|  |
| --- |
| **CCF** |
| **BTS Systèmes numériques** **2ème année** |

**Exercice 1 :**

On considère le signal $e$, périodique de période $T=2 $défini par :

$e(t)=\left\{\begin{matrix} 1 si 0\leq t<1\\ 0 si 1\leq t<2\end{matrix}\right.$.

On souhaite étudier le spectre de $e$ à l'aide d'un échantillonnage et de sa transformée de Fourier discrète.

**Partie A : Étude du signal et discrétisation**

1. Tracer la représentation graphique de la fonction $e$, pour $t$ variant dans l'intervalle $[-3;5[$, dans le repère ci-dessous.



1. Considérons le nombre complexe $ω=e^{\frac{2iπ}{4}}$.

**a.** Simplifier $ω$.

**b.** Placer dans le plan complexe ci-dessous les points $A$, $B$, $C$, et $D $d'affixes respectives $1$, $ω$, $ω^{2}$ et $ω^{3}$.



1. On effectue $N=4$ mesures à une fréquence d'échantillonnage de $2$ Hz à partir de l'instant $t=0$.
	1. Donner la période d'échantillonnage.
	2. Donner les instants $t\_{0}$, $t\_{1}$, $t\_{2}$, $t\_{3}$ auxquels on effectue un échantillon.
	3. Donner les valeurs du signal correspondantes notées $x\_{0}$, $x\_{1}$, $x\_{2}$, $x\_{3}$, c'est-à-dire que pour tout $i$ de $0$ à $3$, on a $x\_{i}=e(t\_{i})$.

Appel Professeur

**Partie B : Transformée de Fourier discrète**

Pour obtenir une approximation du spectre, on utilise la transformée de Fourier discrète d’un échantillon $x$. Pour tout $l$ de $0$ à $3$, on note :

$$y\_{l}=\sum\_{k=0}^{3}x\_{k}ω^{-kl}.$$

1. On souhaite calculer les valeurs $y\_{0}$, $y\_{1}$, $y\_{2}$, $y\_{3}$ calculées à partir de l’échantillon de la partie précédente.
2. Écrire l'égalité définissant $y\_{0}$, $y\_{1}$, $y\_{2}$, $y\_{3}$ sous forme matricielle.
3. En déduire les valeurs de $y\_{0}$, $y\_{1}$, $y\_{2}$, $y\_{3}$.

Appel Professeur

1. Compléter le tableau ci-dessous et représenter dans le repère ci-dessous le spectre donné par les valeurs : $\frac{\left|y\_{0}\right|}{N}$, $\frac{|y\_{1}|}{N}$, $\frac{\left|y\_{2}\right|}{N}$, $\frac{\left|y\_{3}\right|}{N}$.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| $$\frac{\left|y\_{0}\right|}{N}$$ | $$\frac{|y\_{1}|}{N}$$ | $$\frac{\left|y\_{2}\right|}{N}$$ | $$\frac{\left|y\_{3}\right|}{N}$$ |
|  |  |  |  |



1. La précision précédente est insuffisante. Pour cela, on augmente le nombre d'échantillons sur une période. On prend $40$ mesures du signal. Un logiciel de calcul numérique nous permet d'obtenir les valeurs $y\_{0}$, $y\_{1}$, ..., $y\_{39}$. On donne l’extrait de programme Scilab suivant :



1. Dans le programme ci-dessus, quelles valeurs faut-il affecter à T et Ne ?
2. Le programme nous permet d'obtenir le graphique suivant :



Donner une approximation de l'amplitude des quatre premières fréquences.

1. Comparer avec les valeurs obtenues à la question 2. Que peut-on en déduire ?

**Exercice 2 :**

On considère le circuit représenté ci-dessous alimenté par une tension $e(t)$. On note $s(t)$ la tension aux bornes du condensateur.



L'équation différentielle régissant ce circuit s'écrit :

$$RCs^{'}\left(t\right)+s\left(t\right)=e\left(t\right) (E)$$

où la fonction inconnue $s$, de la variable $t$, est définie et dérivable sur $R$ et $s'$ est la fonction dérivée de $s$.

On se place dans le cas où $R=2Ω$ et $C=\frac{1}{2}$ F.

1. Écrire l'équation différentielle $(E)$ en utilisant les données précédentes.
2. On suppose que $e\left(t\right)=1$.
	1. Déterminer les solutions de l'équation différentielle $\left(E\_{0}\right) : s^{'}+s=0$.
	2. Soit $g$ la fonction définie sur $R$ par $g\left(t\right)=1$. Démontrer que $g$ est une solution particulière de $\left(E\right)$.
	3. En déduire toutes les solutions de $(E)$.
	4. Déterminer la solution $f$ de l'équation différentielle solution de $(E)$ vérifiant la condition initiale $f\left(0\right)=1$.
3. Si $e$ est la fonction de l'exercice 1, quel devrait être le graphique de la fonction $s$ sachant que $s\left(0\right)=1$ ?

|  |  |
| --- | --- |
| a) |  |
| b) |  |
| c) |  |

La réponse correcte est recopiée et le choix justifié sur la copie.

**Éléments de correction**

**Exercice 1 :**

**Partie A :**



Les segments sont fermés à gauche et ouverts à droite.

1. **a.** $ω=e^{i\frac{π}{2}}=i$.

**b.** Il faut placer les points $A(1,0)$, $B($0,1), $C(-1,0)$ et $D(0,-1)$.

1. **a.** On a $f=\frac{1}{T}$ donc $T\_{e}=\frac{1}{2}$.

**b.** $t\_{0}=0$, $t\_{1}=\frac{1}{2}$, $t\_{2}=1$, $t\_{3}=\frac{3}{2}$.

**c.** $x\_{0}=1$, $x\_{1}=1$, $x\_{2}=0$, $x\_{3}=0$.

**Partie B :**

On note $X=\left(\begin{matrix}x\_{0}\\\begin{matrix}x\_{1}\\\begin{matrix}x\_{2}\\x\_{3}\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}\right)$, $Y=\left(\begin{matrix}y\_{0}\\\begin{matrix}y\_{1}\\\begin{matrix}y\_{2}\\y\_{3}\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}\right)$ et $A=\left(ω^{-kl}\right)\_{0\leq k,l\leq 3}$.

1. **a.** On a $Y=AX$, où $A=\left(\begin{matrix}1&1&\begin{matrix}1&1\end{matrix}\\1&ω^{-1}&\begin{matrix}ω^{-2}&ω^{-3}\end{matrix}\\\begin{matrix}1\\1\end{matrix}&\begin{matrix}ω^{-2}\\ω^{-3}\end{matrix}&\begin{matrix}\begin{matrix}ω^{-4}\\ω^{-6}\end{matrix}&\begin{matrix}ω^{-6}\\ω^{-9}\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}\right)=\left(\begin{matrix}1&1&\begin{matrix}1&1\end{matrix}\\1&-i&\begin{matrix}-1&i\end{matrix}\\\begin{matrix}1\\1\end{matrix}&\begin{matrix}-1\\i\end{matrix}&\begin{matrix}\begin{matrix}1\\-1\end{matrix}&\begin{matrix}-1\\-i\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}\right)$ donc $Y=\left(\begin{matrix}2\\\begin{matrix}1-i\\\begin{matrix}0\\1+i\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}\right)$

**b.** $y\_{0}=2$, $y\_{1}=1-i$, $y\_{2}=0$, $y\_{3}=1+i$.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| $$\frac{\left|y\_{0}\right|}{N}$$ | $$\frac{|y\_{1}|}{N}$$ | $$\frac{\left|y\_{2}\right|}{N}$$ | $$\frac{\left|y\_{3}\right|}{N}$$ |
| $$\frac{1}{2}$$ | $$\frac{\sqrt{2}}{4}$$ | $$0$$ | $$\frac{\sqrt{2}}{4}$$ |

1. **a.** $T=2$, $N\_{e}=40$.

**b.** Graphiquement, on obtient les valeurs approchées

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Fréquences | $$0$$ | $$f$$ | $$2f$$ | $$3f$$ |
| Amplitudes | $$0,5$$ | $$0,32$$ | $$0$$ | $$0,32$$ |

**c.** L'amplitude pour $f$ est assez correcte mais il faut savoir que seule la première moitié du spectre approxime le spectre cherché ce qui explique la différence notable pour $3f$.

**Exercice 2 :**

1. On obtient l'équation différentielle : $s^{'}\left(t\right)+s\left(t\right)=e(t)$.
2. **a.** Les solutions sont données par : $u\left(t\right)=ke^{-t}$, $k\in R$.

**b.** $g\left(t\right)=1$ donc $g^{'}\left(t\right)=0$ et $g^{'}\left(t\right)+g\left(t\right)=1=e(t)$.

**c.** $s\left(t\right)=ke^{-t}+1$, $k\in R$.

**d.** $f\left(t\right)=1$.

1. Dans ce cas, le graphique de la fonction $s$ est le graphique a).Sur l'intervalle $[0;1[$, la fonction $e$ est égale à $1$ donc d'après la question 2.d. la fonction $s$ est constante et égale à $1$. Sur l'intervalle $[1;2[$, la fonction $e$ est constante et égale à $0$, donc d'après la question 2.a. la fonction $s$ est la fonction $t ⟼e^{-t}$ retardée de $1$.

|  |
| --- |
| **GRILLE NATIONALE D’ÉVALUATION EN MATHÉMATIQUES****BTS SN – Sous-épreuve E3** |
| NOM : | Prénom : |
| Situation d’évaluation n° | Date de l’évaluation : |
| **1. Liste des contenus et capacités du programme évalués** |
| Contenus | Transformée de Fourier discrète.Équations différentielles linéaires du premier ordre. |
| Capacités | Placer $ω^{k}$ pour $k$ variant de $0$ à $n-1$ sur le cercle unité.Calcul de la TFD à l'aide d'une matrice.Résoudre une équation différentielle de premier ordre à la main. |
| **2. Évaluation** |
| Compétences | Capacités | Questions de l’énoncé | Appréciation du niveau d’acquisition |
| **S’informer** | Rechercher, extraire et organiser l’information. | Ex1 : A 3, B 3Ex 2 : 1 2 |  |
| **Chercher** | Proposer une méthode de résolution.Expérimenter, tester, conjecturer. | Ex 2 : 2 |  |
| **Modéliser** | Représenter une situation ou des objets du monde réel.Traduire un problème en langage mathématique. | Ex 1 : A 1 2, B 2 |  |
| **Raisonner, argumenter** | Déduire, induire, justifier ou démontrer un résultat. Critiquer une démarche, un résultat. | Ex 1 : B3Ex 2 : 3 |  |
| **Calculer, illustrer, mettre en œuvre une stratégie** | Calculer, illustrer à la main ou à l’aide d’outils numériques, programmer. | Ex 1 A3, B1, B3Ex 2 : 2 |  |
| **Communiquer** | Rendre compte d’une démarche, d’un résultat, à l’oral ou à l’écrit.Présenter un tableau, une figure, une représentation graphique. | Ex 1 : A 1 2Ex 2 : 2 3 |  |
|  |  | **TOTAL** | **/10** |