**CCF BTS Systèmes numériques - première année**

**Exercice 1 :**

Cet exercice porte sur l’étude de la fonction de transfert $H$ d’un système, définie sur $R\_{+}$ par :

$$H\left(ω\right)=\frac{1+jω}{1+2jω}.$$

La variable réelle positive $ω$ est la pulsation (en rad/s) ; $j$ est le nombre complexe de module 1 et d’argument $\frac{π}{2}$.

Le plan complexe est muni d’un repère orthonormé $\left(O ; \vec{u}, \vec{v}\right)$ d’unité graphique 10 cm. Dans cet exercice, on va s’intéresser au diagramme de Nyquist, c’est à dire à la courbe représentative $Γ$ de $H$ dans le plan complexe, formée des points d’affixe $H\left(ω\right)$ lorsque $ω$ décrit $R\_{+}$.

1. On veut tracer $Γ$ avec Geogebra.
2. Créer un curseur $ω$ variant de 0 à 10 avec un pas de 0,01.
3. Tracer $Γ$. Quelle est la figure obtenue ?

***Appeler le professeur pour valider la courbe obtenue.***

1. Étude de $H\left(ω\right)$ :
2. Montrer que pour tout réel positif $ω$ :

$$H\left(ω\right)=\frac{1+2ω^{2}}{1+4ω^{2}}-j\frac{ω}{1+4ω^{2}}.$$

1. On note $f\left(ω\right)$ la partie réelle de $H\left(ω\right)$ et $g\left(ω\right)$ sa partie imaginaire. Donner l’expression puis justifier le signe de $f\left(ω\right)$ et de $g\left(ω\right)$.
2. Donner la limite en $+\infty $ de $f\left(ω\right)$ et de $g\left(ω\right)$.
3. Interpréter graphiquement ces résultats.

1. Étude de $Γ$ :
2. Montrer que $H\left(ω\right)-\frac{3}{4}=\frac{1 - 2jω}{4\left(1 + 2jω\right)}$.
3. En déduire $\left|H\left(ω\right)-\frac{3}{4}\right|$.
4. Interpréter géométriquement cette égalité.
5. Donner alors les caractéristiques de $Γ$ (forme, centre, rayon).
6. On note $ϕ\left(ω\right)$ l’argument de $H\left(ω\right)$ compris entre $–π$ et $π$ radians (ou entre $-180°$ et $180°$). Déterminer graphiquement le minimum de $ϕ\left(ω\right)$.

***Appeler le professeur pour valider le graphique.***

**Exercice 2 :**

*Les questions 1 et 2 sont indépendantes.*

Une usine fabrique des tiges métalliques.

On donnera pour chaque résultat la valeur approchée arrondie à $10^{-3}$.

1. On prélève une pièce dans la production d’une journée. On suppose que la probabilité qu’une tige soit défectueuse est 0,1. On note $X$ la variable aléatoire qui, à tout échantillon de 50 tiges prélevé au hasard avec remise, associe le nombre de tiges défectueuses parmi les 50.
2. Déterminer la loi de probabilité suivie par $X$ *(justifier)* et préciser ses paramètres.

***Appeler le professeur pour valider la réponse.***

1. Déterminer, pour un tel échantillon, la probabilité de n’avoir aucune tige défectueuse.
2. Déterminer, pour un tel échantillon, la probabilité d’avoir au moins 5 tiges défectueuses.
3. On considère la variable aléatoire $Y$ qui, à toute tige de la production, associe sa longueur. On admet que $Y$ suit la loi normale de moyenne $m=80$ et d’écart-type $σ=2,5$. On choisit une pièce au hasard.
4. Une pièce est conforme si sa longueur est comprise entre $77,5$ et $82,5$.

Quelle est la probabilité que la pièce choisie soit conforme ?

1. Une pièce est acceptée si sa longueur est supérieure à $77$.

Quelle est la probabilité que la pièce choisie soit acceptée ?

1. Une pièce est acceptée. Quelle est la probabilité qu’elle soit conforme ?

**Indications de correction**

**Exercice 1 :**

1. On obtient un demi-cercle (voir ci-dessous).
2. Étude de $H\left(ω\right)$ :

|  |  |
| --- | --- |
|  | $H\left(ω\right)=\frac{\left(1 + jω\right)\left(1 - 2jω\right)}{\left(1 + 2jω\right)\left(1 - 2jω\right)}=\frac{1 + 2ω^{2}}{1 + 4ω^{2}}-j\frac{ω}{1 + 4ω^{2}}$. |
|  | $f\left(ω\right)=\frac{1 + 2ω^{2}}{1 + 4ω^{2}}>0$ sur $R\_{+}$ et $g\left(ω\right)=-\frac{ω}{1 + 4ω^{2}}<0$ sur $R\_{+}$. |
|  | $$\lim\_{ω \to +\infty }f\left(ω\right)=0,5 et \lim\_{ω \to +\infty }g\left(ω\right)=0.$$ |
|  | Lorsque $ω$ tend vers $+\infty $ la courbe se rapproche du point $\left(0,5 ;0\right)$. |

1. Étude de $Γ$ :

|  |  |
| --- | --- |
|  | $$H\left(ω\right)-\frac{3}{4}=\frac{4\left(1+jω\right)}{4\left(1+2jω\right)}-\frac{3\left(1+2jω\right)}{4\left(1+2jω\right)}=\frac{1-2jω}{4\left(1+2jω\right)}.$$ |
|  | $$\left|H\left(ω\right)-\frac{3}{4}\right|=\frac{\left|1-2jω\right|}{4\left|1+2jω\right|}=\frac{1}{4}.$$ |
|  | Pour tout réel positif $ω$ la distance entre le point d’affixe $H\left(ω\right)$ et le point $\left(0,75 ;0\right)$ vaut $0,25$. |
|  | Dans le repère $\left(O ; \vec{u}, \vec{v}\right)$, $Γ$ est le demi-cercle inférieur de centre $\left(0,75 ;0\right)$ et de rayon $0,25$. |

1. $ϕ\left(ω\right)$ vaut environ $19,5°$ dans le sens indirect, ou $-0,34$ radians.



**Exercice 2 :**

|  |  |
| --- | --- |
|  | 1. Dans un échantillon de 50 pièces, un succès est une pièce défectueuse et la probabilité de succès est 0,1. $X$ compte le nombre de succès en répétant 50 fois indépendamment le tirage d’une pièce, donc $X$ suit la loi binomiale $B\left(50 ;0,1\right)$.
2. $P\left(X=0\right)≈0,005$.
3. $P\left(X\geq 5\right)≈0,569$.
 |
|  | On note $C$ l’événement « la pièce choisie est conforme » et $A$ l’événement « la pièce choisie est acceptée ».1. $P\left(C\right)=P\left(77,5<Y<82,5\right)≈0,687$.
2. $P\left(A\right)=P\left(Y>77\right)≈0,885$.
3. $P\_{A}\left(C\right)=\frac{P\left(A ∩ C\right)}{P\left(A\right)}=\frac{P\left(C\right)}{P\left(A\right)}≈0,776$.
 |

|  |
| --- |
| **GRILLE NATIONALE D’ÉVALUATION EN MATHÉMATIQUES****BTS SN – Sous-épreuve E31** |
| NOM : | Prénom : |
| Situation d’évaluation n°1 | Date de l’évaluation :  |
| **1. Liste des contenus et capacités du programme évalués** |
| Contenus : Forme algébrique et représentation graphique d’un nombre complexe ; transformations ; module et argument d’un nombre complexe non nul ; ensemble des nombres complexes dont l’affixe $z$ vérifie $\left|z-a\right|=k$.Fonctions de référence ; limites de fonctions.Exemple de loi discrète ; exemple de loi à densité ; conditionnement. |
| Capacités : Effectuer des calculs algébriques avec des nombres complexes, représenter un nombre complexe par un point ; déterminer un ensemble de points dont l’affixe $z$ vérifie $\left|z-a\right|=k$ ; représenter, à l’aide d’un logiciel de géométrie dynamique, l’image d’une partie de droite par une transformation géométrique.Signe de fonctions de référence ; interpréter une représentation graphique en termes de limite ; déterminer le limite d’une fonction simple.Reconnaître et justifier qu’une situation relève de la loi binomiale ; calculer une probabilité dans le cadre de la loi binomiale à l’aide de la calculatrice ou d’un logiciel ; utiliser la calculatrice ou un tableur pour calculer une probabilité dans le cadre de la loi normale ; déterminer des probabilités. |
| **2. Évaluation** |
|  |  | Questions de l’énoncé | Appréciation du niveau d’acquisition |
| **S'informer** | Rechercher, extraire et organiser l’information. | Ex. I : 1. 4.Ex. II : 1. 2. |  |
| **Chercher** | Proposer une méthode de résolution.Expérimenter, tester, conjecturer. | Ex. I : 1. 4. |  |
| **Modéliser** | Représenter une situation ou des objets du monde réel.Traduire un problème en langage mathématique. | Ex. I : 1. 2. 3. 4.Ex. II : 1. 2. |  |
| **Raisonner, argumenter** | Déduire, induire, justifier ou démontrer un résultat. Critiquer une démarche, un résultat. | Ex. I : 2. 3. 4.Ex. II : 1. 2. |  |
| **Calculer, illustrer,****mettre en œuvre****une stratégie** | Calculer, illustrer à la main ou à l’aide d’outils numériques, programmer. | Ex. I : 1. 2. 3. 4.Ex. II : 1. 2. |  |
| **Communiquer** | Rendre compte d’une démarche, d’un résultat, à l’oral ou à l’écrit.Présenter un tableau, une figure, une représentation graphique. | Ex. I : 1. 2. 3. 4.Ex. II : 1. 2. |  |
|  |  | **TOTAL** | **/ 10** |