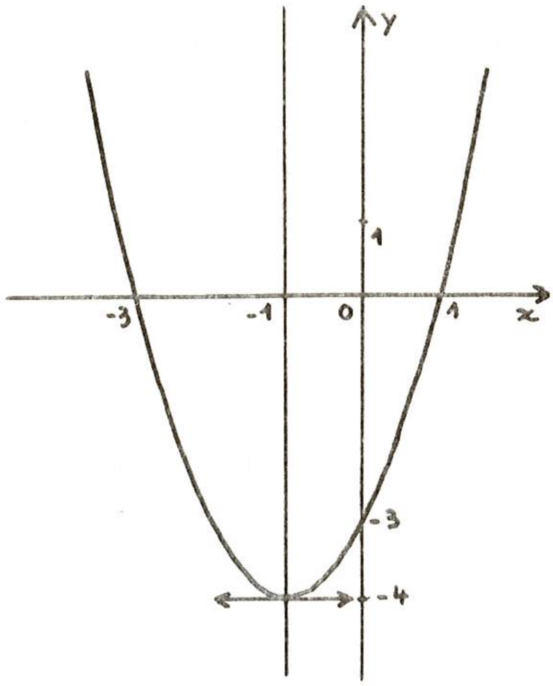
Pour différentes valeurs de m réel , tracé des droites correspondantes de la famille d'équation générale :

$$y = 2mx - m^2 \quad .$$



y
m = 3
m = 2
m = 1
m = 1/2
m = 1/4
1
0
1
m = 0
x

IV VERS L'ETUDE DES VARIATIONS D'UNE FONCTION



$f(x) = x^2 + 2x - 3$

Tracé point par point de la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.

■ 1) Pas de point d'ordonnée strictement inférieur à -4

En effet, soit l'inéquation $f(x) < -4$

Elle équivaut successivement à $x^2 + 2x - 3 < -4$

$x^2 + 2x + 1 < 0$

$(x + 1)^2 < 0$

et n'a donc pas de solution réelle.

■ 2) Symétrie d'axe d'équation $x = -1$

Comparaison des ordonnées des points d'abscisses $-1 + h$ et $-1 - h$ si h est un réel quelconque :

$f(-1 + h) = (-1 + h)^2 + 2(-1 + h) - 3$ $\qquad f(-1 + h) = h^2 - 4$

$f(-1 - h) = (-1 - h)^2 + 2(-1 - h) - 3$ $\qquad f(-1 - h) = h^2 - 4$

Ainsi, quel que soit le réel h, $f(-1 + h) = f(-1 - h)$. Conclusion.

■ 3) Croissance, décroissance

(De la gauche vers la droite),

"la courbe descend" : on dit que f est décroissante ;

"la courbe monte" : on dit que f est croissante.

Définition de la croissance stricte sur un intervalle

1 - Deux réels distincts quelconques ont leurs images rangées dans le même ordre qu'eux.

2 - x_1 et x_2 étant des réels distincts quelconques, si $x_2 < x_1$ alors $f(x_2) < f(x_1)$ et si $x_2 > x_1$ alors $f(x_2) > f(x_1)$.

3 - x_1 et x_2 étant des réels distincts quelconques, si $x_2 - x_1 < 0$ alors $f(x_2) - f(x_1) < 0$ et si $x_2 - x_1 > 0$ alors $f(x_2) - f(x_1) > 0$.

4 - Définition utilisant le taux d'accroissement.

Dans le présent exemple :

$$T(x_1\ ,\ x_2) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

$$T(x_1\ ,\ x_2) = \frac{(x_2^2 + 2x_2 - 3) - (x_1^2 + 2x_1 - 3)}{x_2 - x_1}$$

$$T(x_1\ ,\ x_2) = \frac{(x_2 + x_1)\ (x_2 - x_1) + 2(x_2 - x_1)}{x_2 - x_1}$$

$T(x_1\ ,\ x_2) = x_2 + x_1 + 2$ (On utilise l'hypothèse $x_1 \neq x_2$).

Conformément à l'observation menée sur le graphique :

1 - Si $x_1 < -1$ et $x_2 < -1$, alors $T(x_1\ ,\ x_2) < 0$ et f est strictement décroissante.

2 - Si $x_1 > -1$ et $x_2 > -1$, alors $T(x_1\ ,\ x_2) > 0$ et f est strictement croissante.

3 - Si x_1 et x_2 sont pris de part et d'autre de -1,...

4) Tableau des variations de f

Valeurs de x	↗	-1	↗
Valeurs de f(x)	↘	- 4	↗

V ETUDE AU VOISINAGE D'UN POINT

Etude de f ($f(x) = - x^2 + 6x - 5$) au voisinage de 2.

$f(2) = 3$.

On calculera f(x) pour x de 1,1 à 2,9 (pas : 0,1). Une calculatrice n'est pas utile. Les points correspondants sont placés dans le plan rapporté à un repère orthonormé (figure 1). La stricte croissance de f sur $[-\infty,3]$ démontrée par ailleurs, on en déduit que :

Si $x' < 2 < x''$ alors $f(x') < 3 < f(x'')$, x' et x" étant pris parmi les valeurs qui nous intéressent et, pourquoi, équidistantes de 2. On peut ainsi tracer, pour chaque couple de valeurs ((1,1 ; 2,9) ; (1,2 ; 2,8) ;...) un rectangle dans lequel on est certain de trouver la totalité de la représentation graphique de f sur l'intervalle concerné ([1,1 ; 2,9] ;...). On obtient la suite de rectangles emboîtés de la figure 2.

Le même raisonnement à propos de deux valeurs consécutives (1,1 et 1,2 ; 1,2 et 1,3 ;...) permet de construire la figure 3.

Il peut être intéressant de se servir d'un rétroprojecteur et de faire un montage des trois figures.

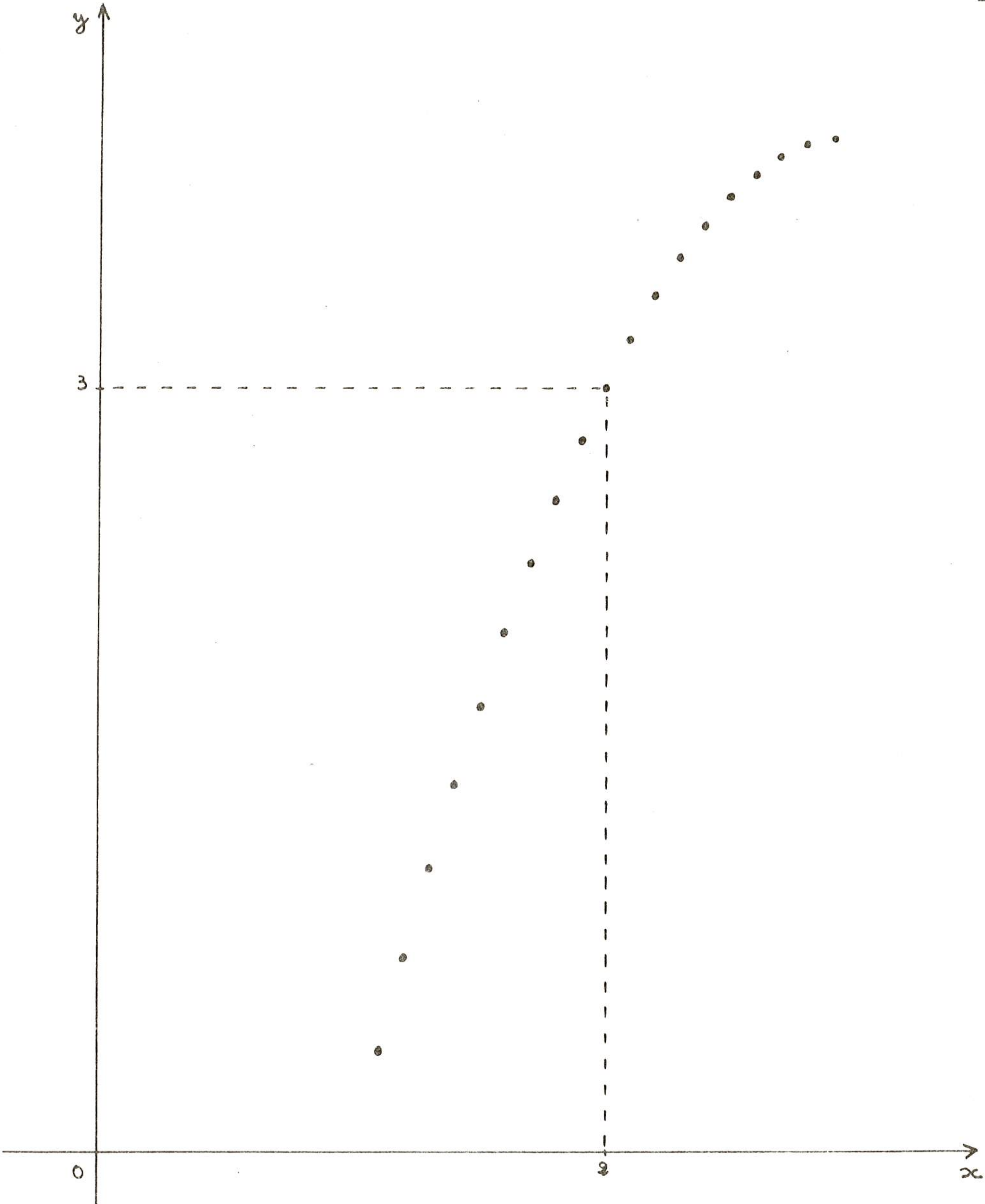


Figure 1

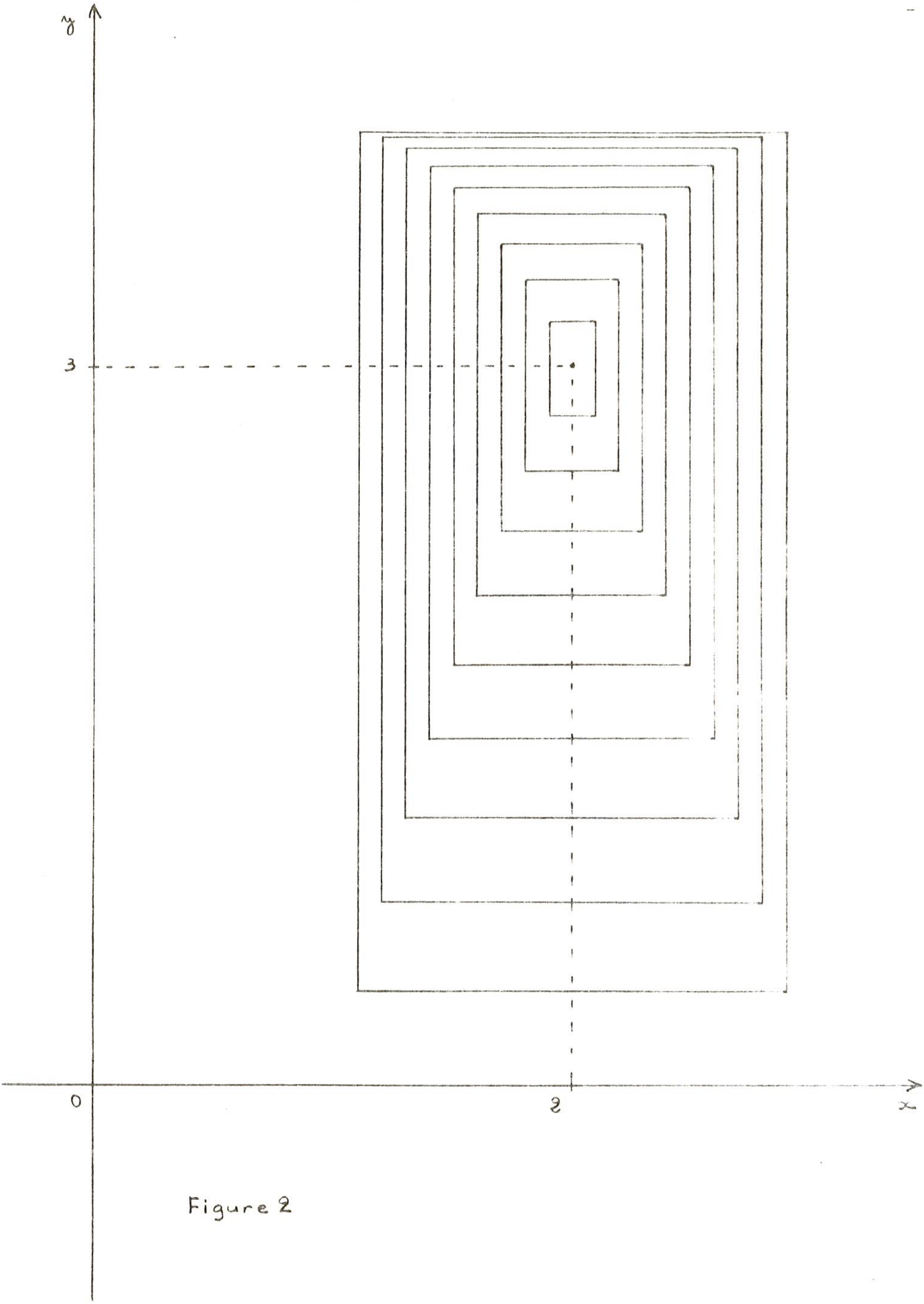


Figure 2

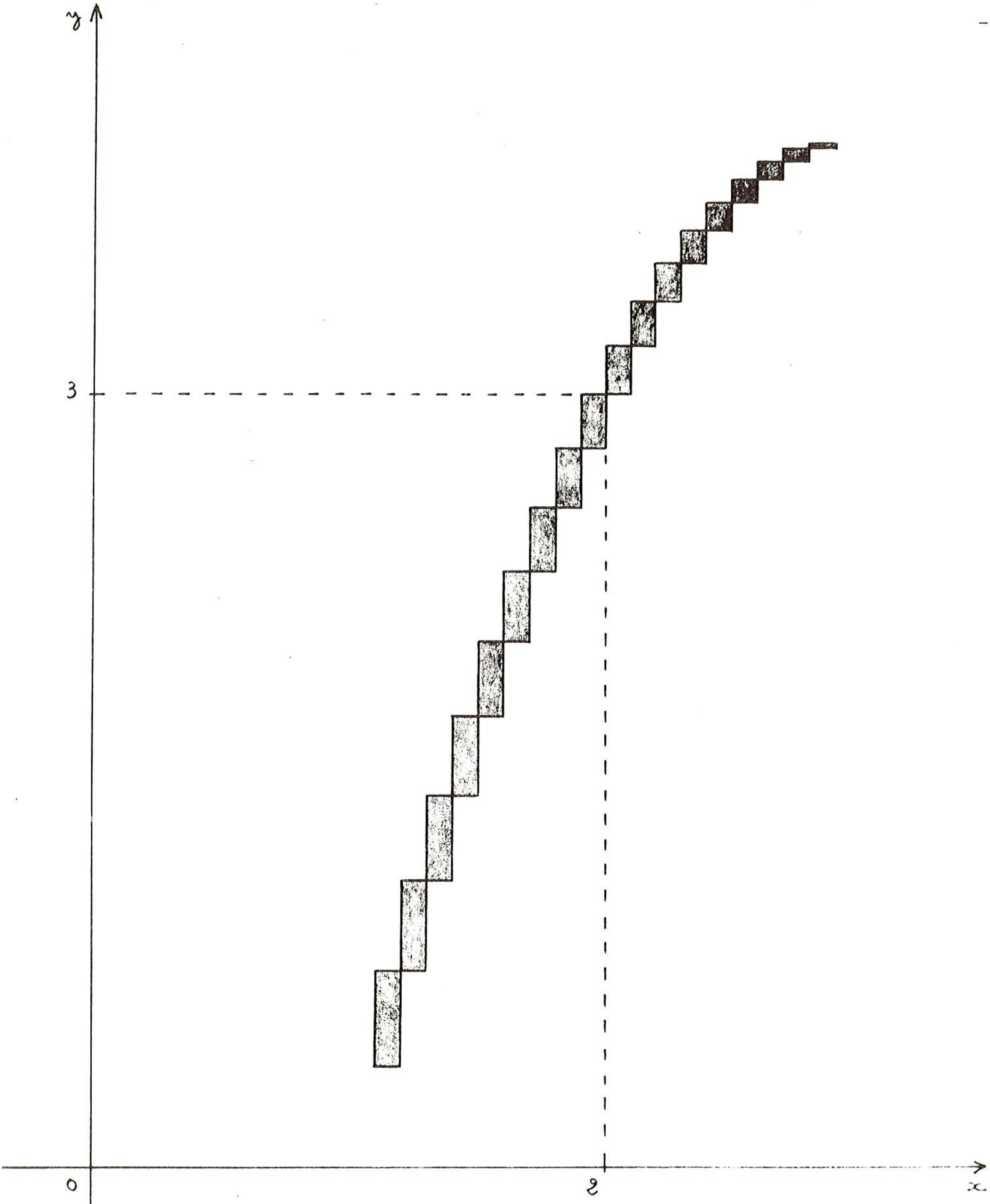


Figure 3